



MINISTÉRIO DA HABITAÇÃO E OBRAS PÚBLICAS

Laboratório Nacional de Engenharia Civil

SOBRE A PROPAGAÇÃO DAS ONDAS DO
MAR EM REGIÕES COSTEIRAS
ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Lisboa, Abril de 1982

Artur Portela
Tese apresentada ao concurso para especialista do
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

MINISTÉRIO DA HABITAÇÃO, OBRAS PÚBLICAS E TRANSPORTES
LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA

NÚCLEO DE ESTUÁRIOS

Procº 63/11/7445

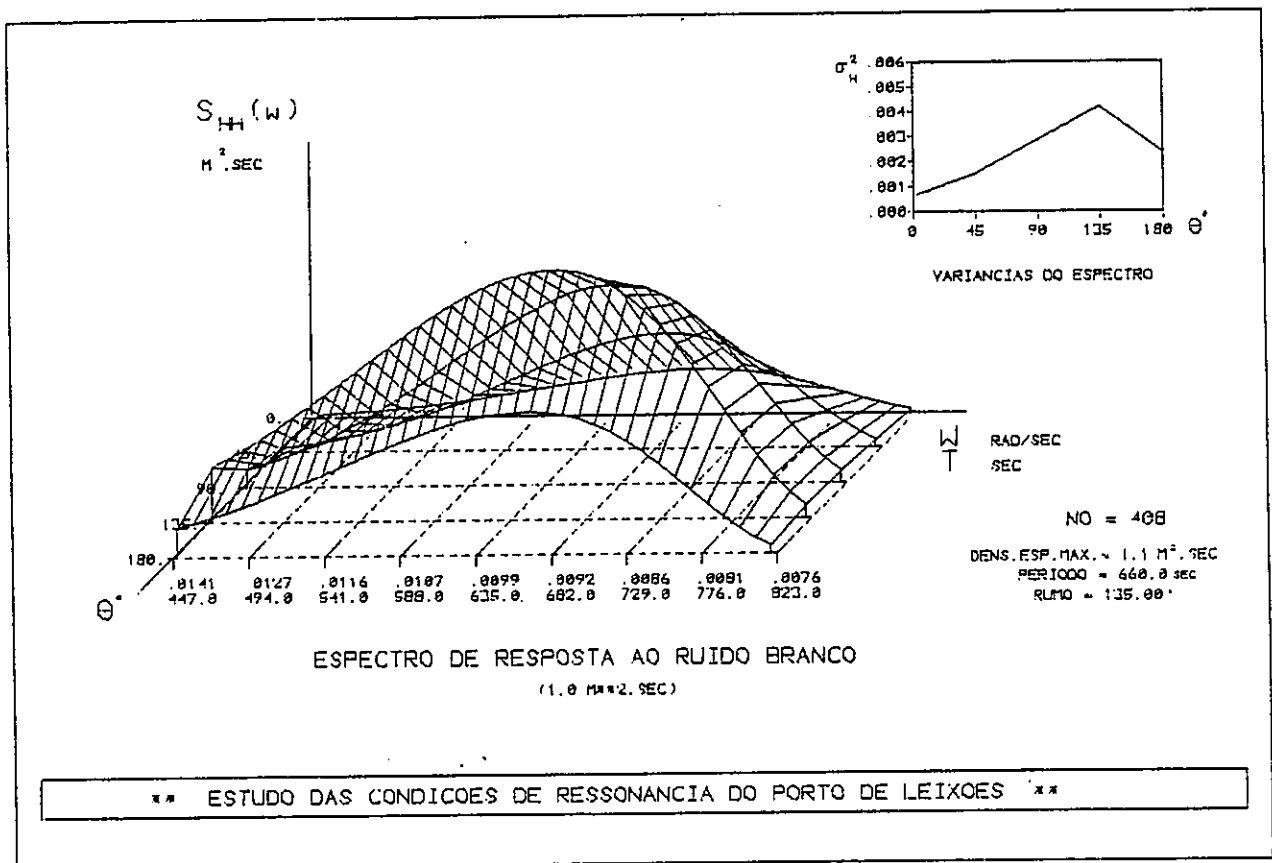
Obra 64/53/367

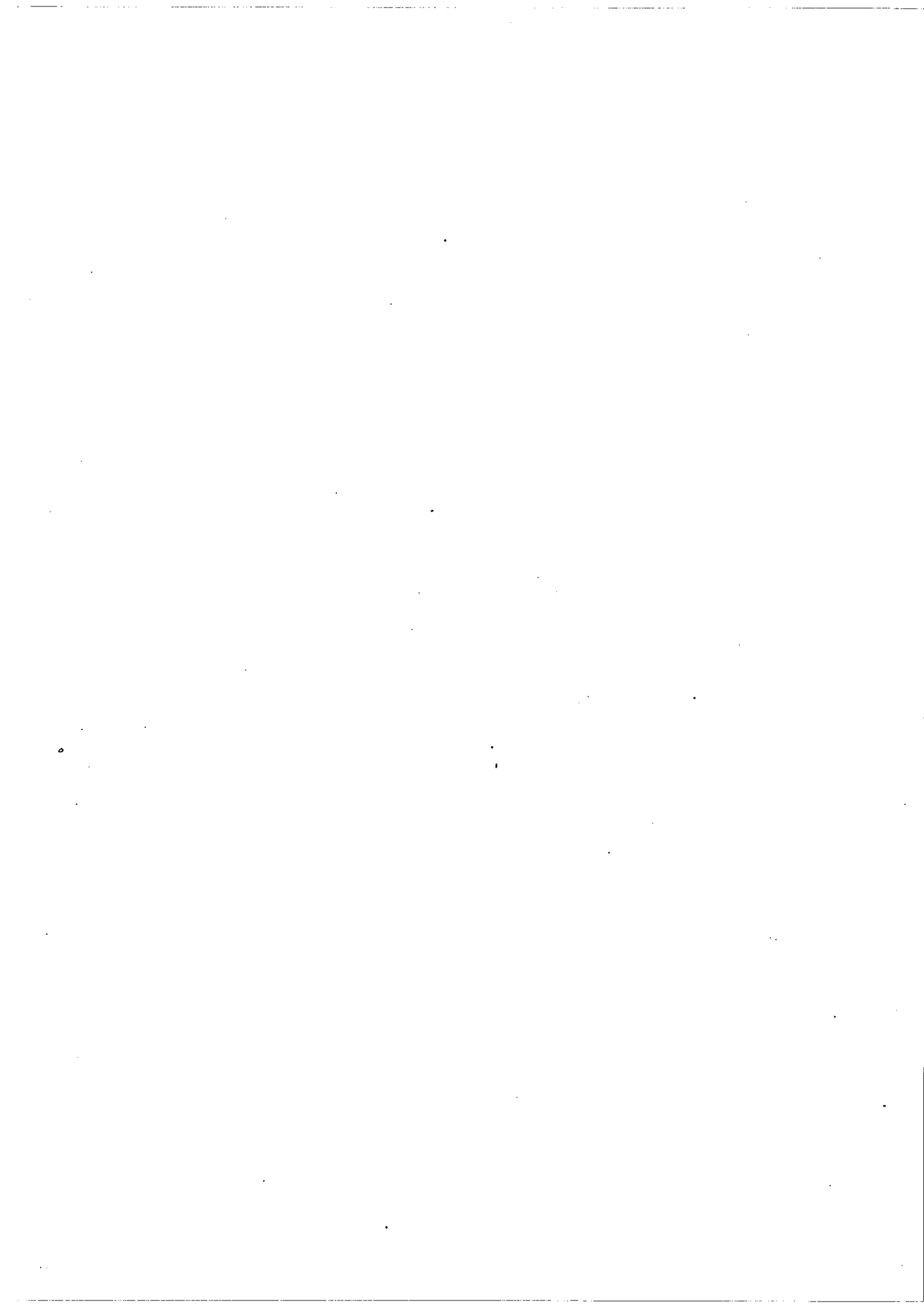
SOBRE A PROPAGAÇÃO DAS ONDAS DO MAR EM REGIÕES COSTEIRAS
ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Artur Portela

*Tese apresentada a concurso para especialista do
Laboratório Nacional de Engenharia Civil*

Lisboa, Abril de 1982





DEDICATÓRIA

À Juju,
por razões que não interessa expor aqui.

Aos colegas Vieira e Barcelô,
pelo seu entusiasmo, perseverança e tenacidade no dia a dia.



PREFÁCIO

O presente trabalho pretende satisfazer os requisitos exigidos pelo nº 1 do artº 1º do Decreto Regulamentar nº 72/77, mediante o qual o candidato à obtenção do grau de especialista do LNEC se obriga a apresentar um trabalho de investigação aplicada, com vista à resolução de um problema concreto na área da sua especialização, permitindo assim o julgamento das suas aptidões para a investigação.

AGRADECIMENTOS

Tendo em conta que só os meios postos à minha disposição pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil (dos quais destaco a excelente Biblioteca, a participação em reuniões internacionais e as enormes facilidades nos meios de computação) tornaram possível esta tese, quero exprimir a minha gratidão ao senhor Engenheiro Director Júlio Ferry Borges.

Aos chefes Fernando Abecasis e Júlio Barcelo agradeço os seus estímulos e confiança no planeamento e execução do meu trabalho.

Ao Dr. Carlos Brebbia dirijo um agradecimento especial, pelos contactos internacionais e apoio que me proporcionou.

Lembrando as frequentes trocas de impressões de carácter científico, dirijo um agradecimento especial aos colegas Marcos Rita e Rodrigues Vieira.

Finalmente, a todos quantos colaboraram neste trabalho formulo o mais profundo agradecimento, em particular à D. Maria Laurinda, a D. Maria Helena e ao sr. Coimbra.



RESUMO

O principal objectivo desta tese é mostrar a habilidade dos métodos dos elementos finitos e do método dos elementos de fronteira na modelação das ondas gravíticas de superfície.

Na análise linear, as equações reduzidas do movimento ondulatório são resolvidas pelo método dos elementos finitos, levando em linha de conta a reflexão parcial, a radiação e o atrito de fundo. A modelação da radiação é feita com elementos infinitos ou com elementos de radiação, sendo estes encarados como um caso particular dos elementos de reflexão. O atrito de fundo é introduzido após a discretização e é levado a efeito através de um coeficiente empírico que se pode relacionar com o coeficiente de Chèzy.

Quer o modelo determinístico quer o modelo estocástico, obtido do primeiro com base na noção do estimador natural, permitem a realização de ensaios de ressonância ou de agitação. Nos ensaios de ressonância de uma bacia portuária tem particular interesse o conhecimento do espectro de resposta ao ruído branco de banda limitada.

A título de exemplo de aplicação mostram-se alguns aspectos do estudo das condições de ressonância do porto de Leixões.

Logo que não sejam válidas as hipóteses simplificativas que permitem uma abordagem linear das ondas gravíticas de superfície, são resolvidas as equações não lineares do movimento ondulatório com superfície livre, pelo método dos elementos de fronteira. As suas peculiaridades permitem, sem qualquer dúvida, considerar o método dos elementos de fronteira como o mais vocacionado para este tipo de análise.

Os programas de cálculo automático para o estudo da análise não linear estão ainda em fase de teste, pelo que não se apresentam exemplos de aplicação.



ON THE WAVE PROPAGATION IN COASTAL REGIONS

THE FINITE ELEMENT ANALYSIS

The main objective of the present thesis is to show the ability of the finite element and boundary element methods to model gravity water waves.

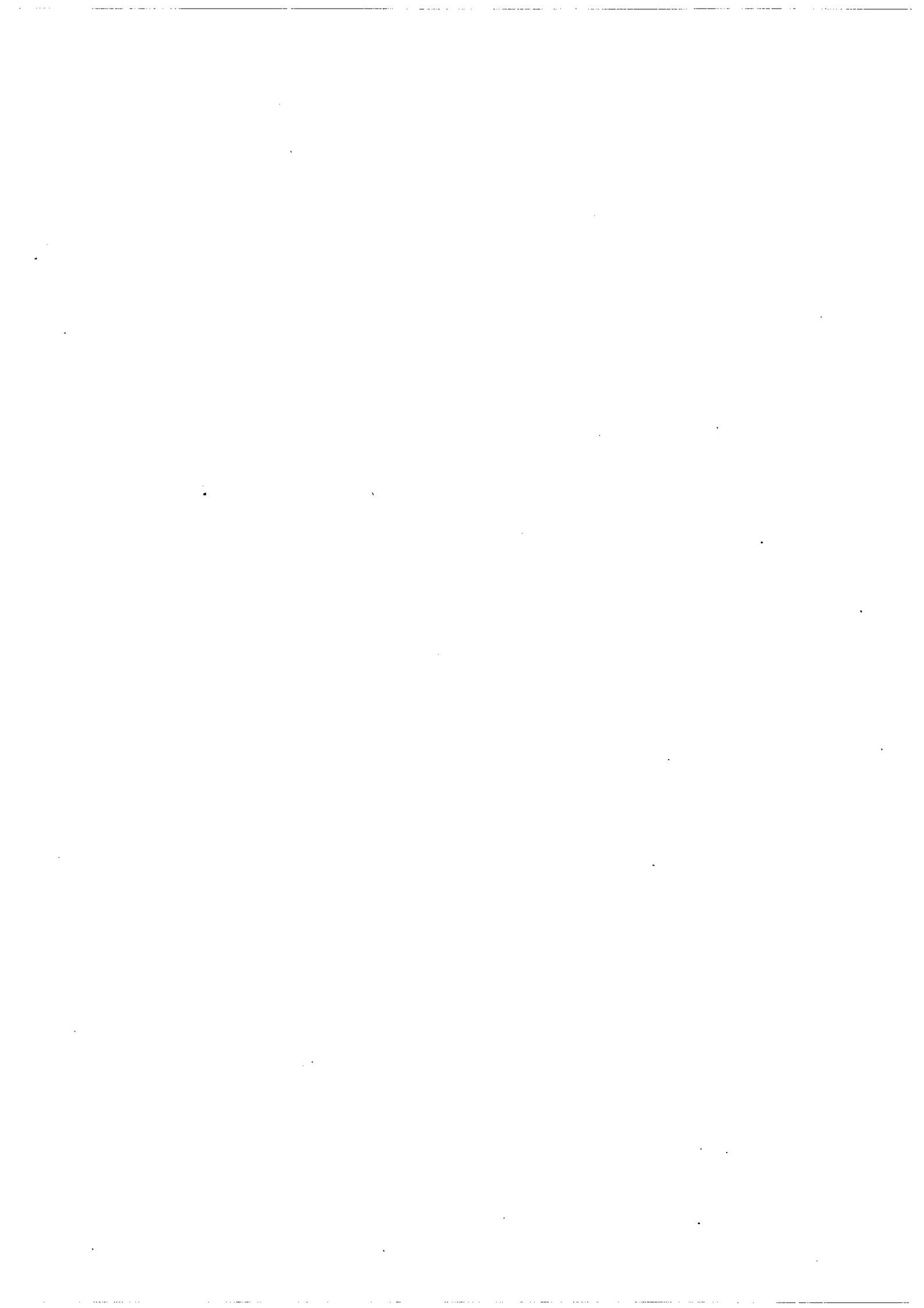
In linear analysis, the reduced wave equation is solved by the finite element method, with partial reflection, radiation and bottom stress. The radiation condition is modeled with infinite elements or with damper elements which are a special case of the elements used to model the reflection. The bottom stress is introduced after discretization by an empirical coefficient related to the Chézy coefficient.

Both the deterministic and the stochastic models, the latter based on the rough estimator, are well suited for resonance or disturbance studies.

To exemplify the application of the computer program, some aspects of the study of the resonance conditions of the Leixões harbor are shown.

When the linear analysis is not permitted, the non linear wave equations are solved by the boundary element method which is the best for this type of analysis.

Non linear analysis computer programs are not ready at the moment. So, examples are not presented.



ÍNDICE DO TEXTO

	Pág.
DEDICATÓRIA -----	III
PREFÁCIO -----	V
AGRADECIMENTOS -----	VII
RESUMO -----	IX
SYNOPSIS -----	XI

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Motivação -----	1
1.2 - Organização -----	1

CAPÍTULO 2

GENERALIDADES SOBRE OS FENÓMENOS DE HIDRÁULICA MARÍTIMA EM REGIÕES COSTEIRAS

2.1 - INTRODUÇÃO -----	3
2.2 - Definições e Conceitos Básicos -----	4
2.3 - Ondas de Curto Período -----	6
2.4 - Ondas de Longo Período -----	14
2.5 - Marés -----	15
2.6 - Classificação das Ondas -----	18
2.6.1 - Pela Altura de Onda -----	18
2.6.2 - Pela Profundidade -----	19
2.6.3 - Pela Altura, Comprimento de Onda e Profundidade -----	19

CAPÍTULO 3

CONCEITOS E PRINCÍPIOS BÁSICOS DE HIDRODINÂMICA

	Pag.
3.1 - Generalidades -----	22
3.2 - Equações Básicas da Hidrodinâmica -----	22
3.2.1 - Equação da Continuidade ou de Conservação da Massa -----	23
3.2.2 - Equações do Movimento ou da Conservação da Quantidade de Movimento -----	24
3.3 - Movimento Potencial -----	28
3.3.1 - Generalidades -----	28
3.3.2 - Função Potencial de Velocidades -----	28
3.3.3 - Equações do Movimento Potencial -----	29
3.3.4 - Validade Prática do Movimento Potencial -----	31
3.4 - Condições de Fronteira -----	35
3.4.1 - Condições de Fronteira na Superfície Livre -----	35
3.4.1.1 - Condição Cinemática -----	35
3.4.1.2 - Condição Dinâmica -----	36
3.4.2 - Condições de Fronteira no Fundo -----	37
3.4.3 - Condição de Fronteira na Direcção Horizontal -----	38
3.4.3.1 - Condição de Periodicidade -----	38
3.4.3.2 - Condição de Reflexão -----	38
3.4.4 - Considerações Finais -----	39

CAPÍTULO 4

ANÁLISE LINEAR DO MOVIMENTO ONDULATÓRIO

4.1 - Generalidades -----	41
4.2 - Método de Análise -----	42
4.2.1 - Generalidades -----	42

	Pág.
4.2.2 - Análise Determinística -----	43
4.2.2.1 - Teoria das Ondas de Pequena Amplitude -----	43
4.2.2.1.1 - Hipóteses Simplificativas -----	43
4.2.2.1.2 - Profundidade Constante. Resolução das Equações do Movimento Ondulatório -----	49
4.2.2.1.2.1 - Função Potencial -----	53
4.2.2.1.2.2 - Dispersão de Frequências -----	54
4.2.2.1.2.3 - Elevação da Superfície Livre -----	55
4.2.2.1.2.4 - Campo de Velocidades -----	55
4.2.2.1.2.5 - Campo de Pressões -----	56
4.2.2.1.2.6 - Velocidade do Grupo. Formulação Cinemática -----	57
4.2.2.1.2.7 - Energia do Movimento Ondulatório -----	64
4.2.2.1.3 - Profundidade Variável. Equação Reduzida das Ondas de Pequena Amplitude -----	70
4.2.2.1.3.1 - Propriedades da Equação Reduzida das Ondas de Pequena Amplitude -----	76
4.2.2.1.3.2 - Função Potencial da Onda -----	83
4.2.2.1.3.3 - Condições de Fronteira -----	86
4.2.2.1.3.3.1 - A Condição de Radiação -----	86
4.2.2.1.3.3.2 - A Condição de Reflexão Parcial -----	95
4.2.2.2 - Problemas Relacionados com a Agitação Marítima -----	99
4.2.2.3 - Problemas Relacionados com a Ressonância de Regiões Confinadas-----	99
4.2.2.3.1 - Generalidades sobre o Fenómeno da Ressonância-----	99
4.2.2.3.2 - Generalidades Sobre o Movimento Ondulatório Estacionário-----	100
4.2.2.3.3 - O Fenómeno da Ressonância -----	103
4.2.2.3.4 - Nota Final -----	105
4.2.2.4 - Análise pelo Método dos Elementos Finitos -----	106
4.2.2.4.1 - Generalidades -----	106
4.2.2.4.1.1 - Formulação Residual -----	107

	Pag.
4.2.2.4.3 - Modelo de Cálculo com Elementos de Radiação -----	110
4.2.2.4.4 - Modelo de Cálculo em Elementos Infinitos -----	114
4.2.2.4.5 - O Atrito de Fundo -----	122
4.2.2.5 - Tópicos Sobre o Problema da Iteração Fluido-Estrutura-----	124
4.2.3 - Modelo Estocástico -----	126
4.2.4 - Aspectos Computacionais do Programa de Cálculo Automático-----	131
4.2.4.1 - Estrutura do Modelo -----	131
4.2.4.2 - Programação -----	132
4.2.4.3 - Matrizes dos Elementos Finitos -----	134
4.2.4.4 - Matrizes Globais-----	137
4.2.4.6 - Velocidades e Deslocamentos Horizontais -----	140
4.2.5 - Exemplo de Aplicação -----	140

CAPÍTULO 5

ANÁLISE NÃO LINEAR DO MOVIMENTO ONDULATÓRIO

5.1 - Generalidades-----	169
5.2 - Solução Permanente-----	171
5.2.1 - Primeira Iteração-----	173
5.2.2 - Iterações Seguintes -----	174
5.3 - Solução Transitória-----	175
5.3.1 - Primeira Extrapolação-----	175
5.3.2 - Extrapolações Sucessivas -----	175
5.4 - Nota Final -----	176

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 - Conclusões do Estudo -----	177
6.2 - Estudos Futuros -----	177
BIBLIOGRAFIA -----	179

ÍNDICE DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO 1 - TÓPICOS SOBRE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS -----	A1.1
1.1 - Generalidades -----	A1.1
1.2 - Conceitos Básicos-----	A1.1
1.2.1 - Processos Estocásticos -----	A1.1
1.2.2 - Funções de Probabilidade -----	A1.1
1.2.3 - Momentos do Processo Estocástico -----	A1.6
1.3 - Processos Estocásticos Estacionários e Ergódicos -----	A1.7
1.4 - Estatísticas do Processo Estocástico -----	A.17
1.4.1 - Generalidades -----	A.17
1.4.2 - Valor Médio -----	A1.9
1.4.3 - Valor Médio Quadrático -----	A1.10
1.4.4 - Variância -----	A1.11
1.5 - Descrição do Processo Estocástico no Domínio do Tempo -----	A1.12
1.5.1 - Generalidades -----	A1.12
1.5.2 - Funções de Correlação -----	A1.12
1.6 - Descrição do Processo Estocástico no Domínio da Frequência -----	A1.14
1.6.1 - Generalidades -----	A1.14
1.6.2 - Análise de Fourier -----	A1.15
1.6.3 - Função Densidade Espectral -----	A1.18
1.6.4 - As relações de Weiner - Khinchin -----	A1.20
1.7 - Fórmulas de Derivação de Processos Estocásticos -----	A1.23
1.8 - Combinação de Processos Estocásticos -----	A1.24
1.9 - Momentos Espectrais -----	A1.24
1.10 - Processos Estocásticos de Banda Estreita -----	A1.25
1.11 - Processos Estocásticos de Banda Larga -----	A1.26
1.12 - O Espectro Direccional na Agitação Marítima -----	A1.27

	Pág.
ANEXO 2 - COMPOSIÇÃO VECTORIAL DE ONDAS DE PEQUENA AMPLITUDE	A2.31
2.1 - Representação Vectorial -----	A2.31
2.2 - Composição -----	A2.32
ANEXO 3 - FOLHAS DE DADOS -----	A2.37
3.1 - Preenchimento de Dados -----	A3.37

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Motivação

O impacto da moderna tecnologia matemática dos elementos finitos e dos elementos de fronteira veio abrir novas perspectivas na modelação dos fenómenos que interessam à engenharia.

Particularmente no LNEC, no âmbito da hidráulica marítima, assiste-se neste momento ao nascer de uma nova época com a aplicação da referida tecnologia na modelação matemática e na modelação híbrida interactiva em tempo real, Portela e Vieira (1982).

Até há relativamente pouco tempo, a investigação na hidráulica marítima era fundamentalmente baseada na modelação física, ou em modelos matemáticos de diferenças finitas, Covas (1976). O incremento das facilidades computacionais a que se tem assistido no LNEC deu origem à popularização do método dos elementos finitos e do método dos elementos de fronteira. A primeira aplicação da técnica dos elementos finitos no Departamento de Hidráulica ocorreu em 1979 com a modelação matemática das oscilações de longo período em bacias portuárias, Portela (1979). Esta técnica de modelação mostrou-se efectiva, e de imediato foi melhorada com a incorporação de novas condições de fronteira e com a implementação das mais modernas técnicas numéricas de análise do método dos elementos finitos, Bathe e Wilson (1976), dando assim origem ao programa de cálculo automático que suporta o presente trabalho, programa esse que está disponível desde 1980.

1.2 - Organização

O presente trabalho está organizado em 5 capítulos e 3 anexos.

No primeiro capítulo é feita a introdução do trabalho, referindo-se a motivação e organização do mesmo.

No segundo capítulo apresentam-se algumas generalidades sobre os fenóme

nos de hidráulica marítima em regiões costeiras, com o objectivo de situar o problema em estudo.

No terceiro capítulo introduzem-se os conceitos e princípios básicos de hidrodinâmica necessários à formulação matemática do movimento ondulatório.

No quarto capítulo é feita uma análise linear do movimento ondulatório. Na via determinística começa-se por abordar a teoria das ondas de pequena amplitude sobre profundidade constante para, em seguida, se apresentar a equação reduzida do movimento ondulatório, que vai permitir o estudo da difo-refracção de ondas planas em domínios arbitrários de profundidade variável. A introdução da técnica dos elementos finitos é feita com base no método dos resíduos pesados. Seguidamente, apresenta-se o modelo estocástico, baseado numa função de transferência fornecida pelos elementos finitos, após o que se tecem considerações sobre alguns dos principais aspectos computacionais do modelo de cálculo automático. No final do quarto capítulo, sob o título de exemplos de aplicação, são apresentados alguns aspectos do estudo das condições de ressonância do porto de Leixões.

No quinto capítulo é feita uma abordagem não linear do movimento ondulatório com base no método dos elementos de fronteira, método este que se revela aqui como o mais potente de todos os métodos numéricos.

Finalmente, no sexto e último capítulo são feitas as considerações finais do presente trabalho.

No primeiro anexo apresentam-se alguns tópicos sobre processos estocásticos.

No segundo anexo aborda-se a composição vectorial de ondas sinusoidais.

Por último, no terceiro anexo, apresentam-se as convenções para a preparação de dados para o programa de cálculo automático.

2 - GENERALIDADES SOBRE OS FENÓMENOS DE HIDRÁULICA MARÍTIMA NAS REGIÕES COSTEIRAS

2.1 - Introdução

Deve entender-se aqui por regiões costeiras as áreas limitadas pelo talude continental, no sentido de terra para o oceano, e, no sentido do oceano para terra pela região da costa, limite superior da acção directa do mar.

Não se pretende fazer uma referência ou descrição exhaustiva dos fenómenos de hidráulica marítima que ocorrem nas regiões costeiras. Antes, porém, far-se-á apenas uma breve introdução aos principais fenómenos que têm lugar em tais regiões e que se prendem directamente com as variações do nível do mar. .

Uma primeira classificação global de tais fenómenos, necessariamente mais descritiva do que analítica, assenta no respectivo período ou escala de tempo. Assim, as variações do nível do mar podem classificar-se em ondas de curto período, ondas de longo período e marés, quer de origem astronómica quer de origem meteorológica, conforme mostra a figura 2.1.1.

Nome	Período ou Escala de Tempo (*)	Exemplos
Ondas de Curto Período	$T < 30S$	Vagas, Ondulações
Ondas de Longo Período	$30S < T < \text{algumas horas}$	Ondas sísmicas, Batimentos
Marés	$T > \text{algumas horas}$	Ondas de maré, Storm Surge

Fig. 2.1.1 - Classificação das variações do nível do mar com base no período ou escala de tempo.

(*) Os valores indicados são, evidentemente, imprecisos.

2.2 - Definições e Conceitos Básicos

Entenda-se por onda gravítica de superfície uma variação ou perturbação do nível do mar, em que a acção da gravidade desempenha o papel preponderante como campo de forças para a sua propagação.

Uma onda gravítica de superfície de perfil constante que se propaga sobre um fundo horizontal fica completamente definida por três parâmetros. São eles: a altura de onda H , o comprimento de onda L e a profundidade da água h medida desde o fundo até ao nível médio de repouso (NMR), no plano vertical, como mostra a figura 2.2.1.

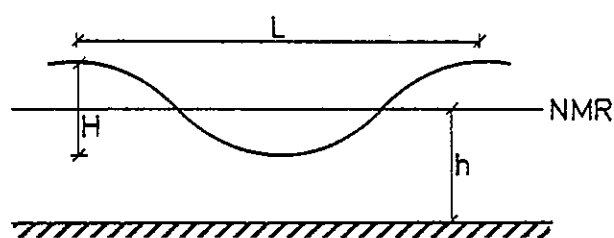


Fig. 2.2.1 - Parâmetros da onda

O NMR é definido de tal modo que a área sob a crista da onda é igual à área sobre a cava da onda. Cava e crista designam também, respectivamente, o mínimo e o máximo do perfil da onda, como mostra a figura 2.2.2.

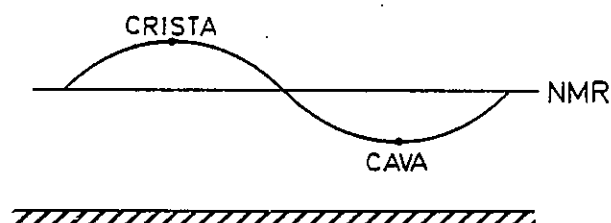


Fig. 2.2.2 - Perfil da onda

Na teoria das ondas de pequena amplitude (a expôr adiante) as amplitudes da cava e da crista são iguais e dadas por $a = H/2$. O período da onda, T , é o intervalo de tempo que medeia a passagem de, por exemplo, duas cristas sucessivas por um ponto de observação fixo. Neste ponto de observação a fase ou ângulo de fase é $0^{\circ(*)}$ sob a primeira crista e é incrementada de 360° durante um período. A fase de uma cava é, portanto, igual a 180° .

Num movimento ondulatório no plano horizontal chama-se frente de onda ou linha de frente a uma linha de fase constante. A figura 2.2.3 mostra uma linha de crista que é um exemplo de uma frente de onda. A direcção de propagação da onda é dada pelas ortogonais que são as trajectórias perpendiculares às frentes de onda, como mostra a figura 2.2.4.

Numa onda progressiva (comboio de ondas sem reflexão) as frentes propagam-se com a velocidade de fase C na direcção das ortogonais.

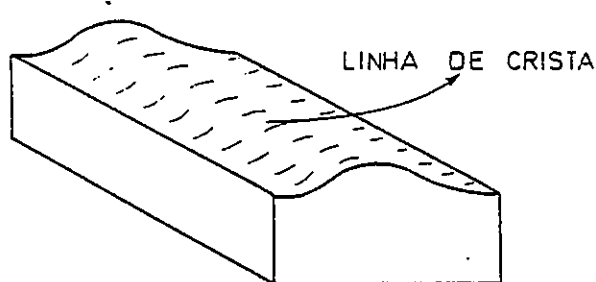


Fig. 2.2.3 - Exemplo de uma frente de onda

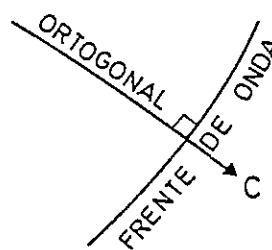


Fig. 2.2.4 - Trajectória da frente de onda

Na teoria das ondas de pequena amplitude a energia total da onda E (soma da energia cinética e da energia potencial) propaga-se com a velocidade de grupo C_g na direcção das ortogonais, caso não haja outros campos de velocidades que não sejam os das ondas. A potência da onda ou fluxo de energia é dada pelo produto de E por C_g . Em águas de grande profundidade relativa ($h/L > \frac{1}{2}$) a velocidade de grupo é metade da velocidade de fase. Em águas de pequena profundidade relati

(*) Este valor é tomado arbitrariamente

va ($h/L < \frac{1}{20}$) estas velocidades são praticamente iguais, desde que no local não existam correntes.

Uma onda progressiva transporta energia, quantidade de movimento, e não necessariamente massa. Caso haja transporte de massa a onda diz-se de translação. Num movimento ondulatório puro não há transporte de massa e conseqüentemente as órbitas das partículas do fluido são curvas fechadas circulares, em grandes profundidades relativas, e elípticas, em pequenas profundidades relativas, como mostra a figura 2.2.5. A velocidade das partículas tem o sentido da velocidade de fase enquanto estas estão na crista e sentido oposto enquanto estão na cava.

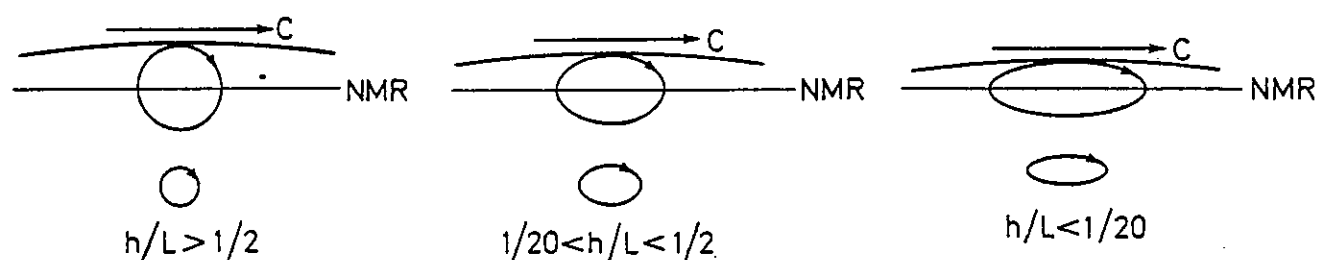


Fig. 2.2.5 - Órbitas das partículas

A velocidade das partículas é geralmente muito mais pequena que a velocidade de fase. Excepção para a onda quase em rebentação, em que a velocidade das partículas sob a crista é quase igual à velocidade de fase.

A declividade da onda, S , é dada pela relação entre a altura de onda e o comprimento de onda, $S = H/L$.

2.3 - Ondas de Curto Período

As ondas de curto período que interessam à hidráulica marítima são as ondas geradas pelo vento.

Pretende-se agora dar uma ideia de todo o processo de deformação das on-

das de curto período, tipicamente representadas pelas vagas e ondulações.

Uma descrição profunda da geração das ondas pelo vento poderá ser vista, por exemplo, em Kinsman (1965).

As ondas geradas pelo vento nascem no oceano, quando a velocidade do vento junto à superfície do mar excede um valor "crítico" de cerca de 1 m/s. Neste estado antecipado de geração, a superfície do mar cobre-se de pequenas rugas formando arcos mais ou menos regulares. Sob a contínua acção do vento, dá-se uma transferência de energia do vento para as ondas (figura 2.3.1) e estas crescem em altura, comprimento e período, até um máximo que depende principalmente dos seguintes factores: velocidade do vento, extensão da área de tempestade ou zona de geração (fetch), tempo durante o qual sopra o vento e profundidade da água. Com a acção continuada da tempestade, a energia do vento distribui-se por uma gama

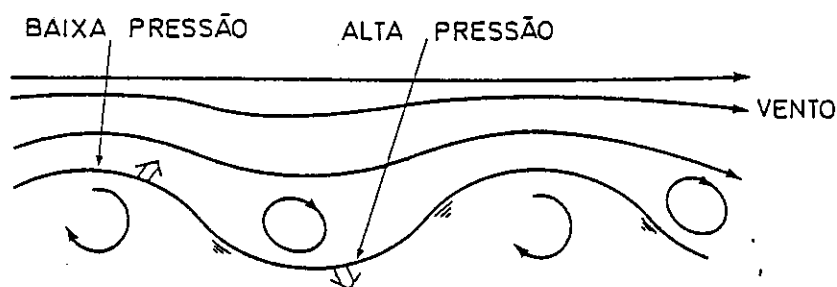


Fig. 2.3.1 - Transferência de energia do vento para as ondas

de períodos cada vez maior, até se atingir um estado de mar completamente desenvolvido em que as ondas são designadas por vagas ou ondas de crista curta, dando origem a um estado de agitação irregular cujas características se descrevem apropriadamente através de leis estatísticas^(*). O crescimento da agitação é principalmente limitado pela rebentação parcial das vagas nela presentes, pela dissipação de energia por turbulência e pelas trocas de energia das mais altas para as

(*) Ver Anexo 1.

mais baixas frequências do espectro da agitação. O espectro é função dos períodos ou frequências e direcções de propagação das ondas e permite definir o estado de agitação verificado à superfície do mar. Se a duração da tempestade for in suficiente para que se formem as ondas de mais baixa frequência, o estado de mar diz-se de duração limitada e o espectro apresenta componentes nas mais altas frequências. Se houver uma linha de costa de onde sopra o vento em direcção ao ponto de observação, as ondas de mais baixa frequência também não têm tempo para se desenvolver e o estado de mar diz-se de fetch limitado. A figura 2.3.2 mostra o desenvolvimento de um estado de mar.

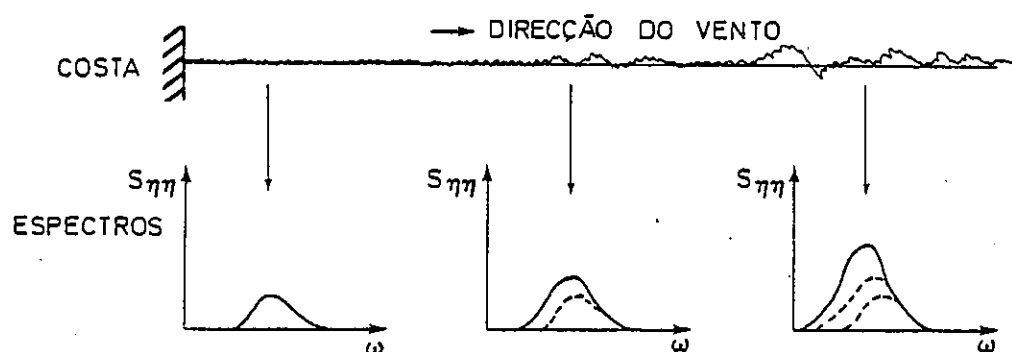


Fig. 2.3.2 - Desenvolvimento de um estado de mar

Quando as ondas se afastam da zona de geração, algumas centenas de quilômetros, dão origem a um outro tipo de agitação que se designa por ondulação. A ondulação é caracterizada por maior regularidade, muito embora as ondas tenham alturas mais pequenas do que as vagas de que resultaram.

As ondas, com crista bastante comprida, caminham aproximadamente com a mesma direcção não existindo a aparência de mar cruzado e caótico que se verificca na agitação da zona de geração.

Enquanto a onda ainda se propaga em águas de grande profundidade relativamente, a dissipação de energia dá-se principalmente por rebentação parcial caracterizada pelo aparecimento de espuma nas cristas devido ao vento, dita rebentação em carneiros (white caps).

Ao entrar em águas de pequena profundidade relativa a onda começa a "sentir o fundo" quando a profundidade for aproximadamente metade do comprimento de onda. À medida que caminha para menores profundidades relativas, a onda diminui a velocidade, diminui o comprimento de onda e aumenta a declividade, admitindo-se que mantém o período constante. A este processo chama-se empolamento (shoaling), figura 2.3.3.

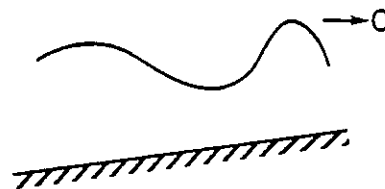


Fig. 2.3.3 - Empolamento

Nas regiões onde se dá o empolamento, a dissipação de energia (e consequente redução da altura de onda) é principalmente devida ao atrito de fundo, figura 2.3.4, sendo insignificante a parcela devida à percolação no fundo, como

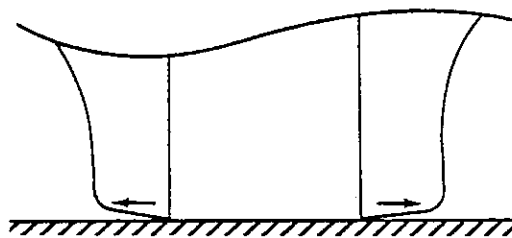


Fig. 2.3.4 - Atrito de fundo

mostra a figura 2.3.5. A dissipação de energia por atrito interno é insignificante a qualquer profundidade.

Quando, em águas de pequena profundidade relativa, a onda se propaga fazendo um ângulo com a batimetria, a direcção de propagação é alterada por refacção no fundo, como mostra a figura 2.3.6. A velocidade de propagação das ondas diminui à medida que estas se aproximam da costa. Assim, a parte da crista que

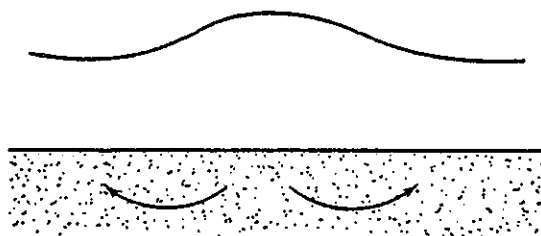


Fig. 2.3.5 - Percolação

estã em águas menos profundas move-se mais lentamente que a outra parte que se propaga em profundidade maior. Esta diferença de velocidades provoca a adaptação das cristas à batimetria. A existência de correntes provoca também a refacção das ondas, fenómeno a que se chama refacção em correntes. Nesta situação os raios e as ortogonais não coincidem e o processo diz-se anisotrópico. Um ponto que se move com a velocidade local \bar{c} segue uma ortogonal. Raio é uma curva tangente em to-

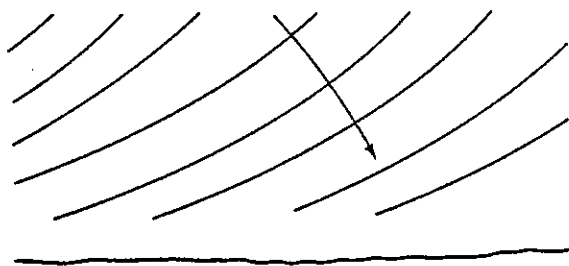


Fig. 2.3.6 - Refracção

dos os pontos ao vector velocidade de grupo C_g . Se existir uma envolvente das ortogonais, tal curva chama-se cãustica. Enquanto as ortogonais descrevem a cinemática do movimento ondulatório, os raios estão associados ao transporte de energia.

A propagação da onda pode ser perturbada por um quebra-mar ou qualquer outro obstáculo, observando-se a flexão das ondas em torno do obstáculo e propagação para as "zonas calmas". Por flexão da onda entende-se a transmissão lateral de energia, o que permite que não haja descontinuidade na altura de onda. Este fenómeno está representado na figura 2.3.7 e chama-se difracção da onda.

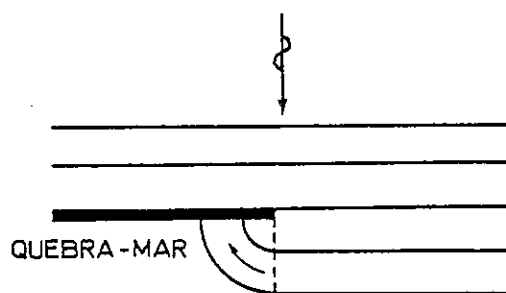


Fig. 2.3.7 - Difracção

Se um obstáculo não dissipa toda a energia da onda nele incidente dá-se então o fenómeno da reflexão, como mostra a figura 2.3.8. Se a estrutura em que incide a onda é porosa, verifica-se a transmissão de parte da energia da onda incidente através da estrutura, como mostra a figura 2.3.9.

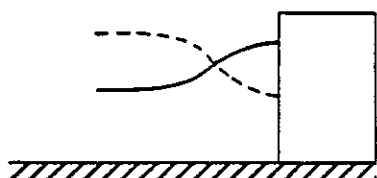


Fig. 2.3.8 - Reflexão

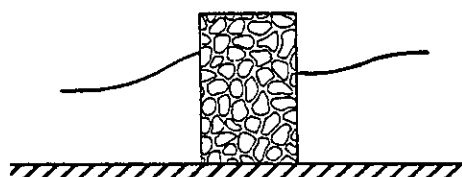


Fig. 2.3.9 - Transmissão

A medida que a onda se aproxima mais da costa, acentua-se o efeito do declive do fundo que, eventualmente dá origem a uma deformação assimétrica do perfil da onda, como mostra a figura 2.3.10, dando-se, assim, início ao processo de rebentação. Antes da rebentação, começa a verificar-se uma ligeira depressão do nível médio da água, que atinge o máximo na linha de rebentação, fenómeno esse a que se dá o nome de wave set-down.



Fig. 2.3.10 - Deformação assimétrica do perfil da onda

Junto à costa e quando a altura da onda é aproximadamente igual à profundidade da água, a onda deixa de ser estável e ocorre o fenómeno da rebentação. Junto à linha de rebentação predomina o efeito do empolamento sobre o efeito do atrito de fundo, o que explica o crescimento da onda até à rebentação, à medida que a profundidade da água vai decrescendo.

A zona de rebentação (surf) fica compreendida entre a linha de rebentação e a linha de costa. Nesta zona podem definir-se três tipos de rebentação. A rebentação progressiva (spilling), figura 2.3.11, ocorre quando ondas com bastante declividade chegam a uma praia com pequeno declive. Este tipo de rebentação é gradual e verifica-se ao longo de 6 a 7 comprimentos de onda. Uma situação oposta à anterior, isto é, ondas com muito pequena declividade e praias com grande declive, dá origem à rebentação de fundo (surging). Neste caso a parte inferior da onda coincide com a superfície da praia e não há realmente zona de rebentação. Entre estes dois tipos de rebentação observa-se a situação mais comum, isto é, rebentação mergulhante (plunging), em que a onda roda sobre si própria e perde uma apre

ciável quantidade de energia quase instantâneamente. Neste caso, a largura da zona de rebentação é tipicamente um comprimento de onda. Os três tipos de rebentação estão representados respectivamente nas figuras 2.3.11, 2.3.12 e 2.3.13.

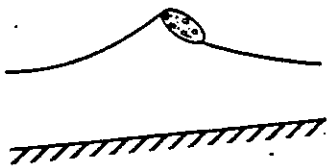


Fig. 2.3.11 - Rebentação progressiva

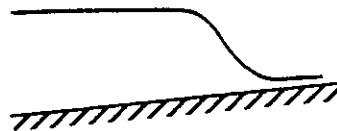


Fig. 2.3.12 - Rebentação de fundo

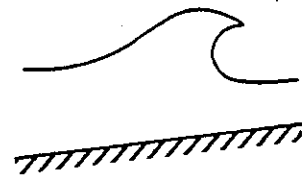


Fig. 2.3.13 - Rebentação mergulhante

A redução da altura de onda em virtude da rebentação provoca, na zona de rebentação, um grande aumento do nível médio da água, fenómeno este a que se dá o nome de wave set-up. Contribuem também para o wave set-up o espraiamento das ondas individuais (run-up ou up-rush) sobre a praia ou sobre um talude.

Os batimentos (surf beats) são oscilações de longo período do nível médio da água, isto é, do wave set-up, e têm origem nos grupos de ondas (aparecem as ondas de menor altura e as ondas de maior altura num processo alternado, o que provoca uma variação periódica nas alturas de onda na rebentação).

Apesar do efeito da refacção, as ondas podem rebentar fazendo ainda um ângulo com a linha de costa. A quantidade de movimento da onda associada ao transporte de massa, dá origem a correntes paralelas à linha de costa, a que se dá o nome de correntes litorais ou de long-shore, correntes estas que têm grande capacidade de transporte de areias.

Refere-se, finalmente, que os fenómenos mencionados não ocorrem isoladamente na natureza podendo, no entanto, ser analisados individualmente em laboratório.

2.4 - Ondas de Longo Período

As ondas de longo período são, por vezes, demasiado longas para que um observador as possa reconhecer. Com um comprimento típico de alguns quilómetros (nas regiões costeiras) e muito pequena altura, estas ondas são geralmente observadas junto à costa, como uma variação lenta do nível de água.

As ondas de origem sísmica, ondas geradas por movimentos tectónicos do fundo do mar, podem atravessar o oceano sem que sejam observadas até que, em virtude das condições batimétricas locais, a deformação da onda seja tal que esta adquira bastante altura, chegando, por vezes, a ultrapassar, os 10 m como acontece nas costas do Japão.

Outro tipo de oscilação de longo período é a chamada ressonância de regiões confinadas que não é mais do que uma oscilação forçada, em que se verifica a ampliação da onda incidente (ver 4.2.2.3.3).

Como último exemplo de ondas de longo período referem-se os batimentos que são efeitos secundários associados à agitação marítima local. Um estado de mar caracterizado por um espectro de agitação de banda relativamente estreita, pode dar origem aos grupos de ondas. Em pequenas profundidades relativas os grupos de ondas transportam uma onda de longo período secundária a eles associada que tem a característica de estar sempre fora de fase em relação à amplitude do grupo, isto é, há sempre uma cava da onda secundária associada ao máximo do grupo e uma crista da onda secundária associada ao mínimo do grupo, como mostra a figura 2.4.1. A onda de longo período associada ao grupo de ondas propaga-se com a velocidade de grupo (é transportada pelo grupo) e não com a velocidade correspondente a uma onda de longo período livre, isto é, primária, Dean (1979). Verifica-se que a energia correspondente às ondas de longo período secundárias aumenta com a aproximação da linha de costa e que estas ondas não são radiadas para o largo, Hansen et. al. (1980). Este facto é muito importante e deve ser considerado na defesa de uma bacia contra os fenómenos de ressonância. Para uma bacia sensível aos fenómenos de

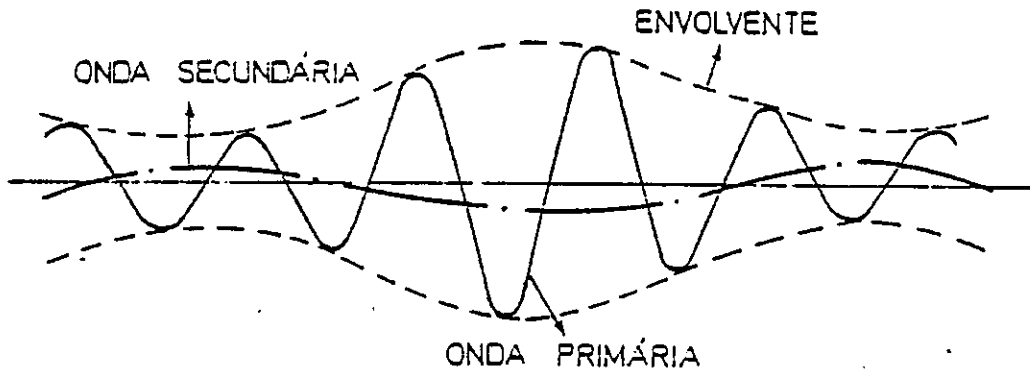


Fig. 2.4.1 - Onda de longo período secundária

ressonância é mais vantajoso, sob o ponto de vista da ressonância, definir a entrada da bacia em águas mais profundas como mostra a figura 2.4.2, caso A. No caso B a entrada da bacia está em águas menos profundas e, portanto, mais sujeita a acção da energia das ondas de longo período associadas à agitação local.

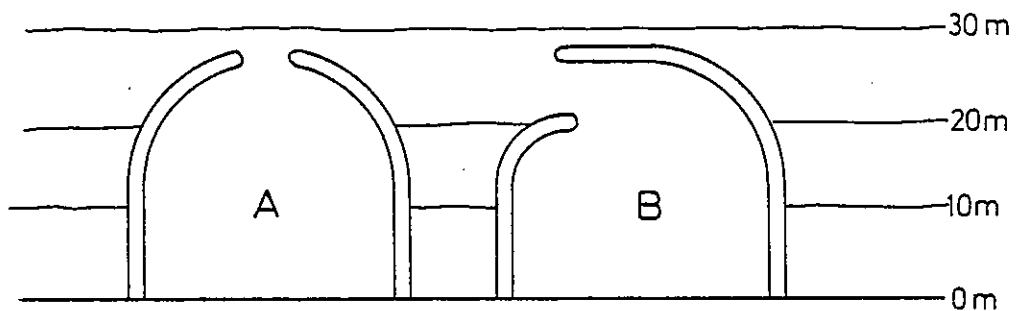


Fig. 2.4.2 - Esquemas básicos de bacias portuárias. Na defesa contra a energia das ondas de longo período secundárias é preferível o esquema A

2.5 - Marés

As marés astronômicas são variações do nível do mar com origem no campo de forças gravíticas e centrífugas gerado pela rotação da lua em torno da terra e da terra em torno do sol. Tendo em conta que estas forças têm uma varia

ção periódica com duas componentes principais de períodos iguais aproximadamente a 12 horas e 24 horas, a maré pode ser considerada como um movimento ondulatório com um ou com os dois períodos referidos. A maré das 12 h diz-se semidiurna enquanto que a maré das 24 h se chama diurna. Tais períodos dão origem a enormes comprimentos de onda, da ordem de grandeza das dimensões dos oceanos. Por exemplo, uma maré semidiurna numa profundidade de 4000 metros tem um comprimento de onda de 8500 quilómetros.

A maré gerada nos oceanos, apresenta aí amplitudes que não ultrapassam alguns decímetros, contrariamente ao que acontece nas regiões costeiras em que as referidas amplitudes excedem muito largamente aquele valor. Como exemplo, refere-se a maior amplitude média de maré - 15 metros - que ocorre na Baía de Fundy, Nova Escócia, Canadá. A amplificação das marés ao entrarem nas regiões costeiras é uma consequência da batimetria local, das reflexões na plataforma continental e na linha de costa e, principalmente, da aceleração de Coriolis. A figura 2.5.1 mostra a propagação da maré no Mar do Norte onde se vê claramente a acção combinada da aceleração de Coriolis e da reflexão. Na costa portuguesa a maré propaga-se de Sul para Norte. Continua depois pelas costas da Europa e desce pelas costas da América.

Um observador local não reconhece na maré um carácter ondulatório mas apenas variações do nível médio combinadas com uma corrente dita corrente de maré. Esta corrente corresponde ao movimento das partículas na onda de maré que, em comparação com as ondas de curto período, evidencia a importância da dissipação de energia por atrito de fundo numa onda de maré.

As variações do nível do mar provocadas por factores meteorológicos, tais como ventos fortes e bruscas mudanças da pressão atmosférica, chamam-se marés meteorológicas tipicamente representadas pelos storm surge.

Quando uma frente de baixas pressões passa por uma determinada região marítima verifica-se uma subida anormal do nível do mar, devida à sucção provocada pela baixa de pressão na superfície do mar combinada com os efei-

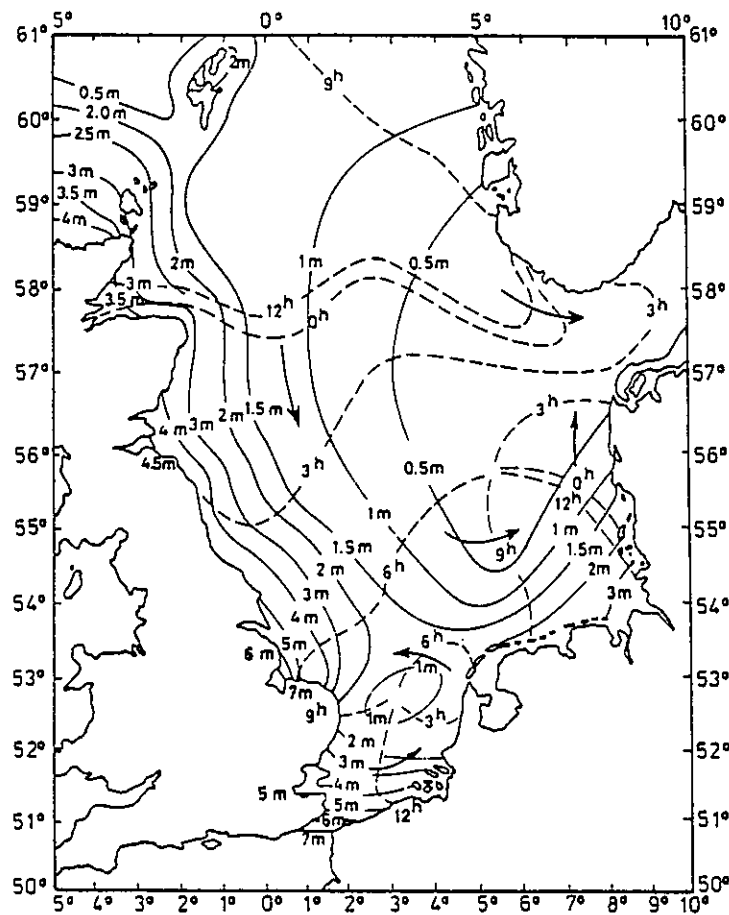


Fig. 2.5.1 - Propagação da maré no Mar do Norte
 — linhas de igual amplitude (co-range)
 --- linhas de igual fase (co-tidal)
 → direcção de propagação da maré

tos das tensões tangenciais exercidas pelo vento sobre a superfície do mar (wind set-up). Tal subida do nível do mar acompanha o percurso da tempestade (frente de baixas pressões) tornando-se assim numa espécie de onda progressiva forçada. A elevação do nível do mar devida à sucção da água provocada pela baixa pressão é independente da profundidade local, enquanto que a elevação devida à acção das tensões tangenciais do vento sobre a superfície é inversamente proporcional à profundidade da água. Em virtude deste último facto, as maiores elevações do nível do mar durante uma tempestade verificam-se em regiões de pe

quena profundidade, como é o caso, por exemplo, do Mar do Norte e do Rio da Prata. A sobre-elevação pode ainda agravar-se quando a passagem da tempestade coincide com uma maré viva em preia-mar, como aconteceu, por exemplo, no porto de Leixões durante a tempestade de 16 de Janeiro de 1973. Entre outros efeitos, esta sobre-elevação deu origem a fenómenos de ressonância.

Finalmente, faz-se notar que as marés meteorológicas são fenómenos transitórios e não periódicos com a escala de tempo geralmente medida em dias. O referido storm surge de Leixões teve a duração aproximada de 1 dia.

2.6 - Classificação das Ondas

Em 2.1 fez-se uma classificação das ondas gravíticas de superfície com base no tempo de duração das variações do nível do mar, tendo-se, para esse efeito, definido um período ou uma escala de tempo. Apresentam-se seguidamente outras classificações com base na altura, comprimento de onda e profundidade.

Chama-se no entanto a atenção para o facto de as diferentes classificações e nomenclaturas não constituírem um fenómeno mas apenas um processo de descrição, com maior ou menor rigor, do fenómeno que é o movimento ondulatório.

2.6.1 - Pela Altura de Onda

Obviamente, as ondas gravíticas de superfície são fenómenos não lineares como, aliás, o são todos os fenómenos da natureza. Por vezes tal linearidade não é pronunciada, o que acontece quando a declividade e a altura relativa tomam valores pequenos ($H/L \rightarrow 0$ e $H/h \rightarrow 0$), figura 2.6.1.1, e a onda diz-se: de pequena amplitude, linear, sinusoidal, infinitesimal, de Airy, de Stokes de primeira ordem ou simplesmente, harmónica simples.

Quando a declividade e a altura relativa não forem pequenas, figura 2.6.1.1, e portanto não se puder admitir a linearidade do fenómeno, a onda diz-se de amplitude finita ou não linear, de que são exemplos as ondas de Stokes

e as ondas cnoidais.

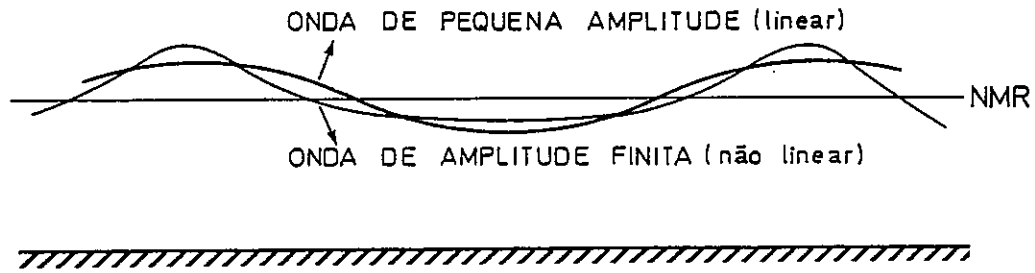


Fig. 2.6.1.1 - Perfis das ondas de pequena amplitude e amplitude finita

Com base nesta classificação, ondas lineares e ondas não lineares, Le Méhauté (1976) apresenta uma tabela classificativa de todas as teorias de ondas, que se reproduz na figura 2.6.1.2.

2.6.2 - Pela Profundidade

Com base na profundidade relativa (h/L), as ondas dizem-se de pequena profundidade relativa ($h/L < 1/2$), de profundidade relativa intermédia ($1/20 < h/L < 1/2$) e de grande profundidade relativa ($h/L > 1/2$).

2.6.3 - Pela Altura, Comprimento de Onda e Profundidade

Como se disse no parágrafo 2.2, a onda pode ser completamente caracterizada pelos parâmetros H , L e h . Com estes parâmetros constrói-se um parâmetro adimensional, parâmetro de Ursell ($U_R = HL^2/h^3$), com interesse para a descrição matemática do movimento ondulatorio.

Para valores de U_R inferiores a um determinado valor a onda deve ser descrita pela teoria de Stokes, da qual as ondas de pequena amplitude são um caso particular. Para valores de U_R superiores a um determinado valor a onda deve ser descrita pela teoria cnoidal da qual a onda solitária é um caso limite ($U_R \rightarrow \infty$).

A figura 2.6.3.1 indica o domínio aproximado de validade das várias teorias de onda, proposto por Le Méhauté (1976).

Por último, faz-se referência ao trabalho de Dean (1974) sobre a comparação das teorias de onda, analíticas e numéricas, cujas principais conclusões se podem encontrar sintetizadas em Moraes (1971).

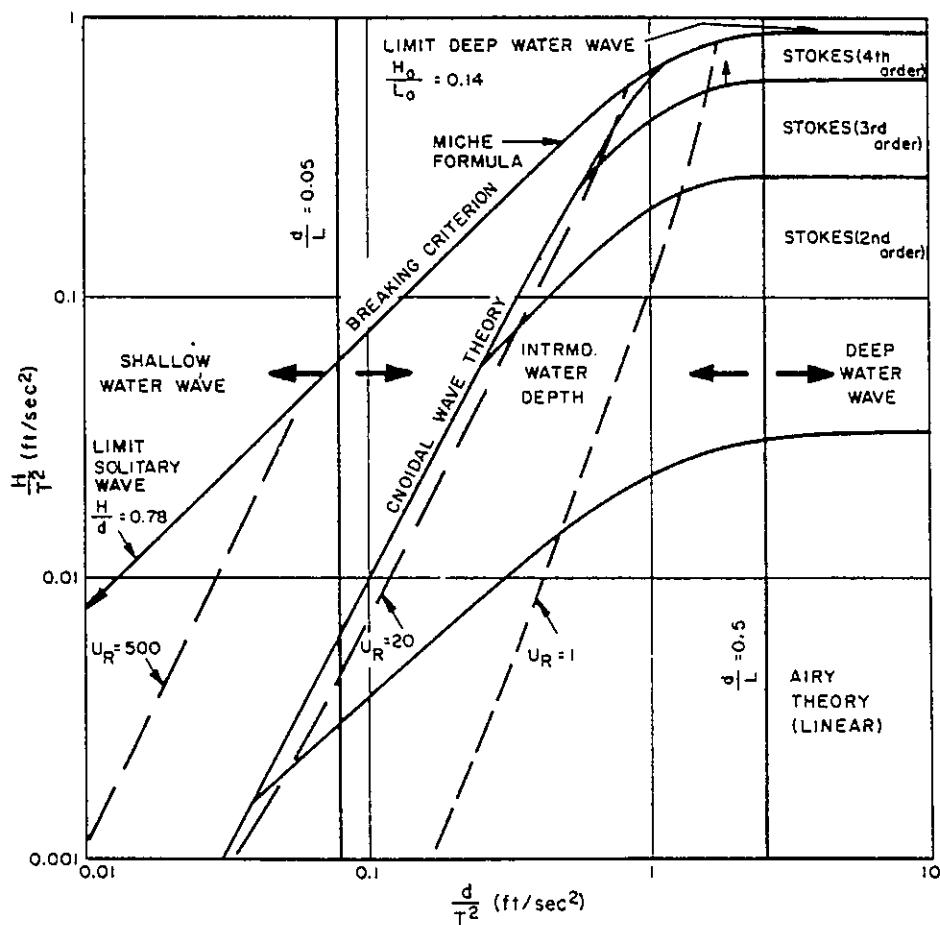


Fig. 2.6.3.1 - Limites de validade das várias teorias de onda. Extraído de Le Méhauté (1976)

3 - CONCEITOS E PRINCÍPIOS BÁSICOS DE HIDRODINÂMICA

3.1 - Generalidades

Os aspectos principais que se focam neste capítulo são as hipóteses de base, a sua influência nos resultados, e o domínio de aplicação das várias aproximações que irão ser feitas.

Por facilidade de exposição, as equações da hidrodinâmica serão apresentadas em duas dimensões. Assim, considera-se um plano vertical (x,z) e nele, um vector \vec{V} tem componentes u e w como mostra a figura 3.1.1.

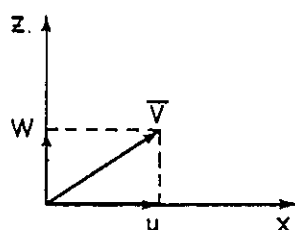


Fig. 3.1.1 - Coordenadas e componentes de um vector

3.2 - Equações Básicas da Hidrodinâmica

Considere-se que a água do mar é um fluido homogêneo com temperatura e densidade constantes, isto é, incompressível. Nestas condições, as equações básicas da hidrodinâmica são dadas pelos princípios físicos da continuidade e da conservação da quantidade de movimento^(*).

(*) Para um fluido compressível, considera-se ainda a equação de estado e o princípio da conservação da energia.

3.2.1 - Equação da Continuidade ou da Conservação da Massa

A incompressibilidade do fluido permite admitir a seguinte simplificação,
conservação da massa = conservação do volume,

desde que não se alterem a respectiva densidade e viscosidade.

Considere-se uma superfície de controle elementar (dx, dz) no interior do fluido como mostra a figura 3.2.1.1.

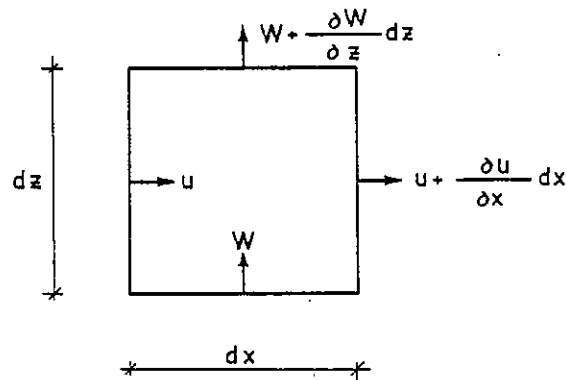


Fig. 3.2.1.1 - Superfície de controle elementar

A conservação da massa significa que a quantidade de fluido que entra na superfície de controle é igual à quantidade de fluido que sai da mesma superfície. Matematicamente, o fluxo da massa através da superfície é nulo, isto é,

$$udz + wdx = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dz + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) dx \quad (3.1)$$

de onde resulta a equação da continuidade,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div} \vec{v} = 0 \quad (3.2)$$

3.2.2 - Equações do Movimento ou da Conservação da Quantidade de Movimento

Da aplicação da segunda lei de Newton a uma partícula do fluido^(*) resulta,

$$\frac{d}{dt}(m\bar{V}) = m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} \quad (3.3)$$

em que

m - massa da partícula do fluido

\bar{V} - vector velocidade da partícula do fluido

t - tempo

\bar{F} - vector resultante das forças que actuam na partícula do fluido

Considere-se uma partícula de fluido com espessura unitária, no instante t e animada da velocidade \bar{V} . As forças que nela actuam, figura 3.2.2.1, são de dois tipos:

- a) - Internas - coesão molecular, etc., que não serão consideradas.
- b) - Externas - forças de superfície e forças de massa.

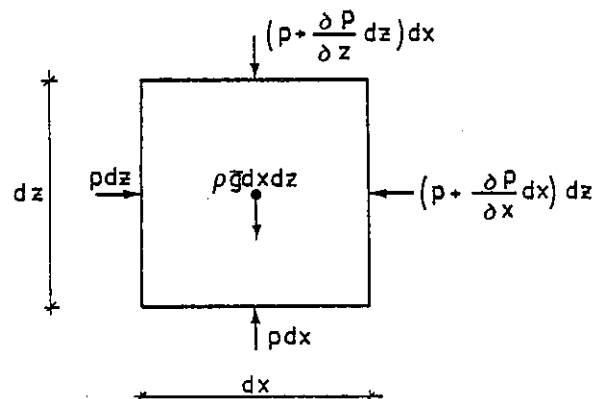


Fig. 3.2.2.1 - Forças aplicadas numa partícula do fluido

(*) Quantidade infinitesimal de fluido que contém o mesmo número de moléculas ao longo do tempo.

As forças de superfície são de dois tipos:

- a) - Normais - devidas à variação da pressão, p , no fluido.
- b) - Tangenciais - devidas à viscosidade, que não são consideradas nos problemas que se vão analisar.

Quanto às forças de massa considera-se apenas a acção da gravidade, isto é, a força $\rho \bar{g} dx dz$ em que ρ representa a densidade do fluido e \bar{g} a aceleração da gravidade.

Assim, a resultante das forças que actuam na partícula é:

$$\bar{F} = - \text{grad}(p + \rho \bar{g}z) + \text{forças de viscosidade} \quad (3.4)$$

e as equações do movimento, (3.3), escrevem-se agora,

$$\text{Vectorial: } \rho \frac{d\bar{V}}{dt} = - \text{grad}(p + \rho \bar{g}z) + \text{forças de viscosidade} \quad (3.5)$$

$$\text{Escalar: } \rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \text{forças de viscosidade} \quad (3.6)$$

em x:

$$\text{em z: } \rho \frac{dw}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \text{forças de viscosidade} \quad (3.7)$$

Forças
de
Inércia

Pres
são

Gravi
dade

Viscosidade

Forças aplicadas

As equações anteriores descrevem o movimento de cada partícula individualmente e têm como variáveis independentes as coordenadas da posição inicial da partícula, (x_0, z_0) , no instante t_0 (coordenadas de Lagrange). Num instante t tem-se:

$$x = x(x_0, z_0, t-t_0) \quad (3.8)$$

$$z = z(x_0, z_0, t-t_0) \quad (3.9)$$

Para estudar as características globais do movimento torna-se conveniente escrever as equações do movimento num referencial fixo e não num referencial móvel que acompanha a partícula, como se fez anteriormente. Assim, fixado um referencial, a velocidade da partícula é função da respectiva posição e do tempo, isto é,

$$\bar{v} = \bar{v}(x, z, t) \quad (3.10)$$

Por outro lado, a posição da partícula é também função do tempo o que permite considerar a velocidade da partícula como função do tempo, ou seja,

$$\bar{v} = \bar{v}(x(t), z(t), t) \quad (3.11)$$

Então, as componentes da aceleração $(\frac{d\bar{v}}{dt})$ escrevem-se:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial z} w \quad (3.12)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial z} w \quad (3.13)$$

Aceleração local *Aceleração convectiva*

e as equações do movimento escrevem-se agora,

em x : $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \text{forças de viscosidade} \quad (3.14)$

z : $\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \text{forças de viscosidade} \quad (3.15)$

Inércia local
Inércia convectiva

Pressão
Gravidade

Viscosidade

Forças de Inércia

Forças Aplicadas

As equações anteriores descrevem as características globais do movimento e têm como variáveis independentes as coordenadas da partícula, (x, z) , no instante actual t (coordenadas de Euler). Neste caso tem-se, por exemplo para a pressão p e velocidade \bar{V} , respectivamente:

$$p = p(x, z, t) \quad (3.16)$$

$$\bar{V} = \bar{V}(x, z, t) \quad (3.17)$$

O campo vectorial \bar{V} e o campo escalar p definem completamente o tipo de movimento: Laminar - \bar{V} é uma função unívoca de (x, y) , isto é, as linhas de corrente não se cruzam; Turbulento - \bar{V} não é unívoca de (x, y) , isto é, as linhas de corrente cruzam-se.

Se o movimento for laminar e as propriedades físicas do fluido satisfizerem determinadas condições^(*) as forças de viscosidade têm as componentes $\mu \nabla^2 u$ e $\mu \nabla^2 w$ em que μ é o coeficiente de viscosidade. As equações do movimento chamam-se então, equações de Navier-Stokes e escrevem-se agora,

$$\text{em } x: \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.18)$$

$$\text{em } z: \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.19)$$

Se o movimento for turbulento e as velocidades instantâneas forem substituídas pela soma de velocidades médias e de velocidades de flutuação, as equações do movimento chamam-se equações de Reynolds.

Desprezando as forças de viscosidade, as equações do movimento chamam-se equações de Euler e escrevem-se,

(*) Ver em Le Méhauté (1976)

$$\text{em } x: \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.20)$$

$$\text{em } z: \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (3.21)$$

As equações de Euler, conjuntamente com a equação da continuidade e com apropriadas condições de fronteira e condições iniciais, descrevem completamente o movimento num fluido não viscoso e incompressível. As incógnitas do problema são as componentes da velocidade e a pressão, respectivamente u , w e p .

3.3 - Movimento Potencial

3.3.1 - Generalidades

A um movimento irrotacional num fluido incompressível e não viscoso chama-se movimento potencial. Neste caso o fluido diz-se perfeito e o movimento é laminar. Existem dois tipos de movimento laminar, a saber: o movimento potencial ou irrotacional e o movimento rotacional. Qualquer destes conceitos é essencialmente matemático e tem origem, em última análise, na forma do campo de velocidades presente no movimento. Ver-se-á, num dos próximos capítulos, em que circunstâncias se pode descrever matematicamente o movimento das partículas do fluido com ou sem rotacionalidade, isto é, com um movimento rotacional ou com um movimento potencial.

3.3.2 - Função Potencial de Velocidades

A função potencial de velocidades, $\phi(x, z, t)$, é um conceito matemático vantajoso que vai permitir reduzir o número de incógnitas de três (u, w, p) para duas (ϕ, p).

Considerem-se as seguintes hipóteses simplificativas

- a) - O fluido não é viscoso.

b) - As forças externas aplicadas nas partículas do fluido são conservativas.

A primeira hipótese foi já assumida no capítulo anterior.

As forças externas que actuam nas partículas do fluido são, como já se disse, a força da gravidade, g (força de massa) e a pressão, p (força de superfície). Mostra-se que qualquer destes sistemas de forças é conservativo.

Com estas duas hipóteses pode aplicar-se o teorema de Kelvin: - A vorticidade ou rotacionalidade de cada partícula do fluido é constante ao longo do tempo.

Sendo assim, se inicialmente não houver vorticidade em nenhuma partícula do fluido o movimento permanece sem vorticidade, ou seja, permanece irrotacional e exprime-se matematicamente com a equação

$$\text{rot}\bar{V} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.22)$$

Considerando que o movimento é irrotacional mostra-se, a partir da equação anterior, que existe uma função escalar ϕ que em cada ponto do movimento "gera" o campo de velocidades $\bar{V}(u,w)$, isto é,

$$\bar{V} = \text{grad}\phi \quad (3.23)$$

A função ϕ , "geradora" de velocidades, chama-se função potencial de velocidades e não permite descrever um movimento com vorticidade, visto que o rotacional é automaticamente nulo: $\text{rot}\bar{V} = \text{rot grad } \phi = 0$.

3.3.3 - Equações do Movimento Potencial

Considerando um movimento potencial, a equação da continuidade escreve-se agora,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi = 0. \quad (3.24)$$

que não é mais do que a equação de Laplace.

Escrevendo as equações de Euler, (3.20 e 21), para um movimento potencial, (3.22 e 23), e integrando respectivamente em ordem a x e em ordem a z obtém-se:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) = -\frac{p}{\rho} - g z + C_1(z, t) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) = -\frac{p}{\rho} - g z + C_2(x, t) \quad (3.26)$$

em que $C_1(z, t)$ e $C_2(x, t)$ são funções arbitrárias de integração. Mostra-se que estas funções devem ser iguais,

$$C_1(z, t) = C_2(x, t) = C(t), \quad (3.27)$$

o que permite combinar as duas equações anteriores e obter a equação de Bernoulli:

$$g z + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) \quad (3.28)$$

Esta equação pode ser simplificada se se tiver em conta que (Φ) e $(\Phi + \int C(t) dt)$ são potenciais geradores do mesmo movimento, obtendo-se então:

$$g z + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (3.29)$$

A equação de Bernoulli (movimento) e a equação de Laplace (continuidade) com apropriadas condições de fronteira e condições iniciais descrevem completamente o movimento potencial. As incógnitas do problema são agora a função potencial de velocidade Φ e o campo de pressões p que se determinam resolvendo sucessivamente a equação da continuidade e a equação do movimento, respectivamente. De facto, desde que a pressão p não conste nas condições de fronteira da equação da continuidade, poderá dizer-se que a única incógnita é realmente a função potencial Φ a partir da qual se determinam, posteriormente, a pressão p e todos os parâmetros de interesse.

3.3.4 - Validade Prática do Movimento Potencial

Ao descrever matematicamente um movimento, é fundamental saber-se em que circunstâncias se pode adoptar a hipótese simplificativa que consiste em admitir que o movimento é irrotacional, isto é, que consiste em desprezar a vorticidade do movimento.

No capítulo anterior estabeleceu-se que o movimento potencial é incompatível com a vorticidade. Assim, põe-se a questão de saber qual a origem da vorticidade no movimento de um fluido real. A resposta é simples: as fronteiras sólidas do movimento são a principal causa da vorticidade. A aderência do fluido à fronteira dá origem à formação da camada limite, no interior da qual o movimento é rotacional em virtude do elevado gradiente do campo de velocidades aí existente. Deste modo, um movimento pode considerar-se potencial se a espessura da camada limite for tal que possa ser desprezada perante as dimensões da região do movimento não perturbada pela presença da fronteira sólida.

Vejamos mais em pormenor a influência das fronteiras sólidas num movimento permanente e num movimento ondulatório de oscilação: - formação da camada limite no primeiro caso e, formação e separação da camada limite no segundo caso.

Considere-se então um movimento permanente, inicialmente irrotacional, sobre um plano horizontal, como mostra a figura 3.3.4.1.

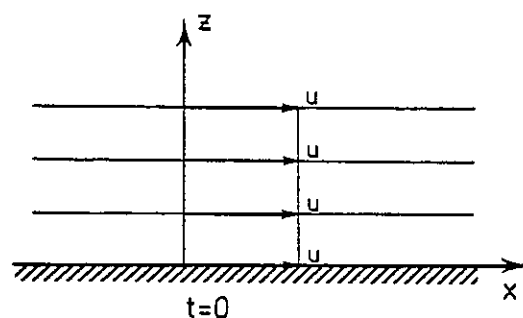


Fig. 3.3.4.1 - Movimento permanente, inicialmente irrotacional, com velocidade constante sobre um plano horizontal

A aplicação da lei de Kelvin permite estabelecer que o movimento permanece irrotacional enquanto não for perturbado, ou seja, fora da camada limite o movimento permanece irrotacional. Logo após o início do movimento forma-se imediatamente a camada limite, cuja espessura δ aumenta ao longo do tempo, e no interior da qual o campo de velocidades varia entre zero, junto à fronteira, e o valor u , correspondente à velocidade na região do movimento não perturbado, como mostra a figura 3.3.4.2.

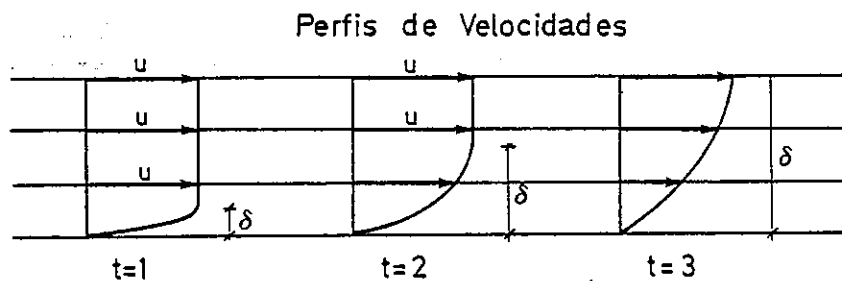


Fig. 3.3.4.2 - Formação da camada limite no movimento referido na figura 3.3.4.1

Em determinado instante, o movimento na camada limite, laminar, torna-se instável e passa a turbulento provocando um crescimento rápido da espessura δ . Neste movimento o campo de velocidades é entendido em valor médio.

Analise-se então a vorticidade no interior da camada limite.

A componente vertical da velocidade é praticamente constante e igual a zero, $w \approx 0$, o que dá origem a um valor não nulo para o rotacional do campo de velocidades,

$$\text{rot} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{\partial u}{\partial z} \neq 0 \quad (3.30)$$

visto que a componente horizontal u varia na direcção z , como mostra a figura 3.3.4.3. Conclui-se portanto que no interior da camada limite o movimento é rotacional.

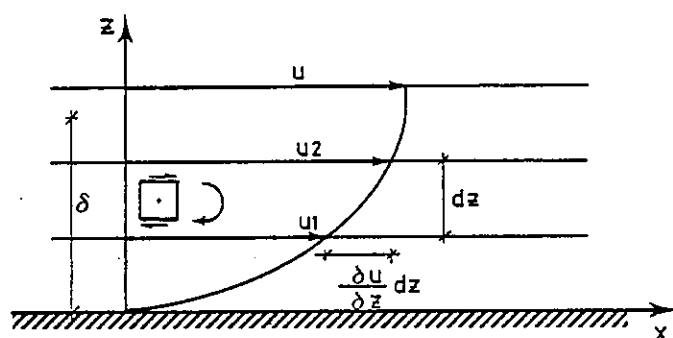


Fig. 3.3.4.3 - Movimento rotacional na camada limite

Considere-se agora um movimento ondulatório de oscilação sobre um fundo horizontal.

Como se verá num dos próximos capítulos, o movimento das partículas junto ao fundo é horizontal e com período de oscilação igual ao período do movimento ondulatório. Assim sendo, a partícula parte do repouso com uma aceleração crescente até atingir a velocidade orbital máxima (determinada pelas características do movimento ondulatório), entrando seguidamente em desaceleração até se anular a respectiva velocidade. Em cada período do movimento da onda verificam-se, portanto, duas desacelerações.

Tendo em atenção o processo de formação da camada limite no movimento permanente, pode admitir-se que, no movimento oscilatório, sempre que a partícula muda de direcção origina-se a formação de uma nova camada limite (portanto duas camadas limite em cada período de oscilação da onda).

Veja-se agora como evoluem no tempo as sucessivas camadas limite que se vão formando periodicamente.

Da análise da primeira equação do movimento de Euler verifica-se a aceleração das partículas (força inércia) é equilibrada pelo gradiente de pressões $-\frac{\partial p}{\partial x}$ (força aplicada). Por outras palavras, a desaceleração das partículas é devida a um gradiente de pressões que se opõe ao movimento das respectivas partículas. Considerando que o gradiente de pressões é aproximadamente constante na

espessura da camada limite, e ainda que as partículas junto ao fundo estão sujeitas a menores acelerações (menores forças de inércia), verifica-se que estas últimas iniciam o movimento de retorno antes das outras partículas mais afastadas da fronteira anularem a respectiva velocidade. Esta mecânica do movimento dá origem a que a camada limite "descole" da fronteira e se introduza no fluido, até então não perturbado. Isto é, dá origem à separação da camada limite, iniciando-se simultaneamente a formação de nova camada limite, como mostra a figura 3.3.4.4. Tendo em conta que se formam duas camadas limites em cada período de oscilação da onda, conclui-se que tais camadas serão tanto mais finas quanto menor for o referido período de oscilação da onda.

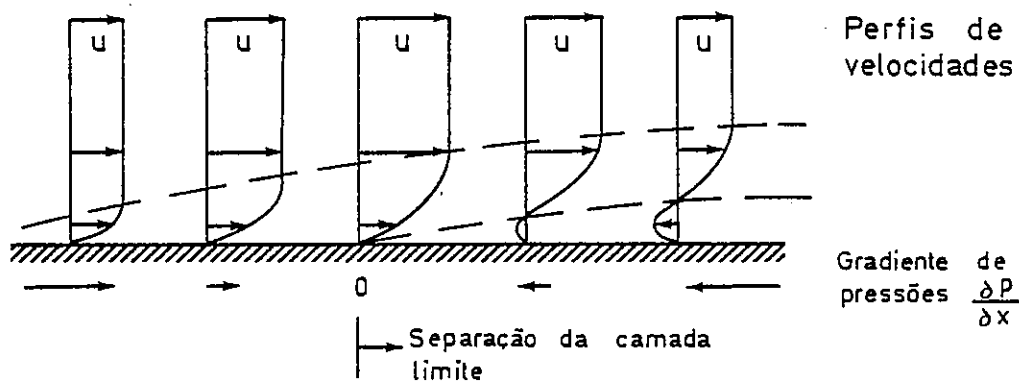


Fig. 3.3.4.4 - Desenvolvimento e separação das camadas num movimento ondulatório de oscilação

O processo descrito de desenvolvimento e separação das camadas limite permite assim concluir que, o movimento ondulatório pode considerar-se potencial nas ondas de curto período, excepto numa fina camada junto ao fundo. Para ondas de longo período em pequena profundidade, a camada limite pode atingir alturas iguais a metade da profundidade da água. No caso da maré, em pequenas profundidades, a camada limite chega até à superfície o que obriga à descrição do movimento com rotacionalidade.

3.4 - Condições de Fronteira

A resolução das equações diferenciais que descrevem o movimento num domínio com superfície livre exigem a especificação das condições de fronteira, condições essas que traduzem matematicamente as condições físicas nos limites do problema em questão. Sem a imposição das condições de fronteira não seria possível determinar mais do que a solução geral do problema.

Considere-se que a elevação da superfície livre da água acima do nível médio de repouso (NMR) é descrita pela variável $\xi(x, t)$, como mostra a figura 3.4.1.

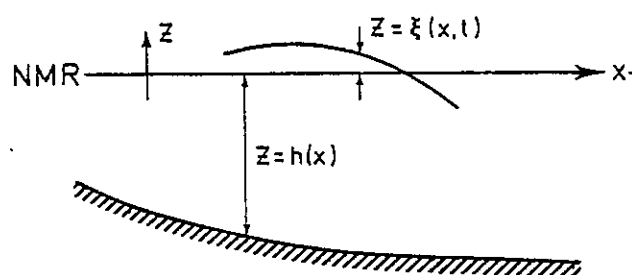


Fig. 3.4.1 - Definição de variáveis para as condições de fronteira

3.4.1 - Condições de Fronteira na Superfície Livre

A elevação da superfície livre acima do NMR não é conhecida a priori e determina-se como parte da solução do problema. Assim, são necessárias duas condições de fronteira na superfície livre, $z = \xi(x, t)$. São elas: a condição cinemática e a condição dinâmica.

3.4.1.1 - Condição Cinemática

Como o nome indica, esta condição diz respeito à descrição geométrica do movimento da superfície livre. Fisicamente, impõe-se que uma partícula de fluido uma vez na superfície livre, permanece na superfície livre. Matematicamente, esta condição significa que uma partícula na superfície livre $Z(x, z, t) = z - \xi(x, t) = 0$,

animada da velocidade $\bar{V} = \nabla \phi$ no instante t , sofre uma variação de posição durante um instante dt dada por:

$$dz = dz - d\xi = dz - \frac{\partial \xi}{\partial t} dt - \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (3.31)$$

Tendo em conta que as componentes da velocidade são dadas por:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (3.32)$$

a equação (3.31) resulta:

$$w - \frac{\partial \xi}{\partial t} - u \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (3.33)$$

Para o movimento potencial, a equação anterior escreve-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (3.34)$$

e traduz a condição de fronteira cinemática.

3.4.1.2 - Condição Dinâmica

Como o nome indica, esta condição diz respeito às leis do movimento da superfície livre em relação com as respectivas causas. Fisicamente, impõe-se que a pressão seja constante ao longo da superfície livre^(*) e igual à pressão atmosférica que, por simplificação, aqui se considera nula. Matematicamente, esta condição é dada pela equação de Euler ou pela equação de Bernoulli, respectivamente:

(*) Obviamente, esta condição não permite estudar a propagação do movimento ondulatório na zona de geração, onde a pressão do vento sobre a superfície livre do mar é variável.

$$p = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (3.35)$$

ou

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \xi + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (3.36)$$

3.4.2 - Condições de Fronteira no Fundo

Fisicamente, o movimento tem que ser paralelo ao fundo (considerado impermeável). Isto é, uma partícula de fluido uma vez no fundo, permanece no fundo. Matematicamente, esta situação descreve-se com a aplicação da condição cinemática às partículas do fundo. Por outras palavras, uma partícula no fundo $H(x, z) = z + h(x) = 0$, animada da velocidade $\vec{V} = \nabla \phi$ no instante t , sofre uma variação de posição durante o instante dt dada por:

$$dH = dz + \frac{\partial h}{\partial x} dx = 0 \quad \text{para } z = -h(x) \quad (3.37)$$

Tendo em conta as componentes da velocidade, a equação anterior resulta:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dz}{dt} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = w + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{para } z = -h(x) \quad (3.38)$$

Para o movimento potencial, a equação anterior escreve-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{para } z = -h(x) \quad (3.39)$$

Se a profundidade for constante, a equação anterior escreve-se simplesmente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = -h \quad (3.40)$$

3.4.3 - Condições de Fronteira na Direcção Horizontal

As condições de fronteira a impôr na direcção x variam consoante o tipo de movimento que se pretende descrever e consoante o tipo de fronteira física do problema. Assim, por exemplo, para descrever o movimento de uma onda periódica progressiva e de perfil constante, impõe-se uma condição de periodicidade. Por outro lado, se por exemplo se quiser descrever a presença de uma parede no movimento, impõe-se uma condição de reflexão.

3.4.3.1 - Condição de Periodicidade

Esta condição define-se relativamente ao espaço (x) ou ao tempo (t): em qualquer instante t (ponto x), a forma do movimento é a mesma em dois pontos (instantes), distanciados um número inteiro de comprimentos de onda (períodos t). Matematicamente, tem-se, respectivamente:

$$u(x, z, t) = u(x + nL, z, t) \quad (3.41)$$

ou

$$u(x, z, t) = u(x, z, t + nT) \quad (3.42)$$

que para um movimento pótencial se escreve,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x + nL, z, t) \quad (3.43)$$

ou

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z, t + nT) \quad (3.44)$$

3.4.3.2 Condição de Reflexão

A reflexão parcial será detalhadamente exposta num dos próximos capítulos.

A reflexão total traduz-se, matematicamente, pela aplicação da condição cinemática à fronteira em questão, isto é, uma partícula junto à fronteira move-se paralelamente à fronteira, como mostra a figura 3.4.3.2.1.

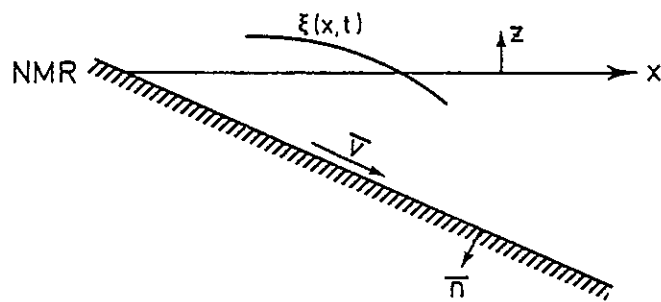


Fig. 3.4.3.2.1 - Movimento junto à fronteira

Note-se que a aplicação da condição cinemática,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{para} \quad z = -h(x) \quad (3.45)$$

é idêntica à aplicação da condição de velocidade normal nula,

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } H = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} n_z + \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x = 0 \quad (3.46)$$

em que n_x e n_z são componentes do vetor normal exterior à fronteira, \vec{n} .

3.4.4 - Considerações Finais

Para além das condições de fronteira na direcção x já indicadas, há que referir a descrição matemática de uma fronteira aberta, isto é, uma fronteira não reflectora. Tal fronteira descreve-se tradicionalmente com uma aproximação da condição de radiação de Sommerfeld, condição essa que, como se verá mais adiante, não é mais do que a condição de reflexão parcial aplicada a uma fronteira totalmente transmissora.

Para finalizar, refere-se que a consideração da superfície livre introduziu mais uma incógnita no problema. Isto é, a resolução do problema com base na teoria do movimento potencial tem como incógnitas $\Phi(x, z, t)$ e $\xi(x, t)$, enquanto

que a resolução com base nas equações de Euler tem como incógnitas $u(x,z,t)$, $w(x,z,t)$, $p(x,z,t)$ e $\xi(x,t)$. Em qualquer dos casos as condições de fronteira na superfície livre não são lineares.

4 - ANÁLISE LINEAR DO MOVIMENTO ONDULATÓRIO

4.1 - Generalidades

A observação mostra que, longe da zona de geração, a agitação marítima caracteriza-se por uma regularidade progressiva do estado de mar, em que as cristas das ondas se tornam bastante compridas e propagam-se aproximadamente com a mesma direcção e velocidade.

Matematicamente estes estados de mar podem descrever-se com espectros de agitação de banda progressivamente mais estreita, que num caso limite representam apenas um único comboio de ondas de crista longa a que se chama onda plana monocromática.

Sempre que possam ser desprezados os efeitos não-lineares associados à agitação marítima local, o estudo da propagação das ondas do mar pode basear-se no princípio de que cada comboio presente no espectro propaga-se independentemente dos outros comboios. O problema fica assim linearizado e consiste em estudar separadamente cada um dos comboios individuais e sobrepôr depois os seus efeitos no local e instante desejados.

A aplicação desta hipótese simplificativa deve, contudo, ser devidamente ponderada em cada estudo a realizar, e deve levar em conta possíveis efeitos secundários. Por exemplo, ao estudar a ressonância de uma bacia portuária, os efeitos secundários associados à agitação marítima local não devem em geral ser desprezados. Efectivamente, um estado de mar caracterizado por um espectro de agitação de banda relativamente estreita pode dar origem a grupos de onda que transportam uma onda de longo período secundária a eles associada e que, ao solicitar a bacia portuária poderá originar fenómenos de ressonância.

Admitindo, então, que não há interacção entre as ondas de diferentes frequências, e que portanto é possível considerar a sobreposição de comboios de on-

das com diferentes frequências, e, admitindo ainda que cada um destes comboios é representável por uma onda plana monocromática, o estudo da agitação marítima e dos problemas com ela relacionados pode fazer-se com base na teoria das ondas de pequena amplitude, que é uma teoria baseada na linearização das condições de fronteira da superfície livre.

Finalmente, tem interesse referir o comentário de Dean (1974) ao comparar os méritos relativos de várias teorias de onda, lineares e não lineares, tomando os valores de aproximação às duas condições de fronteira da superfície livre como indicadores da validade relativa das várias teorias comparadas - "os erros significativos, em termos de engenharia, associados aos erros de aproximação das condições de fronteira continuam por estabelecer".

4.2 - Métodos de Análise

4.2.1 - Generalidades

A propagação das ondas gravíticas de superfície pode descrever-se matematicamente através de uma análise determinística ou de uma análise estocástica, consoante as características de regularidade do estado de mar.

A análise estocástica baseia-se, aqui, numa função de transferência dada pela resposta determinística do sistema (domínio do problema em estudo) a solicitações harmónicas simples de amplitude unitária e frequência ω . A função de transferência é fornecida pelos elementos finitos e converte o espectro da agitação local numa série de espectros de resposta (pressões, velocidades, alturas de onda, elevações da superfície livre, etc.). A integração do espectro de resposta no domínio da frequência fornece a variância da variável em consideração, sendo assim possível prever a probabilidade de um valor máximo ser excedido. Este procedimento substitui o conceito de factor de segurança, válido na análise determinística.

Tópicos sobre a análise estocástica estão apresentados no anexo 1.

4.2.2 - Análise Determinística

4.2.2.1 - Teoria das Ondas de Pequena Amplitude

4.2.2.1.1 - Hipóteses Simplificativas

Neste capítulo pretende-se estabelecer um conjunto de hipóteses simplificativas do comportamento real do fenómeno da propagação das ondas gravíticas de superfície, e das equações que descrevem esse comportamento.

O mais simples modelo matemático que descreve a propagação das ondas gravíticas de superfície assenta nas seguintes hipóteses simplificativas:

H1) - As ondas do mar são planas ou de crista longa. Isto é, a altura da onda é constante ao longo da crista. Considerando esta hipótese e o período constante, ou seja, considerando que a onda é plana e monocromática a presente teoria só deverá ser aplicada, em princípio, em regiões muito afastadas da zona de geração, tal como já foi referido em 4.1.

H2) - A água do mar é um fluido incompressível. A compressibilidade do fluido só é importante quando no movimento ondulatório se atingirem velocidades da ordem de grandeza da velocidade de propagação do som nesse fluido. No caso da água do mar, a velocidade do som é aproximadamente 1500 m/s, Svendsen e Jonsson (1976), pelo que a compressibilidade é desprezável na descrição da propagação da agitação marítima, enquanto não se verificar o fenómeno da rebentação. Este facto permite que a equação da continuidade, deduzida em 3.2.1, seja aplicável à água do mar.

H3) - São desprezáveis os efeitos da viscosidade, turbulência, tensão superficial e atrito de fundo. Como se disse em 3.3.4, a viscosidade dá origem ao desenvolvimento e separação de camadas limite no fundo, que, conjuntamente com a turbulência vão perturbar o movimento ondulatório, inicialmente irrotacional. Assim, pode definir-se um valor para a espessura relativa da região perturbada pelas camadas limite, de modo que a perturbação possa ser desprezada.

Isto é, tendo em conta que a espessura da camada limite cresce com o comprimento do percurso das partículas junto ao fundo, e que este comprimento é proporcional à altura de onda H e ao comprimento de onda L , pode estabelecer-se um critério aproximado que despreza os efeitos da viscosidade e turbulência para valores de $HL/h^2 < 20$ ou 30 , valores estes que correspondem a desprezar os referidos efeitos nas ondas de curto período, Svendsen e Jonsson (1976). Deste modo, nas ondas de longo período e em particular na maré, tal simplificação não é válida, em princípio, visto que a região perturbada atinge dimensões relativas consideráveis.

A tensão superficial não tem influência significativa na propagação das ondas que interessam à hidráulica marítima.

O atrito de fundo é uma das principais causas da dissipação do movimento ondulatório. Tendo em conta que o atrito de fundo consiste na perda de energia cinética das partículas do fluido junto ao fundo, tal forma de dissipação de energia não pode deixar de ser considerada na propagação da maré, das ondas de longo período e das ondas de curto período sempre que, neste caso, a propagação se dê sobre grandes distâncias, isto é, vários comprimentos de onda.

Considerando as simplificações feitas nesta alínea, e admitindo que as forças externas que actuam nas partículas do fluido (gravidade e pressão) são conservativas, tem lugar a aplicação do teorema de Kelvin, e o movimento conserva a vorticidade. Assim, é como já se referiu em 3.3, se inicialmente o movimento for irrotacional, permanece irrotacional e pode ser descrito a partir de uma função potencial de velocidades $\phi(x, z, t)$,

$$\vec{V} = \text{grad } \phi \quad (4.1)$$

Deste modo, a propagação das ondas gravíticas de superfície pode ser descrita com as equações do movimento potencial com superfície livre. Tais equações são a de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2)$$

com as condições de fronteira,

no fundo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{para } z = -\eta(x) \quad (4.3)$$

e na superfície livre,

a condição cinemática:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x}}_{\text{termo não linear}} = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (4.4)$$

e a condição dinâmica:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\xi + \frac{1}{2} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2}_{\text{termos não lineares}} \right] = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (4.5)$$

H4) - A declividade das ondas é muito pequena ($H/L \ll 1$).

Esta hipótese simplificativa surge como consequência da dificuldade matemática em resolver as equações anteriores, e deu origem ao nome da teoria das ondas de pequena amplitude. Efectivamente tais equações apresentam duas dificuldades. São elas:

- a) - As condições de fronteira na superfície livre não são lineares.
- b) - O perfil das ondas, posição da superfície livre, é também uma incôgnita do problema.

As simplificações a introduzir para a resolução da primeira dificuldade consistem na linearização das condições de fronteira da superfície livre, isto é, consistem em desprezar, nas referidas equações das condições de fronteira da superfície livre, os termos não lineares.

O significado de tal simplificação pode ver-se através de uma análise da ordem de grandeza relativa dos vários termos envolvidos nas respectivas equações. A título de exemplo analisa-se a condição cinemática da superfície livre. Para isso, considere-se uma onda em grande profundidade relativa^(*); Nesta onda as partículas do fluido descrevem uma órbita circular em cada período T . Para uma partícula na superfície livre o perímetro orbital é $2\pi \frac{H}{2}$ e a velocidade aproximada é dada por $V = \frac{\pi H}{T}$ em que H é a altura de onda. Veja-se então a ordem de grandeza dos termos envolvidos na equação da condição cinemática, equação (4.4), com auxílio da figura 4.2.2.1.1.1.

As componentes da velocidade orbital são:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{max} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{max} = V = \frac{\pi H}{T} \approx O\left(\frac{H}{T}\right) \quad (4.6)$$

em que O representa a ordem de grandeza de uma variável.

A taxa de variação da posição da superfície livre ao longo do tempo, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, calculada num período T , dá:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{(H/2 - H/2 + H/2)}{T} = \frac{H/2}{T} \approx O\left(\frac{H}{T}\right) \quad (4.7)$$

(*) Em consequência, a presente teoria não dá grande aproximação para as ondas deformadas, para as quais normalmente se utilizam teorias de ordem superior.

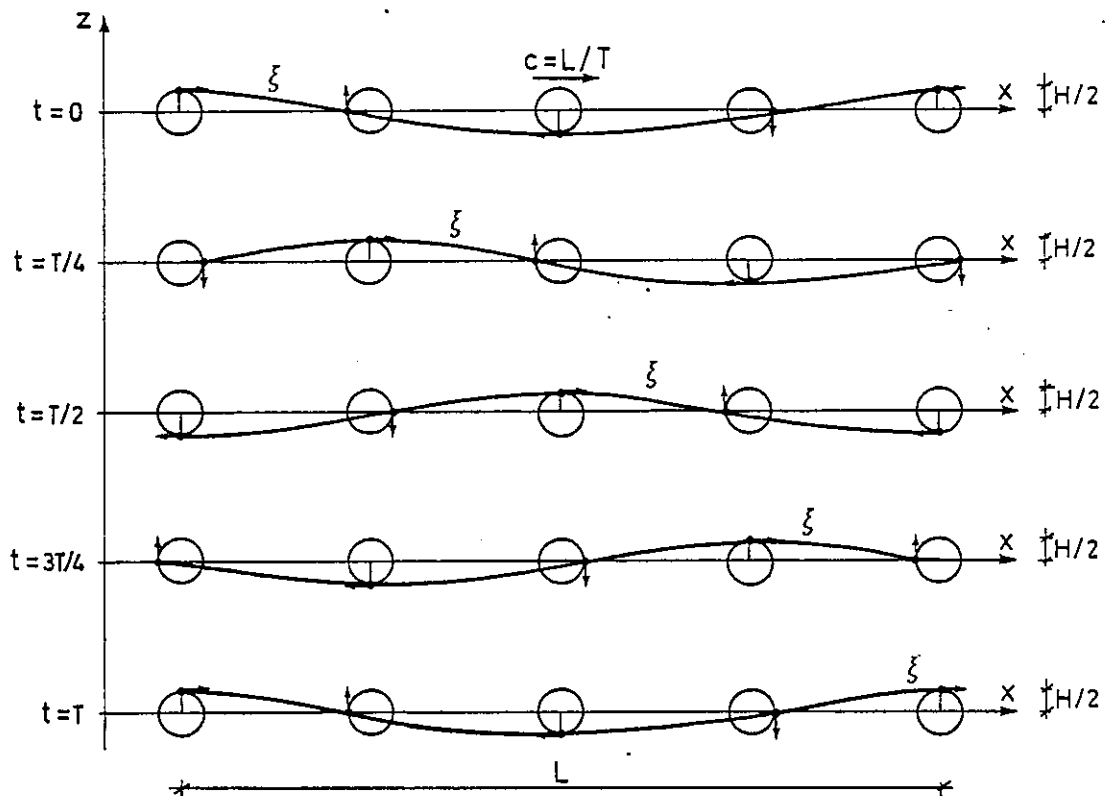


Fig. 4.2.2.1.1.1 - Órbitas das partículas na superfície livre, para interpretação dos termos envolvidos nas equações das condições de fronteira da superfície livre

O gradiente da superfície livre, $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, calculado num comprimento de onda, L , dá:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(H/2 - H/2 + H/2)}{L} = \frac{H/2}{L} \approx O\left(\frac{H}{L}\right) \quad (4.8)$$

Tendo em conta a velocidade de fase, $C = L/T$, as ordens de grandeza atrás calculadas escrevem-se, respectivamente:

$$O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = O\left(\frac{H}{T}\right) = O\left(C \frac{H}{L}\right) \quad (4.9)$$

$$O\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = O\left(\frac{H}{T}\right) = O\left(C \frac{H}{L}\right) = O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \quad (4.10)$$

$$O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = O\left(\frac{H^2}{LT}\right) = O\left(C \frac{H^2}{L^2}\right) = O\left(\frac{H}{L} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = \frac{H}{L} O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \quad (4.11)$$

Deste modo verifica-se que a ordem de grandeza do termo não linear é igual à ordem de grandeza dos termos lineares, multiplicada por H/L . Então, para

se poder desprezar o referido termo não linear basta que a declividade da onda tenha um valor muito pequeno, isto é, basta que $H/L \ll 1$.

Com um raciocínio idêntico podem desprezar-se os termos não lineares da equação da condição dinâmica da superfície livre.

Para a resolução da segunda dificuldade atrás apontada, a simplificação a introduzir consiste em escrever as condições de fronteira da superfície livre (cinemática e dinâmica) no nível médio de repouso ($z = 0$) e não na superfície livre ($z = \xi$), desprezando-se assim a porção da onda que fica acima do nível médio de repouso. Seja, por exemplo, a condição cinemática. Considere-se o desenvolvimento em série de Taylor do termo $\frac{\partial \phi}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, \xi, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0, t) + \xi \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(x, 0, t) + \dots \quad (4.12)$$

Introduzindo a equação (4.2), fica,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, \xi, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0, t) - \xi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, 0, t) + \dots \quad (4.13)$$

A ordem de grandeza dos termos ξ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ é, recorrendo à figura 4.2.2.1.1.1, respectivamente:

$$\xi \sim O(H) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \sim O\left(\frac{1}{L} \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = O\left(\frac{H}{TL}\right) = O\left(C \frac{H}{L^2}\right) \quad (4.15)$$

A equação (4.13) pode então escrever-se:

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, \xi, t)}_{\text{na superfície livre}} = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0, t) + O\left(C \frac{H^2}{L^2}\right) = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0, t)}_{\text{no NMR}} + O\left(\frac{H}{L} \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \quad (4.16)$$

Quer isto dizer que, para valores de H/L muito pequenos, calcular $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ no NMR em vez de calcular na superfície livre equivale a desprezar termos da mesma ordem de grandeza dos termos não lineares.

Em resumo, para ondas de pequena declividade ($H/L \ll 1$) desprezam-se os

termos não lineares das condições de fronteira da superfície livre, e escrevem-se as respectivas equações no nível médio de repouso ($z = 0$). Assim, as equações (4.4 e 4.5) são substituídas, respectivamente, pelas equações:

condição cinemática:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (4.17)$$

condição dinâmica:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\xi = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (4.18)$$

Tendo em conta que a variável $\xi(x, t)$ não intervém na equação (4.2), aquela pode ser eliminada através da combinação das condições de fronteira na superfície livre. Derivando a equação (4.18) em ordem a t e somando com a equação (4.17) obtêm-se uma única condição de fronteira linearizada na superfície livre:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (4.19)$$

Em conclusão, a propagação das ondas gravíticas de superfície pode ser descrita, neste momento, com a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.20)$$

sujeita às condições de fronteira,

no fundo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0 \quad \text{para } z = -\bar{h}(x) \quad (4.21)$$

na superfície livre:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (4.22)$$

4.2.2.1.2 - Profundidade Constante. Resolução das Equações do Movimento Ondulatório

As hipóteses simplificativas que a seguir se fazem vão permitir resolver as equações do movimento ondulatório em profundidade constante.

H5) - O perfil das ondas é constante. Esta hipótese permite considerar que o movimento ondulatório (periódico) propaga-se sem mudar de forma. Matematicamente, a periodicidade do movimento consiste na imposição de uma condição de fronteira dita de periodicidade na direcção horizontal x , já referida no parágrafo 3.4.3.1,

$$\xi(x_0, t_0) = \xi(x_0 + L, t_0) \quad (4.23)$$

$$\xi(x_0, t_0) = \xi(x_0, t_0 + T) \quad (4.24)$$

em que x_0 e t_0 são, respectivamente, uma posição e um instante iniciais. L e T , valores constantes, são respectivamente o comprimento de onda e o período do movimento ondulatório. A relação entre L e T é um valor constante e dá a velocidade de propagação da onda, $C = L/T$

A hipótese do perfil da onda ser constante permite então considerar que a equação

$$\xi(x_0, t_0) = \xi(x, t) \quad (4.25)$$

é válida para todo o x e t relacionados por

$$\frac{x}{L} = C = \frac{L}{T}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{t}{T} - \frac{x}{L} = 0 \quad (4.26)$$

Esta relação entre as variáveis x e t é assim uma consequência da condição de perfil constante, e permite efectuar uma mudança de variáveis em que a nova variável independente, θ , é dada por

$$\theta = n\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L}\right) \quad (4.27)$$

Por conveniência escolhe-se para a constante arbitrária n o valor $n = 2\pi$.

Então fica:

$$\theta = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L}\right) = \omega t - kx \quad (4.28)$$

em que $k = 2\pi/L$ é o número de onda e $\omega = 2\pi/T$ é a frequência angular. A variável θ é uma coordenada angular e chama-se fase da onda. A velocidade de fase, $C = L/T = \omega/k$, é a velocidade de propagação da coordenada angular θ .

Note-se que a fase atrás deduzida, equação (4.28), é válida para uma onda progressiva no sentido positiva de x . Efectivamente, se se considerar um referencial móvel, X , com origem no ponto $x = \frac{\omega}{k} t = Ct$, ou seja, se se considerar $X = Ct - x$, vê-se uma onda de perfil constante no referencial móvel, que se propaga com a velocidade C no sentido positivo de x .

Efectuando a mudança de coordenadas (4.28) e tendo em conta que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = K^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (4.29)$$

a equação do movimento ondulatório escreve-se agora,

$$k^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.30)$$

com as condições de fronteira,

no fundo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} n_z + k \frac{\partial \phi}{\partial \theta} n_x = 0 \quad \text{para } z = -h(x) \quad (4.31)$$

na superfície livre:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (4.32)$$

Na direcção horizontal x aplica-se a condição de periodicidade (3.44), que agora se escreve:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} (\theta, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} (\theta + 2\pi, z) \quad (4.33)$$

H6.a) - O movimento ondulatório propaga-se sobre profundidades constantes h .

A condição de profundidade constante poderá ser eventualmente violada, sempre que o gradiente batimétrico varie gradualmente e seja tal que, localmente, não afecte o movimento da onda. É o que geralmente acontece quando o declive do fundo é suficientemente suave que permite considerar desprezáveis as reflexões das ondas. Nestas circunstâncias diz-se que o fundo é "localmente horizontal" e aplica-se a presente teoria.

Com as simplificações introduzidas até agora, o problema da resolução das equações do movimento ondulatório consiste em determinar a solução da equação de Laplace

$$k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.34)$$

no domínio rectangular $0 \leq x \leq L$ e $-h \leq z \leq 0$, como mostra a figura 4.2.2.1.2.1, sujeita às condições de fronteira,

no fundo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = -h \quad (4.35)$$

na superfície livre:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{w^2}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (4.36)$$

na direcção horizontal x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(0, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(2\pi, z) \quad (4.37)$$

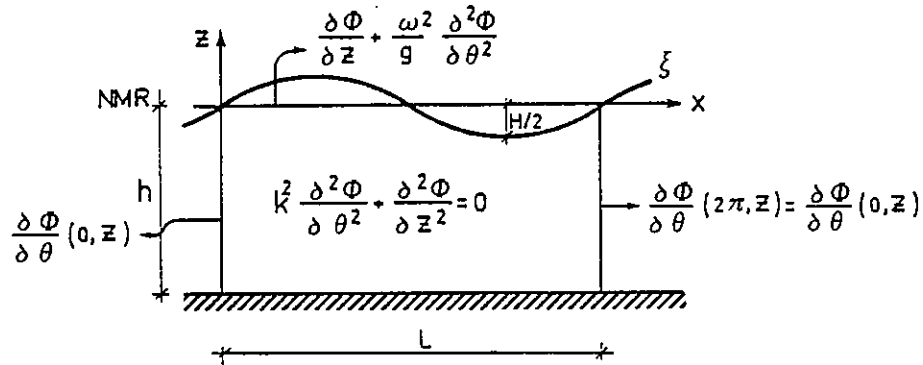


Fig. 4.2.2.1.2.1 - Equação e condições de fronteira do movimento ondulatório em profundidade constante

4.2.2.1.2.1 - Função Potencial

O problema assim posto pode ser resolvido analiticamente pelo método da separação de variáveis, Svendsen e Jonsson (1975), sendo então possível separar a dependência vertical na equação de Laplace, obtendo-se o seguinte resultado para a função potencial:

$$\phi = -\frac{Hc}{2} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \quad (*) \quad (4.38)$$

em que k , número de onda, e ω , frequência angular, estão relacionados através da chamada relação de dispersão:

$$\omega^2 = g k \tanh kh \quad (4.39)$$

determinada pela condição de fronteira da superfície livre.

(*) - Poderia também obter-se o seguinte resultado para a função potencial

$$\phi = -\frac{Hg}{2\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx)$$

4.2.2.1.2.2 - Dispersão de Frequências

Tendo em conta que $L = C T$ e que $C = \omega/k$, a equação anterior pode escrever-se:

$$C = \frac{g}{\omega} \tanh \frac{\omega h}{C} \quad (4.40)$$

Derivando (4.40) em ordem a ω obtêm-se:

$$\frac{dC}{d\omega} = - \frac{C}{\omega} \frac{1-G}{1+G} \quad (4.41)$$

em que,

$$G = \frac{2 k h}{\sinh 2 k h} \quad (4.42)$$

A equação (4.41) representa a taxa de variação da velocidade de fase C com a frequência angular ω . Tendo em conta que a variável G toma valores sempre positivos, a referida taxa de variação assume valores sempre negativos, e consequentemente a função C decresce para valores crescente de ω . Tal equação descreve matematicamente o fenómeno da dispersão de frequências: se for gerada uma série de ondas com frequências diferentes, as ondas separam-se à medida que se propagam. A uma certa distância do local de geração chegam primeiro as ondas de menor frequência e depois as ondas de maior frequência.

A equação (4.41) tem dois casos limites:

— Em grandes profundidades relativas, $h/L > 1/2$, a variável G tende para 0 e, consequentemente,

$$\frac{dC}{d\omega} \approx - \frac{C}{\omega} \quad (4.43)$$

Neste caso diz-se que as ondas que se propagam em grandes profundidades relativas são dispersivas.

— Em pequenas profundidades relativas, $h/L < 1/20$, a variável G tende para 1 e, consequentemente,

$$\frac{dC}{d\omega} \approx 0 \quad (4.44)$$

Neste caso diz-se que as ondas que se propagam em pequenas profundidades relativas não são dispersivas.

4.2.2.1.2.3 - Elevação da superfície livre

A elevação da superfície livre, $\xi(x, t)$, pode ser calculada através das equações (4.18) e (4.39):

$$\xi(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} = \frac{H}{2} \cos(\omega t - kx) \quad (4.45)$$

Note-se que ξ e Φ estão desfasados de $\pi/2$.

4.2.2.1.2.4 - Campo de Velocidades

O campo de velocidades é dado por:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx) \quad (4.46)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \quad (4.47)$$

A figura 4.2.2.1.2.4.1 mostra o campo de velocidades, a superfície livre e a função potencial no NMR, num determinado instante t , para uma onda de pequena amplitude progressiva no sentido positivo de x . Note-se que ξ está em fase com u e Φ está em fase com w . ξ e Φ estão desfasados de $\pi/2$.

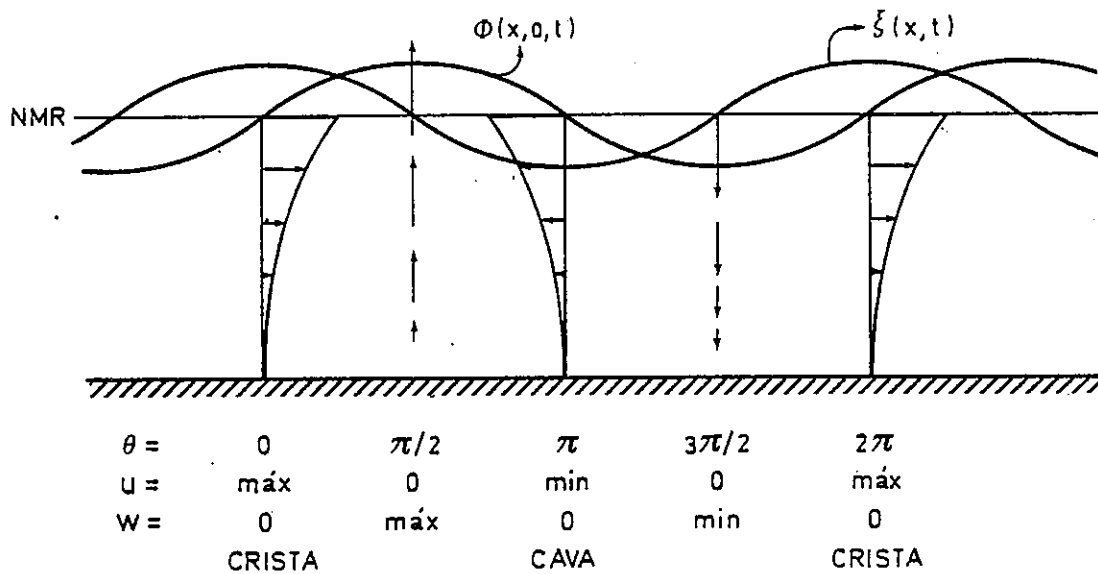


Fig. 4.2.2.1.2.4.1 - Campo de velocidades na teoria das ondas de pequena amplitude. Onda progressiva no sentido positivo de x

4.2.2.1.2.5 - Campo de Pressões

Para a definição de campo de pressões é conveniente separar a pressão hidrostática, $-\rho g z$, da pressão total p . Assim, considera-se

$$p^+ = p + \rho g z \quad (4.48)$$

em que p^+ é a pressão hidrodinâmica, isto é, o excesso de pressão sobre a pressão hidrostática e devido ao movimento ondulatório.

O campo de pressões p^+ determina-se com a equação de Bernoulli linearizada:

$$p^+ = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.49)$$

ou seja

$$p^+ = \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx) \quad (4.50)$$

ou ainda

$$p^+ = \rho g \xi \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (4.51)$$

Note-se que a pressão hidrodinâmica está em fase com a elevação da superfície livre e com a velocidade horizontal.

A figura 4.2.2.1.2.5.1 mostra um diagrama de pressões numa onda de pequena amplitude.

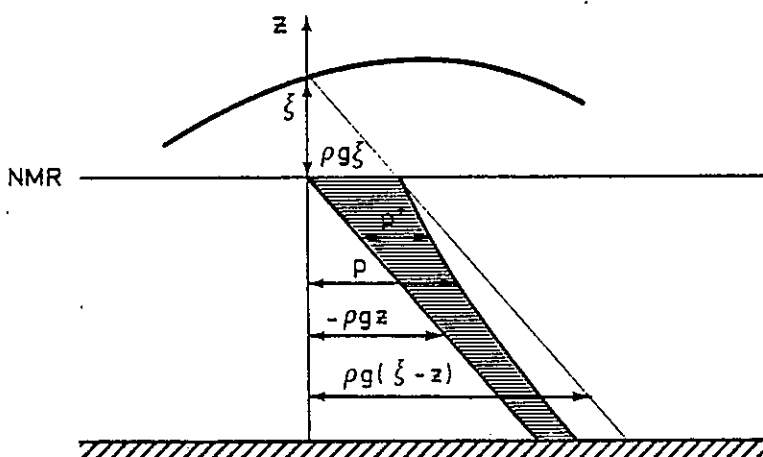


Fig. 4.2.2.1.2.5.1 - Diagrama de pressões numa onda de pequena amplitude

4.2.2.1.2.6 - Velocidade de Grupo. Formulação Cinemática

O conceito de velocidade de grupo vai ser apresentado com base na noção de grupo de ondas.

Considera-se grupo de ondas um conjunto de ondas cujas amplitudes variam gradualmente entre zero e um valor máximo, como mostra a figura 4.2.2.1.2.6.1.

Considerando que todas as equações do movimento ondulatório são lineares é válido o princípio da sobreposição dos efeitos. Deste modo, um número infinito de grupos de ondas pode obter-se a partir da composição de dois comboios de ondas com a mesma direcção de propagação, com a mesma amplitude α e com períodos ligeiramente diferentes.

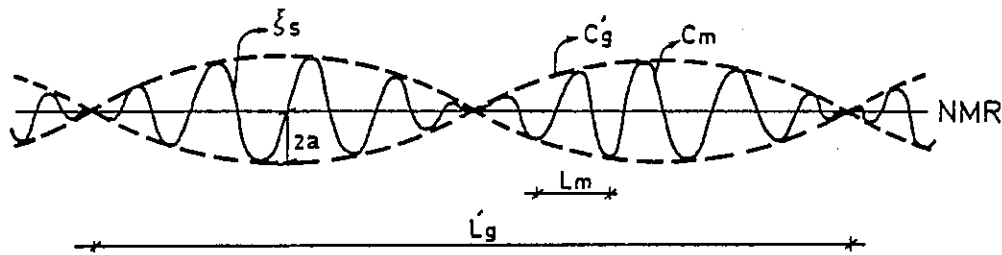


Fig. 4.2.2.1.2.6.1 - Um grupo de ondas

Considerem-se então dois comboios de ondas nestas condições:

$$\xi_1 = a \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad e \quad \xi_2 = a \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (4.52)$$

com, por exemplo, $T_1 < T_2$ o que implica que $\omega_1 > \omega_2$, $L_1 < L_2$ e $k_1 > k_2$.

A composição vectorial destas ondas (ver anexo 2) permite obter facilmente resultados qualitativos. Tem-se então:

$$\xi_1 = a e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} \quad \xi_2 = a e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \quad (4.53)$$

$$\xi_s = \xi_1 + \xi_2 = a e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + a e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \quad (4.54)$$

Considere-se, por facilidade de exposição, o instante $t = 0$, para o qual a equação (4.45) se escreve:

$$\xi_s = a e^{i(-k_1 x)} + a e^{i(-k_2 x)} \quad (4.55)$$

A figura 4.2.2.1.2.6.2 mostra o andamento da onda resultante, ξ_s , que a seguir se resume:

- Para $x = 0$ os dois vectores coincidem.
- Tendo em conta que ξ_1 tem velocidade de rotação maior que a velocidade de rotação de ξ_2 ($\omega_1 > \omega_2$) verifica-se que para $x = L_1$ o vector ξ_1 descreveu uma

rotação de 360° enquanto que ξ_2 descreveu uma rotação inferior a 360° .

— Isto implica que para um determinado comprimento $x = L'$ os dois vectores estão em posição oposta, isto é, desfasados de 180° .

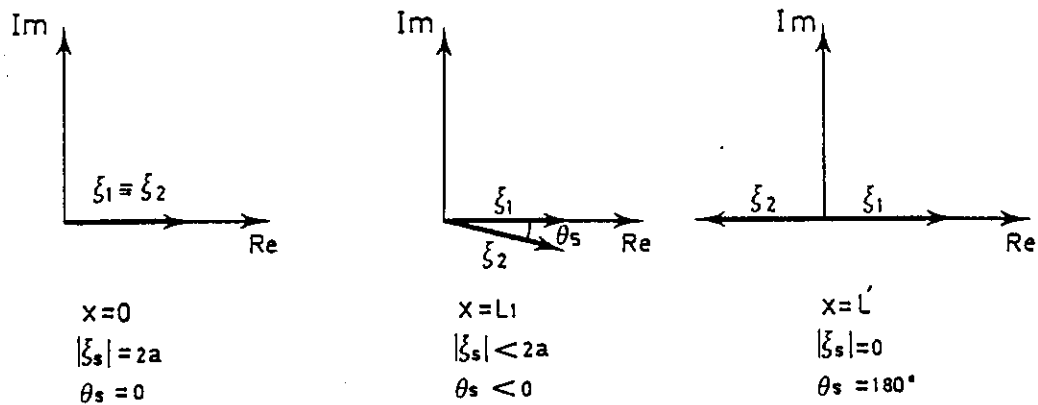


Fig. 4.2.2.1.2.6.2 - Representação vectorial de duas ondas de pequena amplitude. Ver Anexo 2

A composição trigonométrica das ondas (4.52) permite obter facilmente resultados quantitativos. Recorrendo então à trigonometria, a equação (4.54) pode agora escrever-se:

$$\xi_s = \xi_1 + \xi_2 = \underbrace{2a \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right]}_{\text{onda modulada } (\xi_m)} \underbrace{\cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right]}_{\text{onda de modulação } (\xi')} \quad (4.56)$$

Tendo em conta que $\omega_1 > \omega_2$ verifica-se que o segundo termo, ξ' , varia muito lentamente relativamente ao primeiro termo, ξ_m .

O primeiro termo, ξ_m representa uma onda progressiva com amplitude $2a$, frequência $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$, número de onda $k_m = (k_1 + k_2)/2$, período $T_m = 2\pi/\omega_m = 2T_1T_2/(T_1 + T_2)$, comprimento de onda $L_m = 2\pi/k_m = 2L_1L_2/(L_1 + L_2)$ e velocidade de fase $C_m = \omega_m/k_m$. A estes parâmetros chama-se valores médios harmónicos e estão representados nas figuras 4.2.2.1.2.6.1 e 3.

O segundo termo, ξ' , varia lentamente entre $+1$ e -1 e representa uma on-

da progressiva com frequência $\omega'_g = (\omega_1 - \omega_2)/2$ e número de onda $k'_g = (k_1 - k_2)/2$, que se propaga com a velocidade $C'_g = \omega'_g/k'_g = (\omega_1 - \omega_2)/(k_1 - k_2)$. O perfil desta onda é a envolvente de ξ_g , pelo que representa uma onda fictícia.

Assim, considerando ξ_g como o produto de uma oscilação rápida,

$$\xi_m = 2a \cos(\omega'_m t - k'_m x), \quad (4.57)$$

por uma oscilação lenta de amplitude unitária,

$$\xi' = \cos(\omega'_g t - k'_g x), \quad (4.58)$$

pode interpretar-se ξ_g como sendo uma onda com amplitude modulada pela envolvente. A figura 4.2.2.1.2.6.3 ilustra esta interpretação.

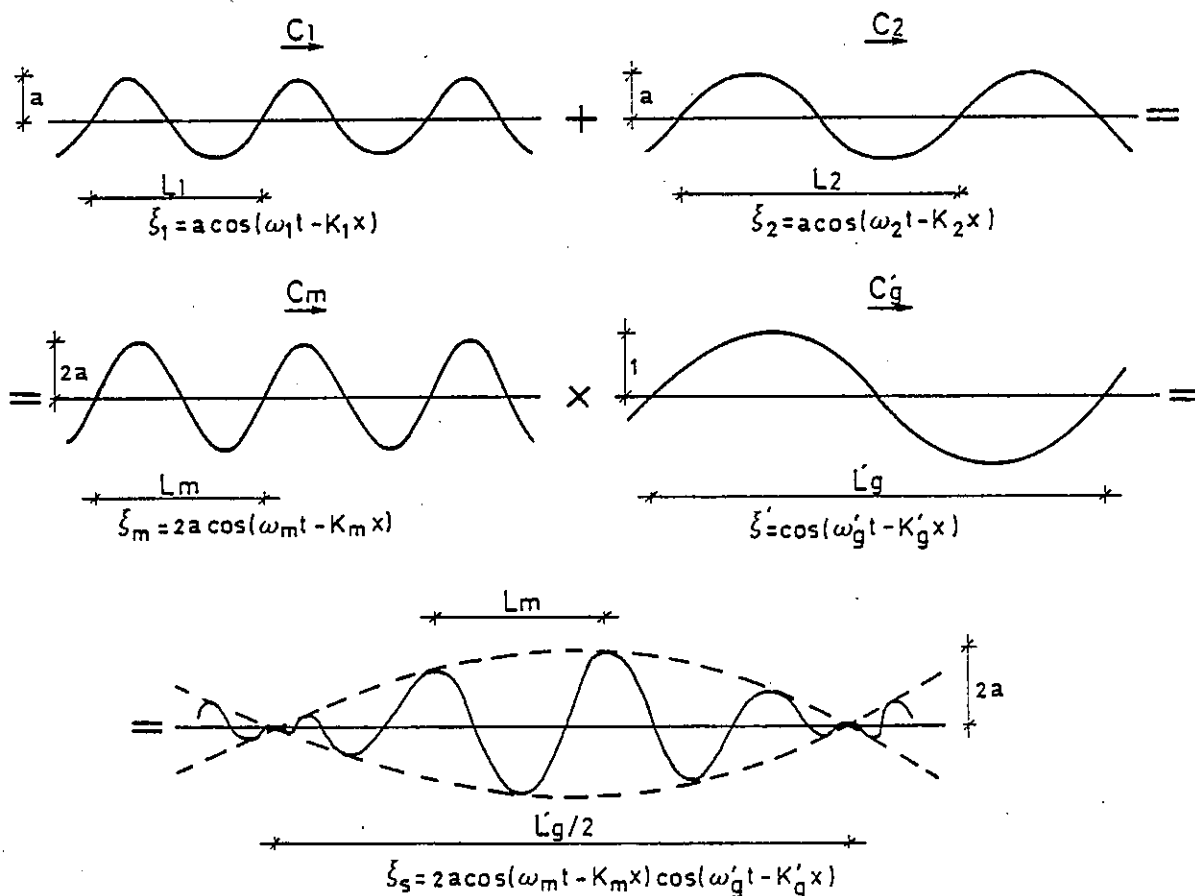


Fig. 4.2.2.1.2.6.3 - Composição de 2 comboios de ondas com a mesma direcção de propagação, com a mesma amplitude e com períodos ligeiramente diferentes

Põe-se agora a questão de saber qual a relação de grandeza entre C_m e C'_g . Para tal, considere-se a diferença

$$C'_g - C_m = \frac{w_1 - w_2}{k_1 - k_2} - \frac{w_1 + w_2}{k_1 + k_2} = \frac{2k_1 k_2}{k_1^2 - k_2^2} (C_1 - C_2) \quad (4.59)$$

Tendo em conta que $k_1 > k_2$ verifica-se que o factor $2k_1 k_2 / (k_1^2 - k_2^2)$ toma sempre valores positivos. Por outro lado e atendendo à dispersão de frequências conclui-se que $C_1 < C_2$ visto ser $w_1 > w_2$. Deste modo, o factor $(C_1 - C_2)$ toma sempre valores negativos o que permite concluir que na expressão (4.59) $C'_g - C_m < 0$ e portanto $C'_g < C_m$. Por outras palavras, a onda envolvente propaga-se com uma velocidade inferior à das ondas individuais, excepto em águas de pequena profundidade relativa, visto que aí a velocidade não depende da frequência ($C = \sqrt{gh}$). Esta conclusão está de acordo com a observação da natureza: as ondas individuais propagam-se através da envolvente parecendo nascerem no nó posterior e desaparecerem no nó anterior de cada grupo.

O período e o comprimento de onda da envolvente ou do grupo são, respectivamente,

$$T'_g = \frac{2\pi}{w'_g} = \frac{2 T_1 T_2}{T_2 - T_1} \quad \text{e} \quad L'_g = \frac{2\pi}{k'_g} = \frac{2 L_1 L_2}{L_2 - L_1} \quad (4.60)$$

O comprimento do grupo é a distância entre dois nós da envolvente, em posição alternada.

Considere-se agora que as ondas ξ_1 e ξ_2 tendem para a mesma frequência w . Então, verifica-se que

$$C'_g = \frac{w_1 - w_2}{k_1 - k_2} \quad \text{tende para} \quad \frac{dw}{dk} = C_g \quad (4.61)$$

Tendo em atenção que $w = Ck$ obtêm-se, a partir da equação (4.61), a seguinte equação:

$$C_g = C + k \frac{dC}{dk} \quad (4.62)$$

que vai permitir estabelecer uma relação de grandeza entre C e C_g : sendo C inversamente proporcional a k , vem $dC/dk < 0$ e portanto $C_g < C$. Em águas de pequena profundidade relativa, $C = \sqrt{gh}$, $dC/dk = 0$ e portanto $C_g = C$.

Tendo em conta a relação de dispersão, $C^2 = g/k \tanh kh$, a equação (4.62) pode agora escrever-se:

$$C_g = nC \quad (4.63)$$

com

$$n = \frac{1}{2}(1 + G) \quad \text{e} \quad G = \frac{2 kh}{\sinh 2 kh} \quad (4.64)$$

A variável n é o factor de empolamento (shoaling).

Em pequenas profundidades relativas $G \rightarrow 1$ e portanto $C_g \sim C$. Em grandes profundidades relativas $G \rightarrow 0$ e portanto $C_g \sim \frac{1}{2} C$.

Os resultados anteriores são generalizáveis ao movimento ondulatório que se propaga numa direcção qualquer do nível médio de repouso (x, y) . Seguindo Ursell (1960), Whitham (1960) e Phillips (1969) obtêm-se os resultados que a seguir se resume.

O vector número de onda, \bar{k} , e a frequência, w , definem-se a partir da função de fase $\theta(x, y, t)$, respectivamente por:

$$\bar{k} = \nabla \theta \quad (4.65)$$

$$w = - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.66)$$

Da definição do número de onda conclui-se que este é irrotacional, visto que:

$$\nabla \times \bar{k} = \nabla \times \nabla \theta = 0 \quad (4.67)$$

Combinando as equações que definem o vector número de onda e a frequên-

cia, respectivamente equações (4.65) e (4.66), obtêm-se:

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \nabla w = 0 \quad (4.68)$$

que é a equação da conservação das ondas. Esta equação deixa de ser válida logo que não haja conservação das cavas e das cristas das ondas. A equação anterior estabelece a conservação do número de ondas por unidade de comprimento: sendo $k/2\pi$ o número de cristas por unidade de comprimento, densidade de ondas, e $w/2\pi$ o número de cristas que na unidade de tempo passam num ponto, fluxo de ondas, a referida equação de conservação pôde escrever-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{densidade de ondas}) + \nabla (\text{fluxo de ondas}) = 0 \quad (4.69)$$

O vector velocidade de fase, \bar{c} , é paralelo ao vector número de onda, \bar{k} , e é dado por:

$$\bar{c} \cdot \bar{k} = w \quad \text{ou} \quad \bar{c} = \frac{w}{k^2} \bar{k} \quad (4.70)$$

Tendo em conta a equação (4.70), a equação da conservação, equação (4.68), pode escrever-se:

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{c}_g \cdot \nabla \bar{k} = 0 \quad (4.71)$$

em que \bar{c}_g é o gradiente da frequência no número de onda, isto é, a velocidade de grupo:

$$\bar{c}_g = \nabla_k w = \frac{\partial w}{\partial k_i} \bar{e}_i \quad (4.72)$$

A equação escalar de conservação obtêm-se por projecção da equação vectorial numa direcção i :

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial k_i} \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0 \quad (4.73)$$

Tendo em conta a irrotacionalidade do número de onda,

$$\frac{\partial k_j}{\partial x_i} = \frac{\partial k_i}{\partial x_j} \quad (4.74)$$

as equações vectorial e escalar escrevem-se, respectivamente,

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{c}_g \cdot \nabla \bar{k} = 0 \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + c_{g_j} \cdot \frac{k_i}{x_j} = 0 \quad (4.76)$$

e estabelecem a velocidade de variação de \bar{k} seguindo um ponto que se move com a velocidade de grupo \bar{c}_g , ou seja, estabelecem que os valores do número de onda, \bar{k} , propagam-se com a velocidade de grupo \bar{c}_g . Enquanto isto, as cristas individuais propagam-se com a velocidade de fase \bar{c} .

Whitham (1960) mostra que a direcção da velocidade de grupo-raio - é a mesma da velocidade de fase - ortogonal - (que por seu turno é paralela ao vector número de onda) se e só se a frequência depender do valor do número de onda sem contudo depender da sua direcção. Nestas circunstâncias o movimento ondulatorio constitui um sistema isotrópico. Como exemplo, refere-se um movimento ondulatorio puro em profundidade constante.

4.2.2.1.2.7 - Energia do Movimento Ondulatorio

Apresenta-se seguidamente uma abordagem dos conceitos de energia mecânica da onda e propagação de energia no movimento ondulatorio.

As formas de energia mecânica são a energia potencial e a energia cinética. Num determinado instante, a energia potencial está relacionada com o deslocamento vertical das partículas do fluido da posição de repouso, enquanto a energia cinética está relacionada com o campo de velocidades a que as partículas do fluido ficam sujeitas no movimento ondulatorio.

A energia potencial instantânea por unidade de volume é $\rho g z$, em que ρ é a densidade do fluido e g a aceleração da gravidade.

A energia potencial instantânea por unidade de superfície, $E_p(\theta)$, resulta da integração na vertical da energia potencial instantânea por unidade de volume:

$$E_p(\theta) = \int_{-h}^{\xi} \rho g z \, dz - \int_{-h}^0 \rho g z \, dz = \int_0^{\xi} \rho g z \, dz = \frac{1}{2} \rho g \xi^2 \quad (4.77)$$

A energia potencial média por unidade de superfície e por período ou comprimento de onda, \bar{E}_p , é dada por:

$$\bar{E}_p = \bar{E}_p(\theta) = \frac{1}{2} \rho g \overline{\xi^2} = \frac{1}{2} \rho g \frac{H^2}{4} \overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (4.78)$$

em que $\xi = \frac{H}{2} \cos(\theta)$ representa o perfil da onda, e em que o valor médio $\overline{\xi^2}$ é igual a $\frac{H^2}{4} \overline{\cos^2 \theta}$, com $\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2}$ num período.

A energia cinética instantânea por unidade de volume é $\frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2)$, em que u e w representam as componentes da velocidade das partículas do fluido. A figura 4.2.2.1.2.7.1 mostra as linhas de corrente do mesmo campo de velocidades.

A energia cinética instantânea por unidade de superfície, $E_k(\theta)$, resulta da integração na vertical da energia cinética instantânea por unidade de volume:

$$E_k(\theta) = \int_{-h}^{\xi} \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \, dz \quad (4.79)$$

Em virtude das hipóteses simplificativas assumidas, o extremo de integração superior, $z = \xi$, pode ser substituído por $z = 0$. Assim, tendo em conta as expressões (4.46 e 4.47) e após alguma manipulação obtêm-se:

$$E_k(\theta) = \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \, dz = \frac{1}{16} \rho g H^2 + \frac{1}{8} \rho g H^2 \frac{2kh}{\sinh 2kh} \left(\frac{4}{H^2} \xi^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (4.80)$$

A energia cinética média por unidade de superfície e por período ou comprimento de onda, E_k , é dada por:

$$E_k = \overline{E}_k(\theta) = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (4.81)$$

A expressão anterior resulta do facto de o valor médio num período da segunda parcela do segundo membro da equação (4.80) ser nulo.

A densidade de energia ou energia específica média, E , é a soma da energia potencial média e da energia cinética média, respectivamente expressões (4.78) e (4.81), e é dada por:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (4.82)$$

Pode ainda definir-se a energia mecânica instantânea por unidade de superfície, $E(\theta) = E_p(\theta) + E_k(\theta)$, a partir da qual se pode também calcular a densidade de energia:

$$E = \overline{E}(\theta) = \overline{(E_p(\theta) + E_k(\theta))} = \overline{E}_p(\theta) + \overline{E}_k(\theta) = E_p + E_k = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (4.83)$$

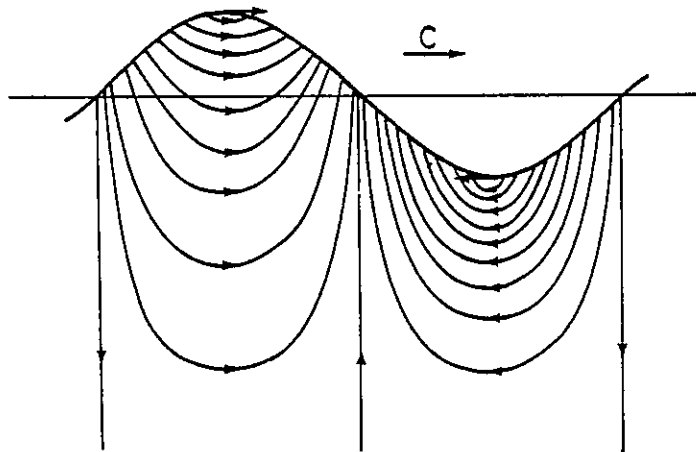


Fig. 4.2.2.1.2.7.1 - Linhas de corrente de uma onda progressiva, Defant (1961)

A figura 4.2.2.1.2.7.2 mostra o andamento da energia potencial, da energia cinética e da densidade de energia, num comprimento de onda.

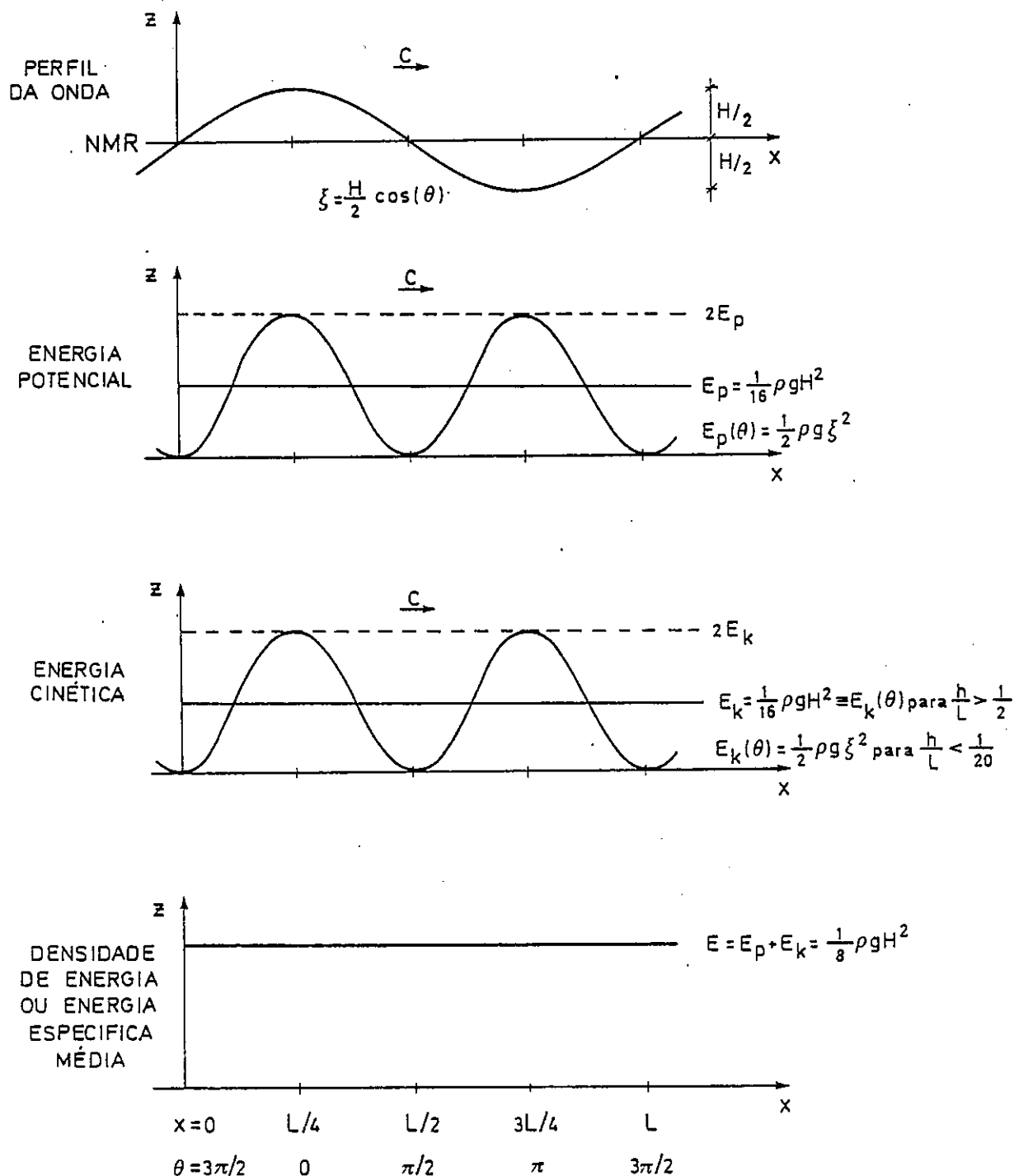


Fig. 4.2.2.1.2.7.2 - Andamento da energia potencial, da energia cinética e da densidade de energia numa onda progressiva de pequena amplitude

Ao definir-se as formas de energia mecânica da onda considerou-se um instante particular. Porém, para o cálculo da propagação de energia no movimento ondulatório vai considerar-se não um instante particular, mas sim um intervalo de tempo, dt , durante o qual a energia se transmite através de uma secção vertical fixa.

Ao valor médio (por comprimento de onda) da energia transmitida através da referida secção vertical (de largura unitária e paralela à frente de onda), integrado na vertical, chama-se fluxo de energia ou fluxo médio de energia ou ainda potência da onda, e designa-se por E_f .

Considere-se então uma secção vertical fixa de largura unitária e paralela à frente de onda, como mostra a figura 4.2.2.1.2.7.3.

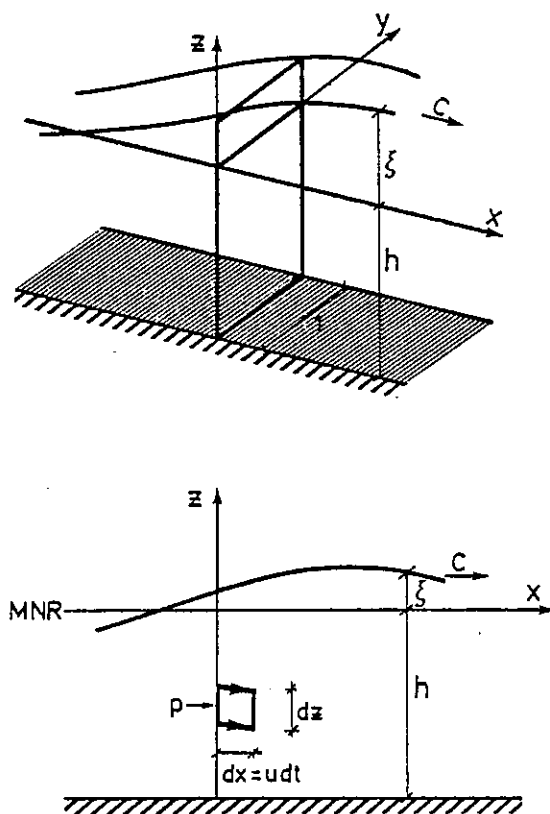


Fig. 4.2.2.1.2.7.3 - Secção vertical para o cálculo do fluxo de energia

Durante o intervalo de tempo, dt , um rectângulo elementar de lado dz da

secção vertical fixa desloca-se a distância $dx = u dt$, como mostra a figura 4.3.2.1.2.7.3. Consequentemente, o prisma elementar de secção $dx \times dz$ transporta energia cinética e energia potencial. Além disso, a resultante da pressão horizontal que actua no referido rectângulo elementar é igual a $p dz$ e produz o trabalho $p u dz dt$, durante o intervalo de tempo dt .

Deste modo, a transmissão instantânea de energia por unidade de tempo e por unidade de largura de crista, $E_f(t)$, é dada por:

$$E_f(t) = \int_{-h}^{\xi} \left[p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \right] u dz \quad (4.84)$$

ou

$$E_f(t) = \int_{-h}^{\xi} \left[p^+ + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \right] u dz \quad (4.85)$$

em que p^+ é a pressão hidrodinâmica definida na equação (4.48).

Em virtude da linearidade admitida, a equação anterior pode escrever-se simplesmente:

$$E_f(t) = \int_{-h}^0 p^+ u dz = \frac{1}{8} \rho g H^2 C \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \cos^2 \omega t \quad (4.86)$$

O valor médio (por período ou comprimento de onda) de $E_f(t)$ é, como se disse atrás, o fluxo médio de energia ou potência da onda (por unidade de crista) e é dado por:

$$E_f = \frac{1}{16} \rho g H^2 C \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (4.87)$$

Finalmente, tendo em conta a densidade de energia E , equação (4.82), e a velocidade de grupo C_g , equações (4.63 e 4.64) e fluxo médio de energia pode escrever-se na forma:

$$E_f = E C_g \quad (4.88)$$

ou seja, há um transporte de energia a toda a profundidade de água na direcção da propagação da onda.

4.2.2.1.3 - Profundidade Variável. Equação Reduzida das Ondas de Pequena Amplitude

A hipótese simplificativa atrás considerada, profundidade constante na propagação do movimento ondulatório, permitiu a resolução analítica das equações do movimento, cujos resultados se apresentaram em 4.2.2.1.2.

Tal hipótese simplificativa poderá ser violada sempre que o gradiente batimétrico varie gradualmente e seja suficientemente pequeno para que, localmente, não afecte o movimento da onda. Isto é, para que a propagação do movimento ondulatório se possa considerar em profundidade *localmente constante*. Tendo em atenção a figura 4.2.2.1.3.1, o movimento ondulatório pode considerar-se em profundidade *localmente constante*, sempre que

$$\frac{|\Delta h|}{h} = \frac{|dh/dx|L}{h} \ll 1, \quad (4.89)$$

ou seja, sempre que a variação da profundidade por comprimento de onda, Δh , seja uma pequena fracção da profundidade h .

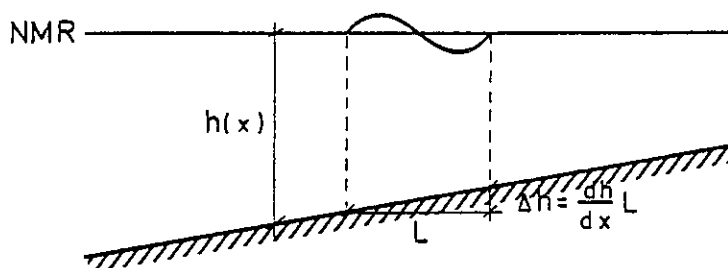


Fig. 4.2.2.1.3.1 - Movimento ondulatório com fundo inclinado

Caso não se verifique a relação (4.89), o movimento ondulatório rebenta, isto é, desintegra-se em ondas de período inferior ao do movimento inicial. Nestas condições não se verifica a conservação das ondas, equação (4.68), e a teoria das ondas de pequena amplitude deixa de ser válida.

Explicado o significado de fundo *localmente horizontal* ou profundidade *localmente constante*, considere-se a seguinte hipótese simplificativa do movimento ondulatório real:

H6-b) - O movimento ondulatório propaga-se sobre profundidades variáveis, *localmente constantes*.

De agora em diante, considere-se que o movimento ondulatório se propaga numa direcção qualquer do NMR, plano (x,y) , como mostra a figura 4.2.2.1.3.2.

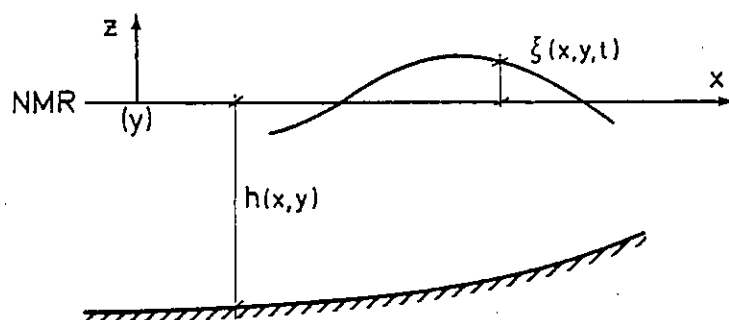


Fig. 4.2.2.1.3.2 - Propagação do movimento ondulatório numa direcção qualquer do NMR, plano (x,y) , sobre profundidades variáveis, *localmente constantes*

Reformulando o problema, a propagação das ondas gravíticas de superfície pode ser descrita, neste momento, com as equações (4.20), (4.21) e (4.22) escritas no espaço tridimensional (x,y,z) . São elas: a equação de campo,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.90)$$

sujeita às condições de fronteira:

no fundo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \text{para } z = -h(x,y) \quad (4.91)$$

na superfície livre:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (4.92)$$

Considerando que o fundo é *localmente horizontal*, o problema tridimensional formulado nas equações (4.90), (4.91) e (4.92) pode ser reduzido a um problema bidimensional, dando assim origem à chamada equação reduzida do movimento ondulatorio de pequena amplitude.

Seguindo caminhos diversos, a equação reduzida foi sucessivamente apresentada por Svendsen (1976), Berkhoff (1972), Jonsson e Brink-Kjaer (1973), Smith e Sprinks (1975) e, finalmente, foi transformada por Radder (1978) numa equação do tipo Helmholtz.

A dedução da equação reduzida do movimento ondulatorio de pequena amplitude pode ser vista em qualquer dos trabalhos atrás referidos. Já de seguida indicam-se sucintamente os passos principais daquela dedução, segundo Berkhoff (1972).

1) - Em primeiro lugar consideram-se todas as hipóteses simplificativas feitas até aqui. Consequentemente, o movimento ondulatorio pode ser descrito com as equações (4.90), (4.91) e (4.92).

2) - Seguidamente, considera-se que o movimento ondulatorio é estacionário e harmónico simples. Esta hipótese simplificativa consiste em admitir que o movimento tem uma dependência temporal do tipo $\exp(-i\omega t)$. Assim, todas as quantidades dependentes do tempo são periódicas. Em particular, o potencial de velocidades, $\phi(x,y,z,t)$, e a elevação da superfície livre, $\xi(x,y,t)$, relacionam-se com as correspondentes partes espaciais complexas, respectivamente $\phi(x,y,z)$ e $\eta(x,y)$, do seguinte modo:

$$\phi(x,y,z,t) = \text{Parte Real de } \{ \phi(x,y,z) e^{-i\omega t} \} \quad (4.93)$$

$$\xi(x,y,t) = \text{Parte Real de } \{ \eta(x,y) e^{-i\omega t} \} \quad (4.94)$$

em que $\omega = 2\pi/T$ é a frequência angular, T é o período e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

As equações anteriores, (4.90), (4.91) e (4.92), escrevem-se agora de outro modo:

Equação de campo:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.95)$$

sujeita às condições de fronteira:

no fundo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{para } z = -h(x,y) \quad (4.96)$$

na superfície livre:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{w^2}{g} \phi = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (4.97)$$

Da condição dinâmica linearizada na superfície livre, equação (4.18), determina-se a relação entre as partes espaciais do potencial de velocidades e da elevação da superfície livre:

$$\eta(x,y) = \frac{i\omega}{g} \phi(x,y,0) \quad (4.98)$$

Neste ponto, a hipótese H6-a, profundidade constante, permitiria, sem mais, efectuar uma separação de variáveis no parâmetro que modela o potencial de velocidades, tal como se referiu em 4.2.2.1.2.1.

3) - Porém, em lugar de se admitir a hipótese H6-a, considera-se que, localmente, a onda se comporta como em profundidade constante, podendo esta variar suavemente, isto é, variar numa escala grande quando comparada com o comprimento de onda ($\lambda > L$, como mostra a figura 4.2.2.1.3.3). Por outras palavras, considera-se a hipótese H6-b, já referida no início do presente ponto.

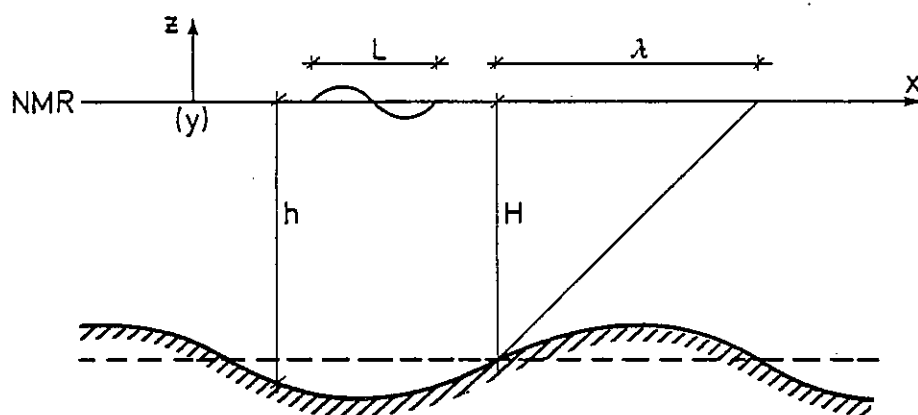


Fig. 4.2.2.1.3.3 - Definição de variáveis para a dedução da equação reduzida, segundo Berkhoff (1972)

H - profundidade de referência, profundidade média.

λ - comprimento de referência, típico da variação da batimetria.

L - comprimento de onda.

h - profundidade local.

$d = h/H$ - profundidade adimensional.

$\xi = z/H$ - coordenada vertical adimensional.

$\mu = H/L$ - profundidade de referência adimensional.

$\epsilon = L/\lambda$ - comprimento de onda adimensional.

$\nu = \mu\sqrt{\epsilon} = H/\sqrt{L\lambda}$

4) - Após se adimensionalizarem as variáveis do problema, admite-se que o potencial de velocidades, ϕ , se pode exprimir na forma:

$$\phi(x, y, z) = \bar{\phi}(x, y; \nu \xi) Z(d, \xi, \mu) \quad (4.99)$$

Esta equação, (4.99), significa que embora a maior parte da variação (variação principal) da função potencial na direcção z seja determinada pela função separada na direcção z , $Z(d, \xi, \mu)$, uma pequena parte da variação (pequena variação) da função potencial na referida direcção z é determinada pela função

separada no plano (x, y) , $\bar{\phi}(x, y; v\xi)$.

5) - Seguidamente desenvolve-se a função $\bar{\phi}(x, y; v\xi)$ em série de Taylor na variável $v\xi$:

$$\bar{\phi}(x, y; v\xi) = \phi_0(x, y) + v\xi\phi_1(x, y) + v^2\xi^2\phi_2(x, y) + \dots \quad (4.100)$$

Por outras palavras, a função $\bar{\phi}(x, y; v\xi)$ é modelada com uma expansão as sintótica na coordenada z .

6) - A representação do potencial de velocidades atrás indicada, equação (4.100), é introduzida na equação de campo, na condição de fronteira do fundo e na condição de fronteira da superfície livre, respectivamente equações (4.95), (4.96) e (4.97). Após alguma manipulação e uma integração na vertical obtêm-se os seguintes resultados:

a) - A função $\bar{\phi}$, (pequena) variação da função potencial na direcção z , é calculada através da equação:

$$\nabla(Cc_g \nabla \phi_0) + \frac{Cg}{C} w^2 \phi \approx 0 \quad (4.101)$$

dita equação reduzida das ondas de pequena amplitude, que é válida se se desprezarem os termos de ordem igual ou superior a $O(v^2)$.

b) - A função Z , variação (principal) da função potencial na direcção z , é calculada por:

$$Z(h, z) = \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \quad (4.102)$$

em que k é o número de onda e está relacionado com a frequência angular w através da relação de dispersão,

$$w^2 = gk \tanh(kh) \quad (4.103)$$

relação esta que, como já se sabe, é estabelecida pela condição de fronteira da

superfície livre.

c) - A função potencial, $\phi(x,y,z)$, é finalmente calculada por:

$$\phi(x,y,z) \approx \phi_0(x,y) Z(h,z) \quad (4.104)$$

d) - A elevação da superfície livre é calculada pela equação (4.98), tendo em conta as equações (4.102) e (4.104):

$$\eta(x,y) = \frac{i\omega}{g} \phi(x,y,0) \approx \frac{i\omega}{g} \phi_0(x,y) \quad (4.105)$$

Em resumo, o problema tridimensional (x,y,z) formulado nas equações (4.90), (4.91) e (4.92) fica reduzido a um problema bidimensional (x,y) , que consiste na resolução da equação (4.101), sujeita a apropriadas condições de fronteira aplicadas nos limites do domínio do problema.

Tendo em conta a equação (4.105), a equação reduzida pode também escrever-se:

$$\nabla(CC_g \nabla \eta) + CC_g k^2 \eta = 0 \quad (4.106)$$

Para simplificação da escrita, a variável $\phi_0(x,y)$ escreve-se, de agora em diante, simplesmente $\phi(x,y)$.

4.2.2.1.3.1 - Propriedades da Equação Reduzida das Ondas de Pequena Amplitude

A equação reduzida do movimento ondulatório de pequena amplitude é válida, como se disse, para profundidades gradualmente variáveis, pelo que alguns autores lhe dão o nome de equação da onda em declives suaves (mild-slope wave equation).

Radder (1978) transformou a equação reduzida introduzindo uma nova variável, ξ , definida por:

$$\xi = \eta \sqrt{CC_g} = i \frac{\omega}{g} \phi \sqrt{CC_g} \quad (4.107)$$

Com esta nova variável, a equação (4.101) transforma-se na seguinte equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \xi + K_c^2 \xi = 0 \quad (4.108)$$

em que K_c é o número de onda efectivo determinado a partir de:

$$K_c^2 = K^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{CG}}{\sqrt{CG}} \quad (4.109)$$

Sob o ponto de vista computacional, a equação (4.108) constitui uma alternativa à equação reduzida, equação (4.101).

A equação reduzida das ondas de pequena amplitude contém todas as situações limites como casos especiais e é de aplicação geral. Assim,

a) - Para pequenas profundidades relativas, Kh toma valores pequenos e a equação reduzida degenera na equação das ondas de pequena profundidade relativa:

$$\nabla \cdot (h \nabla \phi) + \frac{w^2}{g} \phi = 0 \quad (4.110)$$

ou

$$\nabla \cdot (h \nabla \eta) + h K^2 \eta = 0 \quad (4.111)$$

b) - Para grandes profundidades relativas, Kh toma valores grandes e a equação reduzida degenera na equação das ondas de grande profundidade relativa:

$$\nabla^2 \phi + \frac{w^4}{g^2} \phi = 0 \quad (4.112)$$

ou

$$\nabla^2 \eta + K^2 \eta = 0 \quad (4.113)$$

Também nestas equações degenera a equação da onda reduzida, quando em profundidade constante.

c) - Para profundidades relativas intermédias aplica-se a equação reduzi da em termos da variável ϕ ou da variável η , respectivamente:

$$\nabla \cdot (CC_g \phi) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi = 0 \quad (4.114)$$

e

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + CC_g K^2 \eta = 0 \quad (4.115)$$

d) - Difracção - Para o estudo da difracção, a profundidade h é constante, bem como os parâmetros C e C_g e a equação reduzida degenera na equação da difracção (equação de Helmholtz):

$$\nabla^2 \phi + K^2 \phi = 0 \quad (4.116)$$

e) - Refracção - A equação reduzida das ondas de pequena amplitude permite também fazer o estudo clássico da refracção. Efectivamente, substituindo na equação (4.115) a altura de onda η pela sua expressão complexa,

$$\eta = A e^{-ik\gamma}, \quad (4.117)$$

em que $A = A(x, y)$, $K = K(x, y)$ e $\gamma = \gamma(x, y)$ são respectivamente a amplitude (real), o número de onda e a função de fase (real), com $\theta = K\gamma$ o ângulo de fase (real) obtêm-se:

$$\begin{aligned} & CC_g \nabla^2 A - CC_g A |\nabla \theta|^2 + \nabla(CC_g) \cdot \nabla A + CC_g AK^2 - \\ & -i [CC_g A \nabla^2 \theta + 2CC_g \nabla A \cdot \nabla \theta + A \nabla(CC_g) \cdot \nabla \theta] = 0 \end{aligned} \quad (4.118)$$

Para que a equação anterior seja satisfeita, tanto a parte real como a parte imaginária têm que ser nulas. Assim, obtêm-se, respectivamente, as equações:

$$|\nabla \theta|^2 = K^2 + \frac{1}{A} \left[\nabla^2 A + \frac{1}{CC_g} \nabla A \cdot \nabla(CC_g) \right] \quad (4.119)$$

e

$$\nabla \cdot (A^2 C C_g \nabla \theta) = 0 \quad (4.120)$$

Desprezando o termo entre parêntesis recto na equação (4.118) obtêm-se as equações da refração:

$$|\nabla \theta|^2 = k^2 \quad (4.121)$$

$$\nabla \cdot (A^2 C C_g \nabla \theta) = 0 \quad (4.122)$$

A primeira é a chamada equação eikonal ou *equação geométrica* da onda e é utilizada para calcular a variação do ângulo de fase, θ , ao longo das ortogonais (linhas perpendiculares às linhas de fase, $\theta = \text{constante}$).

A segunda equação dá origem à chamada equação de transporte ou equação da energia e permite calcular a altura de onda ao longo das ortogonais. Efectivamente, integrando a equação (4.121) num domínio fechado arbitrário do plano (x, y) com fronteira s , e aplicando o teorema de Gauss obtêm-se:

$$\int_s A^2 C C_g \nabla \theta \cdot \overline{dr} = 0 \quad (4.123)$$

em que \overline{dr} é um vector perpendicular a s dirigido para o exterior.

Considere-se agora um domínio particular limitado por duas ortogonais vizinhas (O_1 e O_2) e por duas frentes vizinhas (F_1 e F_2), como mostra a figura 4.2.2.1.3.1.1.

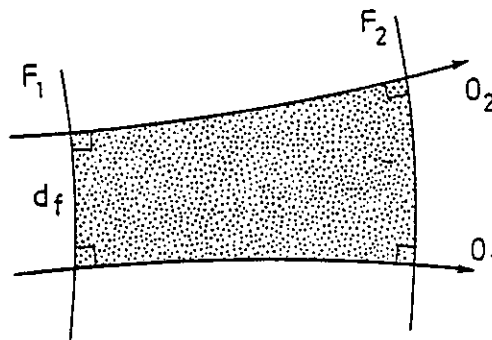


Fig. 4.2.2.1.3.1.1 - Ortogonais (O_1 e O_2) e frentes (F_1 e F_2) vizinhas

Ao longo das ortogonais verifica-se que $\nabla\theta \cdot \overline{dx} = 0$ visto que $\nabla\theta$ é perpendicular às linhas de frente e portanto a \overline{dx} .

Ao longo das linhas de frente verifica-se que $\nabla\theta \cdot \overline{dx} = \pm K df$ visto que $\nabla\theta$ e \overline{dx} são paralelos e além disso $|\overline{dx}| = df$, e $\nabla\theta = \pm K$ em virtude da equação (4.121).

Deste modo, a equação (4.123) permite estabelecer que entre ortogonais se verifica a equação:

$$A^2 C_g K df = \text{constante} \quad (4.124)$$

Considerando $K = w/C$ e considerando w constante, a equação anterior escreve-se ainda:

$$A^2 C_g df = \text{constante} \quad (4.125)$$

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{g} \rho g$, obtêm-se:

$$E C_g df = \text{constante} \quad (4.126)$$

e finalmente

$$E_f df = \text{constante} \quad (4.127)$$

em que $E = \frac{1}{g} \rho g A^2$ é a densidade de energia, equação (4.82) e $E_f = E C_g$ é o fluxo de energia, equação (4.88).

A equação (4.127) tem a forma convencional da equação da energia para a refração.

f) - A equação reduzida das ondas de pequena amplitude fornece um critério de ordem qualitativa para a validade dos resultados obtidos pela teoria clássica da refração.

Sabe-se que o método das ortogonais falha ao longo das fronteiras de sombra e ao longo das cústicas. Sabe-se ainda que a teoria clássica da refração fornece resultados cada vez menos precisos à medida que o período aumenta. Por outras palavras, o método das ortogonais não é válido para as ondas de longo pe-

ríodo, ou ainda de outro modo, sempre que num comprimento de onda haja uma grande variação de profundidade.

Vejamos como se estabelecem estes critérios a partir da equação reduzida.

Quando se deduziram as equações da refração, equações (4.121) e (4.122), desprezou-se na equação (4.119) o termo:

$$\frac{1}{A} \left[\nabla^2 A + \frac{1}{CC_g} \nabla A \cdot \nabla (CC_g) \right] \quad (4.128)$$

o que é o mesmo que admitir que:

$$\frac{\nabla^2 A}{K^2 A} \ll 1 \quad (4.129)$$

e

$$\left(\frac{\nabla(CC_g)}{KCC_g} \right) \cdot \left(\frac{\nabla A}{KA} \right) \ll 1 \quad (4.130)$$

se se tiver em conta a referida equação (4.119).

Estas expressões, (4.129) e (4.130), são por vezes chamadas o limite das ondas de curto período, visto que quando $L \rightarrow 0$, $K \rightarrow \infty$ e as referidas expressões verificam-se sempre. Assim, no limite das ondas de curto período as equações da refração, (4.121) e (4.122), e a equação reduzida das ondas de pequena amplitude, (4.114) ou (4.115), fornecem os mesmos resultados, enquanto que fora desse limite não é válida a aplicação das equações da refração. Tal limite das ondas de curto período estabelece então um critério para a validade dos resultados fornecidos pela teoria clássica da refração, critério esse que por simplificação de linguagem se chama critério da refração.

Veja-se agora qual o significado físico do critério da refração.

A expressão (4.129) pode escrever-se:

$$K_A \ll \frac{1}{2} K^2 A \quad (4.131)$$

em que $K_A = \frac{1}{2} \nabla^2 A$ é a curvatura média local da amplitude da superfície livre

($|\nabla A|$ é o máximo declive local da amplitude da superfície livre). Assim, tal expressão põe restrições, de ordem qualitativa, à curvatura da amplitude da superfície livre. Por exemplo, ao longo de uma fronteira de sombra $|\nabla A|$ e K_A assumem valores elevados e a expressão (4.130) não se verifica, o que não dá validade aos resultados obtidos pela teoria clássica da refração.

O significado da expressão (4.130) pode ser avaliado considerando simpli-
ficadamente ondas de pequena profundidade relativa ($CC_g \approx gh$). Tendo em conta que

$$\nabla(CC_g) = \frac{d(CC_g)}{dh} \nabla h \approx g \nabla h \quad (4.132)$$

em pequenas profundidades relativas, a expressão (4.130) pode escrever-se:

$$\frac{|\nabla h|}{Kh} \frac{|\nabla A|}{KA} \ll 1 \quad (4.133)$$

pondo assim restrições, de ordem qualitativa, simultaneamente ao máximo declive da amplitude da superfície livre ($|\nabla A|$) e ao máximo declive do fundo ($|\nabla h|$).

Introduzindo a equação (4.121) em (4.133) obtêm-se:

$$\frac{|\nabla h|}{h} \frac{|\nabla A|}{A} \ll |\nabla \theta|^2 \quad (4.134)$$

que significa que o produto das variações da profundidade e da amplitude da superfície livre deve ser pequeno quando comparado com o quadrado da variação do ângulo de fase.

Assim, a expressão (4.133) invalida os resultados da teoria clássica da refração para ondas de grande comprimento (k assume valores pequenos), para grandes declives do fundo ($|\nabla h|$ assume valores elevados) e ao longo das fronteiras de sombra ($|\nabla A|$ assume valores elevados).

4.2.2.1.3.2 - Função Potencial da Onda

Como atrás se disse, equação (4.104), o potencial complexo de velocidades é aproximadamente dado por:

$$\phi(x, y, z) = \phi_0(x, y) Z(h, z) \quad (4.135)$$

com

$$\psi(x, y, z, t) = \text{Parte Real de } \{\phi(x, y, z) e^{-i\omega t}\} \quad (4.136)$$

em que $\phi_0(x, y)$ é o potencial complexo que satisfaz a equação reduzida das ondas de pequena amplitude, isto é, a equação (4.114).

Uma vez determinada a função potencial $\phi(x, y, z)$, com $\phi(x, y, z) = \phi_1 + i\phi_2$, todas as quantidades físicas de interesse podem ser calculadas de imediato.

Assim, por exemplo:

a) - A elevação da superfície livre é calculada por:

$$\eta(x, y) = i \frac{\omega}{g} \phi(x, y, 0) = \frac{\omega}{g} (i\phi_1 - \phi_2) \quad (4.137)$$

ou por

$$\xi(x, y, t) = \text{Parte Real de } \{\eta(x, y) e^{-i\omega t}\} = \frac{\omega}{g} [\phi_1 \sin(\omega t) - \phi_2 \cos(\omega t)] \quad (4.138)$$

b) - A fase da elevação da superfície livre é calculada por:

$$S(x, y) = \arctan \frac{\text{Im}(\eta)}{\text{Re}(\eta)} = -\arctan (\phi_1 / \phi_2) \quad (4.139)$$

c) - A altura de onda é calculada por:

$$H(x, y) = 2|\eta| = \frac{2\omega}{g} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^{1/2} \quad (4.140)$$

d) - O vector velocidade \vec{v} é calculado por:

$$\underline{V}(x,y,z) = \nabla\phi = \nabla\phi_1 + i\nabla\phi_2 \quad (4.141)$$

ou por

$$\underline{V}(x,y,z,t) = \nabla\phi = \nabla\phi_1 \cos(\omega t) + \nabla\phi_2 \sin(\omega t) \quad (4.142)$$

e) - As componentes dos deslocamentos em meio período ($T/2$) são calculadas com base na relação:

$$\frac{du_i}{dt} = V_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \quad (4.143)$$

ou seja,

$$u_i = \int_0^{T/2} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dt \quad (4.144)$$

Para o cálculo do integral (4.144) recorre-se às equações (4.136) e (4.137). Assim, tendo em conta que $\omega = 2\pi/T$, tem-se sucessivamente:

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dt &= \int_0^{T/2} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} e^{-i\omega t} dt = -\int_0^{T/2} i \frac{g}{\omega} \frac{\partial\eta}{\partial x_i} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial\eta}{\partial x_i} \left[e^{-i\omega t} \right]_0^{T/2} = -2 \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial\eta}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.145)$$

Recorrendo novamente à equação (4.137) obtêm-se finalmente as componentes complexas dos deslocamentos:

$$u_i = -i \frac{2}{\omega} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{2}{\omega} \left(-i \frac{\partial\phi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_i} \right) \quad (4.146)$$

Os argumentos das componentes dos deslocamentos são calculados por:

$$\arg u_i = -\arctan \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_i} / \frac{\partial\phi_2}{\partial x_i} \right) \quad (4.147)$$

enquanto os respectivos módulos são calculados por:

$$|u_i| = \frac{2}{w} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.148)$$

As equações (4.147) e (4.148) têm particular interesse nos estudos de ressonância.

f) - A pressão, de acordo com as equações (4.48) e (4.49) é calculada por:

$$p(x, y, z, t) = \rho g(\xi - z) = \underbrace{-\rho g z}_{\text{parcela hidrostática}} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \underbrace{-\rho g z + \rho w [\phi_1 \sin(\omega t) - \phi_2 \cos(\omega t)]}_{\text{parcela hidrodinâmica } (p^+)} \quad (4.149)$$

g) O fluxo instantâneo de energia, de acordo com a equação (4.86) é calculado por:

$$E_f(t) = \int_{-h}^0 p^+ v dz \quad (4.150)$$

Tendo em conta as expressões (4.149) e (4.142), vem para o fluxo instantâneo de energia a seguinte expressão:

$$E_f(t) = h\rho w [\phi_1 \nabla \phi_2 \sin^2(\omega t) - \phi_2 \nabla \phi_1 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}(\phi_1 \nabla \phi_1 - \phi_2 \nabla \phi_2) \sin(2\omega t)] \quad (4.151)$$

A transmissão de energia em meio período ($T/2$) é dada por:

$$E_f\left(\frac{T}{2}\right) = \int_0^{T/2} E_f(t) dt \quad (4.152)$$

ou seja,

$$E_f\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} \pi \rho h (\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1) \quad (4.153)$$

4.2.2.1.3.3 - Condições de Fronteira

Para a resolução da equação reduzida das ondas de pequena amplitude num determinado domínio é necessário especificar as condições de fronteira.

As condições de fronteira traduzem matematicamente a realidade física do fenómeno em estudo, ao longo de toda a fronteira do domínio de aplicação. Assim, nas fronteiras líquidas impõe-se uma condição de radiação que não é mais do que uma reflexão nula, enquanto que nas fronteiras sólidas se impõe uma condição de reflexão.

4.2.2.1.3.3.1 - A Condição de Radiação

Antes de mais convém introduzir a noção de *dispersão* e *radiação*.

Os termos dispersão e radiação usam-se na mecânica quântica, em que as ondas representam o movimento das partículas, Butkov (1968). Modernamente porém, tais termos e respectivas técnicas de análise, que são idênticas, aplicam-se a todos os tipos de onda.

É usual chamar-se ao problema da geração de ondas pela oscilação de um corpo num fluido em repouso, problema de radiação, e à interacção de uma onda incidente com uma fronteira fixa, problema de dispersão.

O problema de radiação aparece quando a fonte do movimento ondulatorio está na fronteira do corpo, isto é, quando a onda que se propaga no domínio em estudo é radiada a partir da fronteira do corpo.

O problema de dispersão surge quando a fonte do movimento ondulatorio não está na fronteira do corpo, fronteira esta que agora é fixa. Por outras palavras, existe uma onda incidente que solicita um obstáculo.

Em qualquer dos casos pretende-se conhecer as perturbações causadas nas características de radiação da fonte (problema de radiação), ou na onda incidente (problema de dispersão), pela presença do corpo dispersor, isto é, do obstáculo.

O estudo da propagação das ondas de pequena amplitude sobre regiões de

profundidade variável é, claramente, um problema de dispersão em que a fronteira do obstáculo é a linha de costa ou de uma região confinada. Considera-se que a onda incidente é plana e monocromática e que é gerada em regiões de profundidade constante, a uma distância infinita da região de profundidade variável, isto é, da região em estudo. Consequentemente, a onda incidente sofre uma perturbação causada pelas variações da batimetria (refracção), presença de obstáculos (difracção) ou geralmente pelas duas acções em simultâneo (difo-refracção).

Do ponto de vista físico é imprescindível que a referida perturbação, isto é, a onda de dispersão, se afaste e não regresse à região em estudo. Esta é a chamada condição de radiação e foi expressa matematicamente pela primeira vez por Sommerfeld em 1912^(*).

Posteriormente, Zienkiewicz e Newton (1969), Engquist e Majda (1977), Brebbia e Walker (1978) e Cohen (1980) estabeleceram, de modos diferentes, formas aproximadas da condição de radiação de Sommerfeld, e outras formas para a aplicação da condição de radiação.

A figura 4.2.2.1.3.3.1.1 mostra um esquema típico do problema de dispersão.

Como mostra a equação (4.154), a condição de radiação de Sommerfeld é uma expressão assintótica. Nos modelos matemáticos de elementos finitos e de elementos de fronteira, tal expressão assintótica pode ser modelada implicitamente, como é por exemplo o caso dos elementos infinitos de Betess e Zienkiewicz

(*)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(n-1)/2}{r} \left(\frac{\partial \eta^s}{\partial r} - iK\eta^s \right) = 0 \quad (4.154)$$

em que $n = 1, 2$ ou 3 é a dimensão do problema, r é a distância ao centro de dispersão e η^s é a elevação da superfície livre (complexa).

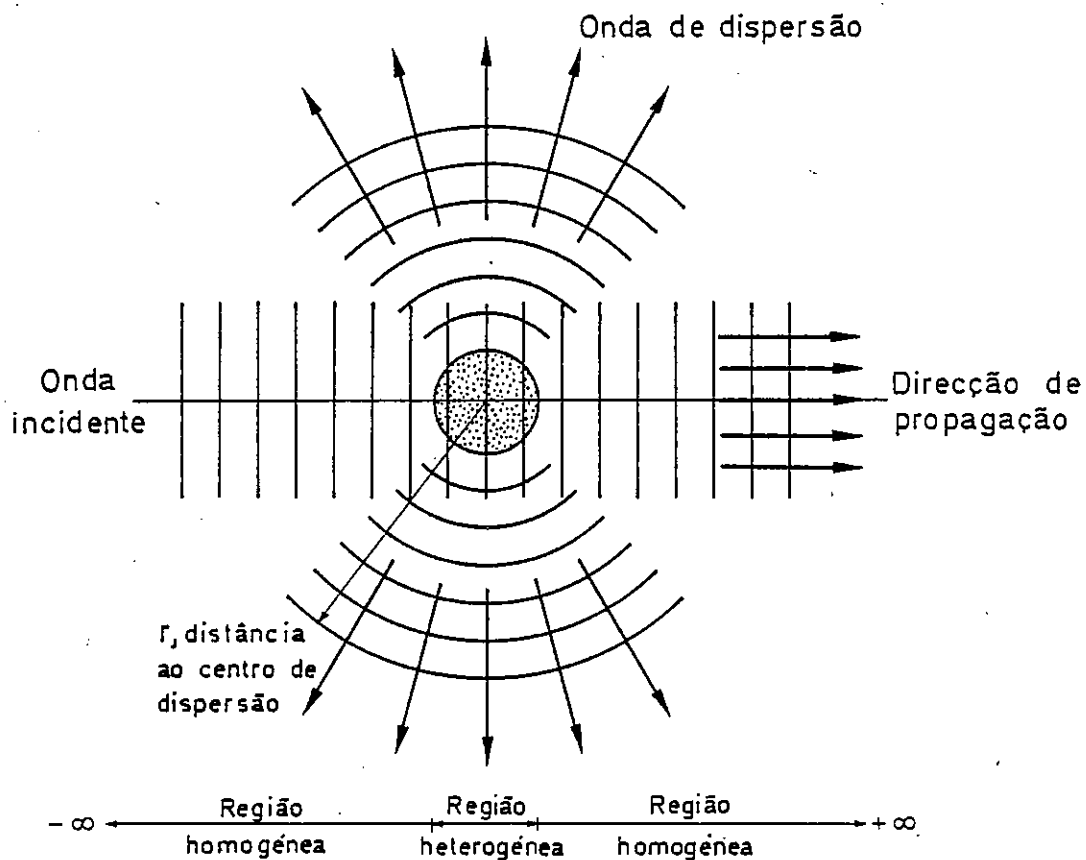


Fig. 4.2.2.1.3.3.1.1 - Esquema típico do problema de dispersão. O centro de dispersão localiza-se na região de profundidade variável (região heterogénea). A onda incidente propaga-se no domínio infinito, região de profundidade constante (região homogénea) e sofre uma perturbação pela presença da região heterogénea

(1967) ou pode ser modelada numa fronteira finita através da imposição de uma expressão aproximada da condição de radiação de Sommerfeld. Neste caso a fronteira, dita de transmissão, é colocada a uma distância finita do centro de dispersão, pelo que envolve duas aproximações. Uma diz respeito à distância da fronteira ao centro de dispersão e a outra diz respeito à ortogonalidade da direcção da onda de dispersão relativamente à fronteira, para que se possam confundir as derivadas normal e radial. Tais aproximações serão tanto mais válidas quanto

mais afastada do centro de dispersão estiver a fronteira de transmissão, não se verificando assim reflexões indesejáveis.

Veja-se então como se pode deduzir uma condição de radiação para aplicação numa fronteira finita.

Smith e Sprinks (1975) apresentaram a equação

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) - w^2 \frac{C - C_g}{C} \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.155)$$

da qual se pode deduzir a equação da onda reduzida, equação (4.114), se se tiver em conta a relação (4.93).

Fora da região de perturbação, isto é, da região de profundidade variável, a profundidade é constante e a equação (4.155) pode ser substituída pela equação

$$CC_g \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.156)$$

da qual se pode deduzir a equação (4.112) ou (4.115) se se tiver em conta a relação: $L = \sqrt{CC_g} T$ ou, o que é o mesmo: $w = \sqrt{n} CK$ visto que $C_g = nC$.

Tendo em conta a linearidade da teoria das ondas de pequena amplitude, a elevação da superfície livre e a função potencial podem escrever-se, respectivamente,

$$\xi = \xi^I + \xi^S, \quad \eta = \eta^I + \eta^S \quad (4.157)$$

e

$$\phi = \phi^I + \phi^S, \quad \varnothing = \varnothing^I + \varnothing^S \quad (4.158)$$

em que ξ^I , ϕ^I , η^I e \varnothing^I dizem respeito à onda incidente, enquanto ξ^S , ϕ^S , η^S e \varnothing^S dizem respeito à onda de dispersão.

A onda incidente é plana e monocromática pelo que pode ser representada por:

$$\eta^I = A^I e^{iKx \cos(\theta - \theta^I)} = A^I e^{i(K_x x + K_y y)} \quad (4.159)$$

em que A^I é a amplitude da onda, θ^I é o ângulo de incidência, r e θ são coordenadas polares e K_x e K_y são as componentes do vector número de onda K .

Tendo em conta a relação (4.105), a função potencial da onda incidente é dada por:

$$\phi^I(x, y, 0) = -\frac{ig}{\omega} \eta^I(x, y) \quad (4.160)$$

ou seja:

$$\phi^I = -\frac{ig}{\omega} A^I e^{i(K_x x + K_y y)} \quad (4.161)$$

Assim, a função potencial ϕ^I é dada por:

$$\phi^I = -\frac{ig}{\omega} A^I e^{i(K_x x + K_y y - \omega t)} \quad (4.162)$$

e satisfaz a equação (4.156).

Nestas condições a equação (4.156) pode escrever-se simplesmente:

$$CC_g \nabla^2 \phi^S - \frac{\partial^2 \phi^S}{\partial t^2} = 0 \quad (4.163)$$

e traduz a propagação da onda de dispersão fora da região de perturbação, isto é, na região de profundidade constante.

A figura 4.2.2.1.3.3.1.2 mostra uma região semi-confinada e uma região não confinada em que a fronteira líquida, fronteira de transmissão ou fronteira de radiação (S_1) está colocada a uma distância finita (r) do centro de dispersão (O) e é constituída por troços elementares ΔS .

Considere-se um elemento genérico ΔS e associado a ele um referencial local directo (\bar{n}, \bar{s}) em que \bar{n} e \bar{s} são versores respectivamente normal e tangencial ao referido elemento. O versor \bar{n} é dirigido para o exterior, ou seja, para a região de profundidade constante.

Sobre o elemento ΔS a equação (4.163) pode escrever-se em termos das coordenadas n e s , isto é:

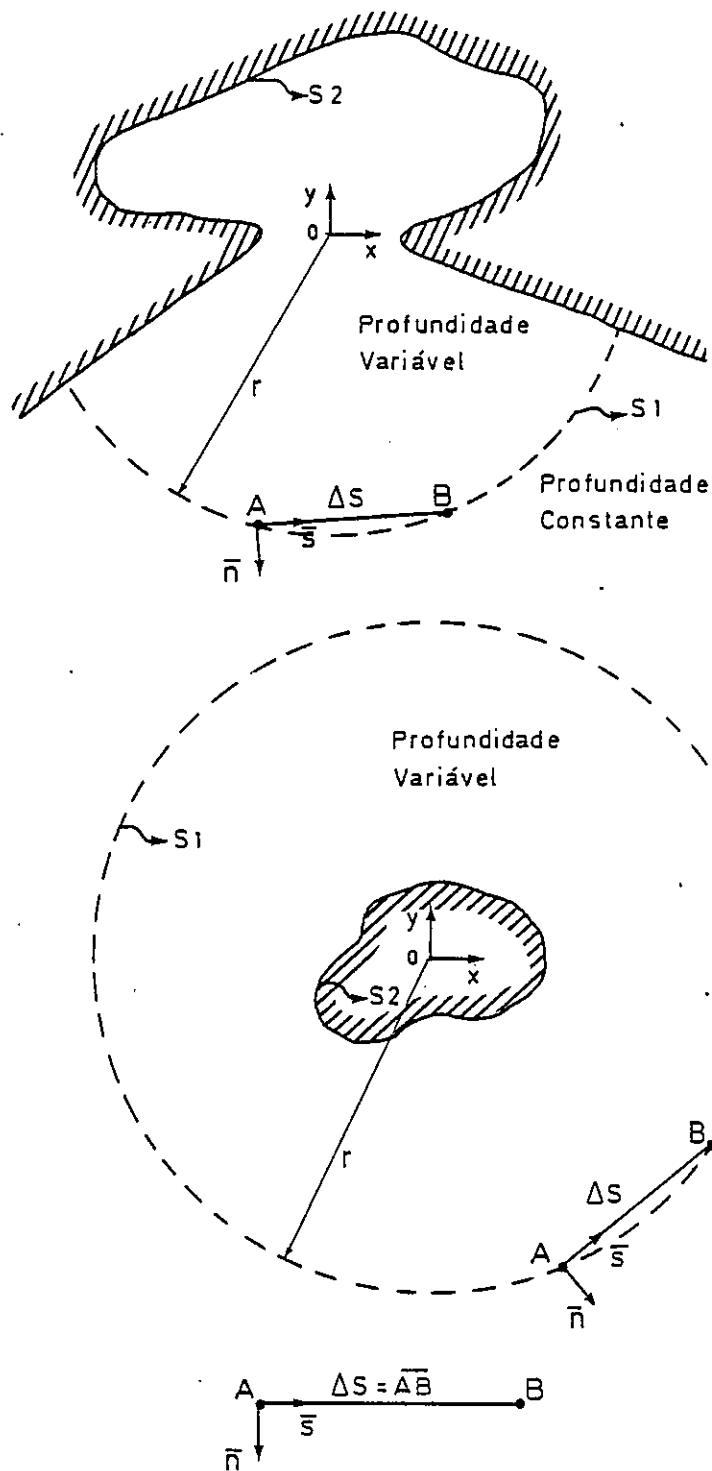


Fig. 4.2.2.1.3.3.1.2 - Região semi-confinada e região não confinada. A fronteira líquida (S_1) está a uma distância finita (r) do centro de dispersão (0). As variáveis \bar{n} e \bar{s} são a base de um referencial local

$$CC_g \left(\frac{\partial^2 \Phi^S}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Phi^S}{\partial n^2} \right) = \frac{\partial^2 \Phi^S}{\partial t^2} \quad (4.164)$$

Admitindo que o elemento ΔS é pequeno, pode também admitir-se que Φ^S é constante ao longo do elemento, isto é, na direcção s , e que, conseqüentemente, Φ só varia na direcção normal n . Deste modo a função Φ^S pode ser separada nas variáveis s e n ,

$$\Phi^S(s, n, t) = \Phi_s^S \bar{\Phi}^S(n, t) \quad (4.165)$$

obtendo-se assim a equação unidimensional da onda:

$$CC_g \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^S}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^S}{\partial t^2} \quad (4.166)$$

Esta equação pode resolver-se a partir da sua forma canónica, através da transformação de coordenadas:

$$\alpha = n - \sqrt{CC_g} t \quad (4.167)$$

$$\beta = n + \sqrt{CC_g} t \quad (4.168)$$

com

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial n} - \frac{1}{\sqrt{CC_g}} \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.169)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{\sqrt{CC_g}} \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.170)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{1}{CC_g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4.171)$$

A equação (4.166) escreve-se então:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}^S}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad (4.172)$$

A solução geral desta equação é, Sobolev (1964),

$$\Phi^S(\alpha, \beta) = f(\alpha) + g(\beta) \quad (4.173)$$

em que $f(\alpha)$ e $g(\beta)$ são funções arbitrárias com primeiras derivadas contínuas. Substituindo (4.167) e (4.168) em (4.173) vem:

$$\bar{\Phi}^S(n, t) = f(n - \sqrt{CC_g} t) + g(n + \sqrt{CC_g} t) \quad (4.174)$$

O termo $f(n - \sqrt{CC_g} t)$ representa uma onda de perfil constante que atravessa o elemento ΔS com a velocidade de fase C e velocidade de grupo C_g , no sentido positivo de \bar{n} , isto é, da região de profundidade variável para a região de profundidade constante. Tal é evidente se se considerar um referencial móvel α , com origem no ponto $n = \sqrt{CC_g} t$, ou seja, se se considerar $\alpha = n - \sqrt{CC_g} t$ vê-se uma onda de perfil constante no referencial móvel.

Do mesmo modo, o termo $g(n + \sqrt{CC_g} t)$ representa uma onda com o mesmo perfil que atravessa o elemento ΔS com a mesma velocidade de fase C e a mesma velocidade de grupo C_g , no sentido oposto, isto é, no sentido negativo de \bar{n} .

A figura 4.2.2.1.3.3.1.3 mostra esquematicamente as ondas que num determinado instante podem atravessar o elemento ΔS .

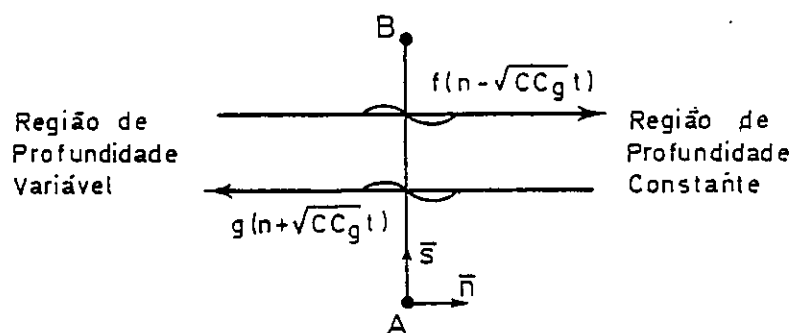


Fig. 4.2.2.1.3.3.1.3 - $f(n - \sqrt{CC_g} t)$ e $g(n + \sqrt{CC_g} t)$ são as ondas que num determinado instante podem atravessar o elemento ΔS

Como atrás se disse, a condição de radiação consiste em impôr que a onda de dispersão se afaste e não regresse à região em estudo, isto é, à região de

profundidade variável. A condição de radiação implica, portanto, que a fronteira líquida permita a transmissão apenas das ondas que se propagam da região de profundidade variável para a região de profundidade constante. Por outras palavras, no elemento genérico ΔS impõe-se que:

$$g(\beta) = 0 \quad (4.175)$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{\Phi}^S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (4.176)$$

De acordo com (4.165), (4.170) e (4.176) tem-se finalmente:

$$\frac{\partial \Phi^S}{\partial n} + \frac{1}{\sqrt{CC_g}} \frac{\partial \Phi^S}{\partial t} = 0 \quad (4.177)$$

Tal é a expressão simplificada da condição de radiação de Sommerfeld.

Tendo em conta o movimento harmónico, equação (4.93), a equação (4.163) escreve-se agora:

$$\nabla^2 \phi^S + K^2 \phi^S = 0 \quad (4.178)$$

com

$$\omega^2 = CC_g K^2 \quad (4.179)$$

e a condição de radiação escreve-se:

$$\frac{\partial \phi^S}{\partial n} - iK\phi^S = 0 \quad (4.180)$$

A qualidade dos resultados fornecidos pela equação (4.180) é tanto maior quanto maior for o afastamento da fronteira líquida do centro de dispersão, e quanto menor for a dimensão dos elementos ΔS , visto que nestas condições $\bar{n} \rightarrow \bar{r}$.

A condição de radiação pode também exprimir-se em termos da elevação da superfície livre. Tendo em conta a relação (4.105), a elevação da superfície li-

vre da onda de dispersão é dada por:

$$\eta^S(x, y) = \frac{i\omega}{g} \phi^S(x, y, 0) \quad (4.181)$$

e a equação (4.180) escreve-se agora:

$$\frac{\partial \eta^S}{\partial n} - iK\eta^S = 0 \quad (4.182)$$

A imposição da condição de radiação em termos da onda total é imediata. Efectivamente, tendo em conta as relações (4.158), (4.161) e (4.180) verifica-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - iK\phi = \underbrace{\left(\frac{\partial \phi^I}{\partial n} - iK\phi^I \right)}_{\text{onda incidente}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \phi^S}{\partial n} - iK\phi^S \right)}_{\text{onda de dispersão}} = \frac{\partial \phi^I}{\partial n} - iK\phi^I = p(x, y, \theta^I, A^I, \omega) \quad (4.183)$$

A função $p(x, y, \theta^I, A^I, \omega)$ é calculada em cada ponto da fronteira líquida, e em cada ponto depende das características da onda incidente, isto é, ângulo de incidência, amplitude e frequência.

4.2.2.1.3.3.2 - A Condição de Reflexão Parcial

Em problemas reais verifica-se que nas fronteiras sólidas existe uma reflexão parcial das ondas. Tal é o caso, por exemplo, da perda de energia numa praia, em virtude da rebentação, ou da dissipação de energia num quebra-mar, em virtude da respectiva permeabilidade e inclinação do talude.

A condição de radiação apresentada no capítulo anterior, quando aplicada à onda total e não apenas à onda de dispersão não é mais do que uma condição de transmissão total, ou seja, de reflexão nula.

Assim, tal condição aplicada à onda total pode ser generalizada à reflexão parcial através da introdução de um factor de amortecimento, α , que varia entre 0 e 1:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\alpha}{\sqrt{CC_g}} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.184)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - iK\alpha\phi = 0 \quad (4.185)$$

se se tiver em conta o movimento harmónico.

Estas expressões são assim expressões gerais que englobam a reflexão total ($\alpha = 0$) e a reflexão nula ($\alpha = 1$) como casos particulares.

Vejamos agora como se relaciona o factor de amortecimento α com o coeficiente de reflexão R .

A figura 4.2.2.1.3.3.2.1 mostra o diagrama de reflexão de uma onda plana cujo ângulo de incidência é θ^I .

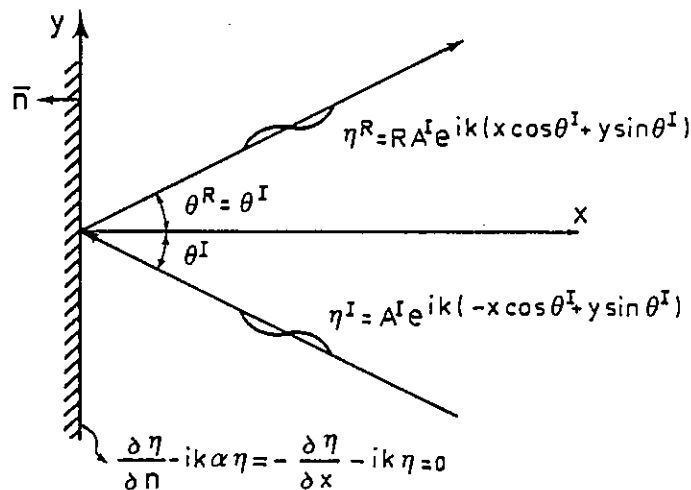


Fig. 4.2.2.1.3.3.2.1 - Diagrama de reflexão de uma onda plana, com um ângulo de incidência igual a θ^I

Considere-se que a onda incidente é plana e monocromática, isto é:

$$\eta^I = A^I e^{iK(-x \cos \theta^I + y \sin \theta^I)} \quad (4.186)$$

Considerando a lei da reflexão, $\theta^R = \theta^I$, a onda reflectida é dada por:

$$\eta^R = R A^I e^{iK(x \cos \theta^I + y \sin \theta^I)} \quad (4.187)$$

em que R é o coeficiente de reflexão.

A onda total, $\eta = \eta^I + \eta^R$ ou $\phi = \phi^I + \phi^R$, satisfaz a condição de reflexão parcial,

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} - iK\alpha\eta = 0 \text{ ou } \frac{\partial \phi}{\partial n} - iK\alpha\phi = 0, \quad (4.188)$$

o que permite obter a relação:

$$\alpha = \cos \theta^I \frac{\eta^I - \eta^R}{\eta^I + \eta^R} \quad (4.189)$$

No ponto em que se pretende determinar o factor de amortecimento, ponto de coordenadas $x = 0$ e $y = 0$, a relação anterior escreve-se:

$$\alpha = \cos \theta^I \frac{1 - R}{1 + R} \quad (4.190)$$

O coeficiente de reflexão, R , é normalmente calculado, analítica ou experimentalmente, para um ângulo de incidência $\theta^I = 0^\circ$, Morais (1971). Assim, a relação (4.190) escreve-se simplesmente:

$$\alpha = \frac{1 - R}{1 + R} \quad (4.191)$$

e é sistematicamente utilizada sem se ter em conta o ângulo de incidência.

Por outras palavras, considera-se que o factor de amortecimento não depende do ângulo de incidência.

Contudo, sabe-se que o coeficiente de reflexão varia com o ângulo de incidência, Morais (1971), pelo que a utilização da relação (4.191) para valores de θ^I diferentes de zero envolve uma aproximação.

Para a reflexão total o coeficiente de reflexão toma o valor $R = 1$ e a relação (4.191) fornece para o factor de amortecimento o valor $\alpha = 0$.

Para a reflexão nula, isto é, transmissão total, o coeficiente de refle

xão toma o valor $R = 0$ e a relação (4.191) fornece para o factor de amortecimento o valor $\alpha = 1$.

Para o caso geral da reflexão parcial o coeficiente de reflexão toma um valor compreendido entre 1 e 0, para o qual a relação (4.191) fornece para o factor de amortecimento um valor compreendido entre 0 e 1.

Como nota final salienta-se que o coeficiente de reflexão e o factor de amortecimento podem ser variáveis complexas. Neste caso a condição:

$$|R| < 1$$

implica a condição:

$$\text{Parte Real } \{\alpha\} > 0$$

Porém, em virtude da falta de dados experimentais, tais variáveis são aqui consideradas reais.

4.2.2.2 - Problemas Relacionados com a Agitação Marítima

A penetração da agitação marítima numa região confinada é uma questão cuja análise se baseia na resolução de um dos três problemas fundamentais da teoria linear das ondas regulares e que a seguir se definem. São eles:

- O problema da difracção - A propagação das ondas sobre um fundo horizontal é perturbada pela presença de obstáculos de forma arbitrária.

- O problema da refracção - Uma batimetria irregular com declives moderados altera as características do movimento ondulatório tais como, o comprimento de onda, a altura de onda e a direcção de propagação.

- O problema da difo-refracção - A propagação das ondas sobre uma batimetria irregular é perturbada pela presença de obstáculos e pelas variações da profundidade.

Tal como se estabeleceu ao longo de 4.2.2.1.3.1, a equação reduzida das ondas de pequena amplitude permite implicitamente efectuar o estudo de qualquer dos três problemas referidos. Assim, na resolução de um problema real, sempre que não se verifiquem as condições necessárias para a aplicabilidade do método clássico das ortogonais, deverá ser utilizado o modelo que adiante se apresenta, baseado na equação reduzida das ondas de pequena amplitude. Tal modelo aplica-se indistintamente a regiões confinadas ou não.

4.2.2.3 - Problemas Relacionados com a Ressonância de Regiões Confinadas

4.2.2.3.1 - Generalidades Sobre o Fenómeno da Ressonância

Quando uma região confinada é solicitada por ondas cujas frequências são próximas de uma das frequências próprias de oscilação dessa região, estabelece-se, no interior da região confinada, um movimento ondulatório estacionário que eventualmente em algum ponto pode exibir amplitudes superiores à amplitude das ondas incidentes. Note-se que, embora a frequência da solicitação seja próxima ou mesmo coincidente com uma das frequências próprias de oscilação da região con

finada, o fenómeno da ressonância, encarado sob o ponto de vista da hidráulica marítima, só se refere como tal desde que em algum ponto do interior da região confinada a amplitude de oscilação seja superior à amplitude da onda incidente.

4.2.2.3.2 - Generalidades Sobre o Movimento Ondulatório Estacionário

Como se disse atrás o fenómeno da ressonância estabelece-se sobre um movimento ondulatório estacionário. Assim, antes de explicar o fenómeno da ressonância convém abordar algumas questões do movimento ondulatório estacionário.

A Figura 4.2.2.3.2.1 mostra a formação de um clapotis. Nele se pode observar que o movimento ondulatório estacionário é periódico no espaço e no tempo. Observa-se ainda que as trajectórias das partículas do fluido, circulares ou elípticas no movimento progressivo, degeneram em linhas rectas com declives dependentes das coordenadas das partículas. Assim, cada partícula do fluido move-se para um lado e para outro ao longo da mesma trajectória durante um período. Além dis-

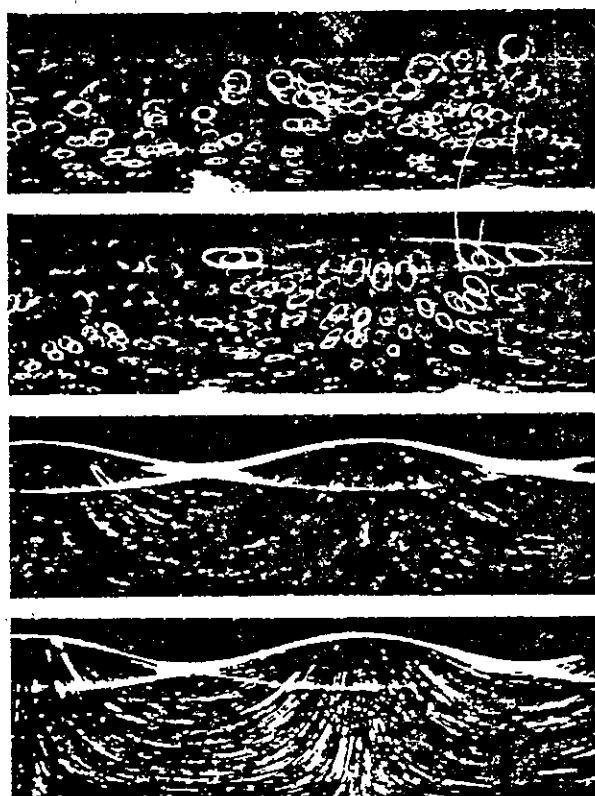


Fig. 4.2.2.3.2.1 - Quatro sucessões na formação de um clapotis

so, observa-se também que as características do movimento num ponto arbitrário do fluido são proporcionais às características do movimento de um ponto da superfície livre com a mesma abcissa e no mesmo instante. A cinemática do movimento é tal que a superfície livre apresenta pontos que só têm deslocamentos horizontais - pontos nodais - e pontos intermédios que só têm deslocamentos verticais - pontos ventrais ou antinodais. Tais conceitos de pontos nodais e ventrais podem, naturalmente, ser aplicados ao campo de velocidades.

A figura 4.2.2.3.2.2 mostra um esquema da elevação da superfície livre e do campo de velocidades no nível médio de repouso de um movimento ondulatório esta

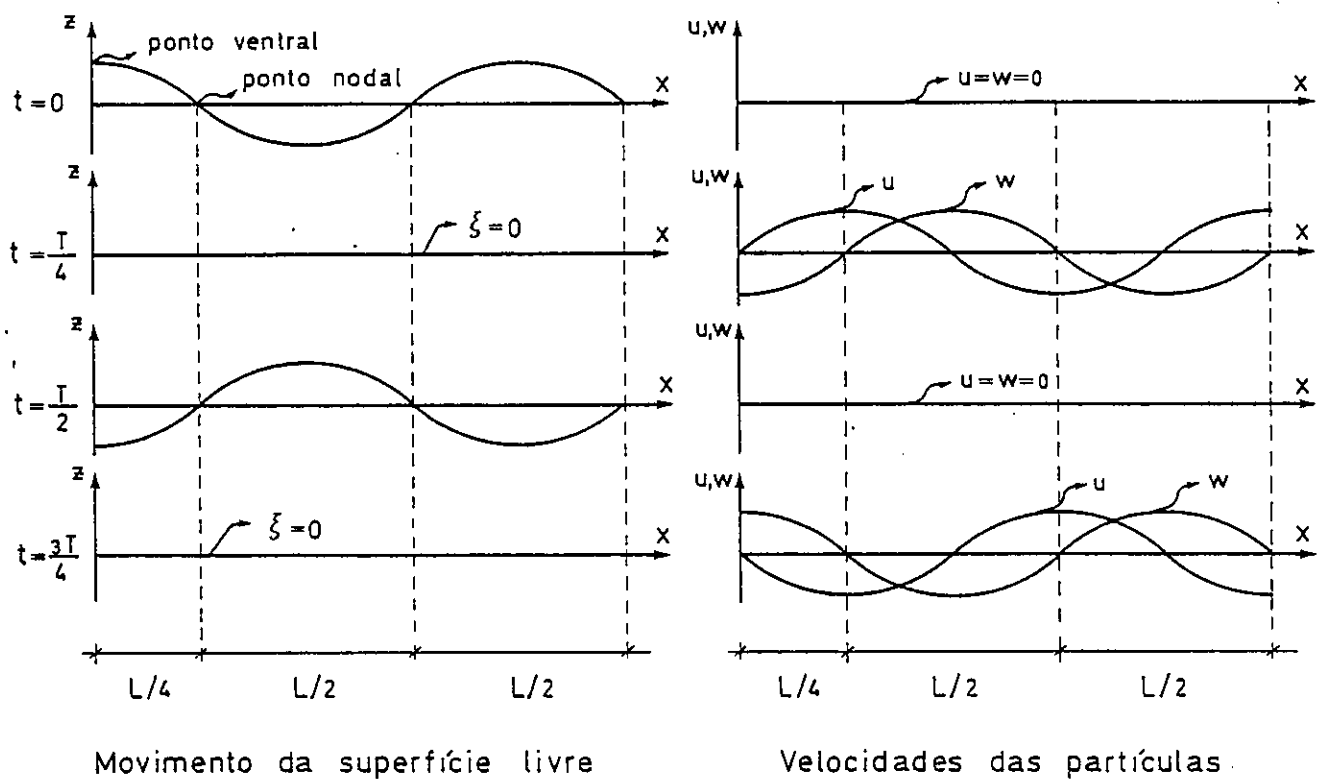


Fig. 4.2.2.3.2.2 - Movimento ondulatório estacionário

cionário. Com base em tal figura podem tirar-se algumas conclusões a respeito da energia mecânica da onda e do transporte de energia do movimento ondulatório.

Observa-se então que:

a) Nos instantes $t=0$ e $t=T/2$ a superfície livre apresenta-se nas amplitudes extremas de oscilação. Consequentemente, a energia potencial (instantânea) média por comprimento de onda é máxima, enquanto que a energia cinética (instantânea) média por comprimento de onda é nula, visto que nesses instantes a velocidade é nula em todos os pontos do fluido em virtude da inversão do movimento:

$$E_{p_{max}} = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{1}{2} \rho g \xi_{max}^2 dx; E_{K_{min}} = 0 \quad (4.192)$$

A densidade de energia ou energia específica média, constante ao longo do tempo, é dada por:

$$E = E_{p_{max}} + E_{K_{min}} = E_{p_{max}} \quad (4.193)$$

b) Nos instantes $t=T/4$ e $t=3T/4$ a superfície livre atravessa o nível médio de repouso e apresenta-se nas amplitudes mínimas de oscilação. Consequentemente, a energia potencial (instantânea) média por comprimento de onda é nula, $E_{p_{min}} = 0$, enquanto que a energia cinética (instantânea) média por comprimento de onda é máxima. Efectivamente, o princípio da conservação da energia implica que:

$$E = E_{p_{max}} = E_{p_{min}} + E_{K_{max}} = E_{K_{max}} \quad (4.194)$$

c) O fluxo médio de energia (valor médio por período ou comprimento de onda do fluxo instantâneo) ou potência da onda, E_f , é nulo. De facto, o movimento das partículas do fluido, para um lado e para outro ao longo da mesma trajetória recta durante um período, tem como consequência que, durante um período, seja nulo o valor médio da energia transmitida através de uma secção vertical fixa.

4.2.2.3.3 - O Fenômeno da Ressonância

A ressonância de uma região confinada pode explicar-se através do balanço energético, por unidade de tempo, no seu interior. Assim, considerando uma região confinada sujeita a uma solicitação com frequência igual a uma das frequências próprias de oscilação da região tem-se:

a) No interior da região confinada estabelece-se um movimento ondulatório estacionário que se caracteriza por não ter fluxo médio de energia ou potência. Efectivamente, num regime estacionário as linhas nodais e as linhas ventrais não mudam de posição, isto é, a onda não é progressiva e o movimento não propaga a sua energia mecânica.

b) As ondas incidentes são progressivas pelo que transportam uma certa quantidade de energia. As expressões (4.87) e (4.88) põem em evidência que a energia das ondas se propaga com a velocidade de grupo. Assim, a velocidade de propagação da energia das ondas é tanto maior quanto maior for o período do movimento ondulatório progressivo.

c) Na entrada da região confinada, definida por uma linha nodal, estabelece-se a transição entre o movimento ondulatório progressivo, no exterior da região, e o movimento ondulatório estacionário, no interior da região, através da transferência de toda a energia das ondas incidentes para o interior da região confinada. Tal transferência de energia é acompanhada pela transformação da potência das ondas incidentes em energia mecânica que se acumula no interior da região confinada.

Observa-se que a entrada de uma região confinada, sob o ponto de vista da ressonância, só pode ser definida por uma linha nodal para que, na secção vertical que a contém possa haver fluxo de energia. Contrariamente, nas fronteiras sólidas definem-se linhas ventrais visto que através delas não há transmissão de energia.

De um modo sistemático, a potência das sucessivas ondas que constituem a solicitação vai sendo sucessivamente acumulada no interior da região confinada,

sob a forma de energia mecânica. Esta acumulação de energia mecânica no interior da região confinada traduz-se, obviamente, por um aumento da amplitude de oscilação do movimento estacionário que poderá, assim, tornar-se superior à amplitude das ondas incidentes. Em tais circunstâncias diz-se que há amplificação da onda incidente ocorrendo, então, o fenómeno da ressonância.

Justificando-se a amplificação da solicitação através da transformação da potência das ondas incidentes em energia mecânica que se acumula no interior da região confinada, conclui-se imediatamente que, quanto maior for a potência da solicitação, isto é, o fluxo médio de energia que entra na região confinada, maior será a amplificação. Tal conclusão é válida e justifica que, quanto maior for o período (maior velocidade de propagação de energia, maior potência) das ondas que solicitam a região confinada em condições de ressonância, maior é a amplificação que ocorre no interior da região. De facto, a análise de uma curva de resposta permite verificar que a maior amplificação ocorre no período fundamental de oscilação da região confinada.

Faz-se notar que a amplificação da solicitação depende da amplitude das ondas incidentes, o que permite caracterizar o comportamento de uma região confinada através da respectiva curva de resposta.

d) O crescimento do movimento ondulatório estacionário é, naturalmente, limitado pela dissipação da respectiva energia mecânica. Os factores que, sob o ponto de vista da hidráulica marítima, têm influência na dissipação da referida energia são a radiação nas fronteiras líquidas, o atrito de fundo e a reflexão parcial nas fronteiras sólidas.

A radiação consiste na saída de energia através das fronteiras líquidas e é um processo exactamente contrário ao da entrada de energia para o interior da região confinada. Assim, a amplitude de oscilação é limitada pela transformação de energia mecânica do movimento estacionário, que sai pelas fronteiras líquidas sob a forma de movimento ondulatório progressivo no sentido radial com determinada potência. A dissipação de energia por radiação é assim tanto maior quanto maior for o período de oscilação da região confinada.

O atrito de fundo consiste na perda de energia cinética das partículas do fluido junto ao fundo. Tendo em conta que a energia cinética das partículas de um fluido sujeito a um movimento ondulatório estacionário aumenta com o período de oscilação, verifica-se que a perda de energia por atrito de fundo é tanto maior quanto maior for o período de oscilação.

A reflexão parcial consiste na perda de energia das partículas do fluido junto às fronteiras sólidas. O processo de dissipação de energia de reflexão parcial depende do tipo de fronteira sólida (porosidade, rugosidade e inclinação) em combinação com o período de oscilação. Verifica-se que a perda de energia por reflexão parcial é tanto maior quanto menor for o período de oscilação, quanto mais suaves forem os taludes e quanto maior for a porosidade e rugosidade das fronteiras sólidas.

Do exposto conclui-se que uma região confinada está tanto mais protegida contra os fenómenos de ressonância quanto mais suaves forem os taludes, o que implica menores reflexões, quanto maior for a rugosidade do fundo, o que implica maior atrito de fundo e quanto maior for a entrada, o que implica maior dissipação de energia por radiação.

4.2.2.3.4 - Nota final

De tudo o exposto pode concluir-se que a protecção de uma bacia portuária contra os fenómenos de ressonância passa por soluções antagónicas às medidas a adoptar na defesa da bacia contra a agitação. Tal situação é já conhecida desde há muito tempo sob o nome de "harbor paradox".

O modelo matemático desenvolvido para o estudo da propagação da agitação marítima é utilizado também para o estudo da ressonância de regiões confinadas. Neste caso, tem interesse fundamental o cálculo de curvas de resposta em diversos pontos da bacia portuária.

4.2.2.4 - Análise pelo Método dos Elementos Finitos

4.2.2.4.1 - Generalidades

O problema em questão, resolução da equação reduzida das ondas de pequena amplitude, é definido num domínio contínuo.

O objectivo do Método dos Elementos Finitos é tornar tal problema susceptível de tratamento numérico, substituindo os infinitos graus de liberdade do contínuo por um número finito de incógnitas. Para tal, o Método dos Elementos Finitos começa por discretizar o contínuo num número finito de subdomínios - elementos finitos - cujo comportamento se descreve adequadamente por um número limitado de graus de liberdade. Formulado o problema em cada elemento finito procede-se à sua montagem de modo a reconstituir o contínuo, obtendo-se então um sistema de equações, a partir do qual se determinam as incógnitas do problema.

Como caso particular dos elementos finitos podem considerar-se os elementos infinitos que, embora se utilizem na simulação de domínios que se estendem até ao infinito, descrevem o seu comportamento também por um número limitado de graus de liberdade.

Na simulação de domínios infinitos podem usar-se, além dos elementos infinitos, elementos de radiação, elementos de fronteira e elementos semi-analíticos. Os elementos de fronteira fornecem resultados mais precisos embora exijam maior esforço computacional quando combinados com elementos finitos. Os elementos infinitos fornecem bons resultados e são computacionalmente rápidos. Os elementos de radiação também fornecem bons resultados e computacionalmente são os mais rápidos. Finalmente, os elementos semi-analíticos são os que fornecem resultados menos precisos, Hara, Zienkiewicz e Bettess (1979).

No programa de computador que se desenvolveu para a resolução da equação reduzida das ondas de pequena amplitude foram incorporados, para a simulação de domínios infinitos, elementos de radiação e elementos infinitos.

Vários modelos numéricos de elementos finitos têm sido usados na resolução da equação reduzida das ondas de pequena amplitude. Berkhoff (1972), utili

zou o método dos elementos finitos em combinação com elementos de fronteira (formulação indirecta). Porém, como reparou Chen e Mei (1974), Berkhoff (1972) não utilizou um funcional indicado para a obtenção de matrizes simétricas o que tem grandes inconvenientes computacionais. Tal já não acontecia com os elementos semi-analíticos de Chen e Mei (1974), que, por outro lado, forneciam resultados menos precisos. Bettess e Zienkiewicz (1977) propuseram a resolução da equação reduzida através da combinação de elementos finitos com elementos infinitos. Mais tarde, Hara, Zienkiewicz e Bettess (1979) desenvolveram um programa de computador em que incorporaram todos os métodos numéricos conhecidos - elementos infinitos, elementos de radiação (planos e cilíndricos), elementos de fronteira (formulação directa e indirecta) e elementos semi-analíticos. Em todos os trabalhos referidos, a análise do método dos elementos finitos foi baseada na minimização de um funcional. No modelo que aqui se apresenta, tal análise foi baseada numa formulação residual.

4.2.2.4.1 - Formulação Residual

A formulação residual do método dos elementos finitos tem evidentes vantagens sobre a formulação variacional. Efectivamente, a formulação residual não só permite, de um modo natural, a incorporação de quaisquer condições de fronteira adicionais, como também é a única que permite uma classificação sistemática de todos os métodos numéricos, Portela e Romãozinho (1979), Brebbia e Walker (1978). Por vezes considera-se a formulação residual de falta de significado físico. Tal não é verdade e está bem patente, por exemplo no campo da análise estrutural, em Portela (1981).

Já de seguida, expõe-se resumidamente o método dos resíduos pesados.

Seja Δ um domínio e S a respectiva fronteira subdividida em duas porções S_1 e S_2 . Considere-se uma equação diferencial:

$$L\psi - g = 0 \quad \text{em } \Delta \quad (4.195)$$

sujeita às condições de fronteira:

$$C u - h = 0 \quad \text{em} \quad S_1 \quad (4.196)$$

e

$$D u - l = 0 \quad \text{em} \quad S_2 \quad (4.197)$$

em que u é a solução exacta, L , C e D são operadores diferenciais e g , h e l são funções com valor prescrito.

Tendo em conta que as equações (4.195-4.197) se verificam em cada ponto do domínio Δ e respectiva fronteira, segue-se que:

$$\int_{\Delta} (Lu - g) W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_1} (Cu - h) W_{S_1} dS + \int_{S_2} (Du - l) W_{S_2} dS = 0 \quad (4.198)$$

em que W_{Δ} , W_{S_1} e W_{S_2} são funções de peso arbitrárias, tais que os integrais em (4.198) possam ser calculados. A equação (4.198) é o ponto de partida da formulação residual.

Seja u uma solução aproximada de u , isto é, $u \approx u$.

Substituindo u por u em (4.195-197) obtêm-se:

$$E_{\Delta} = Lu - g \neq 0 \quad \text{em} \quad \Delta \quad (4.199)$$

$$E_{S_1} = Cu - h \neq 0 \quad \text{em} \quad S_1 \quad (4.200)$$

$$E_{S_2} = Du - l \neq 0 \quad \text{em} \quad S_2 \quad (4.201)$$

em que E_{Δ} , E_{S_1} e E_{S_2} são os resíduos, isto é, as funções erro de aproximação.

O método dos resíduos pesados minimiza tais funções erro de aproximação, distribuindo-os sobre o domínio Δ e respectiva fronteira S , de acordo com as funções de peso W_{Δ} , W_{S_1} e W_{S_2} , dando assim origem aos diferentes métodos de aproximação.

Então, a equação (4.198) fica:

$$\int_{\Delta} E_{\Delta} W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_1} E_{S_1} W_{S_1} dS + \int_{S_2} E_{S_2} W_{S_2} dS = 0 \quad (4.202)$$

que é a equação geral do método dos resíduos pesados, ou seja, a equação residual.

A técnica dos elementos finitos começa por discretizar o domínio em elementos finitos. Seguidamente, em cada elemento define-se uma função de aproximação $u \sim \hat{u}$, em geral polinomial, a partir da qual se estabelecem os resíduos E_{Δ} , E_{S_1} e E_{S_2} . Feito isto, procede-se a uma integração por partes da equação residual, até à obtenção de uma forma fraca, após o que se define, arbitrariamente, a função W_{Δ} . Durante a integração por partes as funções de peso W_{S_1} e W_{S_2} são escolhidas do modo que se entender mais conveniente.

No modelo que a seguir se apresenta usou-se o conhecido método de Galerkin para o qual a função de peso W_{Δ} é definida como uma variação da função de aproximação u , relativamente aos coeficientes, isto é:

$$u = N_i u_i \quad (4.203)$$

$$W = \delta u = N_i \delta u_i \quad i=1, \text{ número de nós do elemento } (4.204)$$

em que os δu_i são incrementos arbitrários dos valores nodais da função de aproximação, u_i , e os N_i são polinômios de interpolação, de definição seccional, que na gíria dos elementos finitos se chamam funções de forma.

Finalmente, estabelecida a forma fraca da equação residual em cada elemento finito, é feita a montagem de todos os elementos de modo a restabelecer o contínuo, o que dá origem a um sistema de equações cujas incógnitas são os valores nodais da função de aproximação. Resolvido o sistema de equações, é fácil a determinação do valor da função de aproximação em qualquer ponto do domínio.

4.2.2.4.3 - Modelo de Cálculo com Elementos de Radiação

A figura 4.2.2.4.3.1 mostra um esquema da geometria típica do problema, numa bacia portuária. A configuração geométrica da bacia portuária é irregular e a profundidade é variável. Considera-se um referencial cartesiano, directo e ortonormado (x, y, z) , com origem na entrada da bacia portuária, no nível médio de repouso, plano (x, y) .

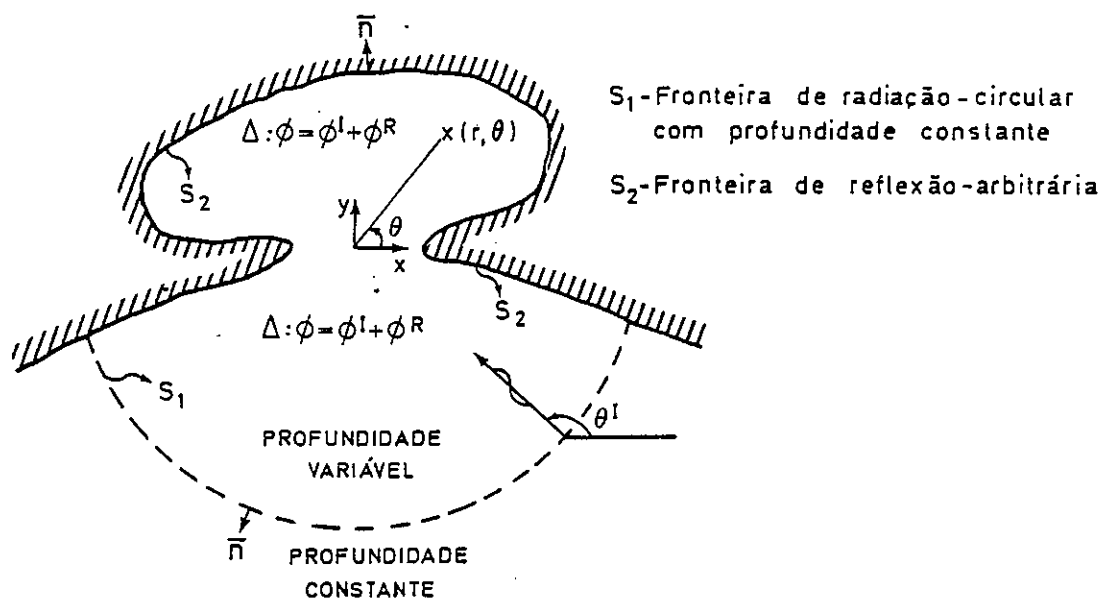


Fig. 4.2.2.4.3.1 - Geometria típica de uma bacia portuária para a análise com elementos de radiação

De acordo com o exposto em 4.2.2.1.3.3.1, num problema de dispersão há que considerar uma região de profundidade constante e uma região de profundidade variável, separadas por uma fronteira circular S_1 , dita fronteira de transmissão.

Consideram-se elementos de radiação os elementos da fronteira de transmissão que resolvem explicitamente a condição de radiação.

Na análise do problema com elementos de radiação, a equação reduzida é resolvida na região de profundidade variável, Δ , sujeita a uma condição de reflexão parcial na fronteira sólida, S_2 , e a uma condição de radiação na fronteira líquida, fronteira de transmissão ou fronteira de radiação, S_1 . Isto é, o problema consiste na resolução da equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} (CC_g \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (CC_g \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{C}{g} \omega^2 \phi = 0 \quad \text{em } \Delta \quad (4.205)$$

sujeita às condições de fronteira,

reflexão parcial:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - i K \alpha \phi = 0 \quad \text{em } S_2 \quad (4.206)$$

radiação:

$$\frac{\partial \phi^R}{\partial n} - i K \phi = 0 \quad \text{em } S_1 \quad (4.207)$$

A condição de radiação pode ser imposta em termos da onda total. Efectivamente, tendo em conta a equação (4.182), a condição de radiação pode escrever-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - i K \phi = p \quad \text{em } S_1 \quad (4.208)$$

com

$$p = \frac{\partial \phi^I}{\partial n} - i K \phi^I \quad \text{e} \quad \phi^I = -\frac{ig}{\omega} A^I e^{i(K_x x - K_y y)} \quad (4.209)$$

em que A^I é a amplitude da onda incidente.

A equação residual escreve-se então:

$$\int_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (CC_g \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (CC_g \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{C}{g} \omega^2 \phi \right] W_{\Delta} d\Delta + \\ + \int_{S_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - i K \phi \right] W_{S_1} dS + \int_{S_2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - i K \alpha \phi \right] W_{S_2} dS = \int_{S_1} p W_{S_1} dS \quad (4.210)$$

Integrando por partes a equação residual, uma vez^(*), e escolhendo os pesos arbitrários:

$$W_{S_1} = -CC_g W_\Delta \quad \text{e} \quad W_{S_2} = -CC_g W_\Delta \quad (4.211)$$

obtêm-se:

$$\int_{\Delta} \left[(CC_g \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial W_\Delta}{\partial x} + CC_g \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial W_\Delta}{\partial y} - \frac{C_g}{C} w^2 \phi W_\Delta) \right] d\Delta -$$

$$- \int_{S_1} i\omega C_g \phi W_\Delta dS - \int_{S_2} i\omega C_g \alpha \phi W_\Delta dS = \int_{S_1} CC_g p W_\Delta dS \quad (4.212)$$

Estabelecida a forma fraca da equação residual, pode agora discretizar-se o domínio em elementos finitos:

$$\Delta = \sum_e \Delta^e \quad (4.213)$$

e definir em cada elemento finito uma função de aproximação e uma função de peso, respectivamente:

$$\phi = N_i \phi_i \quad (4.214)$$

$$W_\Delta = \delta \phi = N_i \delta \phi_i \quad (\text{Galerkin}) \quad (4.215)$$

em que os ϕ_i , valores nodais da função potencial são as incógnitas do problema.

(*) Integração por partes:

$$\int_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (CC_g \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (CC_g \frac{\partial \phi}{\partial y}) \right] W_\Delta d\Delta =$$

$$= \int_{S_1+S_2} [CC_g \frac{\partial \phi}{\partial n}] W_\Delta dS - \int_{\Delta} [CC_g \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial W_\Delta}{\partial x} + CC_g \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial W_\Delta}{\partial y}] d\Delta$$

Tem-se então em cada elemento finito Δ^e :

$$\left\{ \int_{\Delta^e} C \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Delta - w^2 \int_{\Delta^e} \frac{1}{C} N_i N_j d\Delta + \right. \\ \left. + iw \left[- \int_{S_1^e} N_i N_j dS - \alpha \int_{S_2^e} N_i N_j dS \right] \right\} \delta \theta_j^e = \left\{ \int_{S_1^e} C p N_j dS \right\} \delta \theta_j^e \quad (4.216)$$

ou seja:

$$\left[K_{ij}^e - w^2 M_{ij}^e + iw C_{ij}^e \right] \theta_j^e = F_i^e \quad (4.217)$$

com:

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} C \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Delta \quad (4.218)$$

$$M_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \frac{1}{C} N_i N_j d\Delta \quad (4.219)$$

$$C_{ij}^e = C_{ij}^{1e} + C_{ij}^{2e} \quad (4.220)$$

$$C_{ij}^{1e} = - \int_{S_1^e} N_i N_j dS \quad (4.221)$$

$$C_{ij}^{2e} = -\alpha \int_{S_2^e} N_i N_j dS \quad (4.222)$$

$$F_i^e = \int_{S_1^e} C p N_i dS \quad (4.223)$$

Efectuando a montagem dos elementos finitos de modo a reconstituir o domínio Δ , obtêm-se o sistema de equações global:

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C}] \underline{\phi} = \underline{F} \quad (2.224)$$

cuja resolução fornece o valor da função potencial em todos os nós da malha. As matrizes \underline{K} , \underline{M} , \underline{C} e \underline{F} podem chamar-se, respectivamente matrizes de rigidez hidrodinâmica, massa hidrodinâmica, amortecimento hidrodinâmico e solicitação hidrodinâmica.

Na equação (2.224) observa-se que a condição de radiação e a condição de reflexão parcial são as únicas responsáveis, até ao momento, pelo amortecimento do sistema. Mais adiante considerar-se-á uma nova fonte de amortecimento - o atrito de fundo.

Do exposto em 4.2.2.1.3.3.1 e de alguma experiência na utilização dos elementos de radiação, sugere-se que a fronteira de radiação seja colocada a uma distância de pelo menos dois a três comprimentos de onda, do centro de radiação.

4.2.2.4.4 - Modelo de Cálculo com Elementos Infinitos

Elementos finitos e infinitos podem ser usados conjuntamente na modelação de problemas definidos em domínios infinitos. Enquanto os primeiros se aplicam na região de profundidade variável, os segundos aplicam-se na região de profundidade constante, e servem apenas para simular a presença de um domínio aberto, isto é, de um domínio que se estende até ao infinito.

A formulação dos elementos infinitos, propostos por Bettess (1977) e por Bettess e Zienkiewicz (1977), segue exactamente uma técnica idêntica à dos elementos finitos: discretização do contínuo, definição de funções de forma - umas para a interpolação da geometria e outras para a interpolação da variável do problema - minimização de erros através de resíduos pesados ou princípios variacionais, montagem do sistema de equações que caracterizam o problema, etc. Para a

definição da geometria, finita, o elemento infinito usa funções de forma Lagrangeanas (9 nós). Para a definição da variável do problema, o elemento infinito usa funções de forma apropriadas para um domínio infinito. Em princípio são admissíveis todos os tipos de funções de forma que satisfaçam a condição de radiação de Sommerfeld e que simulem o decaimento da amplitude da onda à medida que esta se afasta do centro de dispersão.

A figura 4.2.2.4.4.1 mostra um esquema da geometria típica do problema, numa bacia portuária. A configuração geométrica da bacia portuária é irregular e a profundidade é variável. Considera-se um referencial cartesiano, directo e ortónimo (x, y, z), com origem na entrada da bacia portuária, no nível médio de repouso, plano (x, y).

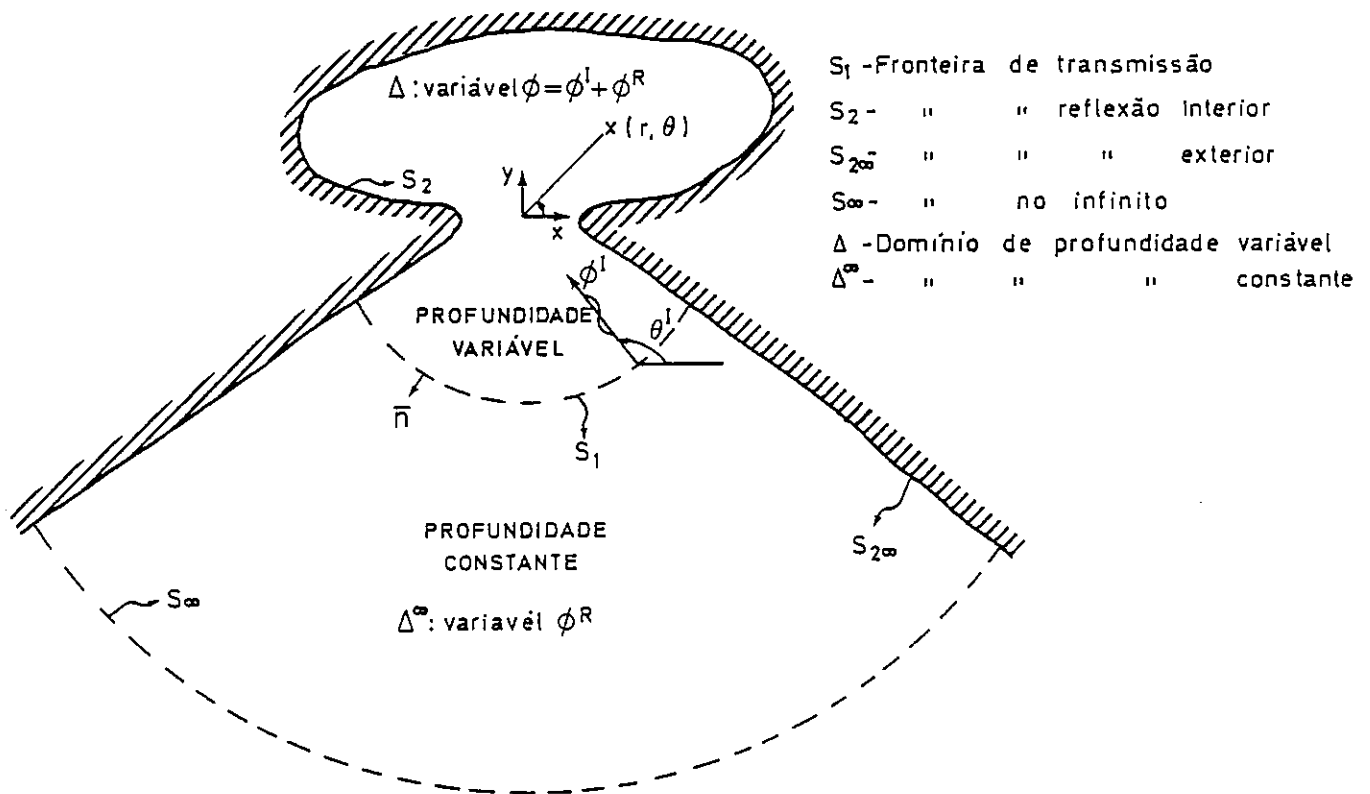


Fig. 4.2.2.4.4.1 - Esquema da geometria típica de uma bacia portuária para a análise com elementos infinitos

Por uma questão de estratégia, o domínio do problema é dividido em duas partes:

a) Domínio interior, finito e de profundidade variável, designado por Δ .

b) Domínio exterior, infinito e de profundidade constante, designado por Δ^∞ .

Em cada um dos domínios consideram-se as seguintes equações:

a) Domínio interior - equação reduzida da onda na variável ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial x} (C C_g \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (C C_g \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi = 0 \quad \text{em } \Delta \quad (4.225)$$

sujeita à condição de fronteira de reflexão parcial:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - i K \alpha \phi = 0 \quad \text{em } S_2 \quad (4.226)$$

b) Domínio exterior - tendo em conta a linearidade da equação reduzida, a função potencial ϕ pode ser dada por:

$$\phi = \phi^I + \phi^R \quad (4.227)$$

em que ϕ^I é a função potencial da onda incidente e ϕ^R é a função potencial da onda de dispersão. Escolhendo para ϕ uma expressão que seja solução da equação reduzida da onda, como é o caso das ondas planas monocromáticas, cuja função potencial é dada pela expressão (4.209) a equação reduzida da onda escreve-se apenas na variável ϕ^R :

$$\frac{\partial}{\partial x} (C C_g \frac{\partial \phi^R}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (C C_g \frac{\partial \phi^R}{\partial y}) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi^R = 0 \quad \text{em } \Delta^\infty \quad (4.228)$$

sujeita à condição de radiação:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi^R}{\partial r} - i K \phi^R \right) = 0 \quad \text{em } \Delta^\infty \quad (4.229)$$

e ainda à condição de valor prescrito

$$\phi^R = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi^R}{\partial n} = 0 \quad \text{em } S_\infty \quad (4.230)$$

A presença da fronteira $S_{2\infty}$ obriga ainda à imposição de uma condição adicional. Efectivamente, tal fronteira reflecte tanto a onda incidente como a onda de dispersão, pelo que nela se impõe uma condição de reflexão parcial na variável ϑ :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} - i K \alpha \vartheta = 0 \quad \text{em} \quad S_{2\infty} \quad (4.231)$$

Tendo em conta que a profundidade é constante no domínio exterior, a equação (4.228) degenera na equação de Helmholtz, pelo que pode ser substituída por esta última:

$$\nabla^2 \vartheta^R + K^2 \vartheta^R = 0 \quad \text{em} \quad \Delta^\infty \quad (4.232)$$

Definida a estratégia para a análise do problema, a equação residual escreve-se então:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(CC_g \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{C}{g} w^2 \vartheta \right] W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_2} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial n} - i K \alpha \vartheta \right] W_{S_2} ds + \\ & + \int_{\Delta^\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(CC_g \frac{\partial \vartheta^R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial \vartheta^R}{\partial y} \right) + \frac{C}{g} w^2 \vartheta^R \right] W_{\Delta^\infty} d\Delta + \int_{S_{2\infty}} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial n} - i K \alpha \vartheta \right] W_{S_{2\infty}} ds = 0 \quad (4.233) \end{aligned}$$

Integrando por partes a equação residual, uma vez, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Delta} \left[CC_g \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + CC_g \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} - \frac{C}{g} w^2 \vartheta W_{\Delta} \right] d\Delta + \int_{S_1+S_2} \left[CC_g \frac{\partial \vartheta}{\partial n} W_{\Delta} \right] ds + \int_{S_2} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial n} - i K \alpha \vartheta \right] W_{S_2} ds - \\ & - \int_{\Delta^\infty} \left[CC_g \frac{\partial \vartheta^R}{\partial x} \frac{\partial W_{\Delta^\infty}}{\partial x} + CC_g \frac{\partial \vartheta^R}{\partial y} \frac{\partial W_{\Delta^\infty}}{\partial y} - \frac{C}{g} w^2 \vartheta^R W_{\Delta^\infty} \right] d\Delta - \int_{S_1} \left[CC_g \frac{\partial \vartheta^R}{\partial n} W_{\Delta^\infty} \right] ds + \\ & \int_{S_{2\infty}} \left[CC_g \frac{\partial \vartheta^R}{\partial n} W_{\Delta^\infty} \right] ds + \int_{S_{2\infty}} \left[CC_g \frac{\partial \vartheta^R}{\partial n} W_{\Delta^\infty} \right] ds + \int_{S_{2\infty}} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial n} - i K \alpha \vartheta \right] W_{S_{2\infty}} ds = 0 \quad (4.234) \end{aligned}$$

(*) - a normal à fronteira S_1 , em Δ^∞ é dirigida para o interior, como mostra a figura 4.2.2.4.4.1.

(**) - em virtude da condição expressa na equação (4.230).

A escolha dos pesos arbitrários faz-se da forma mais conveniente, de modo a anular o maior número possível de termos na equação anterior:

$$W_{S_2} = -CC_g W_{\Delta} \quad (4.235)$$

$$W_{S_{2\infty}} = -CC_g W_{\Delta\infty} \quad (4.236)$$

$$W_{\Delta\infty} = W_{\Delta} \text{ ao longo de } S_1 \text{ }^{(*)} \quad (4.237)$$

Com a escolha feita para as funções de peso ao longo das fronteiras, obtêm-se a forma fraca da equação residual:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} \left[C \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + C \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} - \frac{1}{C} w^2 \phi W_{\Delta} \right] d\Delta - \int_{S_2} i \alpha w \phi W_{\Delta} dS + \\ & + \int_{\Delta\infty} \left[C \frac{\partial \phi^R}{\partial x} \frac{\partial W_{\Delta\infty}}{\partial x} + C \frac{\partial \phi^R}{\partial y} \frac{\partial W_{\Delta\infty}}{\partial y} - \frac{1}{C} w^2 \phi^R W_{\Delta\infty} \right] d\Delta - \int_{S_{2\infty}} i \alpha w \phi^R W_{\Delta\infty} dS = \\ & = \int_{S_1} C \frac{\partial \phi^I}{\partial n} W_{\Delta} dS - \int_{S_{2\infty}} \left[C \frac{\partial \phi^I}{\partial n} - i \alpha w \phi^I \right] W_{\Delta\infty} dS \end{aligned} \quad (4.238)$$

Estabelecida a forma fraca da equação residual, pode agora discretizar-se o domínio interior e exterior, respectivamente com elementos finitos e infinitos:

$$\Delta = \sum_e \Delta^e \quad (4.239)$$

$$\Delta^{\infty} = \sum_e \Delta_{\infty}^e \quad (4.240)$$

e definir em cada elemento finito e infinito funções de aproximação e funções de peso, respectivamente:

(*) - Esta condição é facilmente assegurada através da compatibilidade entre elementos finitos e infinitos.

$$\phi = N_i \phi_i \quad (4.241)$$

$$W_{\Delta} = \delta\phi = N_i \delta\phi_i \quad \text{em } \Delta^e \quad (4.242)$$

$$\phi^R = N_i^{\infty} \phi_i \quad (4.243)$$

$$W_{\Delta^{\infty}} = \delta\phi^R = N_i^{\infty} \delta\phi_i^R \quad \text{em } \Delta_{\infty}^e \quad (4.244)$$

Como já se referiu, usou-se o método de Galerkin para a escolha das funções de peso.

Tem-se então,

a) em cada elemento finito Δ^e :

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\Delta^e} C \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Delta - w^2 \int_{\Delta^e} \frac{1}{C} N_i N_j d\Delta + iw \left[- \int_{S_2^e} \alpha N_i N_j ds \right] \right\} \phi_i \delta\phi_j = \\ & = \left\{ \int_{S_1^e} C \frac{\partial \phi^I}{\partial n} N_j ds \right\} \delta\phi_j \end{aligned} \quad (4.245)$$

b) em cada elemento infinito Δ_{∞}^e

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\Delta_{\infty}^e} C \left[\frac{\partial N_i^{\infty}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{\infty}}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{\infty}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{\infty}}{\partial y} \right] d\Delta - w^2 \int_{\Delta_{\infty}^e} \frac{1}{C} N_i^{\infty} N_j^{\infty} d\Delta + iw \left[\int_{S_{2\infty}^e} -\alpha N_i^{\infty} N_j^{\infty} ds \right] \right\} \phi_i^R \delta\phi_j^R = \\ & = \left\{ - \int_{S_{2\infty}^e} \left[C \frac{\partial \phi^I}{\partial n} N_j^{\infty} - iw \alpha \phi^I N_j^{\infty} \right] ds \right\} \delta\phi_j^R \end{aligned} \quad (4.246)$$

ou seja,

a) em cada elemento finito Δ^e :

$$\left[K_{ij}^e - w^2 M_{ij}^e + iw C_{ij}^e \right] \phi_j^e = F_i^e \quad (4.247)$$

b) em cada elemento infinito Δ_{∞}^e :

$$\left[K_{ij}^{e\infty} - w^2 M_{ij}^{e\infty} + iw C_{ij}^{e\infty} \right] \phi_j^R = F_i^{e\infty} \quad (4.248)$$

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} C \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Delta \quad (4.249)$$

$$M_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \frac{1}{C} N_i N_j d\Delta \quad (4.250)$$

$$C_{ij}^e = - \int_{S_2^e} \alpha N_i N_j dS \quad (4.251)$$

$$F_i^e = \int_{S_1^e} C \frac{\partial \phi^I}{\partial n} N_i dS \quad (4.252)$$

$$K_{ij}^{e\infty} = \int_{\Delta_\infty^e} C \left[\frac{\partial N_i^\infty}{\partial x} \frac{\partial N_j^\infty}{\partial x} + \frac{\partial N_i^\infty}{\partial y} \frac{\partial N_j^\infty}{\partial y} \right] d\Delta \quad (4.253)$$

$$M_{ij}^{e\infty} = \int_{\Delta_\infty^e} \frac{1}{C} N_i^\infty N_j^\infty d\Delta \quad (4.254)$$

$$C_{ij}^{e\infty} = - \int_{S_{2\infty}^e} \alpha N_i^\infty N_j^\infty dS \quad (4.255)$$

$$F_i^{e\infty} = - \int_{S_{2\infty}^e} C N_i^\infty \left[\frac{\partial \phi^I}{\partial n} - i K \alpha \phi^I \right] dS \quad (4.256)$$

Ao longo da fronteira de transmissão estão definidas simultaneamente duas variáveis, a variável ϕ , pertencente ao domínio interior e a variável ϕ^R , pertencente ao domínio exterior. Assim, ao longo desta fronteira é necessário proceder a uma mudança da variável ϕ para ϕ^R ou ϕ^R para ϕ , de modo a compatibilizar os dois domínios. Com o objectivo de incluir a fronteira S_1 no domínio interior procede-se à mudança da variável ϕ^R para ϕ ao longo de S_1 . Tal mudança de variável dá origem a uma solicitação adicional ao longo da referida fronteira de transmissão. Efectivamente, a contribuição dos elementos de Δ_∞^e para os nós da fronteira S_1 é dada por:

$$[\underline{K}^\infty - w^2 \underline{M}^\infty + iw \underline{C}^\infty] \underline{\phi}^R = \underline{0} \quad (4.257)$$

Tendo em conta que $\phi^R = \phi - \phi^I$, tem-se:

$$[\underline{K}^\infty - \omega^2 \underline{M}^\infty + i\omega \underline{C}^\infty] \underline{\phi} = [\underline{K}^\infty - \omega^2 \underline{M}^\infty + i\omega \underline{C}^\infty] \underline{\phi}^I \quad \text{em } S_1 \quad (4.258)$$

ou seja,

$$[\underline{K}^\infty - \omega^2 \underline{M}^\infty + i\omega \underline{C}^\infty] \underline{\phi} = \underline{F}_{S_1}^\infty \quad \text{em } S_1$$

com

$$\underline{F}_{S_1}^\infty = [\underline{K}^\infty - \omega^2 \underline{M}^\infty + i\omega \underline{C}^\infty] \underline{\phi}^I \quad \text{em } S_1$$

Efectuando a montagem dos elementos finitos e infinitos de modo a reconstituir os domínios interior e exterior, respectivamente, obtêm-se o sistema de equação global:

$$\begin{array}{l} \text{Domínio Interior + } S_1 \\ \text{Domínio Exterior} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}^\infty - \omega^2 \underline{M}^\infty + i\omega \underline{C}^\infty \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \underline{\phi} \\ \underline{\phi}^R \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{F} + \underline{F}_{S_1}^\infty \\ \underline{F}^\infty \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (4.259)$$

que de um modo mais compacto se escreve:

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C}] \underline{\phi} = \underline{F} \quad (4.260)$$

e cuja resolução fornece o valor de $\underline{\phi}$ nos nós do domínio interior e fronteira de transmissão, e fornece o valor de $\underline{\phi}^R$ nos nós do domínio exterior.

Chama-se a atenção para o facto de as matrizes hidrodinâmicas do domínio exterior serem todas complexas. Efectivamente, sendo as funções de forma do elemento infinito, N_i^∞ , funções complexas, como é o caso na propagação de ondas, tais matrizes são necessariamente complexas.

4.2.2.4.5 - O Atrito de Fundo

Os únicos factores que até agora foram considerados no amortecimento do sistema, foram a reflexão parcial nas fronteiras sólidas, a radiação na fronteira líquida e a presença do domínio exterior, discretizado em elementos finitos.

Além dos factores já considerados, ainda é possível incluir um factor adicional de amortecimento, representativo do atrito de fundo no domínio interior, isto é, no domínio discretizado com elementos finitos. Efectivamente, as equações (4.217) e as equações (4.247) podem escrever-se:

$$[K_{ij}^e - (\omega^2 - i\gamma^e \omega) M_{ij}^e + i\omega C_{ij}^e] \theta_j^e = F_i^e \quad (4.261)$$

em que γ^e é um coeficiente empírico que permite considerar o amortecimento no elemento finito.

O coeficiente empírico γ pode ser definido de diferentes maneiras. Entre outros referem-se os trabalhos de Jonsson (1975), Wang e Connor (1975), Svendsen (1976), Brebbia e Walker (1978), sobre o atrito de fundo. No modelo que aqui se apresenta, o coeficiente γ^e é modelado segundo Brebbia e Walker (1978):

$$\gamma^e = \frac{\lambda}{c^2} \quad (4.262)$$

com

$$c = \sqrt{gh} \quad \text{e} \quad \tau_i = \lambda V_i \quad (4.263)$$

em que λ é o coeficiente do atrito de fundo, V_i é uma componente da velocidade e τ_i é uma componente do atrito de fundo.

Usualmente o atrito de fundo, τ_i , é dado por:

$$\tau_i = \frac{g}{c^2} v_i |v| \quad (4.264)$$

em que c é o coeficiente de Chezy. O coeficiente de Chezy pode ser calculado

pela fórmula de Chezy-Bazin:

$$c = \frac{87 \sqrt{h}}{\alpha + \sqrt{h}} \quad (4.265)$$

em que α é o coeficiente de rugosidade do fundo e pode ser dado pela tabela 85 de Lencastre (1972).

Deste modo, o coeficiente empírico γ^e escreve-se:

$$\gamma^e = \frac{|V|}{hc^2} \quad (4.266)$$

e pode ser calculado no centro de cada elemento. O empirismo do coeficiente de Chezy justifica que γ^e seja constante em cada elemento finito.

Feita a montagem dos elementos, o sistema de equações global escreve-se agora:

$$[\underline{K} - (\omega^2 - i \underline{\gamma}^T \omega) \underline{M} + i\omega \underline{C}] \underline{\phi} = \underline{F} \quad (4.267)$$

em que $\underline{\gamma}$ é o vector que contém os coeficientes empíricos, constantes em cada elemento. Na prática, as operações matriciais são feitas ao nível de cada elemento, para o qual se obtém o sistema de equações

$$\underline{A}^e \underline{\phi}^e = \underline{F}^e \quad (4.268)$$

com

$$A_{ij}^e = [K_{ij}^e - (\omega^2 - i\gamma^e \omega) M_{ij}^e + i\omega C_{ij}^e] \quad (4.269)$$

Finalmente, feita a montagem de todos os elementos obtém-se o sistema de equações global:

$$\underline{A} \underline{\phi} = \underline{F} \quad (4.270)$$

em que as matrizes \underline{A} , $\underline{\phi}$ e \underline{F} resultam da montagem das respectivas matrizes elementares.

4.2.2.5 - Tópicos Sobre o Problema da Interação Fluido-Estrutura

Um dos problemas mais actuais da Engenharia Civil é o projecto de obras marítimas com base no sistema de interação fluido-estrutura-fundação. A complexidade deste problema pode, efectivamente, ser avaliada pela intensa investigação teórica e experimental realizada durante os últimos anos.

Um aspecto fundamental do projecto é a definição da solicitação hidrodinâmica. A solicitação imposta a uma estrutura marítima, sujeita à acção das ondas e correntes, é devida ao movimento relativo entre o fluido e a estrutura cuja presença no fluido altera a cinemática do movimento ondulatório. Assim, desde que exista um movimento relativo entre um fluido e uma estrutura pode definir-se aí um problema de interação. Os diferentes tipos de interação podem classificar-se em três grupos, segundo Zienkiewicz e Bettess (1978) - a) problemas com grandes movimentos relativos, b) problemas de curta duração e com deslocamentos limitados do fluido e, finalmente, c) problemas de longa duração e com deslocamentos limitados do fluido.

Fenómenos tais como a resposta de uma estrutura marítima ao movimento ondulatório, são exemplos de problemas pertencentes ao terceiro grupo.

Basicamente, os problemas dos tipos b) e c) podem ter duas formulações distintas - a formulação Lagrangeana e a formulação Euleriana. Na primeira formulação o movimento do fluido descreve-se a partir dos respectivos deslocamentos, tal como se descreve o movimento da estrutura. Na formulação Euleriana o fluido é caracterizado por uma pressão ou função potencial e a interação com a estrutura é realizada através da consideração de forças de interface.

Em qualquer das formulações torna-se conveniente considerar a estrutura isolada do fluido com que interage, e introduzir a ligação através das pressões que se exercem na superfície de interface. A figura 4.2.2.5.1 mostra a separação do fluido, estrutura e interface para análise de um problema de interação bidimensional.

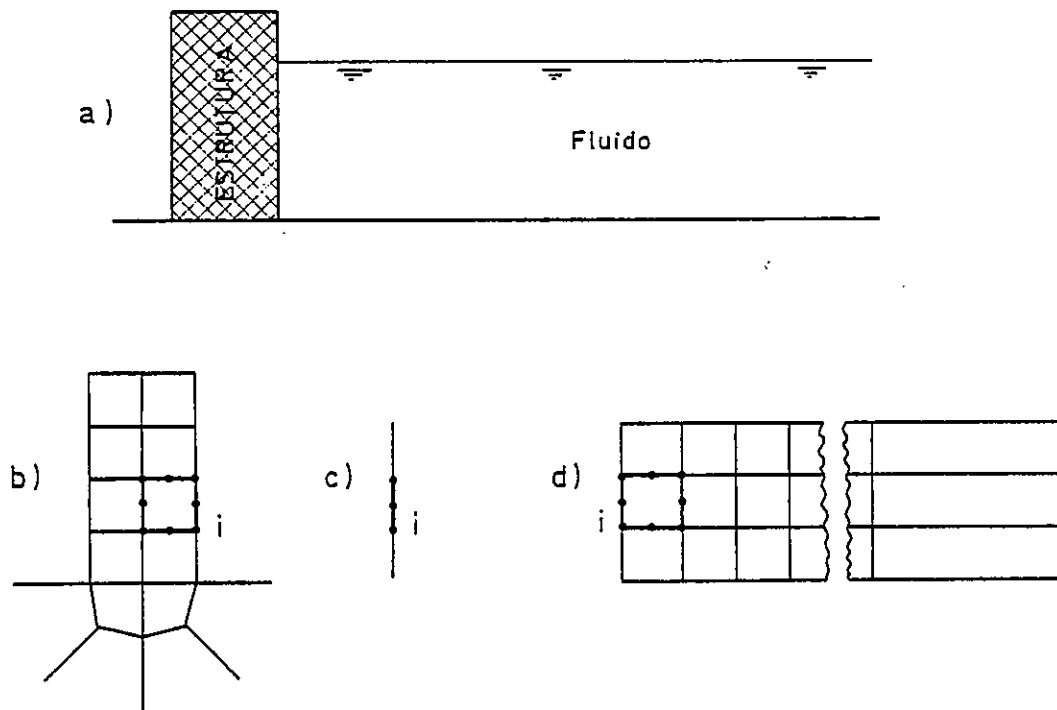


Fig. 4.2.2.5.1 - Interação fluido-estrutura: a) Definição do problema, b) estrutura discretizada em elementos finitos, c) interface discretizada em elementos finitos, d) fluido discretizado em elementos finitos

A aplicação do método dos elementos finitos à estrutura dá origem ao sistema de equações:

$$\underline{M}_s \ddot{\underline{u}} + \underline{C}_s \dot{\underline{u}} + \underline{K}_s \underline{u} + \underline{f} = \underline{0} \quad (4.271)$$

em que \underline{M}_s , \underline{C}_s e \underline{K}_s são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura e \underline{u} é o vector dos deslocamentos nodais. O vector das solicitações \underline{f} é dado por:

$$\underline{f} = \underline{f}_0 + \underline{f}_I \quad (4.272)$$

em que \underline{f}_0 é o vector das forças exteriores independentes e \underline{f}_I é o vector das forças que actuam na interface. O vector \underline{f}_I pode ser dado em termos da pressão p que se exerce na interface Ω .

$$\underline{f}_{I_i} = \int_{\Omega} \underline{\bar{N}}_i^T \underline{n} p d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\bar{N}}_i^T \underline{n} \underline{N} p d\Omega = L_{ij} p_j \quad (4.273)$$

com

$$p = N_i p_i = \underline{N} \underline{p} \quad \text{e} \quad L_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\bar{N}}_i^T \underline{n} N_j d\Omega \quad (4.274)$$

em que $\underline{\bar{N}}_i$ é a função de forma correspondente ao nó i da superfície de interface, que interpola os deslocamentos da estrutura, N_i é a função de forma correspondente ao nó i da mesma superfície que interpola as pressões na interface, \underline{n} é o versor normal à superfície e \underline{L} é a matriz de ligação do fluido à estrutura.

As formulações Lagrangeana e Euleriana intervêm na construção das matrizes hidrodinâmicas a acoplar, de formas diferentes, às matrizes da estrutura (4.271) e (4.272). Uma explicação exhaustiva da análise dos problemas de interacção fluido-estrutura é dada em Zienkiewicz e Bettess (1978).

Na maior parte dos programas de cálculo existentes, a formulação do problema de interacção é feita através de métodos integrais baseados numa função de Green para a equação da onda em profundidade constante. No modelo com elementos finitos, o problema da difo-refracção é colocado num contexto mais geral. A formulação com base no método dos elementos finitos apresenta algumas vantagens sobre os métodos integrais, em particular - resolução do problema da difo-refracção, matrizes hidrodinâmicas simétricas e em banda, e ligação automática do fluido à estrutura, para a qual, geralmente é utilizado o método dos elementos finitos.

O modelo de cálculo que se desenvolveu para o estudo da equação reduzida das ondas de pequena amplitude; não permite de um modo imediato a abordagem de problemas de interacção fluido-estrutura.

4.2.3 - Modelo Estocástico

O dimensionamento de estruturas marítimas com a onda de projecto é, de

facto, uma drástica simplificação da realidade. A agitação marítima é essencialmente aleatória, o que exige, sempre que possível, uma abordagem probabilística do problema.

Apresentam-se seguidamente os passos que permitem obter um modelo estocástico a partir do modelo de cálculo determinístico da equação reduzida das ondas de pequena amplitude.

A análise estocástica (ver tópicos no Anexo 1) baseia-se numa função de transferência dada pela resposta do sistema em estudo a solicitações harmónicas simples de amplitude unitária, frequência ω e rumo θ . Tal função de transferência é fornecida pelos elementos finitos e converte o espectro da solicitação no espectro de resposta.

Sendo a solicitação especificada pelas alturas de onda, frequências e rumos, é fácil o tratamento do espectro direccional. A integração do espectro no domínio da frequência fornece a variância da variável em consideração, o que permite prever a probabilidade de um valor máximo ser excedido. A distribuição das variâncias no domínio dos rumos permite identificar a direcção de propagação à qual está associada maior quantidade de energia.

Vejamos então como se pode obter um modelo estocástico para o estudo da difo-refracção e da ressonância de bacias portuárias, com base no método dos elementos finitos.

O modelo de cálculo com elementos de radiação ou com elementos infinitos dá origem a um sistema de equações do tipo (4.224) e (4.260).

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C}] \underline{\theta} = \underline{F} \quad (4.275)$$

do qual se obtém:

$$\underline{\theta} = \underline{A}(\omega, \theta) \underline{F} \quad (4.276)$$

em que

$$\underline{A}(\omega, \theta) = [\underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C}]^{-1} \quad (4.277)$$

é uma matriz que pode ser observada como uma função de transferência complexa que converte o vector de solicitação complexo \underline{F} no vector de resposta complexo $\underline{\phi}$.

A equação (4.276) dá a resposta do sistema a uma solicitação harmônica simples. Num ponto i da malha de elementos finitos a resposta do sistema pode então escrever-se:

$$\underline{\phi}_i = A_i(\omega, \theta) \underline{F} \quad (4.278)$$

em que $A_i(\omega, \theta)$ é a linha i da matriz $A(\omega, \theta)$.

Considere-se agora que a solicitação harmônica simples tem amplitude unitária e se representa por $\underline{F}_0 = \underline{F}$. Nestas condições, a resposta do sistema num ponto i da malha de elementos finitos designa-se por $\alpha_i(\omega, \theta) = \phi_i$ e é dada pela equação (4.278), ou seja:

$$\alpha_i^{\phi}(\omega, \theta) = A_i(\omega, \theta) \underline{F}_0 \quad (4.279)$$

A função $\alpha_i^{\phi}(\omega, \theta)$ é a função de transferência que permite calcular a resposta do sistema no nó i da malha de elementos finitos à função F , com a qual se calculou o vector \underline{F} (4.223) e (4.209). Isto é:

$$\underline{\phi}_i = \alpha_i^{\phi}(\omega, \theta) \underline{F} \quad (4.280)$$

Para determinar a relação entre o espectro da resposta e o espectro da solicitação começa-se por elevar ao quadrado ambos os membros da equação (4.280), tendo em conta o facto de todos os valores serem complexos. Deste modo tem-se:

$$\hat{\underline{\phi}}_i \underline{\phi}_i = \hat{\alpha}_i^{\phi} \underline{F} \underline{F} \alpha_i^{\phi} \quad (4.281)$$

Dividindo toda a equação por T (tempo) e fazendo $T \rightarrow \infty$ obtém-se finalmente a relação entre os espectros de solicitação e resposta (ver Anexo 1):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\hat{\underline{\phi}}_i \underline{\phi}_i] = |\alpha_i^{\phi}(\omega, \theta)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\underline{F} \underline{F}] \quad (4.282)$$

ou seja,

$$S_{\phi_i \phi_i}(w, \theta) = |\alpha_i^\phi(w, \theta)|^2 S_{FF}(w, \theta) \quad (4.283)$$

em que $S_{\phi_i \phi_i}$ é o espectro de resposta, S_{FF} é o espectro de solicitação e $|\alpha_i^\phi(\bar{w}, \bar{\theta})|^2$ é a função de transferência que transforma a ordenada do espectro de solicitação $S_{FF}(\bar{w}, \bar{\theta})$ na ordenada do espectro de resposta $S_{\phi_i \phi_i}(\bar{w}, \bar{\theta})$.

Note-se a facilidade com que os elementos finitos fornecem a função de transferência num nó genérico i - quadrado da resposta a uma solicitação harmônica simples com frequência w , amplitude unitária e rumo θ .

Obtido o espectro de resposta é fácil a determinação da variância. Efetivamente, tendo em conta que o processo estocástico é de média nula, a variância é dada pela área sob o espectro:

$$\sigma_{\phi_i}^2(\theta) = \langle \phi_i^2(\theta) \rangle = \int_0^\infty S_{\phi_i \phi_i}(w, \theta) dw \quad (4.284)$$

Além disso, se o processo for Gaussiano ou de banda larga podem determinar-se probabilidades de excedência de vários múltiplos, μ , do desvio padrão $\sigma_{\phi_i}(\theta)$. A probabilidade da resposta no nó i estar compreendida entre os valores $\pm \mu \sigma_{\phi_i}(\theta)$ está indicada na figura 4.2.3.1.

μ	Probabilidade de $-\mu \sigma_{\phi_i} \leq \phi_i \leq +\mu \sigma_{\phi_i}$	Probabilidade de $ \phi_i > \mu \sigma_{\phi_i}$
1	68.3%	31.7%
2	95.4%	4.6%
3	99.7%	0.3%

Fig. 4.2.3.1 - probabilidades de excedência

As características de resposta de uma bacia portuária podem ser postas em evidência através da solicitação com o espectro de ruído branco, com frequências de corte convenientemente escolhidas.

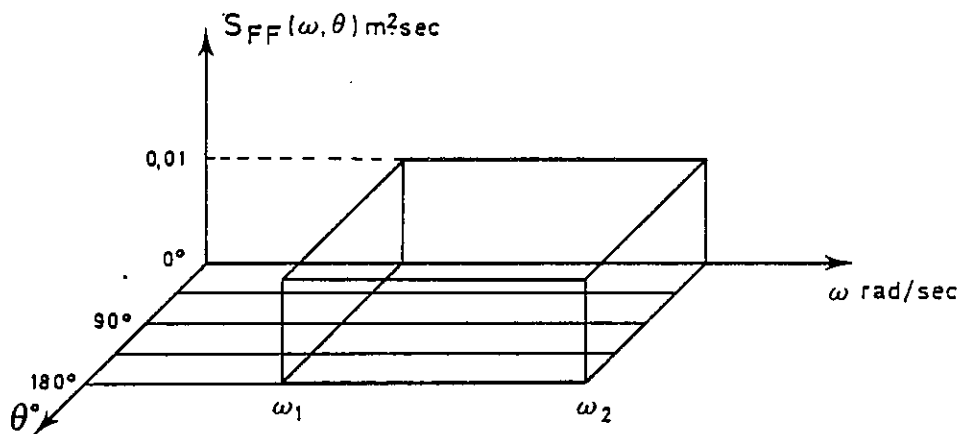


Fig. 4.2.3.2 - Espectro de ruído branco

Determinadas as variâncias correspondentes a todos os rumos do espectro de resposta é fácil a determinação da direcção à qual está associada maior quantidade de energia. O conhecimento de tal direcção é um aspecto importantíssimo nos estudos de ressonância.

A figura 4.2.3.3 mostra um exemplo da distribuição angular das variâncias. A representação polar é muito utilizada no processamento de dados ópticos em geologia, Nyberg, Orhaug e Svensson (1971).

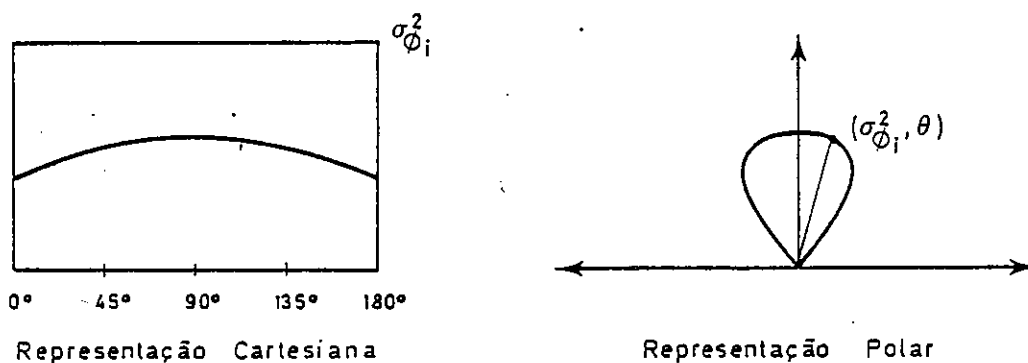


Fig. 4.2.3.3 - Distribuição angular de variâncias

Os espectros da elevação da superfície livre, das pressões, dos deslocamentos horizontais, etc, são facilmente calculáveis. Para isso basta definir na equação (4.278) a variável que se pretende estudar^(*), e seguidamente proceder de modo idêntico ao que se acaba de expôr. Naturalmente ficarão definidas novas funções de transferência, respectivamente $|\alpha_z^n(\omega, \theta)|^2$, $|\alpha_z^p(\omega, \theta)|^2$, $|\alpha_z^u(\omega, \theta)|^2$, etc.

(*) - Ver 4.2.2.1.3.2

4.2.4 - Aspectos Computacionais do Programa de Cálculo Automático

Apresentam-se a seguir os principais aspectos computacionais do programa de cálculo automático que se desenvolveu para o estudo da difo-refracção de ondas planas (DROP). Tal modelo resolve a equação reduzida das ondas de pequena amplitude com base no método dos elementos finitos.

4.2.4.1 - Estrutura do Modelo

O modelo de cálculo automático é constituído por três níveis.

No primeiro nível é feito o pré-processamento de dados. Durante a leitura dos dados são feitos alguns testes de coerência e são desenhadas a batimetria e a malha de elementos finitos, tanto em planta como em perspectiva. É também desenhada a malha de elementos finitos com elementos separados e numeração global dos nós. São ainda gerados, para utilização no segundo nível, os elementos necessários à compactação do sistema de equações pela altura útil das colunas.

No segundo nível são formadas as matrizes dos elementos finitos e é feita a respectiva imersão nas matrizes globais. Para cada frequência é resolvido o sistema de equações global, obtendo-se assim o potencial de velocidades em cada nó. Em seguida são calculadas as velocidades no centro dos elementos, caso seja levado em conta o atrito de fundo. Finalmente, os potenciais (e as velocidades) são armazenados num ficheiro binário para subsequente exploração.

No terceiro nível é feita a exploração dos resultados obtidos no nível anterior, isto é, são calculadas todas as grandezas com interesse, a partir dos valores dos potenciais. De momento, o modelo calcula o espectro (das amplitudes de oscilação) de resposta ao ruído branco e correspondente distribuição angular de variâncias, curvas de resposta, diagramas de deslocamentos horizontais, e isolinhas e perspectivas dos modos de oscilação. Todos os resultados são apresentados na forma gráfica para melhor apreensão dos mesmos.

Finalmente, salienta-se que só o segundo nível tem uma configuração estática. Efectivamente, tanto o pré-processamento como o pós-processamento de dados, respectivamente primeiro e terceiro níveis, evoluem consoante as necessi-

dades do momento.

4.2.4.2 - Programação

O programa de cálculo automático DROP foi desenhado numa linguagem estruturada - SFTRAN.

SFTRAN, "Structured FORTRAN", elimina por completo os inconvenientes da "programação esparguete" inerentes ao FORTRAN, conservando no entanto as vantagens do mesmo no que diz respeito aos tempos de execução.

A descrição detalhada do SFTRAN pode ser vista no respectivo manual de utilização do DEC 10.

Em todos os níveis do programa DROP foi usada alocação dinâmica de memória através da subrotina DCA desenvolvida no Centro de Informática.

Na medida que se entendeu conveniente, evitou-se o uso de matrizes com mais do que 1 índice, ao longo de todo o programa. Quando um elemento de uma matriz é referenciado num programa, a posição desse elemento na memória central é calculada pelo computador com base no valor dos índices desse elemento e na dimensão da matriz dada na respectiva declaração (DIMENSION ou COMMON). Consequentemente, o tempo que o computador gasta a cumprir um conjunto de instruções aritméticas é função não só das operações aritméticas expressas, como também da referenciação dos elementos de matrizes. Como exemplo, considere-se o produto de duas matrizes B e C com o resultado armazenado em A . Se as matrizes tiverem dimensões $n \times n$, há que efectuar n^2 multiplicações e n^2 adições. O mais simples programa que permite efectuar o referido produto de matrizes é o seguinte:

```
SUBROUTINE T1 (N,A,B,C) :
DIMENSION A(N,N), B(N,N), C(N,N)
DO ILIN = 1, N
  DO ICOL = 1, N
    A(ILIN, ICOL) = 0.0
    DO K = 1, N
      A(ILIN, ICOL) = A(ILIN, ICOL) + B(ILIN, K) * C(K, ICOLN)
    OD
  OD
OD
RETURN
END
```

Este programa, além das n^2 multiplicações e das n^2 adições contém $4n^3 + n^2$ referências a elementos de matrizes de 2 índices. A figura 4.2.4.2.1 mostra a evolução aproximada dos tempos de execução das subrotinas T1 e T2 em função de n .

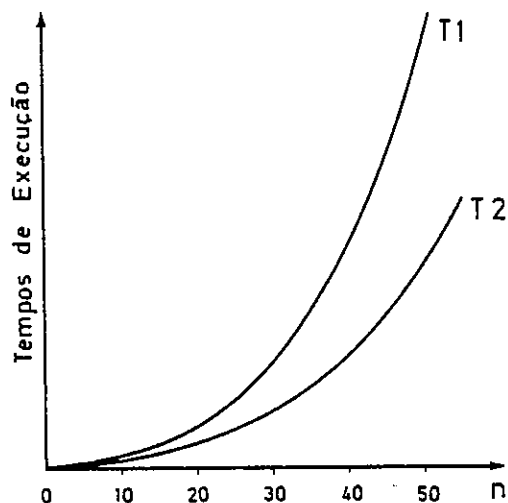


Fig. 4.2.4.2.1 - Evolução aproximada dos tempos de execução das subrotinas T1 e T2

O tempo gasto na referenciação de elementos de matrizes pode ser substancialmente reduzido, tendo em conta o modo como em FORTRAN se faz a passagem dos argumentos na subrotina. Na subrotina T2 as matrizes \underline{A} , \underline{B} e \underline{C} são declaradas como vectores de comprimento unitário e o computador calcula explicitamente o endereço de cada elemento da matriz, conforme for necessário.

```

SUBROUTINE T2(N,A,B,C)
DIMENSION A(1), B(1), C(1)
IAI = 1
ICI = 1
DO ICOL = 1,N
  IAP = IAI
  DO ILIN = 1,N
    IBP = ILIN
    ICF = ICI + N - 1
    PRD = 0.0
    DO ICP = ICI, ICF
      PRD = PRD + B(IBP) * C(ICP)
      IBP = IBP + N
    OD
    A(IAP) = PRD
    IAP = IAP + 1
  OD
  IAI = IAI + N
  ICI = ICI + N
OD
RETURN
END

```

A declaração das matrizes \underline{A} , \underline{B} e \underline{C} como vectores de comprimento unitário, é possível no FORTRAN na medida em que os argumentos da subrotina passam por alocação e não por valor. A figura 4.2.4.2.1 mostra a economia obtida nos tempos de execução.

A figura 4.2.4.2.2 mostra a subrotina principal, PROGP2 que faz a gestão do segundo nível do programa DROP.

4.2.4.3 - Matrizes dos Elementos Finitos

As convenções estabelecidas para a utilização do programa DROP estão expostas no Anexo III.

O domínio interior é discretizado com elementos finitos isoparamétricos triangulares de 6 nós e/ou rectangulares de 8 nós. Estes elementos calculam a expressão (4.269), e sobre eles não há nada particularmente novo a comentar. A figura 4.2.4.3.1 mostra a subrotina MELR8 que calcula as matrizes do elemento rectangular de 8 nós. A figura 4.2.4.3.2 mostra a subrotina DISPER que resolve a relação de dispersão.

O domínio exterior é discretizado com elementos infinitos rectangulares Lagrangeanos de 9 nós. Os elementos infinitos definem-se como um caso particular dos elementos finitos. De facto, a principal diferença entre ambos é que o elemento infinito usa funções de forma com decaimento exponencial para interpolar a função em estudo, simulando assim a presença de domínios abertos, ou seja, de domínios que se estendem até ao infinito. A figura 4.2.4.3.3 mostra o elemento infinito. O elemento é paramétrico e tem 9 nós. Para a definição da geometria do problema, os 9 nós são colocados a uma distância finita e definem um elemento Lagrangeano com coordenadas locais ξ, η . Para a definição do valor da função, 3 dos 9 nós são colocados a uma distância infinita e definem um elemento especial com coordenadas locais S, η . A coordenada S estabelece-se de acordo com Zienkiewicz e Bettess (1975). Na direcção η usam-se polinómios de Lagrange convencionais. Na direcção S usa-se uma função de interpolação do tipo

$$p(S) e^{-S/L} e^{iKS} \quad (4.235)$$

em que $p(S)$ é um polinómio em S , L é um factor de decaimento exponencial e K é o número de onda. O primeiro termo permite uma certa variação na envolvente da onda, o segundo termo dá origem ao decaimento da onda para grandes distâncias e, finalmente, o terceiro termo assegura uma forma periódica para a onda. A expressão (4.285) satisfaz a condição de radiação. Em virtude da expressão (4.285), as funções de forma que permitem interpolar os valores nodais da função são complexas. A função de forma correspondente ao nó j escreve-se:

$$N_j = e^{(S_j - S)/L} e^{iKS} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{n-1} \left(\frac{S - S_j}{S - S_q} \right) \quad (4.286)$$

em que o nó n está no infinito. Os elementos que aqui se usam têm 3 nós na direcção S . O terceiro nó está no infinito e é supérfluo nesta formulação, em virtude da condição (4.230).

A integração numérica na direcção S apresenta algumas novidades relativamente à integração numérica convencional. Uma exposição detalhada da técnica de integração pode ser vista em Zienkiewicz e Bettess (1975).

A maior dificuldade na utilização dos elementos infinitos é a escolha de um valor adequado para o factor de decaimento L . Na prática verifica-se que os resultados na região interior do domínio do problema não são muito sensíveis ao valor de L . A escolha automática do valor de L pode fazer-se obrigando o decaimento da função de forma a seguir grosseiramente o decaimento do valor absoluto do primeiro termo das funções de Hankel^(*). Este procedimento baseia-se no facto de as funções de Hankel de primeira espécie poderem exprimir a solução fundamental da equação de Helmholtz, válida na região de profundidade constante. A solução fundamental da equação de Helmholtz satisfaz

$$(*) \quad e^{-S/L} = e^{(S_1 - S_2)/L} = \frac{((JO(S_2))^2 + (YO(S_2))^2)^{1/2}}{((JO(S_1))^2 + (YO(S_1))^2)^{1/2}} \quad (4.287)$$

em que JO e YO são as funções de Bessel e S_1 e S_2 são os raios respectivamente do primeiro e do segundo anéis de nós do elemento infinito.

a condição de radiação, Brebbia e Walker (1978). A figura 4.2.4.3.6 mostra o cálculo automático do factor de decaimento. A figura 4.2.4.3.4 mostra a subrotina que calcula as matrizes do elemento infinito. A figura 4.2.4.3.5 mostra a subrotina que efectua as operações (4.258) de compatibilização entre o domínio interior e exterior. A figura 4.2.4.3.7 mostra a subrotina ENMEL.

A fronteira sólida do domínio exterior, caso exista, é discretizada com elementos infinitos de 3 nós que são um dos lados do elemento infinito descrito anteriormente.

Finalmente, quer a fronteira sólida do domínio interior, quer a fronteira de radiação ou de transmissão são discretizadas com elementos finitos isoparamétricos de 3 nós. Para estes elementos, efectua-se as seguintes transformações de coordenadas, tendo em conta a figura 4.2.4.3.8.

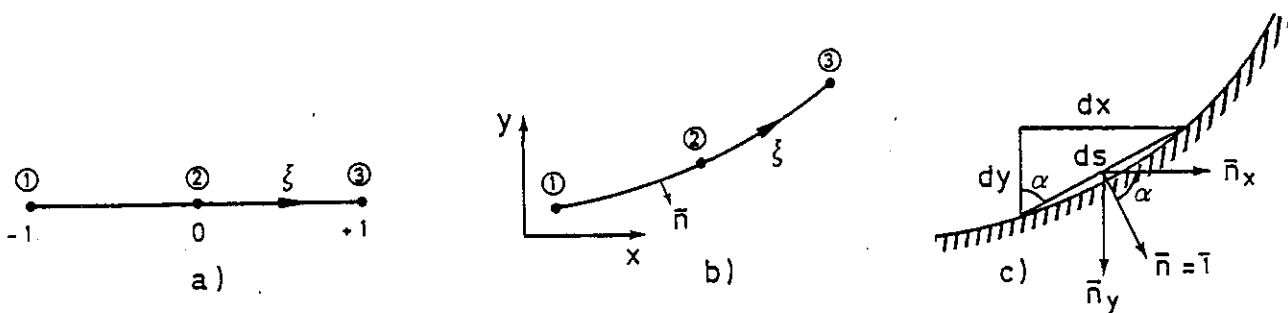


Fig. 4.2.4.3.8- Elemento de 3 nós; a) coordenadas locais, b) coordenadas globais, c) normal unitária exterior

Definidas as funções de forma do elemento, $N_i(\xi)$, as coordenadas globais de um ponto (x, y) e as correspondentes derivadas em ordem à coordenada local são dadas, respectivamente por:

$$\begin{cases} x = N_i x_i \\ y = N_i y_i \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi} x_i = J_1 \\ \frac{dy}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi} y_i = J_2 \end{cases} \quad (4.288)$$

A quantidade elementar dS é dada por:

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \cdot d\xi = \sqrt{J_1^2 + J_2^2} \cdot d\xi \quad (4.289)$$

As componentes da normal unitária exterior calculam-se tendo em conta a figura 4.2.4.3.8 c). Assim tem-se:

$$n = n_x \bar{e}_x + n_y \bar{e}_y \quad (4.290)$$

em que

$$n_x = \cos \alpha = \frac{dy}{dS} \quad n_y = -\sin \alpha = \frac{dx}{dS} \quad (4.291)$$

Considerando agora as expressões (4.289) e (4.288) tem-se:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \frac{1}{dS} \begin{bmatrix} dy \\ -dx \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2}} \begin{bmatrix} J_2 \\ -J_1 \end{bmatrix} \quad (4.292)$$

Conhecidas as componentes da normal unitária exterior, é fácil a determinação da componente normal da onda incidente. Considerando a expressão (4.163), que representa a função potencial de uma onda incidente plana e monocromática:

$$\phi^I = -i \frac{g}{w} A^I e^{i(K_x x + K_y y)} \quad (4.293)$$

a respectiva derivada normal escreve-se:

$$\frac{\partial \phi^I}{\partial n} = \nabla \phi^I \cdot \bar{n} = \left[\frac{\partial \phi^I}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi^I}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = i \phi^I \frac{K_x J_2 - K_y J_1}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2}} \quad (4.294)$$

o que permite imediatamente o cálculo das expressões (4.182) e (4.223) respeitantes à fronteira líquida. A figura 4.2.4.3.9 mostra a subrotina que calcula as matrizes dos elementos da fronteira líquida.

4.2.4.4 - Matrizes Globais

Calculadas as matrizes de cada elemento finito, expressão (4.269), é feita a respectiva imersão na matriz global (4.270), através das subrotinas IMER e IMERS. A figura 4.2.4.4.1 mostra a subrotina IMER.

4.2.4.5 - Sistema de Equações

Feita a montagem de todos os elementos finitos obtêm-se o sistema de equa

ções global (4.270) que simbolicamente se representa por

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad (4.295)$$

em que \underline{A} é uma matriz simétrica ($n \times n$) com semi-banda variável, \underline{x} , é o vector das incógnitas e \underline{b} é o vector dos termos determinados.

Um dos mais importantes aspectos computacionais na resolução de grandes sistemas de equações é o método que se usa para armazenar os termos da matriz \underline{A} , Wilson, Bathe e Doherty (1974), Wilson e Dovey (1978). Se se pretende usar um método de eliminação, os únicos termos que é necessário armazenar em cada coluna são os que vão desde o primeiro elemento não nulo, até ao termo da diagonal dessa coluna. Assim, a matriz com os termos inicialmente dispostos como mostra a figura 4.2.4.5.1a) pode ser armazenada numa matriz unidimensional, como mostra a figura 4.2.4.5.1b) com um vector de apontadores inteiros que indicam a localização de cada termo da diagonal. A figura 4.2.4.5.1c) mostra como esta técnica de armazenagem se pode estender a uma partição em blocos que se armazenam em memória periférica. Tal técnica requiere em qualquer instante a presença de 2 blocos em memória central. Em Bathe e Wilson (1976) mostra-se que a maioria dos métodos de resolução de equações são muito semelhantes no que diz respeito ao número de operações algébricas envolvidas, e que se podem considerar uma variante do método de eliminação de Gauss.

O algoritmo de factorização para a resolução do sistema de equações compactado pela altura útil das colunas pode resumir-se nas três etapas seguintes:

a) - Factorização da matriz \underline{A} ($j = 2, n$)

$$\underline{A} = \underline{L}\underline{U} \quad \text{ou} \quad \underline{A} = \underline{L}\underline{D}\underline{L}^T \quad (4.296)$$

em que a coluna j da matriz triangular superior \underline{U} se calcula por

$$U_{ij} = A_{ij} - \sum_{K=K_m}^{j-1} L_{iK} U_{Kj} \quad i=fj, j \quad (4.297)$$

e a linha j da matriz triangular inferior se calcula por

$$L_{ji} = U_{ij}/D_{ii} \quad i=fj, i-1 \quad (4.298)$$

em que \underline{D} é uma matriz diagonal, fj é o primeiro termo não nulo na coluna j , fi é o primeiro termo não nulo na coluna i e km é o máximo de fi e fj . Os termos diagonais U_{ii} e D_{ii} são iguais visto que L_{ii} é normalizado em 1.0. É conveniente calcular U_{ij} por colunas com $i=fj, j$. Logo que cada coluna esteja completa, calcula-se L_{ji} por linhas com $i=fj, j-1$, e armazena-se a respectiva transposta L_{ij}^* onde U_{ij} foi previamente calculado. Os termos U_{ii} ou D_{ii} permanecem na mesma posição como A_{ii} .

b) - Redução progressiva

A equação (4.295) pode escrever-se na forma $\underline{Lz} = \underline{b}$, em que $z = \underline{DL}^T \underline{x}$, de acordo com (4.296). Assim,

$$z_i = b_i - \sum_{K=f_i}^{i-1} L_{Ki}^* z_K \quad i=1, n \quad (4.299)$$

Definindo $\underline{Y} = \underline{D}^{-1} \underline{z}$ vem $\underline{Y} = \underline{L}^T \underline{x}$ ou seja,

$$Y_i = z_i / D_{ii} \quad i=1, n \quad (4.300)$$

c) - Retro-substituição

A partir de $\underline{Y} = \underline{L}^T \underline{x}$, tem-se

$$x_i = Y_i - \sum_{K=i+1}^n L_{iK}^* Y_K \quad i=n, 1 \quad (4.301)$$

É importante notar que não se fazem operações com os zeros fora da altura útil das colunas. Além disso, tanto o número de operações envolvidas como a capacidade de armazenagem necessária a este esquema não são função da largura da banda da matriz. A factorização da matriz A é independente das operações b) e c), pelo que a operação a) só se faz uma vez. As operações b) e c) fazem-se tantas vezes quantas os vectores de termos determinados. As figuras 4.2.4.5.2 e 4.2.4.5.3 mostram as subrotinas necessárias à aplicação da técnica da altura

útil das colunas para a resolução em memória central de um sistema de equações com matriz complexa.

4.2.4.6 - Velocidades e Deslocamentos Horizontais

O cálculo das velocidades no centro dos elementos finitos de 6 ou 8 nós, é necessário quando se pretende levar em conta o atrito de fundo, tal como se referiu em 4.2.2.4.5. A figura 4.2.4.6.1 mostra a subrotina que calcula as velocidades no centro dos elementos. A figura 4.2.4.6.2 mostra a subrotina que calcula o coeficiente empírico γ^e , expresso na equação (4.266).

Calculadas as componentes das velocidades,

$$V_i = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + i \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} \quad (4.302)$$

é imediato o cálculo dos deslocamentos horizontais. De acordo com (4.148), tem-se:

$$|U_i| = \frac{2}{w} \text{CABS}(V_i) \quad (4.303)$$

O cálculo dos deslocamentos horizontais é feito no terceiro nível do programa DROP.

4.2.5 - Exemplo de Aplicação

A título de exemplo de aplicação do modelo de cálculo automático apresentam-se seguidamente alguns aspectos do estudo das condições de ressonância do porto de Leixões.

As figuras 4.2.5.1-2 mostram, respectivamente, a malha de elementos finitos e as isolinhas da batimetria. A fronteira líquida foi modelada com elementos de radiação. A bacia foi solicitada com um espectro de ruído branco de banda limitada. As figuras 4.2.5.3-6 mostram os espectros de resposta nos nós 321 e 408, cuja localização está indicada na figura 4.2.5.1. As figuras 4.2.5.7-8 mostram duas curvas de resposta dos nós 321 e 408, respectivamente. As figuras 4.2.5.9-16 mostram alguns aspectos correspondentes a determinadas oscilações.

Finalmente, refere-se que o estudo das condições de ressonância do porto de Leixões está ainda em curso, pelo que não se apresentam conclusões.

```

C C .....
C C SUBROUINE PRIMP2
C C 1(X,Y,H,RFL,RRND,NOB0,T,AR,MAXA,VR,TETA1,VELX,VELY)
C C .....
C C PROGRAMA PRINCIPAL  NRM=NRH*1;NEL=NEL*AMEL;NELS
C C NE3689=64*NELT;HRELRTY**NELI;3*NELS
C C .....
C C DIMENSION X(NOS),Y(NOS),H(NOS),NOR(NFL),NORR(NE3689)
C C DIMENSION RFL(NELS),I(NT),MAXA(NRM),VR(NELS)
C C DIMENSION TETA1(NR)
C C COMMON /E1/ IFIC(2),IFC(2),IF5
C C COMMON /E2/ NOR(9),XVE(9,2),HE(9),RFLC,NEL(54),IS
C C COMMON /ACTUAL/ NRM,RRND,WR,WRG,WRG,TT,DECE,TR
C C COMMON /DIR/ NOS,RRR,RRR,RELTR,RELTR,NELSR,NELSR,NEL,NE3689,RR,NT
C C COMMON /PINC/ Z,C,TETA1,SCTAI,ZGAIN,TETA1R
C C COMMON /DIRS/ NR,NR,CI,CE,CEG,CGF,RR,TOL,IONDA
C C COMMON /METRES/ NINTI,SGTRF(6),WGTRF(6)
C C COMMON /RINF/ RR(8),IN(6),IATRF,CKUS,GARA
C C COMMON /ALK/ IGAMM
C C COMMON /VEL/ RE(8),VX,VY
C C COMMON /RAD/ ITRF,VRE
C C COMPLEX Z,MEL,ZGAIN,A(NR),R(NOS),WGTRF,CYETA1,STETA1
C C COMPLEX RE,VX,VY,VELX(NELTR),VELY(NELTR),IGAMM
C C .....
C C LETURA DOS RADOS I TABELA DOS NOS'
C C READ(IFIC(2)) X,Y,H I TIPO DE ELEM.: 39,38,36,32,31,30
C C READ(IFIC(2)) NNR I TIPO DE ELEM.: 39,38,36,32,31,30
C C IF (NELS-ED,0)
C C READ(IFIC(2)) NR00,RFL I TABELA DOS ELEMENTOS
C C ELSE
C C READ(IFIC(2)) NORR,FFL,VR
C C .....
C C FI
C C REAR(IFIC(2)) IATRF,CRUG I ATRTO DE FUNDO, COEF RUGOSIDADE
C C SKIP RECORD IFIC(2) I ANGLITUDES DAS ONDAS INCIDENTES
C C READ(IFIC(2)) TETA1 I RUMOS DAS ONDAS INCIDENTES
C C READ(IFIC(2)) Y I PERIODOS EM CADA RUM0
C C REAR(IFIC(2)) HINF,IONDA,TOL I PROF AO LARGO, T DE ONDA, TOLER.
C C READ(IFIC(2)) MAXA I ERROE. DA BTAG. DA MATR. DOS COEF.
C C READ(IFIC(2)) IINF I 1-ELEMS INFINITOS, 0-ELEMS RADI.
C C .....
C C INICIALIZACAO DE ALGUNS PARAMETROS
C C G=9.81 I ACELERACAO DA GRAVIDADE (M/S**2)
C C Z=(0.0,1.0) I UNIDADE IMAGINARIA
C C .....
C C CICLO DO NUMERO DE RUMOS
C C DO IR=1,NR
C C TETA1R=TETA1(R)
C C CYETA1=Z*CYC(CYETA1R) I CONST. PARA O VEL. DE ONDA
C C STETA1=Z*STH(TETA1R) I CONST. PARA O VEL. DE ONDA
C C .....
C C CICLO DO NUMERO DE ONDAS EM CADA RUM0
C C DO I=1,NT
C C HO=1.0E130 I INICIALIZACAO
C C OFCE=0.0 I INICIALIZACAO
C C DO I=1,NOS
C C R(I)=(0.0,0.0) I INICIALIZACAO
C C DO I=1,NRM
C C A(I)=(0.0,0.0) I INICIALIZACAO
C C .....
C C DO 0=5,2E3;0.30718/T(I) I FREQUENCIA ANGULAR
C C NR=VR
C C .....
C C WU=WR/G
C C ZGAIN=-ZAG/W
C C REWINU IFIC(5)
C C .....
C C CICLO DO NUMERO DE ELEMENTOS
C C ICE=0 I APONTADOR DOS ELEMENTOS
C C ICA=0 I APONTADOR DOS ELEMENTOS DE 6 & 8 NOS'
C C ICF=0 I APONTADOR DOS COEF. REFL.,ELEM.
C C ICR=0 I APONTADOR ELEM. FRONT, REFL, EXIER.
C C .....
C C LETURA DE VELOCIDADES PARA O ATRITO DE FUNDO
C C IF (IATRF.NE.0)
C C READ(IFIC(6))VELX
C C READ(IFIC(6))VELY
C C FI
C C DO J=1,54
C C .MEL(J)=(0.0,0.0) I INICIALIZACAO
C C DO
C C NHO=NNOB(I)-30 I NUMERO DE NOS' DO ELEM.
C C IF (NNO.LY.3)
C C IS=NNO I FRONTEIRA S1, S2 OU S0
C C NHO=3
C C FI
C C .....
C C DADOS DO ELEMENTO FINITO
C C DO J=1,NHO
C C ICE=ICE+1
C C K=NNOB(ICE)
C C NOD(J)=K
C C XVE(J,1)=X(K)
C C XVE(J,2)=Y(K)
C C VE(J)=H(K)
C C DO
C C .....
C C CALCULO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES E VECTOR SOLICITACAO
C C DO ELEMENTO FINITO
C C DO CASE NHO
C C .....
C C ELEMENTO FINITO DE 3 NOS'
C C CASE 3
C C NINT=8
C C DO CASE IS
C C .....
C C ELEMENTO FINITO DA FRONTEIRA DE RADIACAO, S1
C C CASE 1
C C CALL HELF31
C C IHS=1
C C IF (IINF.EQ.0)
C C IHR=1
C C FI
C C ESAC
C C .....
C C ELEMENTO FINITO DA FRONTEIRA DE REFLEXAO INTERIOR, S2
C C CASE 2
C C ICF=ICP+1
C C RFLC=RFL(ICP)
C C RFLC=(1.0-RFLC)/(1.0+RFLC)
C C IF (RFLC.GT.1.0E-20)
C C CALL HELF32
C C IHR=1
C C FI
C C ESAC
C C .....
C C ELEMENTO FINITO DA FRONTEIRA DE REFLEXAO EXTERIOR, S0
C C CASE ELSE

```

```

NINTI=3
IF (DECE.LT.1.0E-20)
  HH=HINF
  CALL DISPFR I NUMERO DE ONDA
  CALL FUCE I ESTIMACAO DE DECE
  CALL GAUINF I ABS. & PESOS DE INTG. COMPLX.
FI
ICP=ITFTI
RFLR=FL(I,CP)
RFLR=(1.0-RFLR)/(1.0+RFLR)
ICN=ICNFI
VNE=VN(ICN)
CALL MELI30
IMS=1
IMR=1
ESAC
ESACDD
ELEMENTOS TRIANGULAR & RECTANGULAR
CASE 6,8
IF (IATRF.NE.0)
  ICA=ICAI1
  VX=VELX(ICA)
  VY=VELY(ICA)
  CALL ALINF0
  IGAMM=2*GAMMA
ELSE
  IGAMM=(0.0,0.0) I SEM ATRITO DE FUNDO.
FI
IF (NNO.EQ.6)
  NINT=7
  CALL MELT6 I TRIANGULO 6 NOS
ELSE
  NINT=4
  CALL MELR8 I RECTANGULO 8 NOS
FI
IMR=1
ESAC
ELEMENTO INFINITO LAGRANGEANO DE 9 NOS
CASE 9
NINT=4
NINTI=3
IF (DECE.LT.1.0E-20)
  HH=HINF
  CALL DISPFR I NUMERO DE ONDA
  CALL FUCE I ESTIMACAO DE DECE
  CALL GAUINF I ABS. & PESOS DE INTG. COMPLX.
FI
CALL MELT9
IMS=1
IMR=1
ESAC
ESACDD
IMERSAO DAS MATRIZES DO ELEMENTO FINITO
NAS MATRIZES GLOBAIS
IF (IMS.EQ.1)
  CALL IMERS(R,NDC) I IMER. NO V.T.I. GLOBAL
  IMS=0
FI
IF (IMR.EQ.1)
  CALL IMER(D,HGA,H,MMK,MMH) I IMER. NA MAT. GLOBAL
  IMR=0
FI

```

```

OD
RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
CALL SOLE(A,R,HGA,H,MMK,MMH,NMS,NMH,1) I FACTORIZACAO
CALL SOLE(A,R,HGA,H,MMK,MMH,NMS,NMH,2) I RETROSUBSTITUCAO
ARMAZENAR NOS POTENCIAIS DE VELOCIDADES
WRITE(IFIC(4),IIFR) R
CALCULO DAS VELOCIDADES HORIZONTAIS
NO CENTRO DOS ELEMENTOS DE 6 & 8 NOS
IF (CRUG.GT.1.E-15)
  REWINO IFIC(7)
  ICA=0
  ICE=0
  DO I=1,NEL
    NNO=NRDC(I)-30
    DO CASE NNO
      CASE 6,8
        DO J=1,NNO
          ICE=ICE+1
          K=ROD(ICE)
          HOB(J)=K
          XYE(J,1)=X(K)
          XYE(J,2)=Y(K)
          RE(J)=R(K)
        OD
        CALL VELDES
        ICA=ICAI1
        VELX(ICA)=OX
        VELY(ICA)=OY
      ESAC
    CASE ELSE
      NNO=MAXO(3,NNO)
      ICE=ICE+NRDC
    ESAC
  ESACDD
  OD
  IF (IATRF.NE.0)
    IFS=IFS-2
  FI
  WRITE(IFIC(6),IFS) VELX
  WRITE(IFIC(6),IFS) VELY
  FI
  OD
  OD
  RETURN
  END

```

Fig.4.2.4.2.2 - PROGP2, Subrotina principal do segundo nível

```

C C C .....
C C C SURROUTINE MELRS
C C C .....
C C C MATRIZES DO ELEMENTO FINITO RECTANGULAR DE 8 NOS
C C C FAMILIA SERENIDITY
C C C COMMON /FIC/ IFC(7),IFR,IFS
C C C COMMON /ACTUAL/ NINT,NNO,WRM,WG,IT,NECE,IR
C C C COMMON /FF/J/ X,Y,R(9,3),JAC(2,2),JACI(2,2),DJAC
C C C COMMON /ELEM/ MOD(9),XYF(9,2),HE(9),RFE,MEL(54),IS
C C C COMMON /DISPR/ H,H0,CF,CG,CFG,CGF,FK,TOL,IONIA
C C C COMMON /GAUSS4/ SG4(4),WG4(4)
C C C COMMON /ATR/ IGMAM
C C C REAL JAC,JACI
C C C COMPLEX MEL,N,ENOX,IGMAM
C C C IL=EMEL(NHO,NNO)=36
C C C IF (IT.EQ.1.AND.IR.EQ.1)
C C C PARA A PRIMEIRA ONDA DA SOLICITACAO
C C C EM CADA ABSSICA DE INTEGRACAO NA DIRECCAO OSI
C C C DO II=1,NINT
C C C X=SG4(II) I AESSICA
C C C UX=WG4(II) I PESO
C C C EM CADA ABSSICA DE INTEGRACAO NA DIRECCAO ETA
C C C DO JJ=1,NINT I AESSICA
C C C Y=SG4(JJ) I PESO
C C C WY=WG4(JJ) I PESO
C C C WXY=WX*WY
C C C CALL FFEK(3)
C C C CALCULO DA PROFUNDIDADE NO PORTO DE INTEGRACAO
C C C H=0.0
C C C DO I=1,NHO
C C C H=H*REAL(N(I,1))*HE(I)
C C C OD
C C C CALCULO DAS MATRIZES DE TRANSFORMACAO DE COORDENADAS
C C C E DO DETERMINANTE
C C C CALL JCD
C C C WDT=DJAC*WXY
C C C CALCULO DAS DERIVADAS DAS FUNCOES DE FORMA
C C C EM ORDEM AS COORDENADAS GLOBAIS
C C C DO J=1,NHO
C C C ONDX=JACI(1,1)*N(J,2)+JACI(1,2)*N(J,3)
C C C H(J,3)=JACI(2,1)*N(J,2)+JACI(2,2)*N(J,3)
C C C H(J,2)=ONDX
C C C OD
C C C ARMAZENAGEM PARA UTILIZACAO NAS RESTANTES ONDAS DA SOLICITACAO
C C C WRITE(FC(5)) H,N,WDT
C C C CALCULO DO NUMERO DE ONDA, VELOCIDADE DE FASE E DE GRUPO
C C C CALL DISPER
C C C ENDECRE DO INICIO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C C C K=0

```

```

C C CALCULO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C C DO J=1,NHO
C C DO I=1,J
C C K=K+1
C C MEL(K)=MEL(K)+(CF*(N(I,2)*N(J,2)+N(I,3)*N(J,3))
C C -(WU-IGMAM)/CF*N(I,1))*N(J,1))*WDT
C C OD
C C OD
C C ELSE
C C PARA AS RESTANTES ONDAS DA SOLICITACAO
C C DO II=1,NINT
C C DO JJ=1,NINT
C C REARCFIC(S)) H,N,WDT
C C CALL DISPER
C C K=0
C C DO J=1,NHO
C C DO I=1,J
C C K=K+1
C C MEL(K)=MEL(K)+(CF*(N(I,2)*N(J,2)+N(I,3)*N(J,3))
C C -(WU-IGMAM)/CF*N(I,1))*N(J,1))*WDT
C C OD
C C OD
C C FI
C C RETURN
C C END

```

Fig. 4.2.4.3.1-MELR8, matrizes do elemento rectangular de 8 nós

```

C
C
C      W**2 = K G TANH K H .....
C
C      SUBROUTINE DISPER
C
C      .....
C
C      CALCULO DO NUMERO DE ONDA
C      VELOCIDADE DE FASE & VELOCIDADE DE GRUPO
C
C      .....
C      COMMON /DISPR/ H,H0,CF,CG,CFG,N,K,TOL,IONDA
C      COMMON /ACTUAL/ NINT,NNO,W,WW,WVG,IT,DECE,IR
C      REAL K,KK,H
C
C      PARA PROFUNDIDADE SUPERIOR A TOL
C      IF (H.GT.TOL)
C
C      PARA PROFUNDIDADE DIFERENTE DA PROFUNDIDADE
C      DO CALCULO ANTERIOR
C      IF (ABS((H-H0)/H).GT.TOL)
C      DO CASE IONDA
C
C      TEORIA DE ONDA DE PEQUENA PROFUNDIDADE RELATIVA
C      CASE 1
C      CF=SQRT(9.81*H) ! VELOC. DE FASE
C      K=W/CF           ! NUMERO DE ONDA
C      CG=CF           ! VELOC. DE GRUPO
C      N=1.0           ! CG/CF
C      CFG=CF*CG
C      ESAC
C
C      TEORIA DE ONDA DE PROFUNDIDADE RELATIVA INTERMEDIA - BERKHOFF
C      CASE 2
C      KK=WVG           ! K EM GRANDE PROF. REL.
C      K=WVG/TANH(KK*H)
C      DO WHILE, (ABS(K-KK)/K.GT.TOL)
C      KK=K
C      K=WVG/TANH(KK*H)
C
C      DO
C      CF=W/K           ! VELOC. DE FASE
C      RS=3.0*K*H
C      IF (RS.LT.38.0)
C      N=0.5+K*H/SINH(RS) ! CGF=N=CG/CF
C      ELSE
C      N=0.5
C      FI
C      CG=N*CF         ! VELOC. DE GRUPO
C      CFG=CF*CG
C      ESAC
C      ESACDD
C      FI
C
C      PARA PROFUNDIDADE INFERIOR A TOL
C      ELSE
C      CF=0.0
C      K=1.0E+20
C      CG=0.0
C      N=1.0
C      CFG=0.0
C      FI
C      H0=H
C      RETURN
C      END
C

```

Fig. 4.2.4.3.2 - 0 elemento infinito

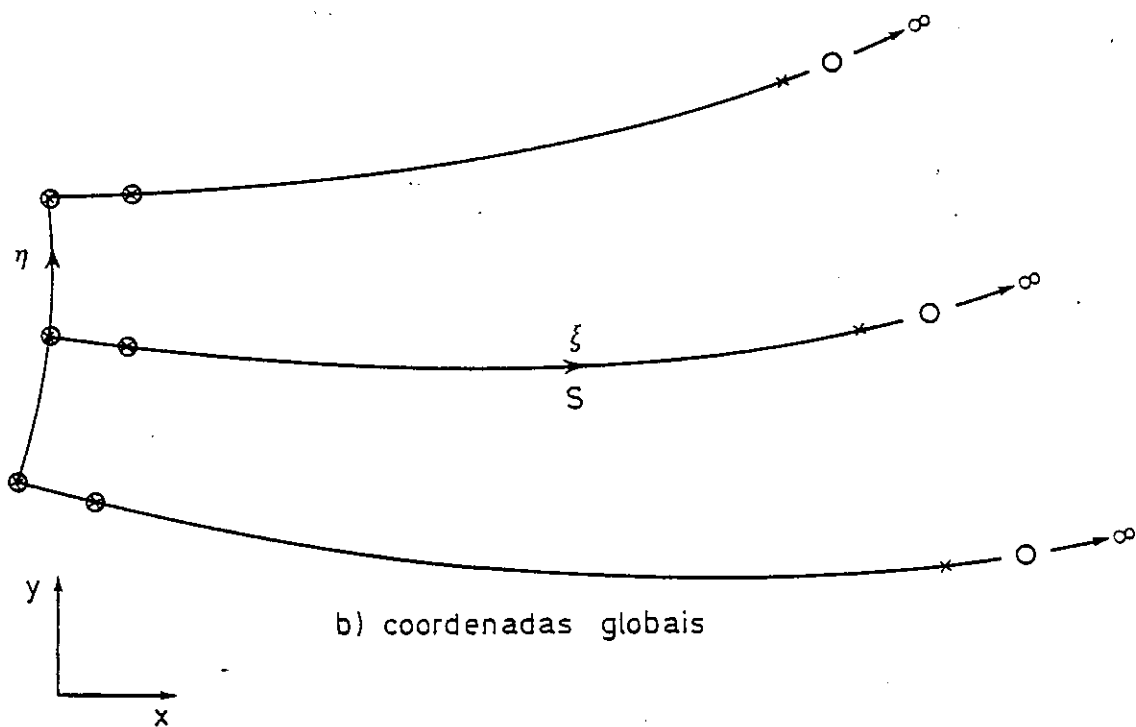
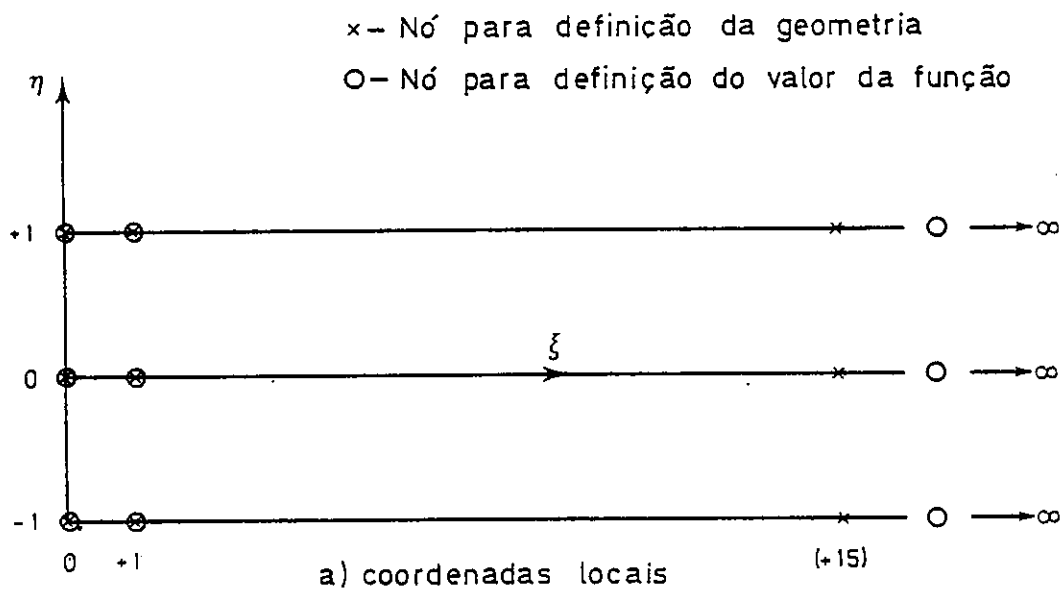


Fig. 4.2.4.3.3 - Relação de dispersão

```

C .....
C
C SUBROUTINE MELI9
C .....
C
C ELEMENTO INFINITO DE 9 NOS
C FAMILIA LAGRANGEANA
C COMMON /FIC/ IFIC(7),IFR,IFS
C COMMON /ACTUAL/ NINT,NNO,W,WV,WVG,IT,DECE,IR
C COMMON /DISPR/ H,HD,CF,CG,CFG,CGF,RK,TOL,IONDA
C COMMON /ELEM/ NOD(9),XYE(9,2),HE(9),RFL,MEL(54),IS
C COMMON /BETTES/ NINTI,SGX(6),WGX(6)
C COMMON /GAUSS4/ SGY(4),WRY(4)
C COMMON /DIRX/ X(3),XI(3),SKK,GX,XFF(3,2)
C COMMON /FFJ/ XG,YG,N(9,3),JAC(2,2),JACI(2,2),DJAC
C COMMON /PINC/ Z,CTETAI,STETAI,ZGAIU,TETAI
C REAL JAC,JACI
C COMPLEX N,WGX,MEL,INDX,XFF,WX,WXY,WDT
C COMPLEX Z,CTETAI,STETAI,ZGAIU
C
C IL=ENMEL(NNO,NNO)+NNO=54
C DO JJ=1,NINT
C   YG=SGY(JJ)
C   WY=WRY(JJ)
C
C MUDANCA DE COORDENADA NA DIRECCAO INFINITA
C SPP=0.0
C SKK=1.0
C DO I=1,3
C   XG=XI(I)
C   CALL FFEF9          ! DEFINICAO DA GEOMETRIA
C   CALL JCB           ! JACOBIANO DA TRANSFORMACAO
C   DSJX=JAC(1,1)*JAC(1,1)+JAC(1,2)*JAC(1,2)
C   DSJX=SQRT(DSJX)
C   SPP=SPP+DSJX
C
C   DO
C     SKK=SPP/3.0
C     DO II=1,NINTI
C       XG=SGX(II)
C       WX=WGX(II)
C       WXY=WX*WY
C       CALL FFEF9          ! DEFINICAO DA GEOMETRIA
C       H=0.0
C       DO I=1,NNO
C         H=H+REAL(N(I,1))*HE(I)
C
C       DO
C         CALL JCB          ! TRANSFORMACAO DAS COORDENADAS
C         WDT=WX*DJAC
C         CALL FFEI9        ! DEFIN. DA VARIAVEL DE INTEG.
C         DO J=1,NNO
C           DNDX=N(J,2)*JACI(1,1)+N(J,3)*JACI(1,2)
C           N(J,3)=N(J,2)*JACI(2,1)+N(J,3)*JACI(2,2)
C           N(J,2)=DNDX
C
C         DO
C           CALL DISPER      ! PARAMETROS DA ONDA
C           K=0
C           DO J=1,NNO
C             DO I=1,J
C               K=K+1
C               MEL(K)=MEL(K)+
C 1               (CF*(N(I,2)*N(J,2)+N(I,3)*N(J,3))
C 2               -WV/CF*N(I,1)*N(J,1))*WDT
C
C           DO
C             DO
C
C         DO
C
C CONDICAOES NA FRONTEIRA INFINITA
C MEL(6)=(1.0E+20,0.0)
C MEL(10)=(1.0E+20,0.0)
C MEL(15)=(1.0E+20,0.0)
C
C MUDANCA DE VARIAVEL NA FRONTEIRA S1
C CALL MORPOT          ! SOLICITACAO ADICIONAL
C RETURN
C END
C

```

Fig. 4.2.4.3.4 - Subrotina MELI9


```

C
C
C .....
C
C SUBROUTINE FDCE
C .....
C ESTIMACAO DO FACTOR DE DECAIMENTO EXPONENCIAL, DECE,
C COM BASE NO DECLIVE DO PRIMEIRO TERMO
C DA SERIE DAS FUNCOES DE HANKEL DE PRIMEIRA
C ESPECIE E DE ORDEN ZERO.
C COMMON /ELEM/ NDD(9),XYE(9,2),HE(9),RFLE,MEL(54),IS
C COMMON /DISPR/ H,H0,CF,CG,CFG,CCF,RK,TOL,IORDA
C COMMON /ACTUAL/ NINT,NNO,W,WV,WUG,IT,DECE,IR
C COMMON /FIC/ IFIC(7),IFR,IFS
C COMPLEX MEL
C
C X1=XYE(1,1)
C X2=XYE(2,1)
C Y1=XYE(1,2)
C Y2=XYE(2,2)
C R1=SQRT(X1*X1+Y1*Y1)*RK
C R2=SQRT(X2*X2+Y2*Y2)*RK
C CALL BESJ(R1,0,BJ,1.0E-4,IER)
C CALL BESY(R1,0,BY,IER)
C H1=SQRT(BJ*BJ+BY*BY)
C CALL BESJ(R2,0,BJ,1.0E-4,IER)
C CALL BESY(R2,0,BY,IER)
C IF (IER.NE.0)
C   WRITE(IFIC(3),1) IER
C F1
C H2=SQRT(BJ*BJ+BY*BY)
C H1=H2/H1
C H1=ALOG(H1)*RK
C DECE=(R1-R2)/H1
C WRITE(IFIC(3),2) DECE
C RETURN
1  FORMAT(///2X,'*** DROP: ERRO NA SUBROTINA FDCE//
2  112X,'IER=',I3)
3  FORMAT(1X,' FACTOR DE DECAIMENTO EXPONENCIAL =',F10.3)
C   END
C

```

Fig. 4.2.4.3.6 - Factor de decaimento exponencial

```

C
C .....
C
C FUNCTION ENMEL(I,J)
C .....
C ENDEREÇO DO ELEMENTO (I,J) DE UMA MATRIZ
C SIMETRICA MEMORIZADA POR COLUNAS
C NO TRIANGULO SUPERIOR:
C
C       J= 1  2  3  4
C       .....
C I=1 .  1  2  4  7
C     .  .  3  5  8
C     .  .  .  6  9
C     .  .  .  . 10 ETC.
C
C .....
C INTEGER ENMEL
C ENMEL=I+J*(J-1)/2
C RETURN
C END
C

```

Fig.4.2.4.3.7 - Endereços de uma matriz

```

C C .....
C C SUBROUTINE HELF31
C C .....
C C MATRIZES DO ELEMENTO FINITO DE 3 NOS
C C DA FROTEIRA DE RADIACAO, SI
C C COMMON /FIC/ FIC(7),IP,IFS
C C COMMON /DIR/ S(3),X,NC(3),JAC(2),UJAC
C C COMMON /ELEH/ NOD(9),XE(9,2),HE(9),REFL,MEL(5A),IS
C C COMMON /ACTUAL/ NINI,NNO,U,DM,DMG,IT,HECE,IR
C C COMMON /GAUSSO/ SGB(8),UGR(B)
C C COMMON /DISFK/ H,H0,CF,CG,CFG,CGF,IRK,TOL,IONDA
C C COMMON /FINC/ Z,CYETA1,SYETA1,ZGAIW,TETA1
C C COMMON /POTI/ XR,YR,POT
C C REAL JAC,N
C C COMPLEX MEL,Z,ZGAIW,POT,CYETA1,SYETA1,RKX,RKY
C C IL=9
C C IF (IT.EQ.1)
C C PARA A PRIMEIRA ONDA DA SOLICITACAO
C C EM CADA PONTO DE INTEGRACAO
C C DO II=1,NINI
C C X=SGB(II) I ARCSSICA
C C WX=WGB(II) I PESO
C C CALCULO DAS FUNCOES DE FORMA E RESPECTIVAS DERIVADAS
C C EM ORDEM AS COORDENADAS LOCAIS
C C CALL FFEF3
C C CALCULO DA PROFUNDIDADE E COORDENADAS GLOBAIS
C C DO PONTO DE INTEGRACAO
C C HI=0.0
C C XR=0.0
C C YR=0.0
C C DO I=1,NNO
C C H=HFN(I,1)*HE(I)
C C XI=XR*H(I,1)+XYE(I,1)
C C YI=YR*H(I,1)+XYE(I,2)
C C OU
C C CALCULO DAS MATRIZES DE TRANSFORMACAO DE COORDENADAS
C C E DO DETERMINANTE
C C CALL JCBS
C C WBT=DJAC*UX
C C ARMAZENAGEM PARA UTILIZACAO NAS RESTANTES ONDAS DA SOLICITACAO
C C WRTEFIC(S) H,XR,YR,H,JAC,D,JAC,Q,X,JEI
C C CALCULO DO VETOR NUMERO DE ONDA, VELOCIDADE DE FASE E DE GRUPO
C C CALL DISPFR
C C RKX=RKACTETA1
C C RNY=RK*STETA1
C C CALCULO DA FUNCAO POTENCIAL DA ONDA INCIDENTE
C C CALL POTINC
C C EMERECO DO INICIO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C C K=0
C C EMERECO DO INICIO DO VETOR SOLICITACAO

```

```

NS=IL-NNO
DO J=1,NRO
NS=NS+1
C C
C C CALCULO DA SOLICITACAO
C C MEL(KS)=MEL(NS)+
C C CF*N(J,1)*POT*(+RKX*JAC(2)-RKY*JAC(1))*WX
C C DO CASE IINF
C C CONEXAO COM O ELEMENTO INFINITO
C C CASE 1
C C CONTINUE
C C 'ESAC
C C ELEMENTO DE RADIACAO
C C CASE ELSE
C C MEL(KS)=MEL(NS)-Z*U*N(J,1)*POT*WDT
C C
C C CALCULO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C C DO I=1,J
C C K=K+1
C C MEL(K)=MEL(K)-Z*U*N(I,1)*N(J,1)*WDT
C C DO
C C 'ESAC
C C 'ESACOD
C C DO
C C ELSE
C C
C C PARA AS RESTANTES ONDAS DA SOLICITACAO
C C DO II=1,NINI
C C READ(IFJC(S)) H,XR,YR,N,JAC,D,JAC,UX,WDT
C C CALL DISPFR
C C RKX=RKACTETA1
C C RNY=RK*STETA1
C C CALL POTINC
C C K=0
C C NS=IL-NNO
C C DO J=1,NRO
C C KS=NS+1
C C MEL(KS)=MEL(KS)+
C C CF*N(J,1)*POT*(+RKX*JAC(2)-RKY*JAC(1))*WX
C C DO CASE IINF
C C CASE 1
C C CONTINUE
C C 'ESAC
C C CASE ELSE
C C MEL(KS)=MEL(KS)-Z*U*N(J,1)*POT*WDT
C C DO I=1,J
C C K=K+1
C C MEL(K)=MEL(K)-Z*U*N(I,1)*N(J,1)*WDT
C C DO
C C 'ESAC
C C 'ESACOD
C C DO
C C FT
C C RETURN
C C END
C C

```

Fig. 4.2.4.3.9 - Elemento finito da fronteira líquida

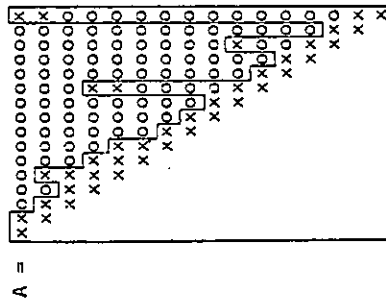
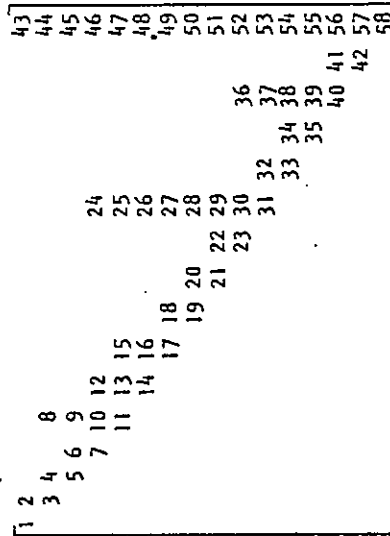
$$AX = b \quad A = LU = LDL^T$$

- K(1) - Número do bloco
- K(2) - Número do bloco que contém o número da coluna mais baixo nas operações
- K(3) - Número da primeira equação do bloco
- K(4) - Número da última equação do bloco
- M(j) - Apontador dos termos da diagonal do bloco j

K(1)	K(2)	K(3)	K(4)	M(j)						
1	1	8	1	3	5	7	11	14	17	19
2	1	9	13	2	4	12	14	16		
3	2	14	15	5	8					
4	1	16	16	16						

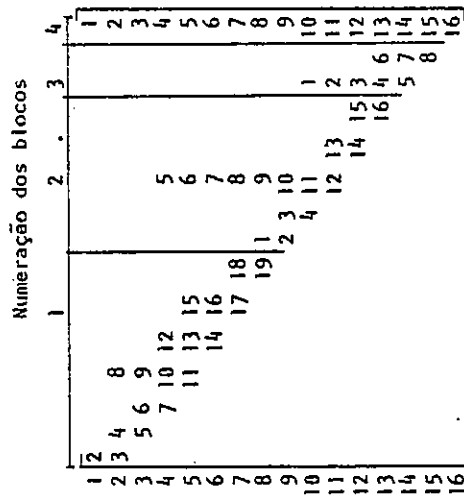
M(1) = [1 3 5 7 11 14 17 19 21 23 31 33 35 40 42 58]

Apontador dos elementos da diagonal



a) Matriz original

b) Armazenagem pela altura útil das colunas, para resolução do sistema em memória central



c) Armazenagem pela altura útil das colunas, para resolução do sistema com recurso à memória periférica. Tamanho máximo dos blocos=20 termos

Fig. 4.2.4.5.1 - Compactação do sistema de equações pela altura útil das colunas


```

C C C .....
C C C SUBROUTINE SOLUCAO(V,MAXA,MM,N,MM,NNK)
C C C .....
C C C RESOLUCAO DE SISTEMAS DE EQUACOES
C C C SIMPLICIOS A 1 M DDDDD
C C C ENTRADA.....
C C C .....
C C C A(MM)=MATRIZ DOS COEFICIENTES COMPACTADA PELA
C C C ALTURA DE L DAS COLUNAS
C C C V(MM)=VECTOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
C C C MAXA(MM)=ERROS NEGOS DOS TERMOS DA EQUACAO DA MATRIZ
C C C MM=NUMERO DE EQUACOES
C C C MM=DIMENSAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES CALCULADA
C C C NA SUBROTINA 'ENRIAO'
C C C MM=MM+1
C C C MM=1-TRIANGULARIZACAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C C C =2-REDUCCAO E RETROSUBSTITUICAO DO VECTOR
C C C DOS TERMOS INDEPENDENTES
C C C SAIRA.....
C C C A(MM)= * I * L * -FACTORES DA MATRIZ
C C C V(MM)=SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C C C .....
C C C AVISO: NAO SAO PETSIS QUALISQUER TESTES A POSSIVEIS
C C C FLEMEFUS MULDS NA DODODOD
C C C .....
C C C DIMENSION MAXA(MM)
C C C COMPLEX A(MM),V(MM),D,C
C C C DO CASE MM
C C C CASE 1
C C C .....
C C C FACTORIZACAO L * D * L(T)
C C C DO N=1,MM
C C C KP=MAXA(N)
C C C KL=MM+1
C C C KU=MAXA(N)+1
C C C NH=KU-NL
C C C IF (KH.GE.O)
C C C IF (NH.GT.O)
C C C K=K-KH
C C C IC=O
C C C KLT=KU
C C C DO J=1,KN
C C C IC=IC+1
C C C KLT=KLT+1
C C C KT=MAXA(K)
C C C DO=66/66(N+1)-K+1
C C C IF (NH.GT.O)
C C C IF (NH.GT.O)
C C C C=(O.O,O.O)
C C C DO I=1,KN
C C C C=C+A(KLT)*V(I)
C C C DO
C C C C=C+I*(C+I)*C
C C C FI
C C C I=I+1
C C C DO
C C C FI
C C C B(O.O,O.O)

```

```

DO NN=NL+NU
K=K-1
NT=MAXA(K)
C=A(KK)/A(KT)
B=B+H*(C)/(KK)
A(KK)=C
DO
A(KNN)=A(KN)-C
FI
IF (CABS(A(KNN)),LT,1.OE-20)
FI
STOP
C C C C C C C C C C C C
C C C C C C C C C C C C
C C C C C C C C C C C C
C C C C C C C C C C C C
C C C C C C C C C C C C
C C C ESAC
C C C CASE 2
C C C REDUCCAO DO VECTOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
C C C DO N=1,MM
C C C NL=MAXA(N)+1
C C C KU=MAXA(NH)+1
C C C IF (KU-NL.GE.O)
C C C K=N
C C C C=(O.O,O.O)
C C C DO KH=KL+KU
C C C K=K-1
C C C C=C+A(KK)*V(K)
C C C DO
C C C V(NH)=V(N)-C
C C C FI
C C C RETROSUBSTITUICAO
C C C DO N=1,MM
C C C K=MAXA(N)
C C C V(N)=V(N)/A(K)
C C C DO (NH.EG.1)
C C C IF
C C C RETURN
C C C FI
C C C N=NH
C C C DO L=2,MM
C C C KL=MAXA(N)+1
C C C KU=MAXA(NH)+1
C C C IF (KU-KL.GE.O)
C C C K=N
C C C DO KH=KL+KU
C C C K=K-1
C C C V(K)=V(K)-A(KK)*V(N)
C C C DO
C C C FI
C C C N=N-1
C C C DO
C C C ESAC
C C C RETURN
C C C END

```

Fig. 4.2.4.5.3 - Resoluçao de sistemas de equações em memória central. Matriz complexa compactada pela altura útil das colunas

```

C .....
C SUBROUTINE VELLOC'S
C .....
C CALCULO DE VELOCIDADES HORIZONTAIS
C NO CENTRO DOS ELEMENTOS
COMMON /VIC/ IFC(7),IFR,IFS
COMMON /VX/,X,Y,R(9,3),JAC(2,2),JAC
COMMON /ACTUAL/ NINT,RND,4,MM,MM,6,IT,DECE,IR
COMMON /ELEM/ NUB(9),XYE(9,2),HE(9),RFE,HEL(54),IS
COMMON /VLL/ VUE(8),VX,VY
REAL JAC,JACI
COMPLEX RANEL,INDX,VX,VY,FOIE
C PARA A PRIMEIRA ONDA NA SOLICITACAO
IF (IT,ED,1,AND,IR,ED,1)
C NO CENTRO DE CADA ELEMENTO
X=0.0
Y=0.0
C CALCULO DAS DERIVADAS DAS FUNCOES DE FORMA
EM ORDEM AS COORDENADAS LOCAIS
DO CASE NRO
CALL FFET5(1) I TRIANGULO
EGAC
CASE 8
CALL FFEB(1) I RECTANGULO
EGAC
ESACCO
C CALCULO DA MATRIZ DE TRANSFORMACAO DE COORDENADAS
CALL JCR
C CALCULO DAS DERIVADAS DAS FUNCOES DE FORMA
EM ORDEM AS COORDENADAS GLOBAIS
DO I=1,NRO
NDX=JAC(1,1)*R(1,2)+JAC(1,2)*R(1,3)
NLI(3)=JAC(2,1)*R(1,2)+JAC(2,2)*R(1,3)
NLI(2)=NDX
DO
WRITE (IFIC(7)) N
EL, J
CF=COEFFIC(7) H
FI
C CALCULO DA VELOCIDADE
VX=0.0+0.0
VY=0.0+0.0
DO I=1,NRO
JX=JAC(1,2)*RPOE(1)
VY-VYINT(1,3)*RPOE(1)
DO
RETURN
END

```

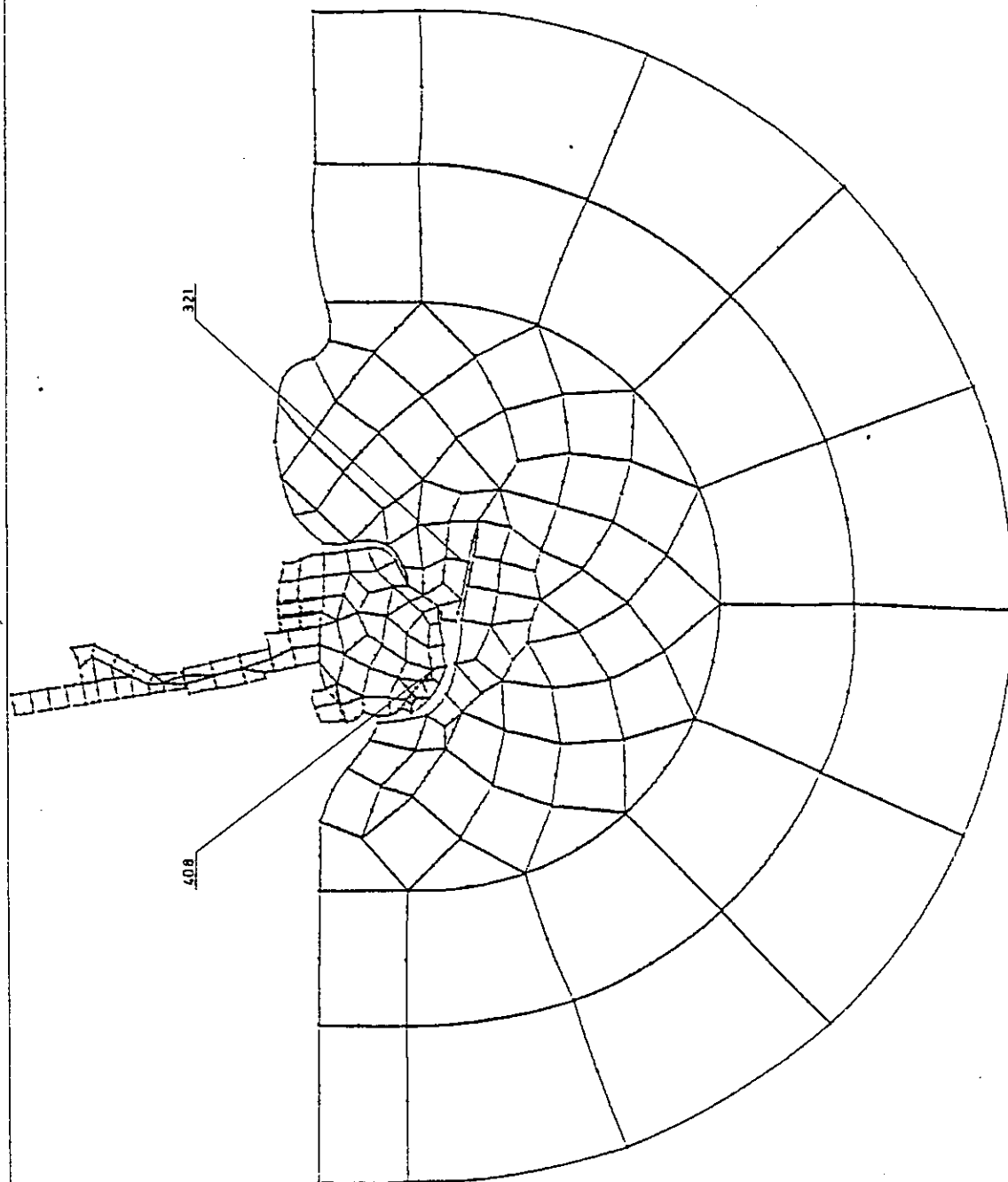
Fig. 4.2.4.6.1 - Cálculo de velocidades no centro dos elementos

```

C .....
C SUBROUTINE ATRFDD
C .....
C CALCULO DO COEFICIENTE DE ATRITO DE FUNDO
COMPLEX RFL,VX,VY,FOIE
COMMON /ATRF/ RN(8),FR(S),IATRF,CRUG,GAMA
COMMON /ACTUAL/ NINT,RND,4,MM,MM,6,IT,DECE,IR
COMMON /ELEM/ NUB(9),XYE(9,2),HE(9),RFE,HEL(54),IS
COMMON /VELL/ VUE(8),VX,VY
C O EMPRISMO DO COEFICIENTE DE RUGOSIDADE
E DAS FORMULAS DE CHEZY-BAZIN, JUSTIFICAM
QUE O COEFICIENTE DE ATRITO DE FUNDO CALCULADO
NO CENTRO DO ELEMENTO SEJA UTILIZADO
NOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO.
PROFUNHIDADE
H=0.0
IF (RND,DE,6)
DO I=1,NRO
H=H*RN(I)*HE(I) I RECTANGULO
OR
DO I=1,NRO
H=H*RN(I)*HE(I) I TRIANGULO
FI
H=SORT(H)
C COEFICIENTE DE CHEZY-BAZIN
C=87.0*XH/CRUGH
C VELOCIDADE
V=C*RS(VX,VY)
C COEFICIENTE DE ATRITO DE FUNDO
C=C*FC
H=H*H
GAMA=V/H/C
RETURN
END

```

Fig. 4.2.4.6.2- Cálculo do coeficiente empírico de atrito de fundo



MALHA DE ELEMENTOS FINITOS
 ESCALA 1:28128

** ESTUDO DAS CONDIÇÕES DE RESSONANCIA DO PORTO DE LEIXOES **

Fig. 4.2.5.1

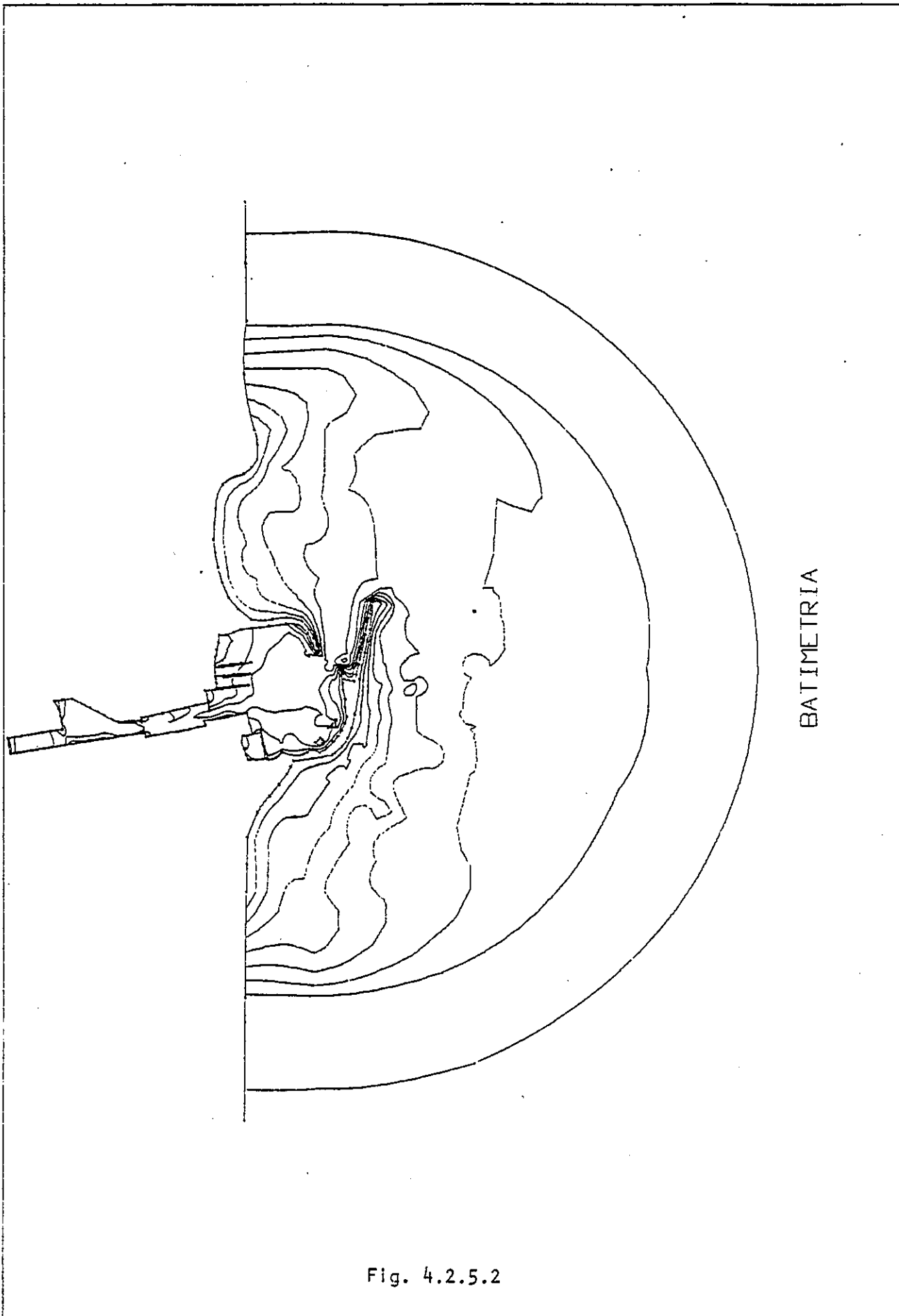


Fig. 4.2.5.2

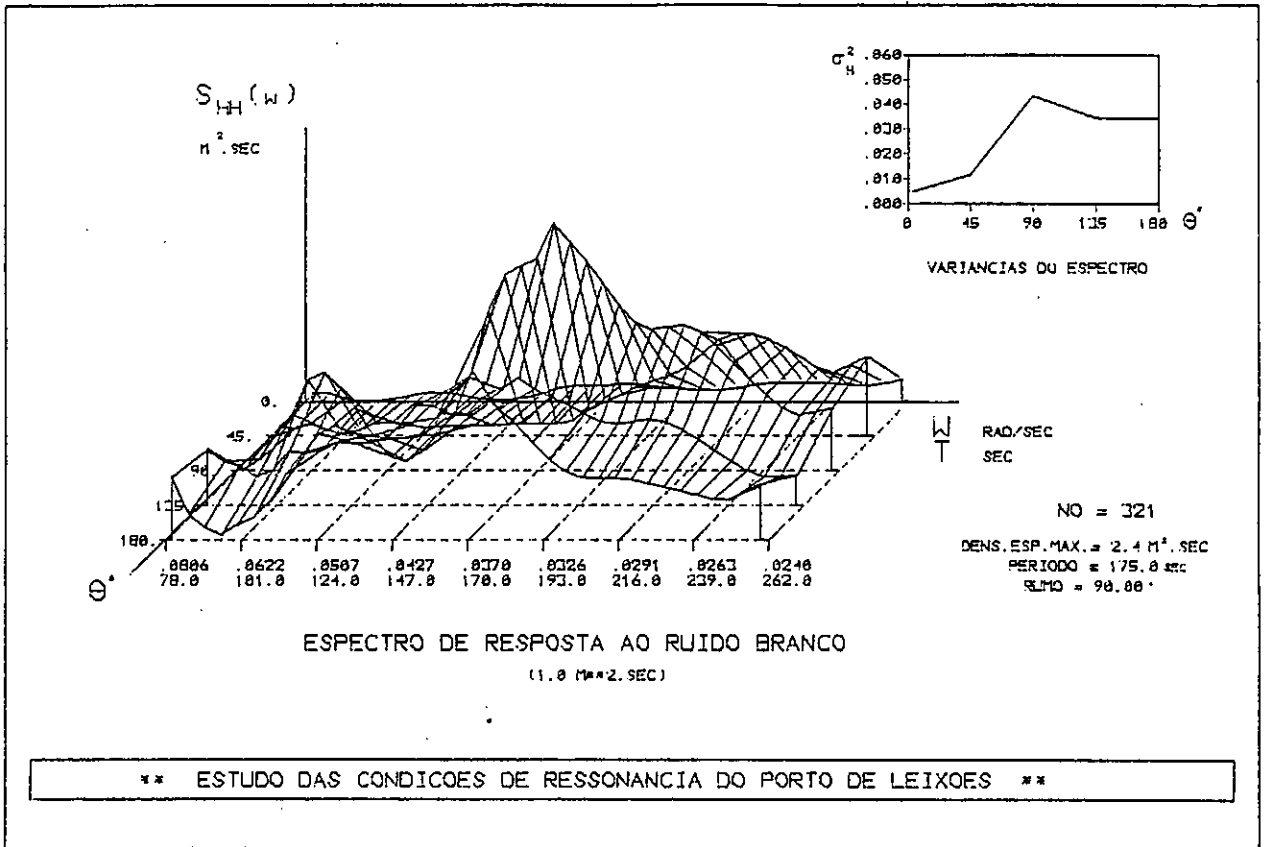


Fig. 4.2.5.3

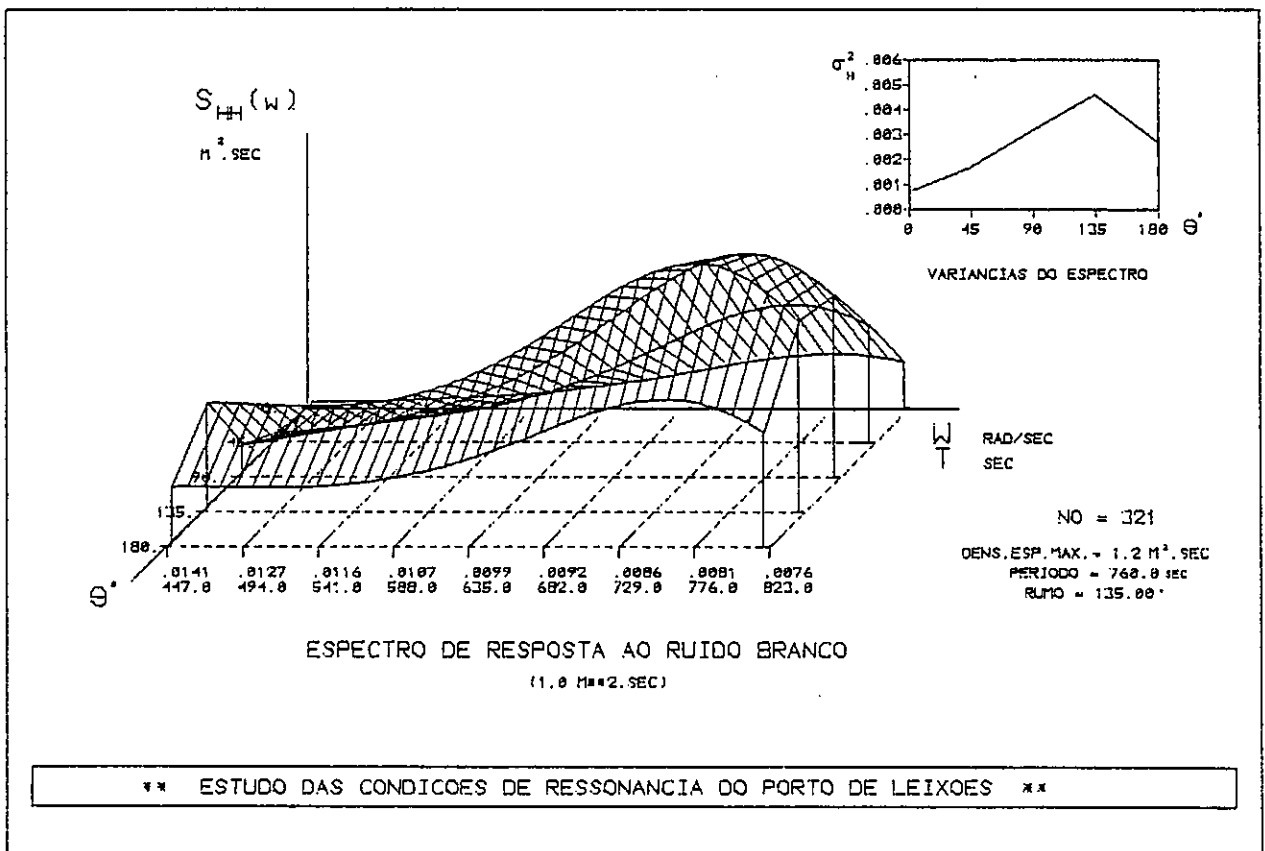


Fig. 4.2.5.4

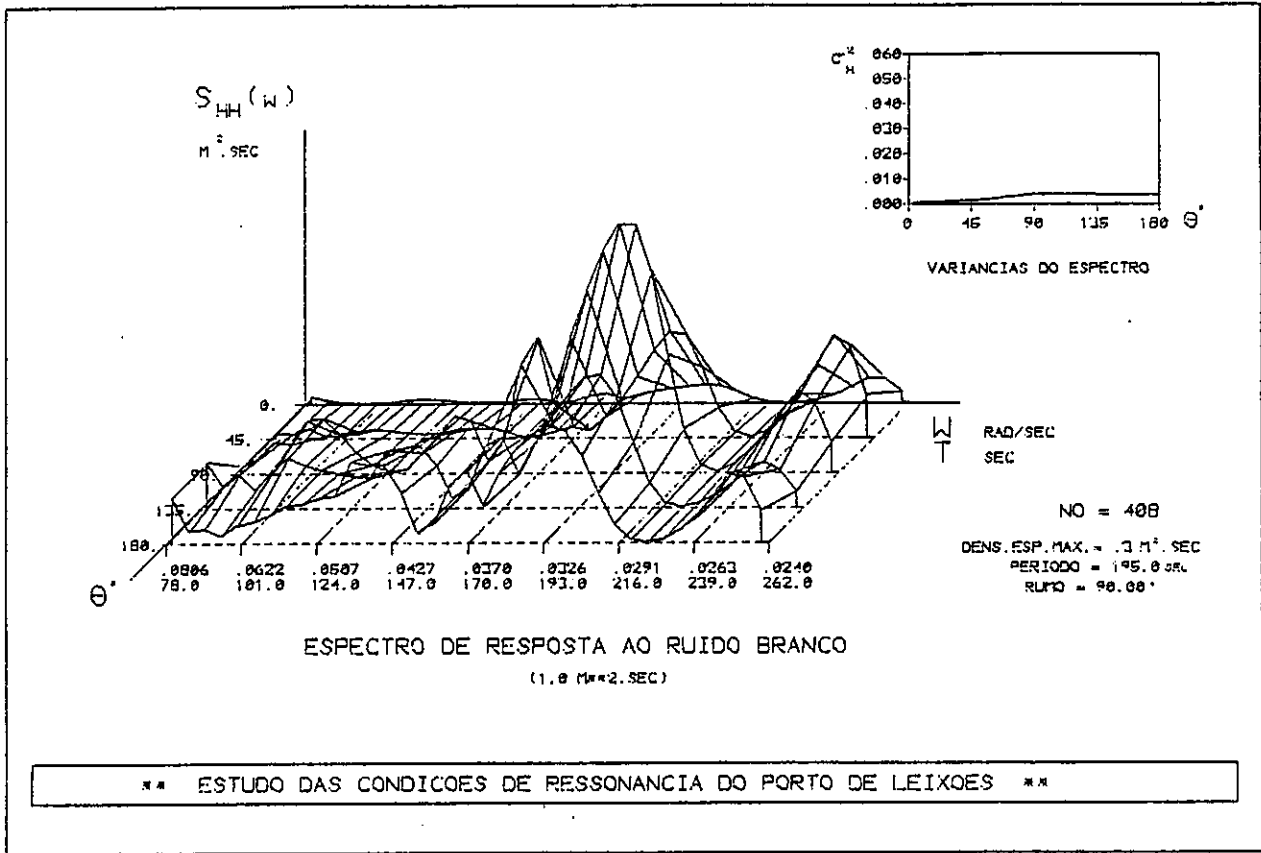


Fig. 4.2.5.5

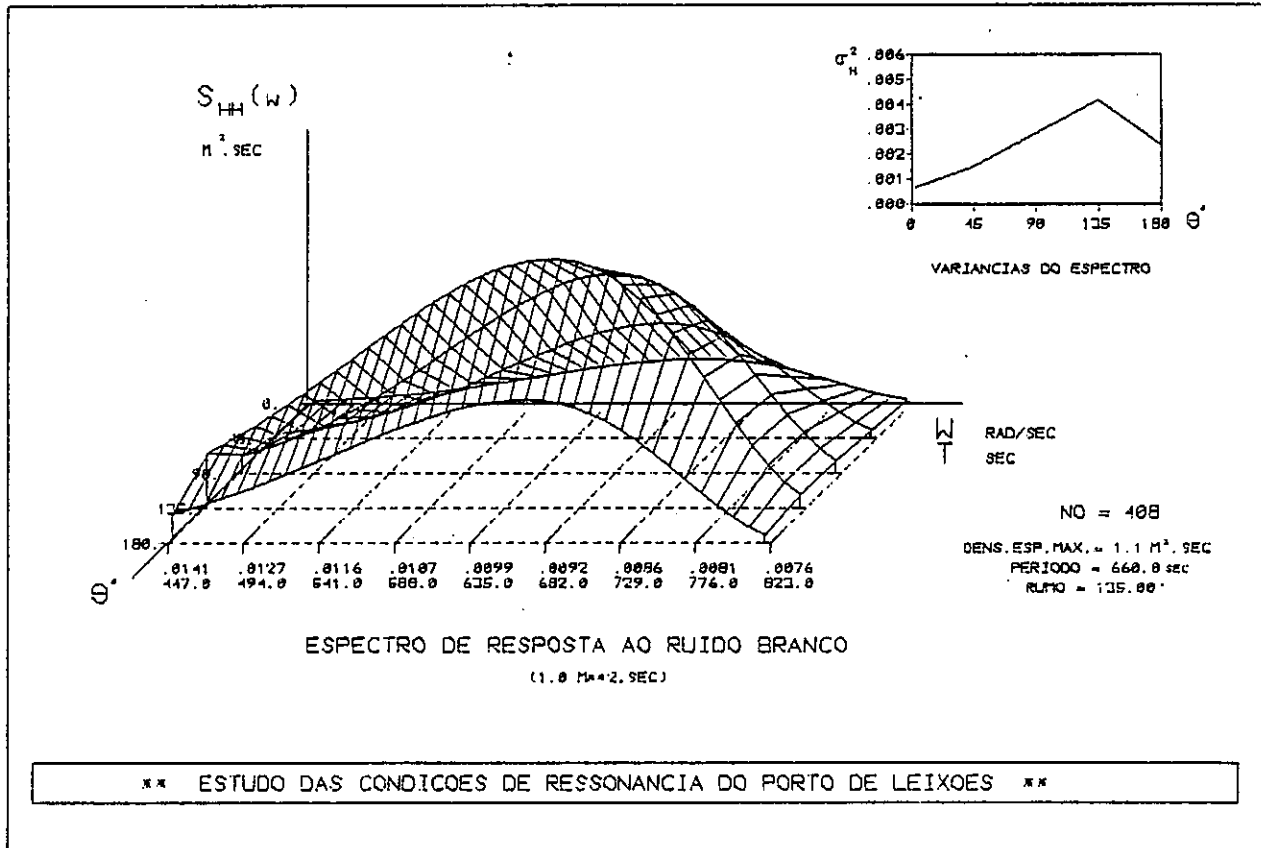


Fig. 4.2.5.6

COEFICIENTE DE AMPLIFICACAO NO 321

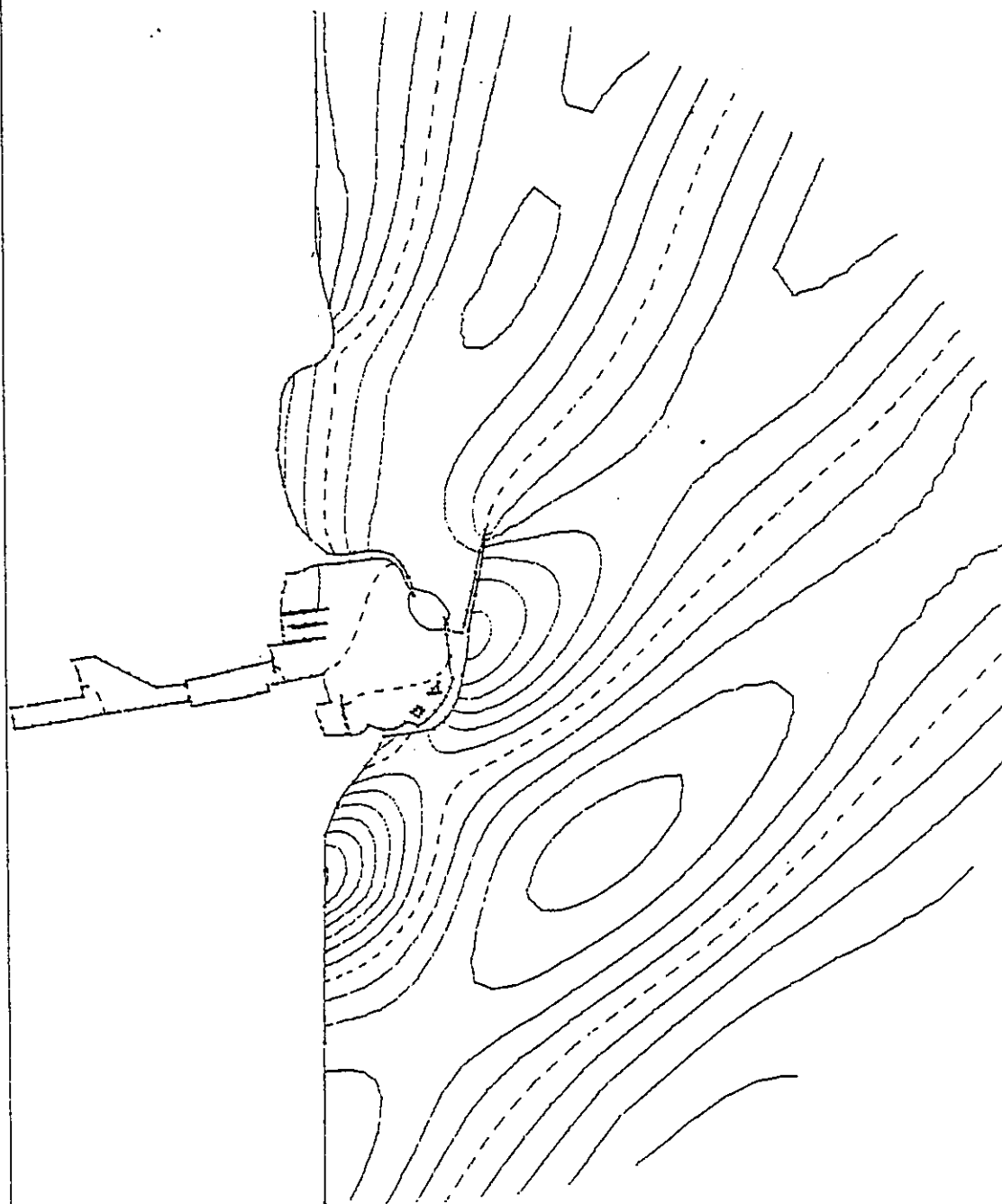
(S)	0	1	2	3	4	5	(FA)	(AI)
80.0	*						0.03	1.00
85.0	***						0.33	1.00
90.0	*****						0.58	1.00
95.0	*****						0.74	1.00
100.0	*****						0.94	1.00
105.0	*****						0.97	1.00
110.0	*****						0.89	1.00
115.0	*****						0.77	1.00
120.0	*****						0.58	1.00
125.0	***						0.36	1.00
130.0	***						0.30	1.00
135.0	****						0.44	1.00
140.0	*****						0.60	1.00
145.0	*****						0.75	1.00
150.0	*****						0.98	1.00
155.0	*****						1.23	1.00
160.0	*****						1.37	1.00
165.0	*****						1.41	1.00
170.0	*****						1.43	1.00
175.0	*****						1.55	1.00
180.0	*****						1.49	1.00
185.0	*****						1.43	1.00
190.0	*****						1.35	1.00
195.0	*****						1.27	1.00
200.0	*****						1.20	1.00
205.0	*****						1.16	1.00
210.0	*****						1.18	1.00
215.0	*****						1.19	1.00
220.0	*****						1.16	1.00
225.0	*****						1.10	1.00
230.0	*****						1.02	1.00
235.0	*****						0.94	1.00
240.0	*****						0.86	1.00
245.0	*****						0.78	1.00
250.0	*****						0.73	1.00
255.0	*****						0.75	1.00
260.0	*****						0.78	1.00

Fig. 4.2.5.7

COEFICIENTE DE AMPLIFICACAO NO 408

(S)	0	1	2	3	4	5	(FA)	(AI)
450.0	**						0.28	1.00
460.0	***						0.31	1.00
470.0	***						0.35	1.00
480.0	***						0.38	1.00
490.0	****						0.42	1.00
500.0	****						0.45	1.00
510.0	****						0.49	1.00
520.0	*****						0.52	1.00
530.0	*****						0.56	1.00
540.0	*****						0.60	1.00
550.0	*****						0.63	1.00
560.0	*****						0.67	1.00
570.0	*****						0.70	1.00
580.0	*****						0.73	1.00
590.0	*****						0.76	1.00
600.0	*****						0.79	1.00
610.0	*****						0.82	1.00
620.0	*****						0.85	1.00
630.0	*****						0.87	1.00
640.0	*****						0.89	1.00
650.0	*****						0.90	1.00
660.0	*****						0.92	1.00
670.0	*****						0.92	1.00
680.0	*****						0.93	1.00
690.0	*****						0.92	1.00
700.0	*****						0.92	1.00
710.0	*****						0.90	1.00
720.0	*****						0.88	1.00
730.0	*****						0.85	1.00
740.0	*****						0.81	1.00
750.0	*****						0.77	1.00
760.0	*****						0.72	1.00
770.0	*****						0.65	1.00
780.0	*****						0.58	1.00
790.0	*****						0.51	1.00
800.0	****						0.42	1.00
810.0	***						0.33	1.00
820.0	**						0.24	1.00

Fig. 4.2.5.8



INCREMENTO DAS ISOLINHAS .30M

ELEVACAO DA SUP LIVRE PARA O PERIODO: 200.00S RUMO: 45.00G

** ESTUDO DAS CONDICÕES DE RESSONANCIA DO PORTO DE LEIXOES **

Fig. 4.2.5.9

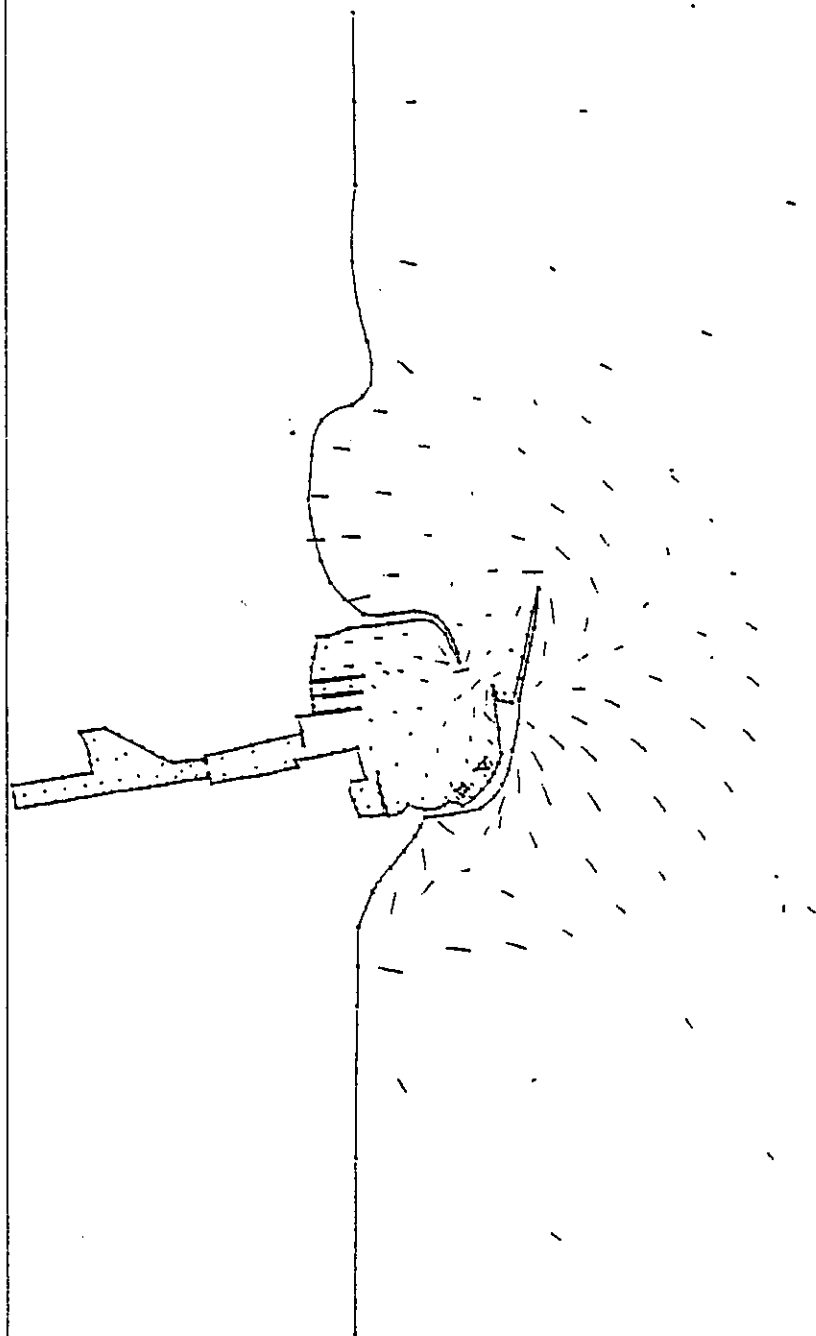
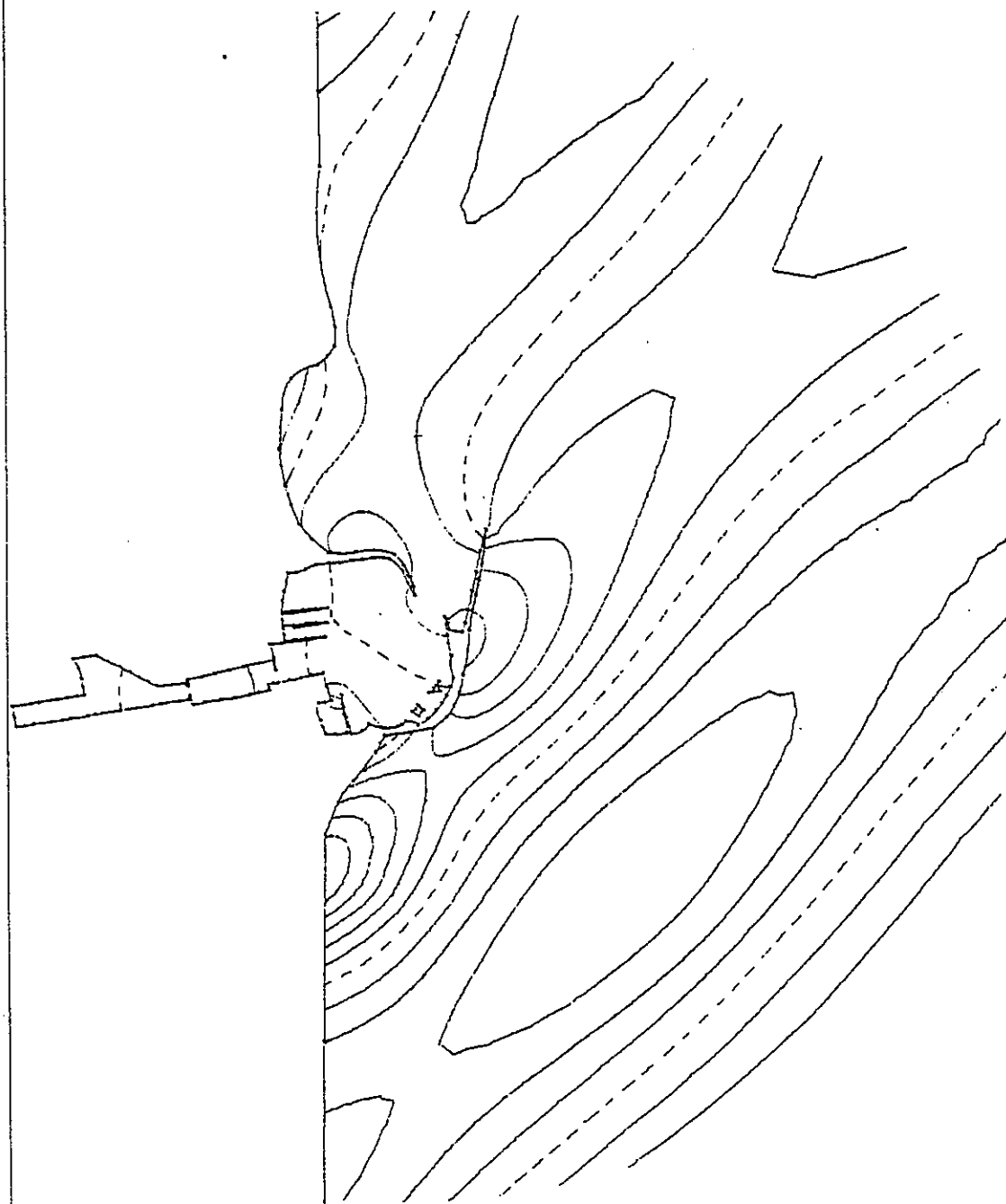


Fig. 4.2.5.10

ESCALA DOS DESLOCAMENTOS 1:14064
DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS EM MEIO PERIODO 200.00S RUMO: 45.00G
** ESTUDO DAS CONDIÇÕES DE RESSONÂNCIA DO PORTO DE LEIXOES **



INCREMENTO DAS ISOLINHAS . 30M
 ELEVACAO DA SUP LIVRE PARA O PERIODO: 225.00S RUMO: 45.00G
 ** ESTUDO DAS CONDICÕES DE RESSONANCIA DO PORTO DE LEIXOES **

Fig. 4.2.5.11

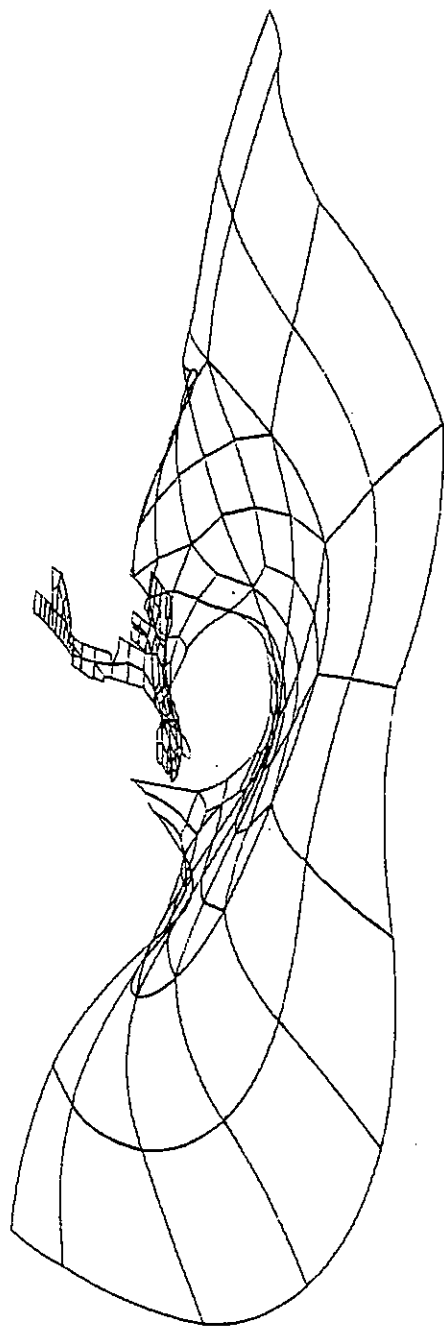
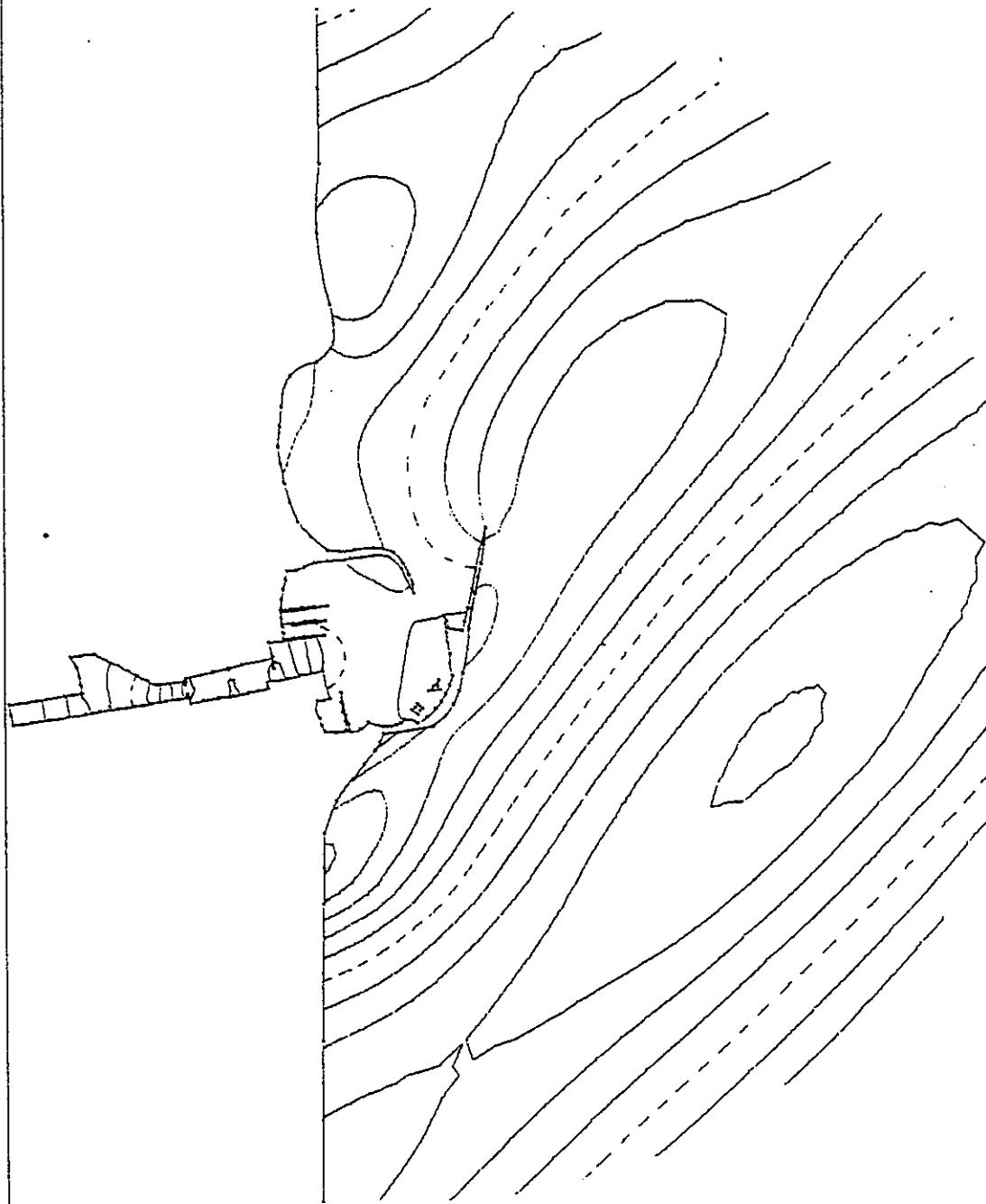


Fig. 4.2.5.12

OSCILACAO PARA O PERIODO 225.00S RUMO: 45.00G
** ESTUDO DAS CONDICoes DE RESSONANCIA DO PORTO DE LEIXOES **



INCREMENTO DAS ISOLINHAS . 30M
 ELEVACAO DA SUP LIVRE PARA O PERIODO: 250.00S RUMO: 45.00G
 ** ESTUDO DAS CONDICÕES DE RESSONANCIA DO PORTO DE LEIXOES **

Fig. 4.2.5.13

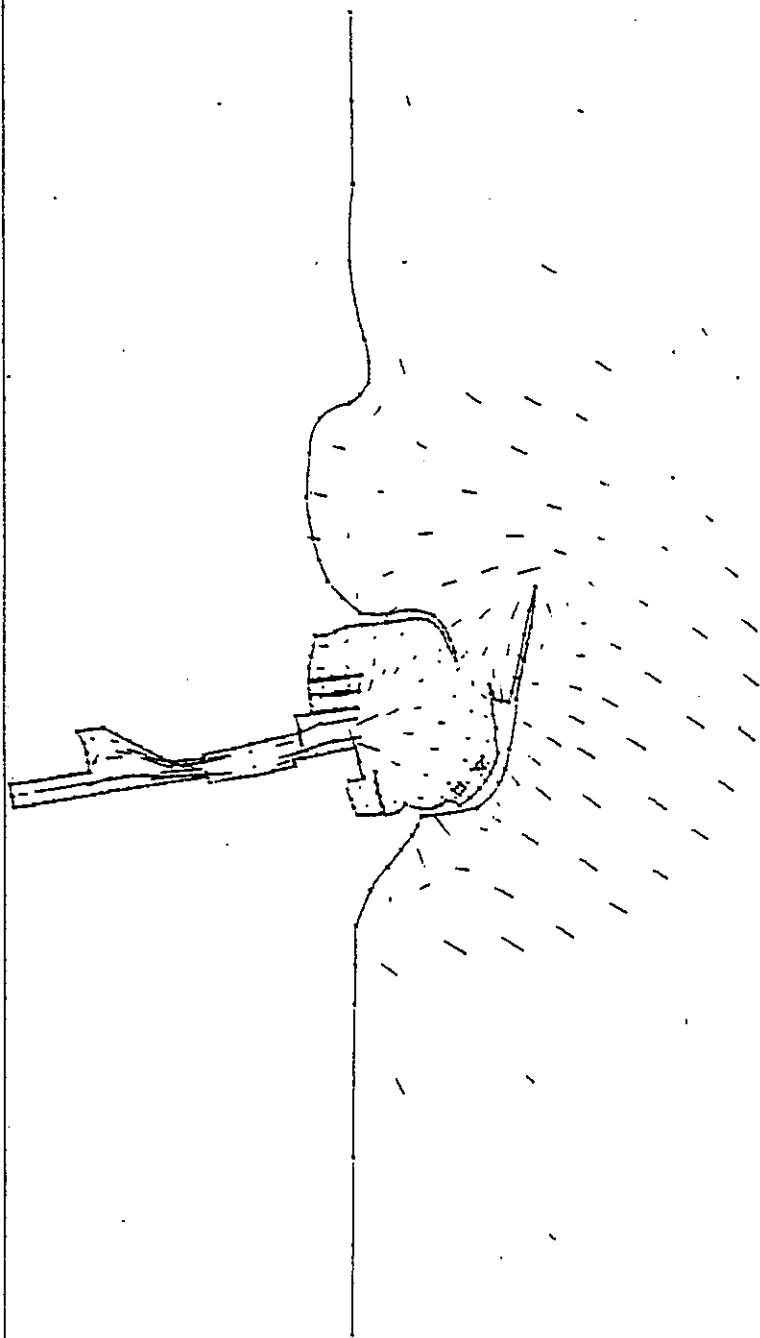
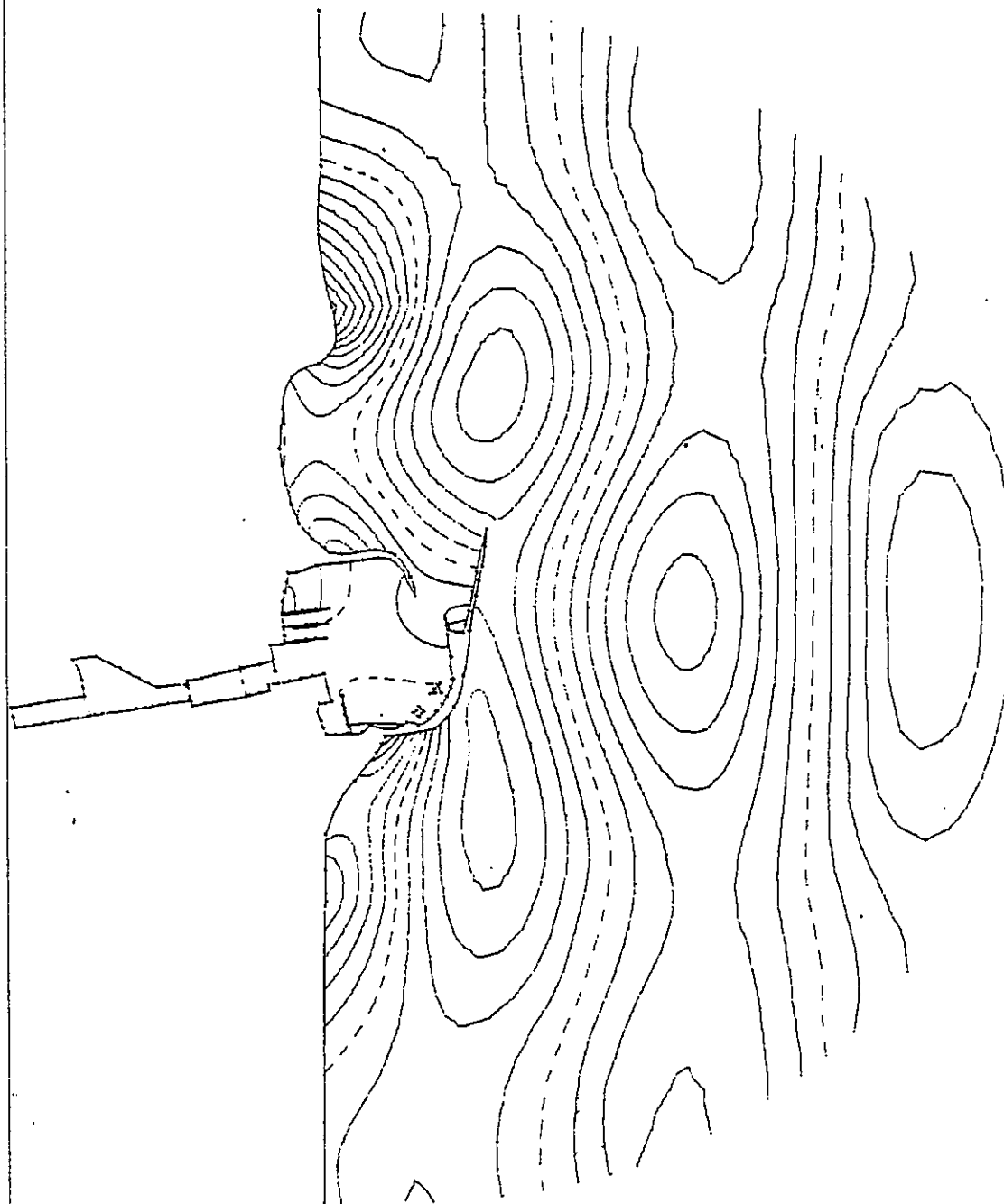


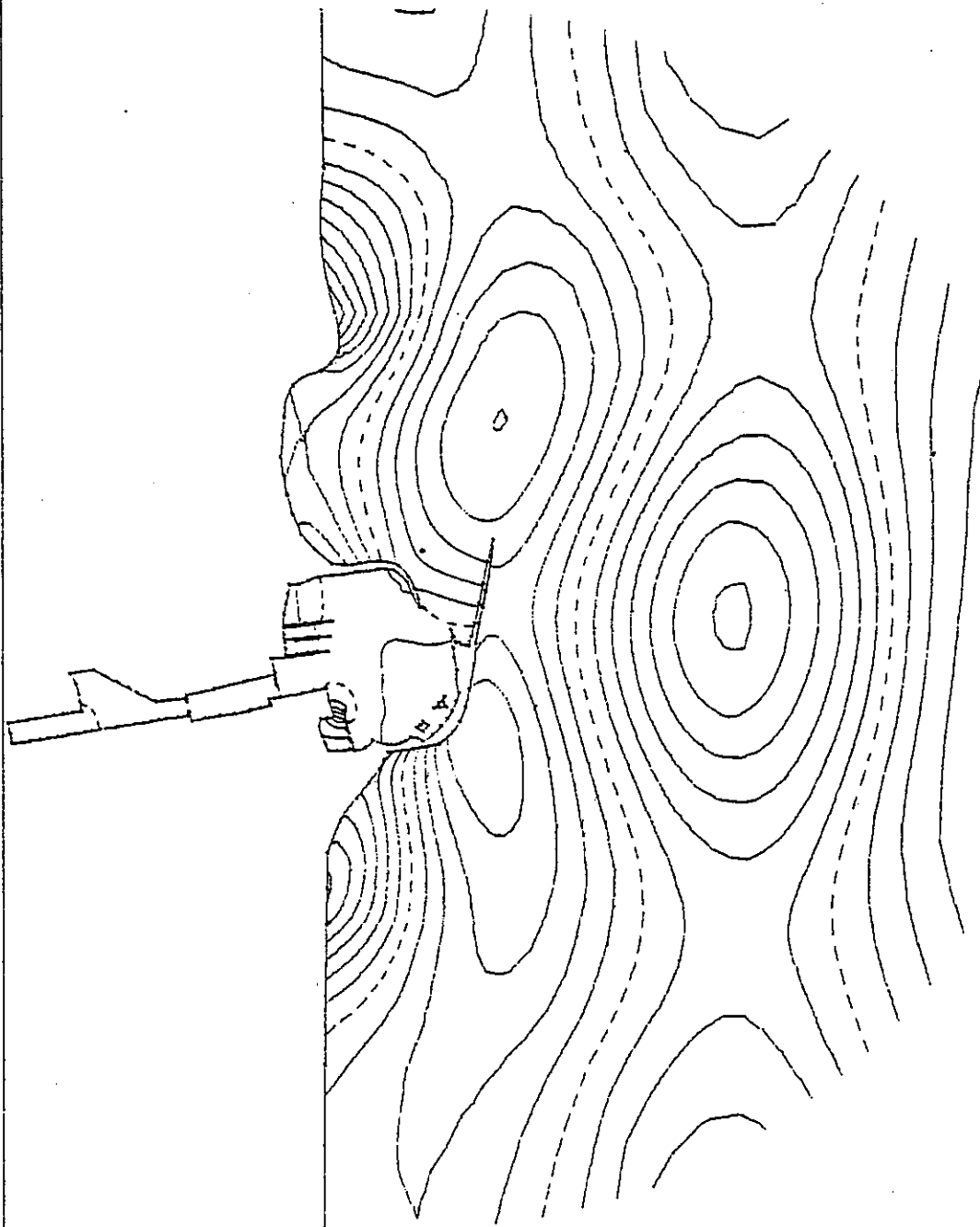
Fig. 4.2.5.14

ESCALA DOS DESLOCAMENTOS 1:14064
DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS EM MEIO PERIODO 250.00S RUMO: 45.00G
** ESTUDO DAS CONDIÇÕES DE RESSONANCIA DO PORTO DE LEIXOES **



INCREMENTO DAS ISOLINHAS .30M
ELEVACAO DA SUP LIVRE PARA O PERIODO: 175.00S RUMO: 90.00G
** ESTUDO DAS CONDICÕES DE RESSONANCIA DO PORTO DE LEIXOES **

Fig. 4.2.5.15



INCREMENTO DAS ISOLINHAS .30M
ELEVACAO DA SUP LIVRE PARA O PERIODO: 195.00S RUMO: 90.00G
** ESTUDO DAS CONDICoes DE RESSONANCIA DO PORTO DE LEIXOES **

Fig. 4.2.5.16

5 - ANÁLISE NÃO LINEAR DO MOVIMENTO ONDULATÓRIO

5.1 - Generalidades

O movimento ondulatório de pequena amplitude, movimento linear, surgiu como consequência da dificuldade matemática em resolver as equações do movimento potencial com superfície livre, equações (4.2) a (4.5). Efectivamente, tais equações apresentavam termos não lineares nas condições de fronteira da superfície livre, que se desprezaram mediante a hipótese simplificativa da declividade das ondas ser muito pequena.

Logo que não seja válida esta hipótese simplificativa, não é válido admitir que o movimento ondulatório é de pequena amplitude e há que ter em conta os efeitos não lineares.

Para obviar esta dificuldade, desenvolveram-se teorias que procuram levar em consideração os termos não lineares nas condições de fronteira da superfície livre. Tais teorias recebem a designação de não lineares e descrevem o movimento ondulatório de amplitude finita, por oposição à amplitude infinitesimal na teoria linear. As teorias de onda não lineares clássicas baseiam-se nos chamados métodos de perturbação. Essencialmente, tais métodos admitem que as não linearidades dão origem apenas a pequenas correcções a impor à solução linear. Como exemplo de teorias de onda não lineares referem-se a teoria de Stokes, da qual as ondas de pequena amplitude representam a sua primeira aproximação, e a teoria cnoidal, da qual a onda solitária é um caso particular.

Neste capítulo pretende-se apresentar uma técnica numérica para a resolução das equações do movimento não linear, com base no método dos elementos de fronteira. Até ao momento, tal técnica parece ser original e foi inspirada nos trabalhos de Vinje e Brevig (1975), Brebbia (1978), e Brebbia (1981).

Para maior facilidade de exposição, considerem-se novamente as equações do movimento potencial com superfície livre, respectivamente a equação de campo (Laplace):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

sujeita às seguintes condições de fronteira:

na fronteira sólida, a reflexão total:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (*) \quad (5.2)$$

e na superfície livre,

a condição cinemática:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (5.4)$$

e a condição dinâmica:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \xi + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{para } z = \xi(x, t) \quad (5.5)$$

A figura 5.1.1 mostra um esquema em que se definem as variáveis e as fronteiras do problema.

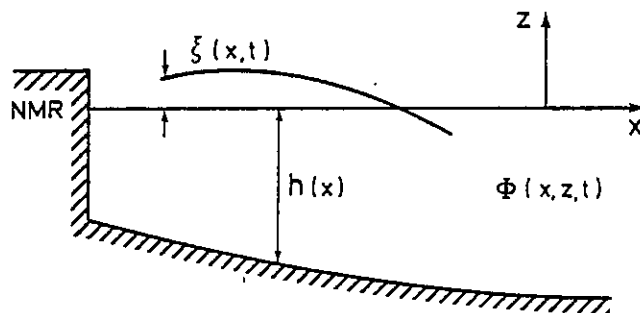


Fig. 5.1.1 - Variáveis e fronteiras do movimento potencial com superfície livre

(*) - Esta condição pode ser substituída pela condição de reflexão parcial:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (5.3)$$

5.2 - Solução Permanente

Considere-se que o movimento ondulatório é harmônico simples, do tipo $e^{-i\omega t}$, em que ω é a frequência angular. Nestas condições, a função potencial e a elevação da superfície livre relacionam-se com as correspondentes partes espaciais, complexas, respectivamente por:

$$\Phi(x, z, t) = \text{Parte real de } \{ \phi(x, z) e^{-i\omega t} \} \quad (5.6)$$

e

$$\xi(x, t) = \text{Parte real de } \{ \eta(x) e^{-i\omega t} \} \quad (5.7)$$

As equações do movimento escrevem-se agora na seguinte forma:

Equação de campo:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.8)$$

sujeita às condições de fronteira:

nas fronteiras sólidas a reflexão total:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (5.9)$$

e na superfície livre:

a condição cinemática:

$$\eta = \frac{i}{\omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad \text{em } z = \eta(x) \quad (5.10)$$

a condição dinâmica:

$$\phi = \frac{i}{\omega} \left\{ -g\eta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \quad \text{em } z = \eta(x) \quad (5.11)$$

Considerando as velocidades das partículas do fluido,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z \quad \text{e} \quad \nabla \phi \cdot \bar{n} = v_n \quad (5.12)$$

e considerando ainda o gradiente da superfície livre, como mostra a figura 5.2.1,

as equações do movimento podem escrever-se, respectivamente:

Equação de campo:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.13)$$

sujeita às condições de fronteira:

nas fronteiras sólidas, a reflexão total:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (5.14)$$

e na superfície livre:

a condição cinemática:

$$\eta = \frac{i}{w \sin \beta} V_n \quad \text{em } z = \eta(x) \quad (5.15)$$

a condição dinâmica:

$$\phi = \frac{i}{w} \left[-g\eta - \frac{1}{2} (V_x^2 + V_z^2) \right] \quad \text{em } z = \eta(x) \quad (5.16)$$

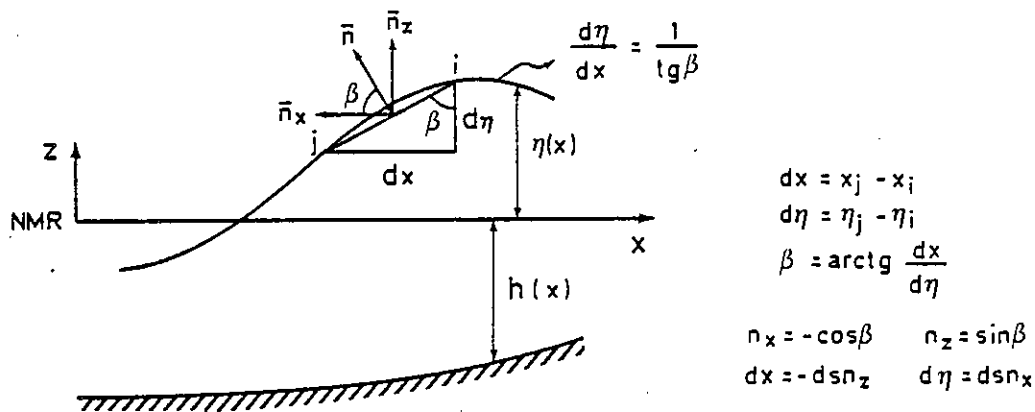


Fig. 5.2.1 - Gradiente da superfície livre

A figura 5.2.2 mostra esquematicamente o domínio da equação de campo e das respectivas condições de fronteira.

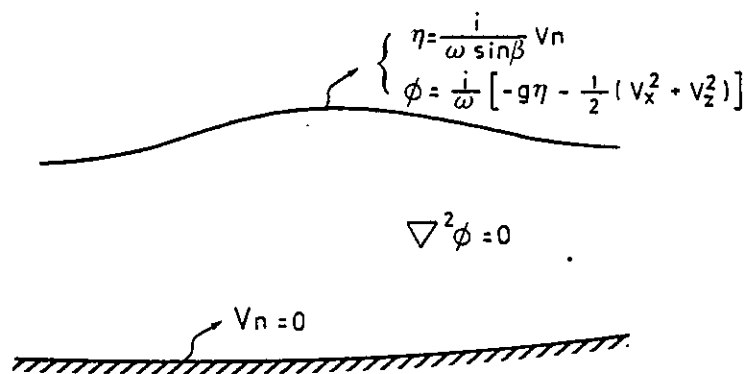


Fig. 5.2.2 - Equação de campo e condições de fronteira no regime permanente

Sumariamente, pretende-se determinar as funções $\eta(x)$ e correspondente função $\phi(x, z = \eta)$ que satisfazem as condições de fronteira na superfície livre, com base no método dos elementos de fronteira.

5.2.1 - Primeira iteração

Para a primeira iteração admite-se a linearidade do movimento. Por outras palavras, arbitrada a condição:

$$\eta = \eta^0 \quad (5.17)$$

o potencial na superfície livre é dado pela equação (5.16) linearizada:

$$\phi = -\frac{ig}{\omega} \eta^0 \quad (5.18)$$

Nestas condições, a primeira iteração consiste na resolução da equação de Laplace sujeita às condições

$$V_n = 0 \quad \text{na fronteira sólida} \quad (5.19)$$

$$\phi = -\frac{ig}{\omega} \eta^0 \quad \text{na superfície livre} \quad (5.20)$$

A utilização do método dos elementos de fronteira fornece os valores de ϕ na fronteira sólida e de V_n na superfície livre, como mostra a figura 5.2.1.1, o que permite imediatamente determinar uma nova posição para a superfície livre, através da condição cinemática, equação (5.15).

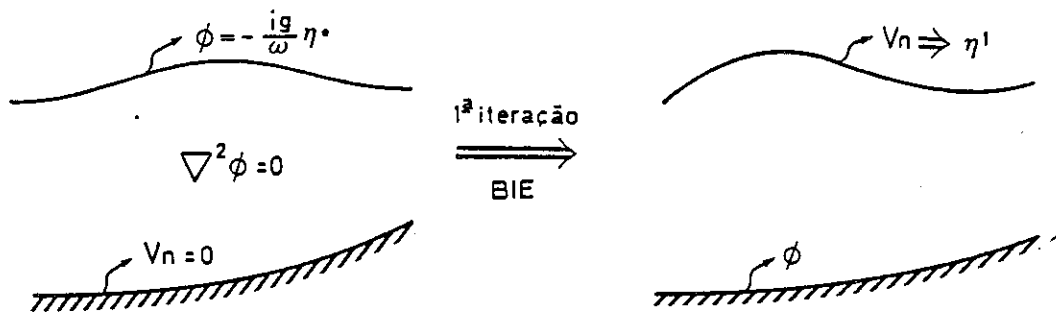


Fig. 5.2.1.1 - Valores de fronteira na primeira iteração

5.2.2 - Iterações Seguintes

A primeira iteração permitiu determinar uma nova posição para a superfície livre, bem como as componentes da velocidade na superfície livre. Assim, através da condição dinâmica, equação (5.16), podem determinar-se novos valores de fronteira para mais uma iteração, como mostra a figura 5.2.2.1.

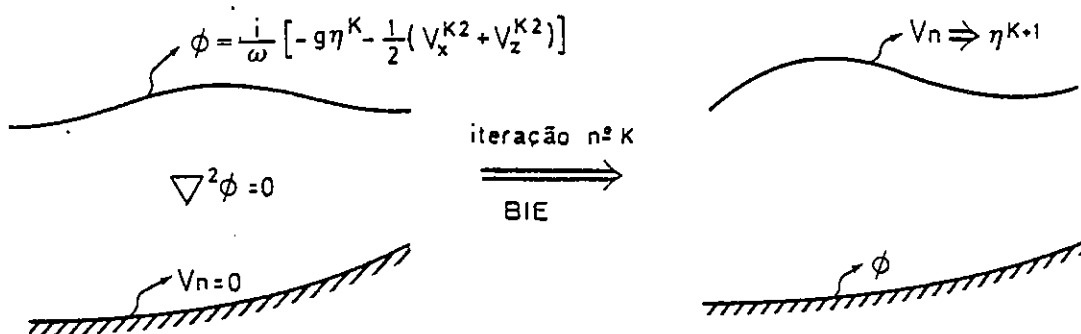


Fig. 5.2.2.1 - Valores de fronteira na iteração número K

A última iteração ocorre quando, em todos os pontos da superfície livre, o valor $(\eta^{K+1} - \eta^K)$ for tão pequeno quanto se queira.

5.3 - Solução Transitória

A integração no domínio do tempo pode fazer-se recorrendo a um esquema de diferenças finitas para as derivadas temporais. Nestas condições a posição da superfície livre e o potencial de velocidades na superfície livre no instante $i+1$, são calculados por recorrência aos respectivos valores no instante i , com base na condição cinemática (5.4) e na condição dinâmica (5.5), respectivamente:

$$\xi_{i+1} = \Delta t (V_{zi} - V_{xi} \frac{\partial \xi_i}{\partial x}) + \xi_i \quad (5.21)$$

$$\Phi_{i+1} = \Delta t \left[-g \xi_{i+1} - \frac{1}{2} (V_{xi}^2 + V_{zi}^2) \right] + \Phi_i \quad (5.22)$$

5.3.1 - Primeira Extrapolação

Dada uma posição inicial para a superfície livre, ξ_0 , e um intervalo para integração, Δt , começa-se por calcular o potencial de velocidades na superfície livre, a partir da condição dinâmica (5.22), linearizada:

$$\Phi_0 = \Delta t (-g \xi_0) \quad (5.23)$$

Conhecido o potencial na superfície livre, e admitindo velocidades normais nulas nas fronteiras sólidas, equação (5.2), pode resolver-se a equação de campo (5.1) pelo método dos elementos de fronteira. Como resultado ficam determinadas as componentes da velocidade na superfície livre, V_{x0} e V_{z0} que, conjuntamente com ξ_0 e $\frac{\partial \xi_0}{\partial x}$ permitem calcular a posição da superfície livre no instante 1, ξ_1 , a partir da condição cinemática, equação (5.21).

5.3.2 - Extrapolações Sucessivas

A partir da condição dinâmica, equação (5.22), determinam-se os potenciais de velocidades na superfície livre, no instante actual $i+1$:

$$\Phi_{i+1} = \Delta t \left[-g \xi_{i+1} - \frac{1}{2} (V_{xi}^2 + V_{zi}^2) \right] + \Phi_i \quad (5.24)$$

Seguidamente resolve-se a equação de campo pelo método dos elementos de fronteira, o que vai permitir a determinação das componentes da velocidade na superfície livre, respectivamente, $V_x(i+1)$ e $V_z(i+1)$. Recorrendo à condição cinemática, equação (5.21), determina-se nova posição da superfície livre. E assim por diante.

5.4 - Nota Final

As técnicas sumariamente descritas para a análise não linear do movimento ondulatório potencial, estão ainda em fase de estudo, bem como a sua aplicação a problemas tridimensionais. Neste sentido, estão em desenvolvimento programas de cálculo automático para a análise não linear, bidimensional e tridimensional, pelo método dos elementos de fronteira.

Finalmente, faz-se notar que no presente contexto nenhum outro método se mostra tão potente, em particular na análise tridimensional, como o é o método dos elementos de fronteira.

Para uma análise do método dos elementos de fronteira remete-se o leitor para os trabalhos de Brebbia (1978), Portela e Romãozinho (1979) e de Brebbia (1981).

6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 - Conclusões do Estudo

A principal conclusão que o presente estudo permite obter é a facilidade com que o método dos elementos finitos e o método dos elementos de fronteira modelam as ondas gravíticas de superfície.

O modelo linear, DROP, resolve a equação reduzida pelo método dos elementos finitos, levando em linha de conta a reflexão parcial, a radiação e o atrito de fundo. Quer a versão determinística quer a versão estocástica permitem tratar indistintamente problemas de agitação e problemas de ressonância considerando, naturalmente, que as respectivas malhas de elementos finitos satisfaçam os requisitos necessários, determinados fundamentalmente pelo período da solicitação. Deste modo, o modelo DROP apresenta-se extremamente eficaz na resolução de problemas de ressonância e de agitação marítima. A correcta aplicação do modelo exige, obviamente, que este seja convenientemente calibrado para o caso em estudo, com base na batimetria e na definição dos coeficientes de reflexão e de rugosidade do fundo. A radiação é tratada automaticamente, exigindo no entanto alguns requisitos à forma e posição das fronteiras líquidas.

O modelo não linear, ainda em fase de estudo, pretende resolver as equações não lineares do movimento ondulatório com superfície livre, pelo método dos elementos de fronteira. O método dos elementos de fronteira mostra-se extremamente económico e adaptado a este tipo de análise não linear, necessitando de discretizar apenas a superfície livre e o fundo. Problemas de interacção fluido-estrutura podem ser eficazmente resolvidos com este modelo.

6.2 - Estudos Futuros

O modelo linear pode tornar-se ainda mais realístico se conseguir simular a transmissão do movimento ondulatório através das estruturas porosas. Nesse sentido está em estudo a modelação do fenómeno de transmissão, com base numa aproximação simples - admite-se que a velocidade de propagação atra-

vés da estrutura porosa é directamente proporcional à diferença da elevação da superfície livre nos extremos da estrutura. Por outras palavras,


$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \beta (\eta_2 - \eta_1) = \frac{\beta i \omega}{g} (\phi_2 - \phi_1)$$

em que β é uma constante, ϕ_1 e ϕ_2 são os potenciais de velocidades nos extremos da estrutura porosa, correspondentes às elevações η_1 e η_2 .

Está também em estudo uma nova versão do modelo linear que utiliza elementos finitos com um número de nós variável em cada lado, Bathe e Wilson (1976). Um modelo com este tipo de elementos é evidentemente muito mais versátil.

Finalmente, quanto ao modelo não linear, estão já em desenvolvimento programas de cálculo automático para a análise bidimensional e tridimensional do movimento ondulatório, com base no método dos elementos de fronteira.

Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil em Abril de 1982.



Artur Portela

BIBLIOGRAFIA

- ABECASIS, F.M.; CASTANHO, J.P.; CARVALHO, J.R. - A Previsão das Características das Ondas do Mar. Memória nº 114 do LNEC, 1957.
- BATHE, K.J.; WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- BENDAT, J.S; PIERSOL, A.G. - Random Data: Analysis and Measurement Procedures. John Wiley, 1971
- BETTES, P. - Infinite Elements. Int. J. Num. Meth. Engng, 11, 53-64, 1977.
- BETTES, P.; ZIENKIEWICZ, O.C. - Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements. Int. J. Num. Meth. Engng, 11, 1271-1290, 1977.
- BERKHOFF, J.C.W. - Computation of Combined Refraction-Diffraction - 13th Int. Conf. Coastal Engng, Vancouver, 1972.
- BERKHOFF, J.C.W. - Linear Wave Propagation Problems and the Finite Element Method. DHI, publ. 124, March 1974.
- BREBBIA, C.A.; WALKER, S.; KAVANAH, M. - Wave Oscillation Problems in Deep and Shallow Waters. Offshore Structures Engineering. Ed. Carneiro, Ferrante, Brebbia. Pentech Press, 1977.
- BREBBIA, C.A. - The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, London, 1978.
- BREBBIA, C.; WALKER, S. - Introduction to Boundary Element Methods. Ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, 1978.
- BREBBIA, C.A.; WALKER, S.; - Dynamic Analysis of Offshore Structures. Newnes -Butterworths, London, 1979.
- BREBBIA, C.A. - Progress in Boundary Element Methods. Pentech Press, London, 1981.
- BUTKOV, E., - Mathematical Physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- CARVALHO, M.M. - Simulação da Agitação Irregular, Técnicas Matemáticas. Tese apresentada a concurso para especialista do LNEC em Maio de 1973.
- CARVALHO, M.M. - Processos Estocásticos em Hidráulica Marítima. Seminário nº 260, LNEC, 1980.

- CARVALHO, M.M. - Sobre a Direcção de Propagação da Agitação Marítima. Publicação do LNEC, 1981.
- CHEN, H.S.; MEI, C.C. - Oscillations and Wave Forces in an Offshore Harbour. Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, MIT, report nº 190, 1974.
- CHEN, H.S.; MEI, C.C. - Hybrid Element Method for Water Waves. Modeling Techniques 1975, San-Francisco, September 1975.
- CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. - Dynamics of Structures. McGraw-Hill, 1975
- COHEN, M. - Silent Boundary Methods for Transient Wave Analysis. California Institute of Technology, Earthquake Engineering Research Laboratory, Pasadena, California, 1980.
- COURANT, R.; HILBERT, D. - Methods of Mathematical Physics. Vol. 1, Interscience.
- COVAS, J.M.A. - Modelos Matemáticos para Estudo da Propagação e Deformação das Ondas de Gravidade. O Cálculo Automático de Diagramas de Refracção. Tese apresentada a concurso para especialista do LNEC, Fev. 1976.
- DEAN, R.G. - Kinematics and Forces due to Wave Groups and Associated Second Order Currents. Proceedings of BOSS'79, 1979.
- DUARTE, R.T. - Uma Teoria Linear do Comportamento Dinâmico das Estruturas Sujeitas a Acções Sísmicas. Tese para especialista do LNEC, 1978.
- DUARTE, R.T. - Dinâmica das Estruturas. Edição provisória. Curso de mestrado em engenharia estrutural, IST, 1981.
- ENGQUIST, B.; MAJDA, A. - Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves. Mathematics of Computation, Vol. 31, pp.629-651, July, 1977.
- GRAVESEN, H.; JENSEN, O.J.; SORENSEN, T. - Harbour Resonance Generated by Storm Waves, 7th Int. Harbour Congress, Antwerp, May, 1978.
- HANSEN, E.Q.; SAND, S.E.; LUNDGREN, H.; SORENSEN, T.; GRAVESEN, H. - Correct Reproduction of Group-Induced Long Waves, 17th Coast Engng Conf, Australia, 1980.
- HARA, H.; ZIENKIEWICZ, O.C.; BETTESS, P. - Application of Finite Elements to Determination of Wave Effects on Offshore Structures. Proc. of BOSS'79, 1979.

- HOUSTON, J.R. - Modelling of Short Waves Using the Finite Element Method. 3th Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources, May 1980.
- HWANG, L.S.; TUCK, E.O. - On the Oscillations of Harbours of Arbitrary Shape. J. Fluid Mech., 42, 447-464, 1970.
- JONSSON, I.G.; BRINK-KJAER, O. - A Comparison Between Two Reduced Wave Equations for Gradually Varying Depth. Inst of Hydrodyn and Hydr Engng (ISVA), Tech Univ Denmark, Prog Rep No 31, 1973.
- JONSSON, I.G. - The Wave Friction Factor Revisited. Prog Rep 37, Inst Hydrodyn and Hydr Engng, Tech Univ Denmark, 1975.
- KARAIOSIFIDIS, S. - A Comparison of Solution Methods for Exterior Surface Wave Problems. University of Wales, Swansea, rep. C/M/120/76, 1976.
- KINSMAN, B. - Wind Waves, Their Generation and Propagation on the Ocean Surface Prentice-Hall, 1965.
- KREYSZIG, E. - Advanced Engineering Mathematics. John Wiley, 1972.
- LARSEN, J. - A Harbour Theory for Wind-Generated Waves Based on Ray Methods. J. Fluid Mech Vol 87, Part 1, 12, July, 1978.
- LE MÉHAUTÉ, B. - An Introduction to Hydrodynamics & Water Waves. Springer-Verlag, 1976.
- LENCASTRE, A. - Manual de Hidráulica Geral. Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, Brasil, 1972.
- MORAIS, C.C. - Reflexão de Ondas de Oscilação. Tese apresentada a concurso para especialista do LNEC, Outubro 1971.
- NEWLAND, D.E. - An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis. Longman, 1975.
- NYBERG, S.; ORHAUG, T.; SVENSSON, H. - Optical Processing For Pattern Properties. Lund Studies in Geography No 50. The Royal University of Lund, Sweden, 1971.
- PHILLIPS, O.M. - The Dynamics of the Upper Ocean. Cambridge University Press, 1977.
- PORTELA, A. - Modelo Matemático para o Estudo de Oscilações de Longo Período em Bacias Portuárias. Relatório do LNEC, 1979.
- PORTELA, A. - Theoretical Basis of Boundary Solutions for the Lienar Theory of

- Structures. Applied Mathematical Modelling, Vol 5; February 1981.
- PORTELA, A.; ROMÃOZINHO, T. - Tópicos sobre o Método dos Elementos de Fronteira. Seminário realizado no LNEC, Setembro 1979.
- PORTELA, A.; VIEIRA, R. - Prospectivas da Modelação Híbrida em Tempo Real. Relatório do LNEC, Abril 1982.
- RADDER, A.C. - On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation. Rijks waterstaat Report DIV 788631, The Netherlands. 1978.
- RALSTON, A. - A First Course in Numerical Analysis. McGraw-Hill, N.Y., 1965.
- ROSSEL, J. - Physique Générale. Griffon-Neuchatel, 1970.
- SAINI, S.S.; ZIENKIEWICZ, O.C.; BETTESS, P., 1976 - Coupled Hydrodynamic Response of Concrete Gravity Dams Using Finite and Infinite Elements. University of Wales, Swansea, rep. C/R/271/76, 1976.
- SKOVGAARD, O.; JONSSON, I.G. - Computation of Wave Fields in the Ocean Around an Island. DCAM Rep 175. Technical University of Denmark.
- SMITH, R.; SPRINKS, T. - Scattering of Surface Waves by a Conical Island. J. Fluid Mech, Vol. 72, Part 2, 25, November 1975.
- SOBOLEV, S.L. - Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Pergamon Press, 1964.
- SOKOLNIKOFF, I.S.; REDEFFER, R.M. - Mathematics of Physics and Modern Engineering. McGraw-Hill, 1966.
- SVENDSEN, I.A.; JONSSON, I.G. - Hydrodynamics of Coastal Regions. Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Denmark, 1976.
- URSELL, F. - Steady Wave Patterns on a Non-Uniform Steady Fluid Flow. J. Fluid Mech., Vol. 9, Part 3, November 1960.
- VINJE, T.; BREVIG, P. - Numerical Simulation of Breaking Waves. Proc Finite Elements in Water Resources III. Ed Wang, Alonso, Brebbia, Gray, Pinder. The University of Mississippi, 1980.
- WANG, J.D.; CONNOR, J.J. - Mathematical Modeling of Near Coastal Circulation. MIT Rep No 200, 1975.

- WHITE, I.R.; MORGAN, K.; LEWIS, R.W. - Efficient Calculation of Finite Element Stiffness Matrices. Adv. Engng Soft., 3, 77-83, 1981.
- WHITHAM, G.B. - A Note on Group Velocity. J. Fluid Mech., Vol. 9, Part 3, November 1960.
- WILSON, E.L.; BATHE, K.J.; DOHERTY, W.P. - Direct Solution of Large Systems of Linear Equations. Computers & Structures, 4, 363, 1974.
- WILSON, E.L.; DOVEY, H.H. - Solution or Reduction of Equilibrium Equations for Large Complex Structural Systems. Adv. Engng. Soft., 1, 19-26, 1978.
- ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, N.Y., 1971.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; NEWTON, R.E. - Compled Vibrations in a Structure Submerged in a Compressible Fluid. Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart, 1969.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; BETTESS, P. - Infinite Elements in the Study of Fluid-Structure Interaction Problems. Proc. of Computing Methods in Applied Sciences, December 1975.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D. W.; BETTESS, P. - The Sommerfeld Radiation Condition on Finite Domains and its Modelling in Numerical Procedures. Institute for Numerical Methods in Engineering, University College of Swansea, rep. C/R/302/77, 1977.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; BETTESS, P. - Fluid Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment. Int. J. Num. Meth. Engng, 13, 1-16, 1978.

A N E X O S



ANEXO 1. - TÓPICOS SOBRE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

1.1 - Generalidades

Para uma análise profunda da teoria dos processos estocásticos referem-se os trabalhos do Bendat e Piersol (1971), Carvalho (1973), Clough e Penzien (1975), Newland (1975), Duarte (1978), Carvalho (1980), Duarte (1981), e Carvalho (1981).

1.2 - Conceitos Básicos

Considere-se um registo local, $u_i(t)$, dos acontecimentos de um fenómeno modelado por uma função contínua, $u(t)$, dependente do tempo, t .

Se o valor da variável associada à função for previsível em qualquer instante $t_0 + \Delta t$, a partir do registo dos acontecimentos até ao instante t_0 , diz-se que a função é determinística.

1.2.1 - Processos Estocásticos

Porém, pode acontecer que o valor da variável associada à função no instante $t_0 + \Delta t$ seja imprevisível a partir do registo dos acontecimentos anteriores. Nestas circunstâncias, diz-se que $u_i(t)$ é o registo de uma realização de um processo estocástico ou processo aleatório, $u(t)$, também chamado função de variável aleatória. Assim, um processo estocástico (p.e.) fica definido pelo conjunto das suas realizações ou amostras (cujo suporte físico são os registos), teoricamente em número infinito, com propriedades estatísticas comuns. Por outras palavras, o p.e. fica definido pela sua população e representa-se por:

$$\{u(t) = u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\}$$

A figura A1-1.2.1.1 mostra um exemplo de um conjunto de registos de um p.e. $u(t)$.

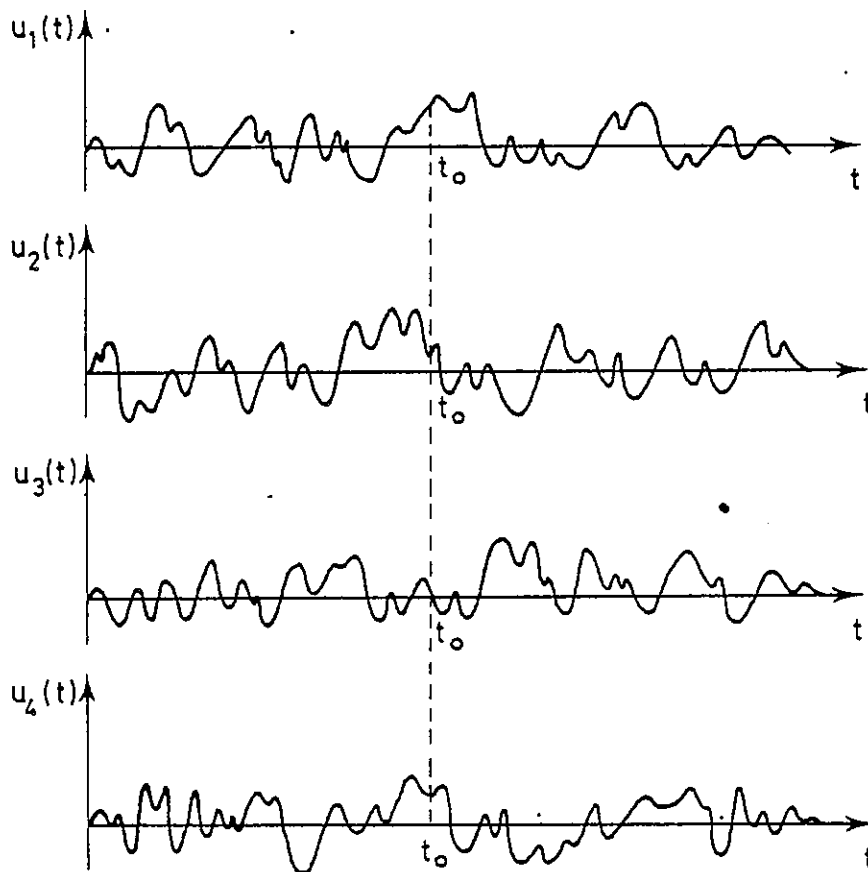


Fig. A1-1.2.1.1 - Conjunto de alguns registos de um p.e. $u(t)$

Não sendo possível prever o preciso valor de $u(t)$ num instante t_0 , o melhor que se pode fazer é determinar a probabilidade de $u(t)$, no instante t_0 , estar compreendido entre determinados limites. Assim, a teoria das probabilidades ocupa o ponto central na análise de p.e..

1.2.2 - Funções de Probabilidade

As funções de probabilidade podem ser deduzidas de um registo, isto é, da variação $u(t)$ ao longo do tempo ou, num determinado instante t_0 , deduzidas da variação de $u(t_0)$ através de todos os registos da população, como mostra a figu-

ra A1-1.2.2.1.

Considere-se um registo de comprimento T_R , $u_i(t)$, de um p.e., como mostra a figura A1-1.2.2.1.

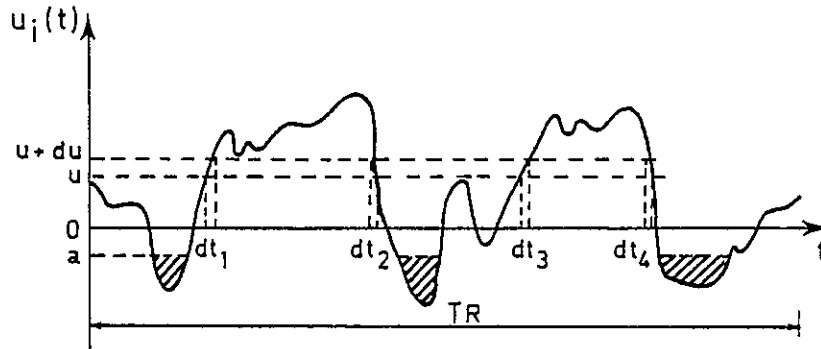


Fig. A1-1.2.2.1 - Registo de um p.e. $u(t)$

A função distribuição de probabilidade, $P_{u_i}(a)$, é definida pela probabilidade de $u_i(t_0)$ tomar valores não superiores a a ,

$$P_{u_i}(a) = P_{u_i}(u_i(t_0) \leq a)$$

e é dada pela fracção do tempo total do registo em que $u_i(t) \leq a$, figura A1-1.2.2.1. Com esta definição é claro que

$$P_{u_i}(-\infty) = P_{u_i}(u_i(t_0) < -\infty) = 0$$

$$P_{u_i}(+\infty) = P_{u_i}(u_i(t_0) < +\infty) = 1$$

Considerando diferentes valores de a pode construir-se um gráfico que mostra como $P_{u_i}(a)$ varia em função de a . Tal gráfico representa a função distribuição de probabilidade $P_{u_i}(u)$.

No intervalo de tempo T_R , $u_i(t)$ está compreendido entre os limites u e $u+du$ durante o tempo $dt_1 + dt_2 + dt_3 + dt_4$.

Para valores de T_R suficientemente grandes, teoricamente infinitos, a probabilidade de que $u_i(t_0)$ esteja no intervalo u a $u+du$ é dada pela fracção

do tempo total durante a qual $u_i(t)$ está no intervalo u a $u+du$, isto é,

$$Prob(u \leq u_i(t_0) \leq u + du) = \frac{dt_1 + dt_2 \dots}{T_R} = \frac{\Sigma dt}{T_R}$$

A mesma probabilidade expressa em termos da função distribuição de probabilidade é:

$$Prob(u \leq u_i(t_0) \leq u + du) = P_{u_i}(u + du) - P_{u_i}(u) = dP_{u_i}(u)$$

em que $dP_{u_i}(u)$ é o incremento de probabilidade correspondente ao incremento du .

Assim, tem-se:

$$dP_{u_i}(u) = \frac{dP_{u_i}(u)}{du} du = p_{u_i}(u) du$$

e portanto,

$$Prob(u \leq u_i(t_0) \leq u + du) = p_{u_i}(u) du$$

em que $p_{u_i}(u)$ é a função densidade de probabilidade e define a densidade de distribuição dos valores de $u_i(t)$.

Das relações anteriores pode concluir-se que, a fracção do tempo total durante a qual $u_i(t)$ está no intervalo u a $u+du$ pode ser calculada a partir da função densidade de probabilidade,

$$\frac{dt}{T_R} = Prob(u \leq u_i(t_0) \leq u + du) = p_{u_i}(u) du$$

o que permite passar de uma análise no domínio do tempo para uma análise na variável u . Considerando a função densidade de probabilidade, $p_{u_i}(u)$, podem estabe

lecer-se as seguintes relações:

$$\text{Prob}(a \leq u_i(t_0) \leq b) = \int_a^b p_{u_i}(u) du$$

$$\text{Prob}(-\infty < u_i(t_0) < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{u_i}(u) du = 1$$

$$\text{Prob}(u_i(t_0) \leq a) = P_{u_i}(a) = \int_{-\infty}^a p_{u_i}(u) du$$

As figuras A1-1.2.2.2, 3 mostram, respectivamente, as curvas das funções densidade de probabilidade e distribuição de probabilidade de um p.e. Gaussiano. A função densidade de probabilidade deste p.e. é dada por

$$p_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u - \mu_u}{\sigma_u}\right)^2\right]$$

em que σ_u e μ_u são, respectivamente, o desvio padrão e o valor médio, constantes estas que serão definidas mais adiante

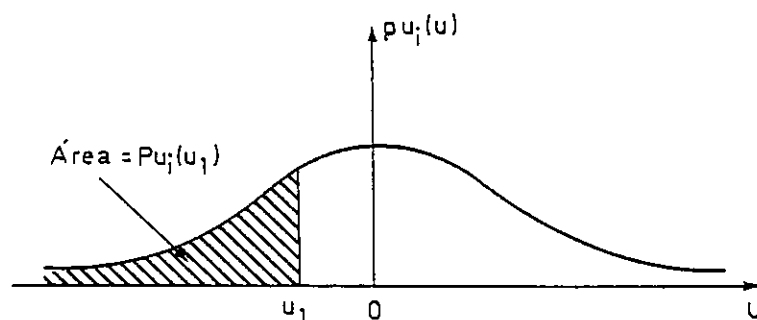


Fig. A1-2.2.2 - Função densidade de probabilidade de um p.e. Gaussiano

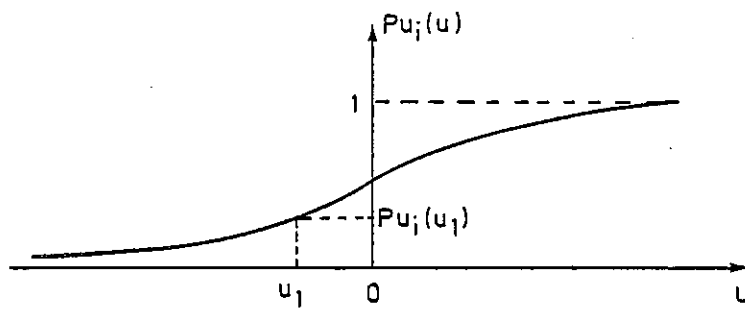


Fig. A1-1.2.2.3 - Função distribuição de probabilidade de um p.e. Gaussiano

1.2.3 - Momentos do Processo Estocástico

Define-se o i -ésimo momento ou momento de ordem i , M_i , de uma função $f(x)$, com $-\infty < x < +\infty$, como sendo o funcional:

$$M_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x) dx$$

O i -ésimo momento de probabilidade do p.e. $u(t)$ é dado por:

$$E[u^i] = \int_{-\infty}^{+\infty} u^i p_u(u) du$$

em que $p_u(u)$ é a função densidade de probabilidade do p.e. e $E[u^i]$ representa a esperança matemática de u^i .

O i -ésimo momento temporal do p.e. $u(t)$ é dado por:

$$\langle u^i \rangle = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \frac{1}{T_R} \int_{-T_R/2}^{+T_R/2} u^i(t) dt$$

em que T_R é a duração do registo da realização do p.e.

1.3 - Processos Estocásticos Estacionários e Ergódicos

Um p.e. diz-se estacionário se as funções distribuição de probabilidade obtidas para qualquer amostra da população (registo) não dependem do tempo absoluto, isto é, não dependerem do instante real escolhido para origem do tempo. Como consequência, as propriedades estatísticas de uma realização de um p.e. estacionário não dependem do início do respectivo registo.

Note-se que uma tempestade ou um sismo não são p.e. verdadeiramente estacionários visto que têm um princípio e um fim. Porém, na prática admite-se que qualquer destes processos é estacionário durante a maior parte da sua duração, ou que pode ser dividido em vários períodos distintos, em cada um dos quais o referido p.e. é aproximadamente estacionário.

Um p.e. diz-se ergódico se todas as suas realizações tiverem a mesma função distribuição de probabilidade.

Deste modo, se um p.e. é simultaneamente estacionário e ergódico, a sua população fica completamente representada por uma única realização. Isto é, todas as propriedades estatísticas do p.e. podem ser deduzidas a partir de um único registo dos acontecimentos.

Para um p.e. ergódico e estacionário, $u(t)$, tem-se

$$E[u^i] = \langle u^i \rangle$$

para qualquer ordem i .

De aqui em diante consideram-se exclusivamente p.e. ergódicos e estacionários.

1.4 - Estatísticas do Processo Estocástico

1.4.1 - Generalidades

Sob o nome de estatísticas do p.e. englobam-se aqui o valor médio, o

valor médio quadrático, a variância e o desvio padrão.

A figura A1-1.4.1.1 mostra um conjunto de registros de um p.e., $u(t)$.

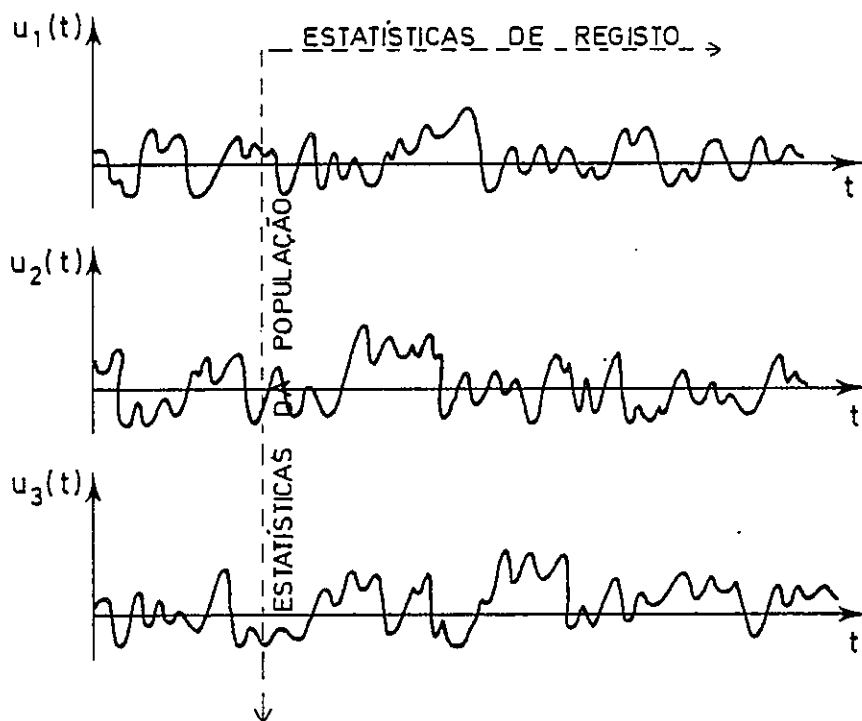


Fig. A1-1.4.1.1 - Conjunto de registros de um p.e.

As estatísticas do p.e. podem ser calculadas para cada registro (estatísticas de registro) ou, num determinado instante, podem ser calculadas através de todos os registros do conjunto e dizem-se da população. No primeiro caso exige-se que o processo seja estacionário e as estatísticas são calculadas a partir da função $u(t)$ em que a variável independente é o tempo, t . No segundo caso considera-se um determinado instante e as propriedades estatísticas são calculadas a partir da função $p(u)$ em que u é a variável independente, através de todos os registros do conjunto.

Por outras palavras, no primeiro caso fixa-se u e varia-se t , enquanto que no segundo caso se fixa t e varia-se u .

Tendo em conta que o processo é estacionário e ergódico, as estatísticas da população são iguais às estatísticas de registro e o processo pode então ser representado por um único registro o que, obviamente, é uma situação extre-

mamente vantajosa sob o ponto de vista da Engenharia.

1.4.2 - Valor Médio

Considere-se um registo de um p.e. $u(t)$. O valor médio do p.e. é designado, por vezes, por μ_u e define-se por:

$$\mu_u = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} u(t) dt = \langle u \rangle$$

O valor médio também pode ser definido a partir da função densidade de probabilidade. Para isso considere-se a equação anterior escrita de outra forma:

$$\langle u \rangle = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \int_0^{T_R} u(t) \frac{dt}{T_R}$$

Tendo em conta que $\frac{dt}{T_R}$ é a fracção do tempo T_R durante a qual o p.e. está no intervalo u a $u+du$ e que a referida fracção de tempo é também dada por $p(u) du$, o valor médio vem dado por:

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u p(u) du = E[u]$$

Este integral é o primeiro momento da área da curva da função densidade de probabilidade em relação à origem, $u = 0$. O valor médio é, portanto, igual a $A\bar{u}$, em que A é a área sob a curva e \bar{u} é a coordenada do centro de gravidade da referida área. Sendo $A = 1$ vem $\langle u \rangle = \bar{u}$. Assim, pode considerar-se que o p.e. $u(t)$ é dado pela soma de um valor constante, $\bar{u} = \langle u \rangle$, com uma componente fluctuante em torno de \bar{u} .

1.4.3 - Valor Médio Quadrático

O valor médio quadrático de u , $\langle u^2 \rangle$, é o valor médio de u^2 (momento temporal de ordem 2) e é calculado por:

$$\langle u^2 \rangle = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} u^2(t) dt$$

ou por

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 p(u) du$$

visto que para p.e. ergódicos e estacionários verifica-se que $\langle u^i \rangle = E[u^i]$.

Este integral é o segundo momento da área da curva da função densidade de probabilidade em relação à origem, $u = 0$. Tendo em conta que a área sob a curva é unitária, o valor médio quadrático dá uma medida da grandeza dos picos (extremos) do registo. Isto é, um valor médio quadrático pequeno corresponde a um valor pequeno do segundo momento o que quer dizer que a área sob a curva da função densidade de probabilidade está concentrada junto da origem. Um valor médio quadrático grande corresponde a um valor grande do segundo momento o que significa que grande parte da área sob a curva da função densidade de probabilidade está afastada da origem, como mostra a figura A1-1.4.3.1.

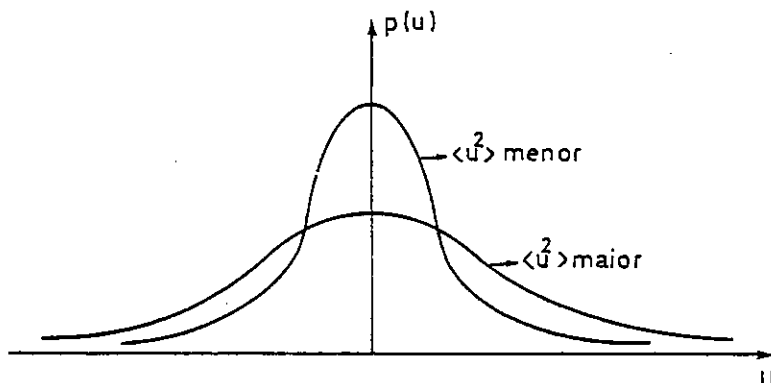


Fig. A1-1.4.3.1 - Valor médio quadrático

1.4.4 - Variância

A variância de um processo u designa-se por σ_u^2 e é o valor médio do quadrado do desvio de u relativamente ao valor médio $\langle u \rangle$, isto é,

$$\sigma_u^2 = \langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle$$

Desenvolvendo a equação anterior obtém-se:

$$\sigma_u^2 = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2$$

A raiz quadrada positiva da variância, σ_u , é o desvio padrão e dá uma medida da amplitude do registo.

Um registo de um p.e. pode, geralmente, decompôr-se em duas partes: uma parte estática definida pelo valor médio, $\langle u \rangle$, e uma parte dinâmica cujas flutuações em torno do valor médio são definidas pelo desvio padrão, σ , como mostra a figura A1-1.4.4.1. Esta possibilidade dá origem a dois tipos de análise diferentes que são respectivamente a análise estática e a análise dinâmica. Na análise estática usa-se o valor médio do p.e., enquanto que na análise dinâmica toma-se o valor médio nulo, isto é, considera-se o p.e. de média nula, e a variância vem igual ao valor médio quadrático:

$$\sigma_u^2 = \langle u^2 \rangle - \underbrace{\langle u \rangle^2}_{=0} = \langle u^2 \rangle$$

De aqui em diante consideram-se apenas p.e. de média nula.

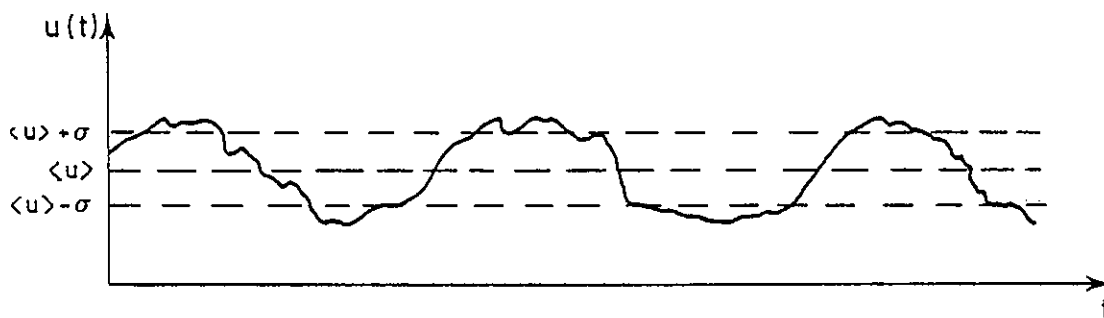


Fig. A1-1.4.4.1 - Valor médio e desvio padrão de um registo

1.5 - Descrição de um Processo Estocástico no Domínio do Tempo

1.5.1 - Generalidades

As funções de probabilidade e as estatísticas de um p.e. perdem toda a informação sobre os períodos ou frequências presentes num registo dos acontecimentos. Assim, quando se pretende conhecer as periodicidades contidas num registo recorre-se à função de autocorrelação.

1.5.2 - Funções de Correlação

A função de autocorrelação ou covariância, $R_{uu}(\tau)$ de um p.e., $u(t)$, é o valor médio do produto $u(t) u(t + \tau)$, em que τ é um intervalo de tempo. Isto é,

$$R_{uu}(\tau) = \langle u(t)u(t + \tau) \rangle = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} u(t)u(t + \tau) dt$$

Deste modo, a função de autocorrelação é unicamente função do intervalo de tempo τ entre os dois instantes de amostragem no registo dos acontecimentos.

Vejamos algumas propriedades da função de autocorrelação.

Tendo em conta que o p.e. é estacionário tem-se:

$$\langle u(t) \rangle = \langle u(t + \tau) \rangle = \mu$$

$$\sigma_{u(t)} = \sigma_{u(t+\tau)} = \sigma$$

O coeficiente de correlação (*) entre $u(t)$ e $u(t + \tau)$ é dado por:

(*) - O coeficiente de correlação ou covariância normalizada entre dois p.e. $u(t)$ e $v(t)$ designa-se por ρ_{uv} e é dado por:

$$\rho_{uv} = \frac{\langle (u - \mu_u)(v - \mu_v) \rangle}{\sigma_u \sigma_v}$$

$$\rho = \frac{\langle [u(t) - \mu] [u(t + \tau) - \mu] \rangle}{\sigma^2} = \frac{R_{uu}(\tau) - \mu^2}{\sigma^2}$$

Conseqüentemente, para p. e. de média nula tem-se:

$$R_{uu}(\tau) = \sigma^2 \rho$$

ou seja (*):

$$-\sigma^2 \leq R_{uu}(\tau) \leq \sigma^2$$

A expressão anterior permite concluir que a função de autocorrelação varia entre os limites $+\sigma^2$ e $-\sigma^2$.

Para $\tau = 0$ vem:

$$\rho = +1 \quad \text{e} \quad R_{uu}(\tau = 0) = \sigma^2$$

À medida que os valores de τ aumentam aparecem produtos positivos e negativos que se anulam e, conseqüentemente, a função autocorrelação decresce, como mostra a figura A1-1.5.2.1. Para intervalos de amostragem muito grandes, $\tau \rightarrow \infty$, o p. e. não é correlacionado visto que não há relação coerente entre os valores de $u(t)$ e de $u(t + \tau)$. Isto é, quando $\tau \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$ e $R_{uu}(\tau \rightarrow \infty) = 0$.

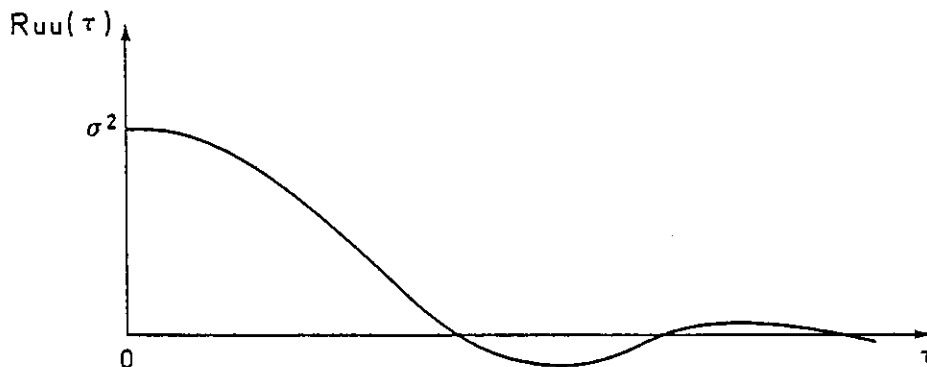


Fig. A-1.5.2.1 - Representação da função de autocorrelação de um p.e. para valores de $\tau \geq 0$

(*) Mostra-se que $-1 \leq \rho_{uv} \leq +1$

As funções de correlação cruzada entre os p. e. $u(t)$ e $v(t)$ são definidas por:

$$R_{uv}(\tau) = \langle u(t) v(t + \tau) \rangle = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} u(t) v(t + \tau) dt$$

$$R_{vu}(\tau) = \langle v(t) u(t + \tau) \rangle = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} v(t) u(t + \tau) dt$$

Tendo em conta o coeficiente de correlação obtém-se, para p.e. de média nula,

$$R_{uv}(\tau) = \sigma_u \sigma_v \rho_{uv}(\tau)$$

$$R_{vu}(\tau) = \sigma_v \sigma_u \rho_{vu}(\tau)$$

ou seja:

$$-\sigma_u \sigma_v < R_{uv}(\tau) < \sigma_u \sigma_v$$

$$-\sigma_v \sigma_u < R_{vu}(\tau) < \sigma_v \sigma_u$$

e ainda,

$$R_{uv}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

$$R_{vu}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

1.6 - Descrição de um Processo Estocástico no Domínio da Frequência

1.6.1 - Generalidades

Por vezes é necessário conhecer as frequências contidas num registo de acontecimentos de um p.e., ou seja, é necessário representar o p.e. no domínio

de frequências. Tal representação é possível através da função densidade espectral.

1.6.2 - Análise de Fourier

A análise de Fourier permite o conhecimento da composição de frequências presentes numa função aperiódica. Por outras palavras, tal análise permite passar de uma função no domínio do tempo para uma função no domínio da frequência e vice-versa.

Considere-se uma função periódica de média nula, $u(t)$, representada por uma série de Fourier:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \omega t)$$

em que $\omega = 2\pi/T$ é a mais baixa frequência correspondente ao maior período T da função.

As constantes a_n e b_n são calculadas por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \cos(n \omega t) dt \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \sin(n \omega t) dt$$

A série de Fourier pode ser representada com notação complexa. Assim, tendo em conta que:

$$\cos(n \omega t) = \frac{1}{2} [\exp(i n \omega t) + \exp(-i n \omega t)]$$

$$\sin(n \omega t) = \frac{1}{2} [\exp(i n \omega t) - \exp(-i n \omega t)]$$

a série de Fourier escreve-se:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \exp(i n \omega t) + d_n \exp(-i n \omega t)] \quad n = 1, 2, \dots$$

com

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \exp(-i n \omega t) dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$d_n = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \exp(i n \omega t) dt$$

Introduzindo a notação $d_n = c_{-n}$ obtêm-se:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i n \omega t) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

que é a representação complexa da série de Fourier e em que c_n são os coeficientes de Fourier complexos da função $u(t)$.

Substituindo c_n na equação anterior, vem:

$$u(t) = \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \exp(-i n \omega t) dt \right] \exp(i n \omega t) \right\}$$

$$u(t) = \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \omega)$$

Os valores de $F(n \omega)$ podem interpretar-se como ordenadas de uma função para diferentes valores de n , como mostra a figura A1.1.6.2.1.

Note-se que, sendo ω a espessura de cada bloco do "histograma", a área total é de facto igual a $u(t)$:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\omega F(n \omega)]$$

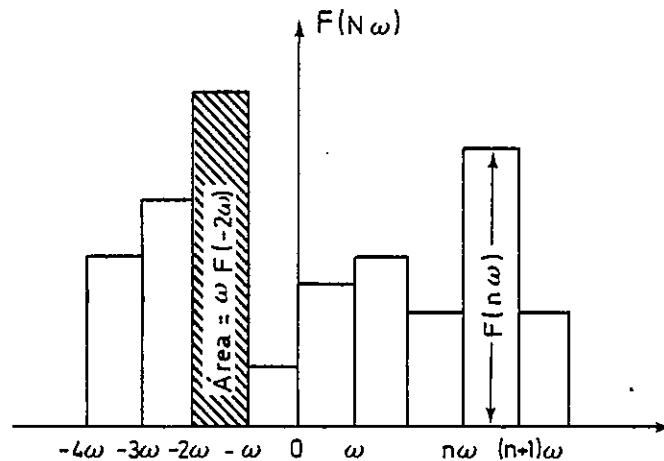


Fig. A1-1.6.2-1 - "Histograma" da função $F(n\omega)$

Considere-se agora que o intervalo finito ω se torna muito pequeno, $\omega = \Delta\omega$. A sucessão de pontos $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ transforma-se na sucessão de pontos $\Delta\omega, 2\Delta\omega, 3\Delta\omega, \dots$. Se agora $\Delta\omega \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$) e a função deixa de ser periódica, tem-se uma variação contínua de ω e o somatório substitui-se por um integral, obtendo-se então:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt \right] \exp(i\omega t) d\omega$$

Na expressão anterior o integral entre parentesis rectos é unicamente função de ω . O referido integral é a transformada de Fourier da função $u(t)$ e representa-se por $\bar{U}(\omega)$:

$$\bar{U}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt$$

Assim, a função $u(t)$ é a transformada inversa de Fourier ou integral de Fourier e escreve-se:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

As funções $\bar{U}(w)$ e $u(t)$ formam um par de transformadas de Fourier. A posição da constante 2π é arbitrária, pelo que a referida constante pode ser colocada indistintamente em $\bar{U}(w)$ ou em $u(t)$.

Por vezes, a frequência circular w (rad/s) é substituída pela frequência f (Hz ou c/s), dada por:

$$w = 2\pi f \quad \text{com} \quad dw = 2\pi df$$

O par de transformadas de Fourier escreve-se agora:

$$\bar{U}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(-i 2 \pi f t) dt$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(f) \exp(i 2 \pi f t) df$$

Finalmente, note-se que quando se fez $w = \Delta w \rightarrow 0$ e consequentemente $T \rightarrow \infty$, $u(t)$ deixou de representar uma função periódica e o integral de Fourier substituiu a série de Fourier.

1.6.3 - Função Densidade Espectral

Considere-se agora o valor médio quadrático de um p.e. $u(t)$:

$$\langle u^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) u(t) dt$$

Exprimindo um dos factores $u(t)$ pela correspondente transformada inversa de Fourier obtêm-se:

$$\langle u^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(w) \exp(i w t) dw \right] dt$$

Mudando a ordem de integração vem:

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(w) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \exp(i w t) dt \right] dw$$

Quando $T \rightarrow \infty$, o integral entre parentesis rectos é o complexo conjugado, $\bar{U}(w)$, da transformada de Fourier de $u(t)$. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(w) \bar{U}(w) dw = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{U}|^2 dw = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\bar{U}|^2 \right) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(w) dw \end{aligned}$$

com

$$S_{uu}(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\bar{U}|^2$$

em que $S_{uu}(w)$ é a função densidade espectral do valor médio quadrático ou função densidade espectral da variância visto que o processo é de média nula. (*)

A função $S_{uu}(w)$ dá uma medida da quantidade de $\langle u^2 \rangle$ associada a cada frequência w no processo $u(t)$. Assim, as unidades de $S_{uu}(w)$ são as do valor médio quadrático por unidade de frequência angular.

O espectro do processo $u(t)$ é a representação gráfica da função densidade espectral $S_{uu}(w)$.

Tendo em conta que $S_{uu}(w) = S_{uu}(-w)$, ou seja, $S_{uu}(w)$ é uma função par, torna-se conveniente trabalhar com a função densidade espectral no domínio de 0 a ∞ e passar da frequência w (rad/s) para a frequência f (Hz ou c/s). Para esta operação, impõe-se a igualdade entre as quantidades de $\langle u^2 \rangle$ associadas a cada frequência w e f :

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(w) dw = 2 \int_0^{+\infty} S_{uu}(w) dw = \int_0^{+\infty} P_{uu}(f) df$$

* - Correctamente, a função densidade espectral define-se a partir das relações Wiener-Kinchin. Porém, utiliza-se aqui uma definição com base no estimador natural.

isto é,

$$2 S_{uu}(\omega) d\omega = P_{uu}\left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right) \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$P_{uu}(f) = 4\pi S_{uu}(\omega = 2\pi f)$$

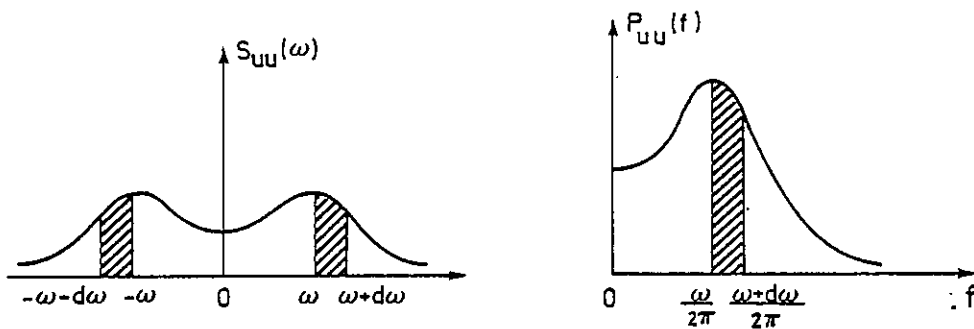


Fig. A1-1.6.3.1 - Relação entre os espectros $S_{uu}(\omega)$ e $P_{uu}(f)$

1.6.4 - As Relações de Weiner - Khinchin

Tendo em conta que um p.e. pode ser descrito pela função de autocorrelação ou pela função densidade espectral, é de esperar que estas funções estejam relacionadas.

Considere-se a função de autocorrelação, $R_{uu}(\tau)$, do processo $u(t)$:

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) u(t + \tau) dt$$

O par de transformadas de Fourier de $u(t + \tau)$ é dado por:

$$\bar{U}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t + \tau) \exp(-i w t) dt \exp(-i w \tau)$$

$$U(t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(w) \exp[i w (t + \tau)] dw$$

As relações anteriores são válidas visto que o processo é estacionário o que

permite tomar indistintamente os instantes t ou $t+\tau$ para origem do tempo.

A função de autocorrelação pode agora escrever-se:

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(w) \exp[i w (t + \tau)] \bar{dw} dt$$

Trocando a ordem de integração fica:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\bar{U}(w) \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \exp(i w t) dt] \exp(i w \tau) \bar{dw}$$

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \bar{U}(w) \bar{U}(w) \exp(i w \tau) \bar{dw}$$

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\bar{U}|^2 \exp(i w \tau) \bar{dw}$$

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(w) \exp(i w \tau) \bar{dw}$$

A equação anterior mostra que a função de autocorrelação $R_{uu}(\tau)$ é a transformada de Fourier da função densidade espectral $S_{uu}(w)$ do processo $u(t)$. O par de $R_{uu}(\tau)$ é

$$S_{uu}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) \exp(-i w \tau) d\tau$$

As duas últimas equações, isto é o par de transformadas de Fourier

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(w) \exp(i w \tau) \bar{dw}$$

$$S_{uu}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) \exp(-i w \tau) d\tau$$

constituem as chamadas relações de Wiener-Khinchin.

Tendo em conta que $R_{uu}(\tau)$ e $S_{uu}(w)$ são funções pares, respectivamente de τ e de w , isto é,

$$R_{uu}(\tau) = R_{uu}(-\tau)$$

$$S_{uu}(w) = S_{uu}(-w)$$

as relações de Wiener-Khinchin podem escrever-se:

$$R_{uu}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} S_{uu}(w) \exp(i w \tau) dw$$

$$S_{uu}(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} R_{uu}(\tau) \exp(-i w \tau) d\tau$$

Tendo em conta que $R_{uu}(\tau)$ e $S_{uu}(w)$ são funções reais, as relações de Wiener-Khinchin podem, ainda, escrever-se:

$$R_{uu}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} S_{uu}(w) \cos(w \tau) dw$$

$$S_{uu}(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} R_{uu}(\tau) \cos(w \tau) d\tau$$

Finalmente, para $\tau = 0$ obtêm-se:

$$R_{uu}(0) = \langle u^2 \rangle = 2 \int_0^{+\infty} S_{uu}(w) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(w) dw$$

relações estas que já se tinham obtido nos parágrafos 1.5.1 e 1.6.3, e que significam que o valor médio quadrático, $\langle u^2 \rangle$, de um processo estacionário, $u(t)$, é igual à área sob a curva da função densidade espectral $S_{uu}(w)$ do referido processo.

1.7 - Fórmulas de Derivação de Processos Estocásticos

Se $u(t)$ for um p.e. estacionário, também o são as respectivas derivadas em ordem ao tempo. Se $u(t)$ for um p.e. Gaussiano ergódico e de média nula, também o são as respectivas derivadas em ordem ao tempo. As relações entre as funções de autocorrelação e as funções de correlação cruzada dos p.e. $u(t)$,

$\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt}$ e $\ddot{u}(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2}$ são:

$$R_{\dot{u}\dot{u}}(\tau) = -\dot{R}_{uu}(\tau)$$

$$R_{\dot{u}u}(\tau) = \dot{R}_{uu}(\tau)$$

$$R_{\ddot{u}\ddot{u}}(\tau) = -\ddot{R}_{uu}(\tau)$$

$$R_{\ddot{u}\dot{u}}(\tau) = -\dot{R}_{\dot{u}\ddot{u}}(\tau) = \ddot{R}_{uu}(\tau)$$

As relações entre a função densidade espectral e as funções densidade espectral cruzada são:

$$S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) = -i \omega S_{uu}(\omega)$$

$$S_{\dot{u}u}(\omega) = i \omega S_{uu}(\omega)$$

$$S_{\ddot{u}\ddot{u}}(\omega) = \omega^2 S_{uu}(\omega)$$

$$S_{\ddot{u}\dot{u}}(\omega) = \omega^4 S_{uu}(\omega)$$

As variâncias dos processos $u(t)$, $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$ são respectivamente dadas por:

$$\sigma_{uu}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(\omega) d\omega$$

$$\sigma_{\dot{u}\dot{u}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_{uu}(\omega) d\omega$$

$$\sigma_{uu}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 S_{uu}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}''(\omega) d\omega$$

1.8 - Combinação de Processos Estocásticos

Se $u(t)$ e $v(t)$ forem p.e. estacionários, define-se o p.e. $z(t)$ tal que

$$z(t) = a u(t) + b v(t)$$

cuja função de autocorrelação é dada por:

$$R_{zz}(\tau) = a^2 R_{uu}(\tau) + b^2 R_{vv}(\tau) + a b R_{uv}(\tau) + a b R_{vu}(\tau)$$

De um modo semelhante, a função densidade espectral do p.e. $z(t)$ é dada por:

$$S_{zz}(\omega) = a^2 S_{uu}(\omega) + b^2 S_{vv}(\omega) + a b S_{uv}(\omega) + a b S_{vu}(\omega)$$

1.9 - Momentos Espectrais

Considere-se um p.e. caracterizado pela função densidade espectral $S(\omega)$. Define-se o i -ésimo momento espectral do p.e. como sendo o i -ésimo momento da função $S(\omega)$:

$$M_i = \int_0^{\infty} \omega^i S(\omega) d\omega$$

O conjunto dos momentos espectrais constitui uma descrição da função densidade espectral, pelo que pode substituir a referida função $S(\omega)$. Assim, todas as características do p.e. podem ser calculadas a partir dos momentos espectrais. Referem-se como exemplo os parâmetros:

$$\sigma^2 = M_0$$

$$\sigma = (M_0)^{1/2}$$

$$\langle T_z \rangle = 2\pi (M_0/M_2)^{1/2}$$

$$\langle T_c \rangle = 2\pi (M_0/M_4)^{1/2}$$

$$\epsilon = \left(1 - \frac{M_2^2}{M_0 M_4}\right)^{1/2}$$

em que T_z e T_c são respectivamente os períodos de zero ascendente e de crista e ϵ é um parâmetro que intervém na distribuição das alturas de crista.

1.10 - Processos Estocásticos de Banda Estreita

Um p.e. cuja função densidade espectral estiver praticamente contida numa pequena banda de frequências, diz-se processo de banda estreita, como mostra a figura A1-1.10.1.

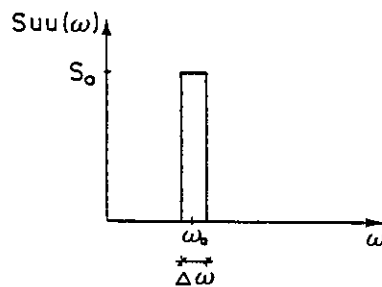


Fig. A1-1.10.1 - p.e. de banda estreita

A função de autocorrelação e um registo típico de um processo de banda estreita tem as formas indicadas nas figuras A1-1.10.2, 3

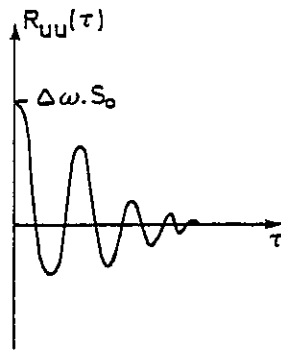


Fig. A1-1.10.2 - Função de autocorrelação de um p.e. de banda estreita

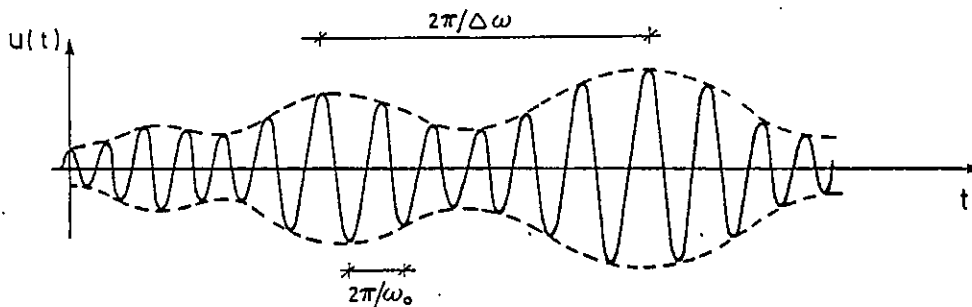


Fig. A1-1.10.3 - Registo de acontecimentos de um p.e. de banda estreita

1.11 - Processos Estocásticos de Banda Larga

Um p.e. diz-se de banda larga se a respectiva função densidade espectral cobrir uma larga banda de frequências. No caso limite está o espectro do ruído-branco, em que a banda de frequências se estende desde 0 até ∞ , mantendo-se constante o valor da densidade espectral, figura A1-1.11.1. O valor médio quadrático de um processo de ruído branco é então infinito pelo que tal processo é apenas um conceito teórico. Porém, em termos práticos, considera-se que um espectro é de ruído branco de banda limitada quando abrange frequências com preendidas entre dois valores finitos ω_1 e ω_2 .

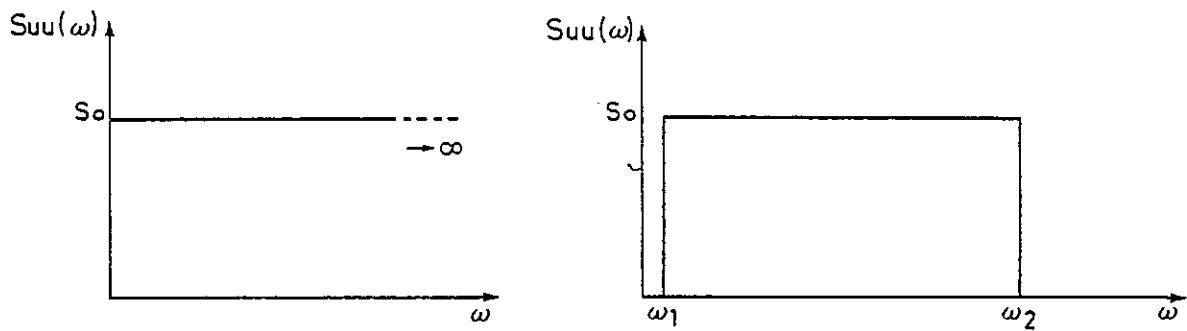


Fig. A1-1.11.1 - Espectros de ruído-branco

A função de autocorrelação e a função densidade espectral correspondentes ao ruído-branco são respectivamente dadas por:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \exp(i \omega \tau) d\omega = 2 \pi S_0 \delta(\tau)$$

$$S_{uu}(\omega) = S_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \pi S_0 \delta(\tau) \exp(-i \omega \tau) d\tau$$

em que $\delta(\tau)$ é a função delta de Dirac, para $\tau = 0$.

A função delta de Dirac, $\delta(\tau - t)$, é nula em toda a parte excepto em $\tau = t$ onde tem valor infinito. Além disso verifica a condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t) d\tau = 1 \quad \text{e portanto} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t) f(\tau) d\tau = f(\tau = t)$$

em que $f(\tau)$ é qualquer função contínua.

1.12 - O Espectro Direccional na Agitação Marítima

O espectro unidimensional não fornece qualquer informação a respeito da distribuição direccional das ondas. Tal informação pode obter-se do espectro direccional onde é especificada a variância da agitação marítima (p.e. $\eta(t)$)

em função da frequência e direcção de propagação. A figura A1-1.12.1 mostra uma representação tridimensional de um espectro direccionado $S_{\eta\eta}(\omega, \theta)$. Tal espectro tem a propriedade de a quantidade

$$S_{\eta\eta}(\omega, \theta) \Delta\omega \Delta\theta$$

representar a contribuição para a variância do p.e. dada pelas ondas na banda de frequências $\Delta\omega$ e na banda de direcções $\Delta\theta$. A variância do p.e. $\eta(t)$ é então dada por

$$\sigma_{\eta\eta}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\eta}(\omega, \theta) d\omega d\theta$$

É prática corrente, na formulação do espectro direccionado, separar os efeitos da frequência e direcção angular, isto é, fazer

$$S_{\eta\eta}(\omega, \theta) = S_{\eta\eta}(\omega) D(\theta)$$

em que $S_{\eta\eta}(\omega)$ é a função densidade espectral unidimensional e $D(\theta)$ é a função de direccionalidade. Têm sido sugeridas várias expressões analíticas para a função de direccionalidade, umas mais elaboradas do que outras.

Para um estado de mar de crista-longa toda a energia das ondas se propaga na direcção $\bar{\theta}$. Neste caso a função de direccionalidade pode ser dada por

$$D(\theta) = \delta(\bar{\theta} - \theta) \quad -\pi < (\bar{\theta} - \theta) < +\pi$$

em que δ representa a função delta de Dirac.

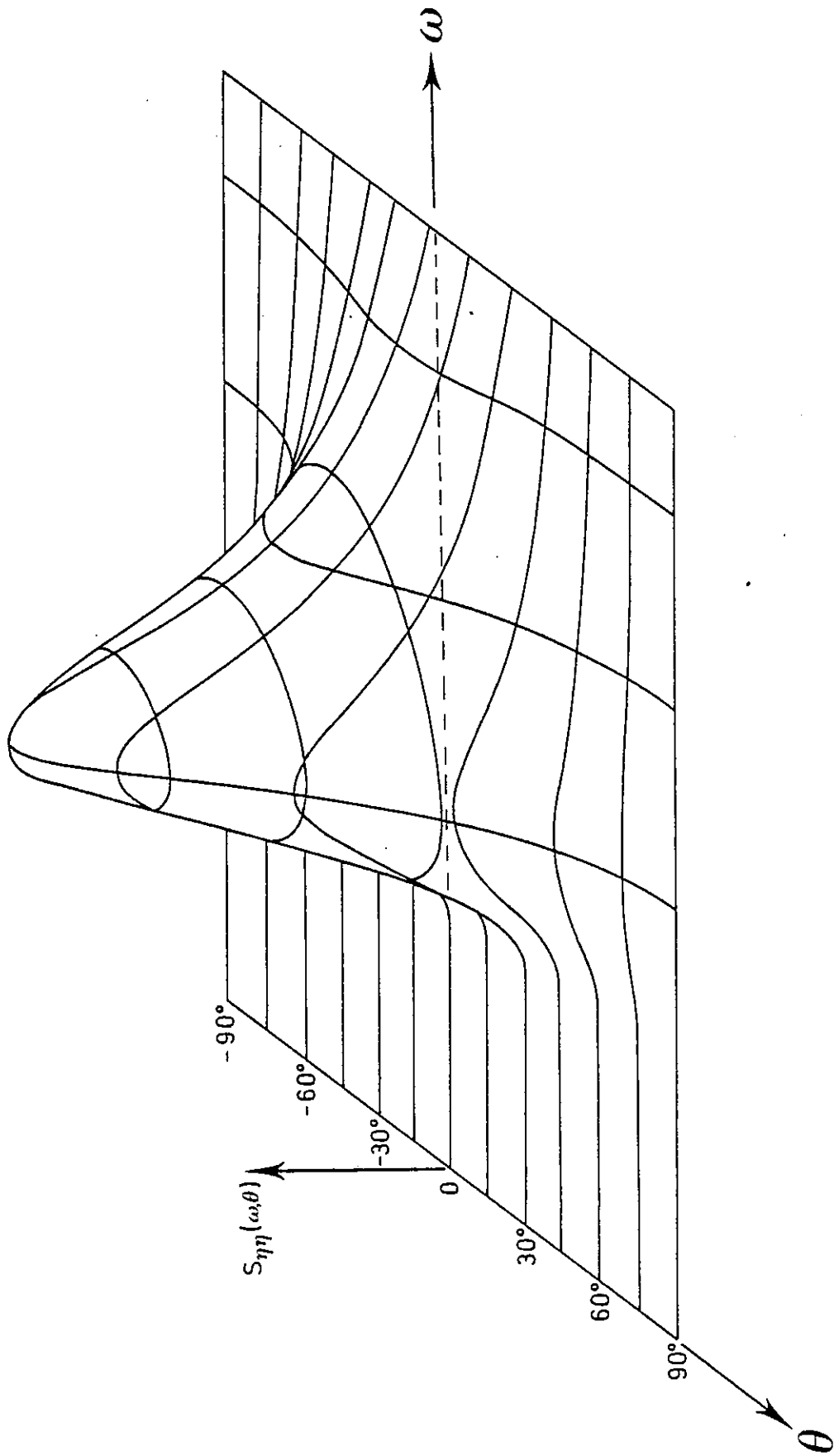


Fig. A1-1.12.1 - Espectro direccional



ANEXO 2 - COMPOSIÇÃO VECTORIAL DE ONDAS DE PEQUENA AMPLITUDE

2.1 - Representação Vectorial

Como ficou estabelecido no parágrafo 4.3.2.1.2.3, o perfil de uma onda de pequena amplitude, progressiva no sentido positivo de x é descrito por:

$$\xi = \frac{H}{2} \cos(\omega t - Kx + \delta) = a \cos(\theta)$$

em que δ é um ângulo determinado, $a = H/2$ é a amplitude e θ é a fase da onda.

A representação do perfil da onda, ξ , pode então ser feita por um vector de comprimento a , sendo ξ a projecção desse vector num eixo que com ele faça um ângulo $\theta = \omega t - Kx + \delta$.

Por conveniência, ξ escreve-se na forma complexa com módulo (comprimento) a e argumento (fase) θ :

$$\xi = \text{Parte Real} \{ a e^{i\theta} \} = \text{Parte Real} \{ a \cos(\theta) + i \sin(\theta) \}$$

em que $i = \sqrt{-1}$. Por simplificação de escrita escreve-se simplesmente

$$\xi = a e^{i\theta}$$

considerando para resultado final apenas a parte real, como mostra a figura A2-1.1.1.

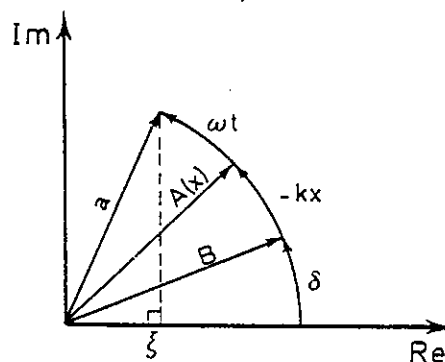


Fig. A2.1.1.1 - Representação vectorial de uma onda de pequena amplitude

A figura A2-1.1.1 mostra ainda dois casos especiais de representação da onda da:

No primeiro caso pretende-se isolar a variação no tempo e o perfil da onda escreve-se:

$$\xi = a e^{i(\omega t - kx + \delta)} = a e^{i(-kx + \delta)} e^{i\omega t} = A(x) e^{i\omega t}$$

em que a amplitude $A(x) = a e^{i(-kx + \delta)}$ é complexa.

No segundo caso pretende-se realçar que a onda é progressiva e escreve-se então:

$$\xi = a e^{i(\omega t - kx + \delta)} = a e^{i\delta} e^{i(\omega t - kx)} = B e^{i(\omega t - kx)}$$

em que a amplitude $B = a e^{i\delta}$ é também complexa.

Qualquer dos casos anteriores resulta das propriedades dos números complexos. Em particular, recorda-se, que a multiplicação do número complexo $(a + ib)$ pela exponencial complexa $e^{i\beta}$ corresponde a rodar o vector $(a + ib)$ de um ângulo β , como se pode ver pela seguinte relação:

$$(a + ib) e^{i\beta} = \sqrt{a^2 + b^2} [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$

em que $\alpha = \arctg(b/a)$ é o argumento de $(a + ib)$.

Esta representação é evidentemente válida para o caso geral de uma onda que se propaga numa direcção qualquer do plano horizontal.

2.2 - Composição

Considerem-se duas ondas de pequena amplitude com potenciais, respectivamente Φ_1 e Φ_2 .

Tendo em conta que todas as condições de fronteiras são lineares e que a equação da propagação do movimento ondulatório, equação de Laplace, é também li

near, mostra-se que

$$\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2$$

é também solução da equação de Laplace. Quanto ao perfil da onda, a condição dinâmica da superfície livre permite estabelecer que

$$\xi_S = \xi_1 + \xi_2$$

A composição vectorial de duas ondas ξ_1 e ξ_2 pode então fazer-se com base no exposto no parágrafo 1.1:

$$\xi_S = \xi_1 + \xi_2 = a_S \cos(\theta_S)$$

com

$$a_S = |\xi_S| = a_1 \cos(\theta_S - \theta_1) + a_2 \cos(\theta_2 - \theta_S)$$

$$\text{tang}(\theta_S) = \frac{\text{Im}(\xi_S)}{\text{Re}(\xi_S)} = \frac{a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_2)}{a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2)}$$

A figura A2-1.2.1 mostra um diagrama da composição vectorial das referidas ondas, ξ_1 e ξ_2 .

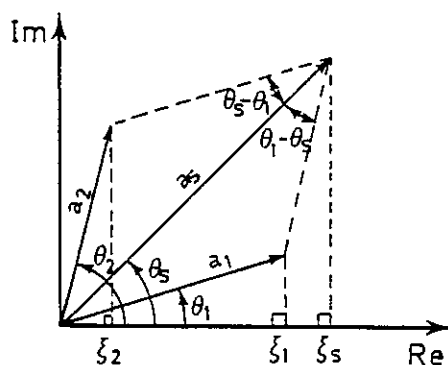


Fig. A2.1.2.1 - Composição vectorial de duas ondas, ξ_1 e ξ_2

Num caso geral, a composição de n ondas progressivas em direcções arbitrárias e com o mesmo período escreve-se:

$$\xi_S = e^{i\omega t} \sum_{j=1}^m a_j e^{i\theta_j(x,y)}$$

A representação vectorial de ξ_S num dado ponto permite descrever o perfil da onda como sendo a projecção de um vector de comprimento constante que roda com a velocidade ω .

A título de exemplo apresenta-se em seguida a composição de duas ondas progressivas no mesmo sentido e com o mesmo período:

$$\xi_1 = a_1 e^{i\theta_1} = a_1 e^{i\delta_1} e^{i(\omega t - Kx)}$$

$$\xi_2 = a_2 e^{i\theta_2} = a_2 e^{i\delta_2} e^{i(\omega t - Kx)}$$

$$\xi_S = \xi_1 + \xi_2 = (a_1 e^{i\delta_1} + a_2 e^{i\delta_2}) e^{i(\omega t - Kx)}$$

Esta expressão põe em evidência que o vector soma ξ_S roda na mesma direcção e com a mesma velocidade angular ω dos vectores ξ_1 e ξ_2 , ou seja ξ_S representa uma onda progressiva na mesma direcção de ξ_1 e de ξ_2 .

O vector ξ_S pode exprimir-se de outro modo:

$$\xi_S = \xi_1 + \xi_2 = a_S e^{i(\omega t - Kx + \delta_S)}$$

com

$$a_S = [a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)]^{1/2}$$

$$\delta_S = \text{arc tang} \frac{a_1 \sin(\delta_1) + a_2 \sin(\delta_2)}{a_1 \cos(\delta_1) + a_2 \cos(\delta_2)}$$

Esta expressão põe em evidência que o vector soma ξ_s tem amplitude constante no espaço e no tempo, ou seja, que a onda tem perfil constante.

Em qualquer dos casos verifica-se que para um acréscimo no espaço de $dx = c dt$ correspondente a um acréscimo no tempo igual a dt , o vector ξ_s permanece constante. Isto significa que a onda soma tem perfil constante e que se propaga com a velocidade de fase $c = \omega/k$ no sentido positivo de x .

A figura A2-1.2.2 mostra a representação da onda $\xi_s = \xi_1 + \xi_2$ num instante particular.

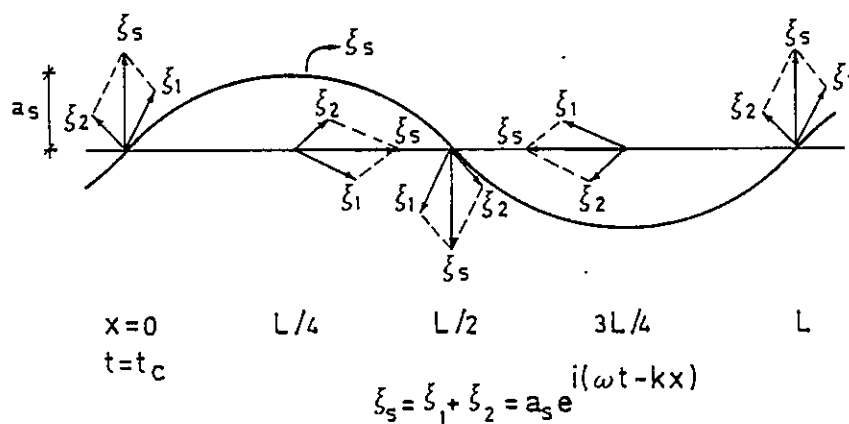


Fig. A2-1.2.2 - Soma de duas ondas progressivas no mesmo sentido, num determinado instante t_c



ANEXO 3 - FOLHA DE DADOS

3.1 - Preenchimento de Dados

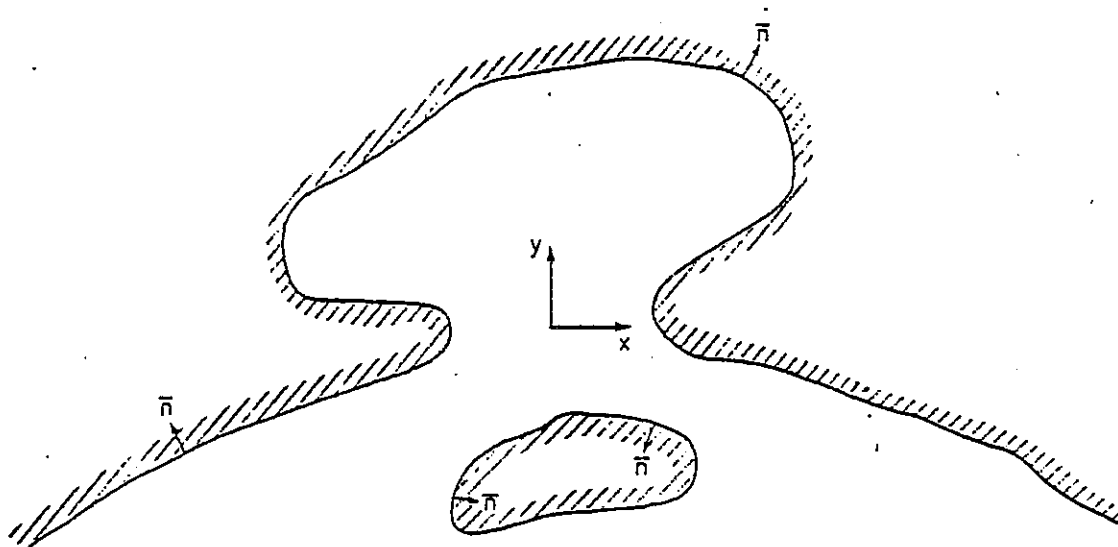
O preenchimento de dados para execução do programa DROP obedecem a uma série de convenções que seguidamente se apresentam nas folhas de dados.

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO DE ONDAS PLANAS * ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS * PRÉ-PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____
	REQUERENTE _____
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº <u> 1 </u>	

CONVENÇÕES

DOMÍNIOS DE APLICAÇÃO

A geometria do problema em estudo pode ser do tipo porto, do tipo ilha, ou no caso mais geral do tipo misto.



ESQUEMA TÍPICO DA GEOMETRIA DO PROBLEMA

\bar{n} - Vector unitário normal à fronteira e dirigido para o exterior do domínio do problema.

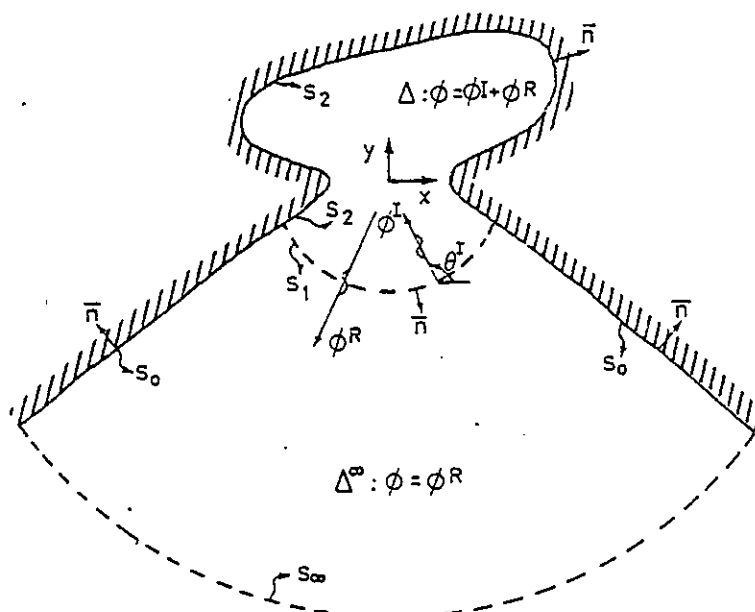
x, y - Referencial ortonormado colocado no nível médio de repouso, plano x, y , e origem no centro de dispersão.

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS -PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____
	REQUERENTE _____
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 2	

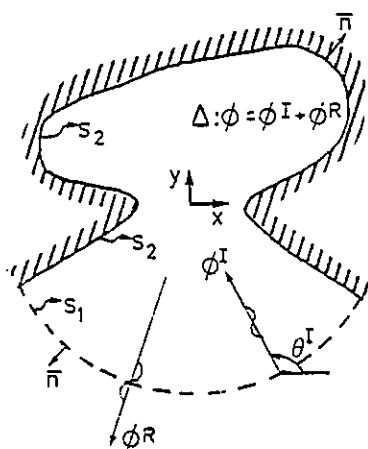
CONVENÇÕES

FORMULAÇÃO

O problema pode ser formulado com elementos infinitos ou com elementos de radiação. No primeiro caso o domínio do problema é constituído por uma região interior, Δ , e por uma região exterior, Δ^∞ , enquanto que no segundo caso o referido domínio do problema é constituído apenas por uma região interior, Δ .



FORMULAÇÃO DO PROBLEMA COM ELEMENTOS INFINITOS



FORMULAÇÃO DO PROBLEMA COM ELEMENTOS DE RADIAÇÃO

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS -PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____
	REQUERENTE _____
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 3	

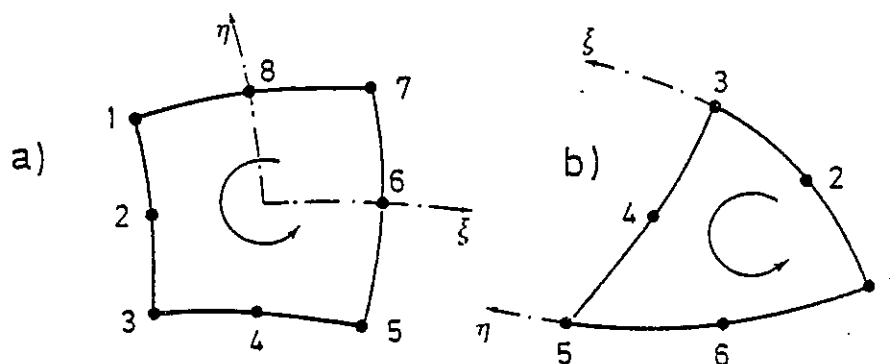
CONVENÇÕES

FORMULAÇÃO

- Δ - Domínio interior - com profundidade variável ou, não.
- Δ^e - Domínio exterior - com profundidade constante.
- S_0 - Fronteira sólida do domínio exterior - fronteira de reflexão.
- S_1 - Fronteira líquida do domínio interior, ou de transição para o domínio exterior - fronteira de radiação.
- S_2 - Fronteira sólida do domínio interior - fronteira de reflexão.
- S_∞ - Fronteira líquida do domínio exterior.
- θ^i - Ângulo de incidência da onda incidente.
- ϕ^i - Função potencial da onda incidente.
- ϕ^R - Função potencial da onda de dispersão.
- ϕ - Função potencial total.

DISCRETIZAÇÃO

O domínio interior, Δ , é discretizado com elementos finitos isoparamétricos triangulares de 6 nós e/ou rectangulares de 8 nós. O domínio exterior, Δ^e , é discretizado com elementos infinitos rectangulares lagrangeanos de 9 nós. A fronteira S_0 é discretizada com elementos infinitos de 3 nós. As fronteiras S_1 e S_2 são discretizadas com elementos finitos isoparamétricos de 3 nós.



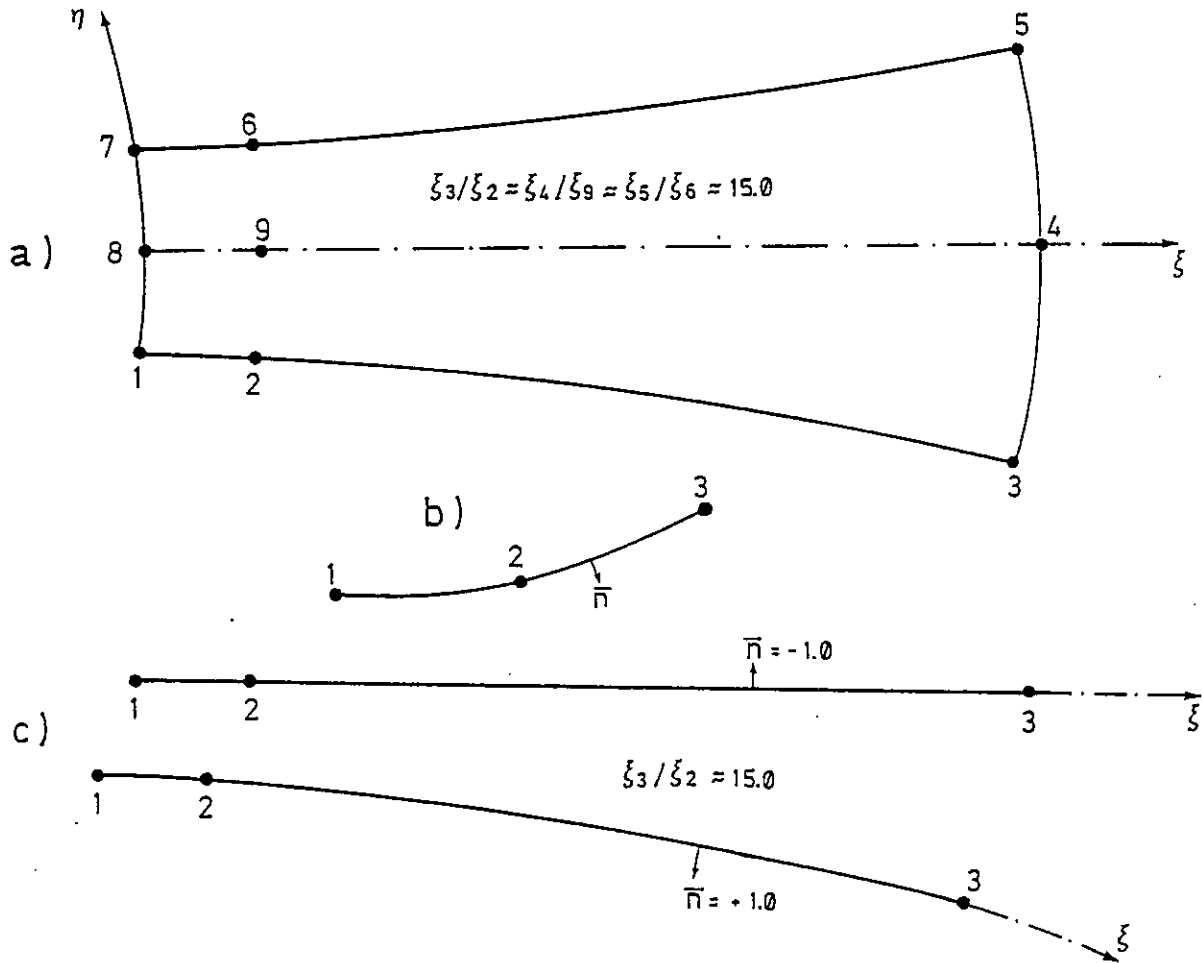
NUMERAÇÃO LOCAL DOS NÓS DOS ELEMENTOS

a) ELEMENTO RECTANGULAR

b) ELEMENTO TRIANGULAR

A numeração local dos nós começa num canto qualquer e prossegue no sentido directo.

CONVENÇÕES DISCRETIZAÇÃO



NUMERAÇÃO LOCAL DOS NÓS DOS ELEMENTOS

- a) ELEMENTO INFINITO - A numeração local dos nós é fixa de acordo com o esquema indicado. Proporções aconselháveis: $\xi_3/\xi_2 = 15$, $\xi_4/\xi_9 = 15$, $\xi_5/\xi_6 = 15$.
- b) ELEMENTO FINITO DA FRONTEIRA S_1/S_2 - A numeração local dos nós começa num dos nós extremos, de tal modo que a normal exterior fique dirigida para o lado direito do sentido de numeração crescente.
- c) ELEMENTO INFINITO DA FRONTEIRA S_0 - A numeração local dos nós começa no nó pertencente à fronteira S_1 . A normal exterior, \bar{n} , toma os valores $+1.0$ ou -1.0 , consoante ficar dirigida para o lado direito ou para o lado esquerdo do sentido de numeração crescente. Proporção aconselhável: $\xi_3/\xi_2 = 15$.

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROPS * DIFRACÇÃO ANÁLISE PELO MÉTODO PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____
	REQUERENTE _____
	REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº <u>5</u>

CONVENÇÕES

UNIDADES DE MEDIDA

[L] - metros.

[T] - segundos.

[ω] - radianos por segundo.

[θ] - graus.

PARÂMETROS INTEIROS DE CONTROLE GERAL

NOS - número total de nós da malha de elementos finitos.

NELI - número de elementos infinitos.

NELR - número de elementos rectangulares de 8 nós.

NELT - " " " triangulares de 6 nós.

NELS1 - " " " da fronteira S_1 .

NELS2 - " " " da fronteira S_2 .

NELS0 - " " " da fronteira S_0 .

PARÂMETROS INTEIROS DE CONTROLE DA SOLICITAÇÃO

NR - número de rumos.

NT - número de ondas em cada rumo.

IAI - controle da amplitude da solicitação.

IAI=0 - amplitude igual para todas as ondas.

IAI=1 - amplitude diferente para todas as ondas.

ITF - controle do domínio de definição da solicitação.

ITF=0 - domínio do tempo, período.

ITF=1 - domínio da frequência, frequência angular $\omega = 2\pi/T$.

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO DE ONDAS PLANAS * ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS * PRÉ-PROCESSAMENTO		
	ESTUDO _____		
	REFERENTE _____		
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____		DATA _____	FOLHA Nº <u>5</u>

CONVENÇÕES

PARÂMETROS REAIS DE CONTROLE DOS DESENHOS

OLX, OLY - espaço alocacionado para cada desenho nas direcções ortogonais X e Y do traçador de gráficos. Dimensões em centímetros.

OX, OY - coordenadas da origem do referencial do protótipo no referencial gráfico OLX, OLY. Dimensões em centímetros.

DESENHOS DA MALHA

ESC - escala do desenho da malha (1:ESC).

ESC=0.0 - são calculados automaticamente os parâmetros OX, OY e ESC.

B - constante para o desenho da malha com elementos separados.

PRESPECTIVAS

As coordenadas do protótipo são definidas num referencial directo (x,y,z) em que o plano (x,y) contém o nível médio de repouso. Após duas rotações do protótipo, ALF° em torno de Z e BET° em torno de x (já rodado), este é projectado no plano (x,y).

ISOLINHAS

INCR - incremento das isolinhas no desenho da batimetria.

INCR=0.0 - não é executado o desenho das isolinhas da batimetria.

FICHEIRO FOR 01.DAT

REFERÊNCIA DO CÁLCULO

PARÂMETROS INTEIROS DE CONTROLE GERAL

NOS	NELI	NELR	NELT	NELS1	NELS2	NELS0

PARÂMETROS INTEIROS DE CONTROLE DA SOLICITAÇÃO

NR	NT	IAI	ITF

PARÂMETROS REAIS DE CONTROLE DOS DESENHOS

OLX	OLY	OX	OY	ESC
B	ALF	BET	INCR	

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO PRÉ-PROCESSAMENTO DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS *
	ESTUDO _____
	REQUERENTE _____
	REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº <u>7</u>

CONVENÇÕES

TABELA DOS NÓS

A tabela dos nós é dada por ordem crescente da numeração global dos nós.

NO - numeração global do nó.

X,Y - coordenadas globais do nó.

H - profundidade do nó.

TABELA DOS NÓS

NO	X	Y	H

M.O.P.
L.N.E.C.
DEPARTAMENTO
DE HIDRÁULICA
NÚCLEO DE ESTUÁRIOS

DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ-
DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO

ESTUDO _____
REQUERENTE _____
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 8

TABELA DOS NÓS

NO	X	Y	H

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROR * DIFRACÇÃO DE ONDAS PLANAS * ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS * PRÉ-PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____
	REQUERENTE _____
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 9	

CONVENÇÕES

TABELA DOS ELEMENTOS FINITOS

A tabela dos elementos finitos é formada por grupos de elementos do mesmo tipo sendo estes introduzidos por qualquer ordem.

NGE - número de diferentes tipos de elementos presentes na malha.

NE - número de elementos de um determinado tipo.

NNO - tipo de elemento.

NNO=30 - elemento infinito da fronteira S0.

NNO=31 - elemento finito da fronteira S1.

NNO=32 - elemento finito da fronteira S2.

NNO=36 - elemento finito triangular de 6 nós.

NNO=38 - elemento finito rectangular de 8 nós.

NNO=39 - elemento infinito de 9 nós.

RFLE - coeficiente de reflexão para os elementos de S0 e de S2.

VNE - versor normal exterior para os elementos de S0.

TABELA DOS ELEMENTOS FINITOS

NGE

TABELA DOS ELEMENTOS DA FRONTEIRA S0

NE

NNO

NÓ1

NÓ2

NÓ3

RFLE

VNE

TABELA DOS ELEMENTOS DA FRONTEIRA S1

NE

NNO

NÓ1

NÓ2

NÓ3

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ - DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO		
	ESTUDO _____		
	REQUERENTE _____		
	REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____		DATA _____ FOLHA Nº 11

TABELA DOS ELEMENTOS DA FRONTEIRA S2

NE		NNO	
NÓ1	NÓ2	NÓ3	RFLE

<p>M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS</p>	<p>DROP * DIFO-REFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO</p> <p>ESTUDO _____</p> <p>REQUERENTE _____</p> <p>REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 12</p>		
TABELA DOS ELEMENTOS DA FRONTEIRA S2			
NÓ1	NÓ2	NÓ3	RFLE

<p>M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS</p>	<p>DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO</p>
	<p>ESTUDO _____</p>
	<p>REQUERENTE _____ REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 13</p>

TABELA DOS ELEMENTOS TRIANGULARES DE 6 NÓS

NE			NNO		
NÓ1	NÓ2	NÓ3	NÓ4	NÓ5	NÓ6

M.O.P.
L.N.E.C.
DEPARTAMENTO
DE HIDRÁULICA
NÚCLEO DE ESTUÁRIOS

DROP * DIFO - REFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ -
DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO

ESTUDO _____
REQUERENTE _____
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 14

TABELA DOS ELEMENTOS TRIANGULARES DE 6 NÓS

NÓ1	NÓ2	NÓ3	NÓ4	NÓ5	NÓ6

<p>M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS</p>	<p>DROP * DIFO-REFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS *-PROCESSAMENTO</p>		
	<p>ESTUDO _____</p>		
	<p>REQUERENTE _____</p>		
<p>REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº <u>15</u></p>			

TABELA DOS ELEMENTOS RECTANGULARES DE 8 NÓS

NE				NNO			
NÓ1	NÓ2	NÓ3	NÓ4	NÓ5	NÓ6	NÓ7	NÓ8

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFO-REFRAÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS *-PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____
	REQUERENTE _____
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 16	

TABELA DOS ELEMENTOS RECTANGULARES DE 8 NÓS

NÓ1	NÓ2	NÓ3	NÓ4	NÓ5	NÓ6	NÓ7	NÓ8

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO ANÁLISE PELO MÉTODO PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____ REQUERENTE _____ REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 17

TABELA DOS ELEMENTOS INFINITOS DE 9 NÓS

NE					NNO			
----	--	--	--	--	-----	--	--	--

NÓ1	NÓ2	NÓ3	NÓ4	NÓ5	NÓ6	NÓ7	NÓ8	NÓ9

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____ _____
	REQUERENTE _____ REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 18

TABELA DOS ELEMENTOS INFINITOS DE 9 NÓS

NÓ1	NÓ2	NÓ3	NÓ4	NÓ5	NÓ6	NÓ7	NÓ8	NÓ9

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO		
	ESTUDO _____		
	REQUERENTE _____		
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____		DATA _____	FOLHA Nº 19

CONVENÇÕES

PARÂMETROS DE CONTROLE DO ATRITO DE FUNDO

IATRF - controle do atrito de fundo.

IATRF=1 - cálculo com atrito de fundo.

IATRF=0 - cálculo sem atrito de fundo.

CRUG - coeficiente de rugosidade do fundo, (Chezy - Bazin).

CRUG=0.0 - não são calculadas velocidades.

CRUG>0.0 - são calculadas velocidades.

Um cálculo com atrito de fundo pressupõe a existência de um ficheiro com as velocidades. Tais velocidades podem ser calculadas através de um cálculo inicial sem atrito de fundo e com CRUG>0.0.

PARÂMETROS DE CONTROLE DO ATRITO DE FUNDO

IATRF

CRUG

SOLICITAÇÕES

AI - amplitude das ondas incidentes.

IAI - ver folha nº 5.

TETA I - ângulo de incidência das ondas incidentes, um para cada rumo local.

T1, T2 - valores extremos dos períodos (se ITF=0) ou das frequências (se ITF=1) entre os quais são geradas NT ondas, caso NT>1.

T1 - período (se ITF=0) ou frequência (se ITF=1) da solicitação, caso NT=1.

SE IAI=0

AI

TETA I (1)	TETA I (2)	TETA I (3)	TETA I (4)	TETA I (5)	TETA I (6)	TETA I (7)	TETA I (8)	TETA I (9)
------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------

ESCREVER NA CONTINUAÇÃO DA LINHA ANTERIOR

TETA I (10)	TETA I (11)	TETA I (12)	TETA I (13)	TETA I (14)	TETA I (15)	TETA I (16)	TETA I (NR)
-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------	-------------

<p style="text-align: center; margin: 0;">M.O.P. L.N.E.C.</p> <p style="text-align: center; margin: 0;">DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA</p> <p style="text-align: center; margin: 0;">NÚCLEO DE ESTUÁRIOS</p>	<p style="text-align: center; margin: 0;">DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO</p>									
	<p>ESTUDO _____</p>									
	<p>REQUERENTE _____</p> <p>REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº <u>20</u></p>									
SE $ AI = 1$										
TETA I (1)										
AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)
TETA I (2)										
AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)
TETA I (3)										
AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)
TETA I (4)										
AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)
TETA I (5)										
AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)
TETA I (6)										
AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)

<p>M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS</p>	<p>DROP * DIFRACÇÃO DE ONDAS PLANAS * ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS * PRÉ-PROCESSAMENTO</p>
<p>ESTUDO _____</p>	
<p>REQUERENTE _____</p>	
<p>REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº <u>21</u></p>	

TETA I (7)

AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)

TETA I (8)

AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)

TETA I (...)

AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)

TETA I (NR)

AI (1)	AI (2)	AI (3)	AI (4)	AI (5)	AI (6)	AI (7)	AI (8)	AI (9)	AI (NT)

SE NT > 1

T1	T2

SE NT = 1

T1

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROPS * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PRÉ- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO		
	ESTUDO _____		
	REQUERENTE _____		
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____		DATA _____	FOLHA Nº 22

CONVENÇÕES

OUTROS PARÂMETROS

HINF - profundidade ao largo.

IONDA - controle da teoria de onda a utilizar.

IONDA=1 - teoria de onda de pequena profundidade relativa.

IONDA=2 - teoria de onda de profundidade relativa intermédia.

TOL - tolerância para o cálculo do número de onda, K, na relação de dispersão $\omega^2 = gK \tanh Kh$.

HINF	IONDA	TOL

RESULTADOS

Os dados verificados são armazenados no ficheiro FOR03.DAT.

Os dados preparados para o segundo nível são armazenados no ficheiro FOR02.DAT.

Para a execução do segundo nível são necessários os ficheiros:

FOR01.DAT, FOR02.DAT, FOR03.DAT - mensagens de execução,
FOR04.DAT - potenciais, FOR05.DAT - velocidades, FOR06.DAT e
FOR07.DAT temporários.

Para a execução do terceiro nível são necessários os ficheiros:

FOR01.DAT, FOR02.DAT, FOR03.DAT - mensagens de execução e
resultados numéricos, FOR04.DAT, FOR05.DAT, FOR08.DAT - dados
para o terceiro nível.

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP *	DIFRACÇÃO DE ONDAS PLANAS *	ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS *	PÓS- PROCESSAMENTO
	ESTUDO _____	_____		
	REQUERENTE _____	_____		
REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____		DATA _____	FOLHA Nº 23	

CONVENÇÕES

TIPOS DE DESENHOS

Podem realizar-se três tipos de desenhos:

- desenhos que dizem respeito a toda a malha de elementos finitos e apenas a uma solicitação (onda) - alturas de onda, deslocamentos horizontais e elevação da superfície livre.
- desenhos que dizem respeito a todas as solicitações e apenas a um nó da malha de elementos finitos - espectro direccional de resposta ao ruído branco.
- desenhos que dizem respeito a um nó da malha de elementos finitos e a todas as solicitações de um rumo - curvas de resposta.

PARÂMETROS INTEIROS DE CONTROLE GERAL

NNR - número de nós em que se quer o traçado do espectro direccional e das curvas de resposta.

NNW - número de solicitações em que se quer desenhos em toda a malha.

OUTROS PARÂMETROS

NOSC - RECTA ou NÃO RECTA, identificação do tipo da fronteira S0. Parâmetro para controle do coeficiente de amplificação.

NOR(1-NNR) - numeração global dos nós em que se quer o traçado do espectro direccional e das curvas de resposta.

TMIN, TMAX - valores extremos para graduação das frequências do espectro. A diferença (TMAX-TMIN) deve ser múltipla de 8.

VARMAX - valor extremo para graduação das variâncias. Deve ser múltiplo de 6.

IDT(1-NNW) - número de ordem das solicitações para as quais se quer desenhos em toda a malha.

IDP(1,1-NNW) - INCR, incremento das isolinhas no traçado das alturas de onda. Se INCR=0, não são desenhadas as isolinhas das alturas de onda.

IDP(2,1-NNW), IDP(3,1-NNW) - ângulos de rotação, respectivamente ALF e BET referidos na folha nº 6, para traçado da perspectiva da elevação da superfície livre. Se ALF=BET=0, não é traçado esta perspectiva.

IDP(4,1-NNW) - escala para o traçado dos deslocamentos horizontais (1:EC). Se EC=0, não são traçados os deslocamentos horizontais.

M.O.P. L.N.E.C. DEPARTAMENTO DE HIDRAULICA NÚCLEO DE ESTUÁRIOS	DROP * DIFRACÇÃO * ANÁLISE PELO MÉTODO * PÓS- DE ONDAS PLANAS * DOS ELEMENTOS FINITOS * -PROCESSAMENTO				
	ESTUDO _____ _____				
	REQUERENTE _____ REFERÊNCIA DO CÁLCULO _____ DATA _____ FOLHA Nº 24				
FICHEIRO FOR08.DAT					
PARÂMETROS INTEIROS DE CONTROLE GERAL					
NNR		NNW			
OUTROS PARÂMETROS					
NOSC					
(i)	NOR(i)				
(1)					
(2)					
(3)					
...					
(NNR)					
TMIN		TMAX		VARMAX	
(j)	IDT(j)	IDP(1,j)	IDP(2,j)	IDP(3,j)	IDP(4,j)
(1)					
(2)					
(3)					
...					
(NNW)					

