

**UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**



**AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO  
EM SISTEMAS COMPLEXOS LINEARES  
E NÃO-LINEARES**

**Álvaro Silva Ribeiro**

Assistente de Investigação do  
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

**DOUTORAMENTO EM FÍSICA**  
(Especialidade: Física Tecnológica)

Tese orientada por:

**Engenheiro Carlos António de Oliveira Costa**  
**Professor Doutor João Augusto Sousa Lopes**

Tese elaborada no Laboratório Nacional de Engenharia Civil  
e submetida para obtenção do Grau de Doutor em Física pela  
Universidade de Lisboa

2006



## RESUMO

---

A perspectiva contemporânea da Metrologia evoluiu de uma interpretação clássica, determinística, do problema da medição para uma interpretação moderna, probabilística, percorrendo um trajecto similar ao de outros ramos da ciência.

Como consequência desta evolução, os fundamentos da medição sofreram uma importante re-estruturação onde ao “erro da medição” apenas ficou reservado um papel conceptual enquanto que à “incerteza da medição” foi atribuído o papel fundamental de parâmetro que quantifica o grau de exactidão da estimativa da mensuranda.

Esta nova orientação reflecte-se, com particular intensidade, nas actividades desenvolvidas pelos organismos de ciência e tecnologia onde o recurso à medição experimental é uma actividade de natureza transversal. Por esta razão, e pelo menos para estes Organismos, os estudos que visem uma aplicação mais eficaz e abrangente de metodologias para avaliação de incertezas de medição revestem-se de particular interesse.

Os Sistemas de Gestão da Qualidade, em rápida expansão, deram à problemática da avaliação das incertezas uma grande visibilidade o que, por sua vez, teve como reflexo uma rápida percepção das limitações e fragilidades da metodologia vigente (GUM). Esta percepção estimulou o estudo e desenvolvimento de soluções alternativas ao GUM para a avaliação das incertezas de medição. A simulação numérica suportada no Método de Monte Carlo (MCS) é uma das soluções alternativas consideradas.

No momento actual, os meios computacionais amplamente disponíveis e o vasto conhecimento acumulado sobre a MCS criaram as condições para que esta abordagem possa ser considerada capaz de colmatar as dificuldades existentes.

É neste enquadramento que a presente tese procura explorar e aprofundar o conhecimento da metodologia MCS visando superar limitações na avaliação de incertezas de medição onde elas subsistem ou incrementar a qualidade dos resultados, designadamente, em sistemas complexos lineares e não lineares. São de destacar: o estudo das limitações associadas aos requisitos de aplicação das metodologias vigentes (nomeadamente, o ISO-GUM); a caracterização das condições de aplicação da simulação pelo método de Monte Carlo em Metrologia garantindo níveis de robustez, exactidão e fiabilidade elevados; e a evidenciação do potencial da metodologia MCS para a avaliação de incertezas de medição em problemas metrológicos onde as metodologias conhecidas não dispõem de capacidade para a sua resolução, nomeadamente quando os modelos matemáticos em causa possuem relações implícitas, são de natureza complexa ou são fortemente não-lineares.

*Palavras-chave:* Metrologia, Medição, Incertezas de medição, Método de Monte Carlo, Gerador de números pseudo-aleatórios.



## ABSTRACT

---

The modern, probabilistic, approach in Metrology has been developed from a classical, deterministic, view of the measurement problem in a way similar to that performed by other branches of science.

This development changed the measurement concepts and fundamentals of Metrology Theory, reorganizing it in a new structure where “measurement error” has a conceptual role while “measurement uncertainty” has a major role in the expression of measurement result, being considered as the parameter that gives the measurand accuracy degree.

This new interpretation became of particular importance on R&D organisations where scientific studies are supported by experimental activity, widely spread in science and technology. Therefore, the interest is increasing on these type of studies, aiming at the development of the knowledge related with methodologies for uncertainty evaluation, allowing better performance and extending their use.

The Quality Management Systems have highlighted this approach and were responsible for the quick perception of the GUM bounds and constraints and, gave the opportunity to the establishment of a new priority: the study of other methodologies to perform the evaluation of measurement uncertainty. In order to provide an answer to this challenge, a numerical simulation based on Monte Carlo method (MCS) has been proposed.

Nowadays, the computational resources available and a well established knowledge allow that this new approach to the problem to be truly considered as an alternative. It is within this perspective that this thesis seeks to achieve a deeper knowledge on the use of MCS in measurement uncertainty evaluation, trying to overcome the actual bounds where they prevail or, simply, to achieve a higher degree of Quality in the measurement results, specially, in the treatment of complex linear and nonlinear systems. Special attention was given to the following subjects: the study of the intrinsic limitations of the used methodologies (e.g., the ISO-GUM); the characterisation of the conditions that assure the robustness, accuracy and reliability of the application of Monte Carlo method in Metrology; and the evidence of the Monte Carlo method ability to solve measurement uncertainty evaluation problems where the established methodologies do not provide solutions, namely, when the mathematical models have implicit relations, are complex or strongly nonlinear.

*Keywords:* Metrology, Measurement, Measurement uncertainty, Monte Carlo Method, Pseudo-random numbers generator.



*À Maria João, à Inês, à Catarina  
e aos meus Pais*





## **I. ÍNDICE GERAL**

---

<b>II. SIMBOLOGIA .....</b>	<b>ix</b>
<b>III. ÍNDICE DE MATÉRIAS .....</b>	<b>xv</b>
<b>IV. ÍNDICE DE SIGLAS .....</b>	<b>xix</b>
<b>V. ÍNDICE DE FIGURAS .....</b>	<b>xxi</b>
<b>VI. ÍNDICE DE QUADROS .....</b>	<b>xxv</b>
<b>VII. AGRADECIMENTOS .....</b>	<b>xxvii</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2. UMA PERSPECTIVA DA METROLOGIA .....</b>	<b>11</b>
<b>3. SISTEMAS DE MEDIÇÃO E A SUA CARACTERIZAÇÃO .....</b>	<b>37</b>
<b>4. FUNDAMENTOS DA ESTATÍSTICA E DA TEORIA DAS PROBABILIDADES APLICADOS EM METROLOGIA .....</b>	<b>77</b>
<b>5. ESTADO DOS CONHECIMENTOS .....</b>	<b>121</b>
<b>6. MÉTODO DE MONTE CARLO .....</b>	<b>137</b>
<b>7. AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO .....</b>	<b>189</b>
<b>8. ESTUDO COMPARATIVO DE AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS USANDO O GUM E A MCS .....</b>	<b>247</b>
<b>9. ESTUDOS COMPLEMENTARES DE AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS EVIDENCIANDO O POTENCIAL DA MCS .....</b>	<b>303</b>
<b>10. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE EVOLUÇÃO FUTURA .....</b>	<b>331</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>343</b>
<b>ANEXOS</b>	



## II. SIMBOLOGIA

---

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$a$	Valor extremo de uma distribuição de probabilidade
$a$	Multiplicador de um gerador congruencial
$A$	Valor verdadeiro da grandeza mensurável
$\tilde{A}$	Valor observado na medição
$\hat{A}$	Valor de referência da grandeza mensurável
$A_0$	Área efectiva a pressão nula (unidade: m <sup>2</sup> )
$A_p$	Área efectiva a pressão $p$ constante (unidade: m <sup>2</sup> )
$A$	Área de aceitação no método de aceitação-rejeição
$\mathbf{A}$	Matriz de elementos multiplicadores de um gerador congruencial matricial
$\mathbf{A}$	Matriz de elementos (aplicada no método de eliminação gaussiana)
$\tilde{\mathbf{A}}$	Matriz aumentada (aplicada no método de eliminação gaussiana)
$b$	Valor intermédio ou extremo de uma distribuição de probabilidade
$b$	Base de representação de uma sequência numérica
$b_i$	valor do <i>bit</i> colocado na posição $i$ da representação de um número numa base binária
$c$	Valor intermédio ou extremo de uma distribuição de probabilidade $\chi^2$
$c$	Incremento de um gerador congruencial
$c$	Observação ou estimativa de uma variável aleatória
$c_i$	Coefficiente de sensibilidade (utilizado na Lei de Propagação de Incertezas)
$c_p$	Perímetro da secção transversal do pistão numa balança manométrica (unidade: m)
$\vec{c}$	Vector incremento de um gerador congruencial matricial
$C$	Variável aleatória de uma distribuição de probabilidade $\chi^2$
$C$	Coefficiente do teste de correlação serial
$C_{imp}$	Coefficiente de impulsão
$d$	Dígitos decimais (parâmetro utilizado no critério de exactidão para GNPA)
$d$	Diferença de comprimento (unidade: m)
$D$	Dimensão de uma sequência numérica gerada por um GNPA
$\mathcal{D}$	Sistema relacional empírico
$\mathbf{D}$	Matriz do operador jacobiano
$e_r$	Exactidão requerida (parâmetro utilizado no critério de exactidão para GNPA)
$F$	Força (unidade: N)
$g$	Aceleração da gravidade (m· s <sup>-2</sup> )
$g_Y$	Função de majoração utilizada no método de aceitação-rejeição
$G$	Função de saída
$h$	Valor máximo de probabilidade numa função densidade de probabilidade
$hr$	Porcentagem de humidade relativa
$H, H_{min}, H_{max}$	Incerteza, Incerteza mínima, Incerteza máxima (Teoria da Informação)
$H$	Posição da sequência ordenada de saída onde se obtém o percentil máximo do intervalo de incerteza na análise MCS
$H, H^+$	Posições da sequência ordenada de saída onde se obtêm os percentis que determinam o intervalo de incerteza MCS associado ao percentil $H$
$I, I_{min}, I_{max}$	Informação, Informação mínima, Informação máxima (Teoria da Informação)
$I, I_0, I_{min}, I_{max}$	Indicação (do sistema de medição), Indicação mínima, Indicação máxima
$I$	Corrente eléctrica (unidade: A)
$IX$	Valor de semente do algoritmo AS132 de H-W
$IY$	Valor de semente do algoritmo AS132 de H-W

---

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$I_Z$	Valor de semente do algoritmo AS132 de H-W
$I_C$	Estimador da estatística de testes de Cramer – von Mises
$I_v$	Intensidade luminosa (unidade: cd)
$k$	Constante de Boltzmann
$k_p$	Factor de expansão para um intervalo de confiança de $p$
$k$	Número de categorias no teste $\chi^2$
$K$	Ganho em estado estacionário
$K_n, K_n^+, K_n^-$	Estatísticas do teste Kolmogorov-Smirnov
$l, l_s, L$	Comprimento (unidade: m)
$L$	Posição da sequência ordenada de saída onde se obtém o percentil mínimo do intervalo de incerteza na análise MCS
$L, L^+$	Posições da sequência ordenada de saída onde se obtêm os percentis que determinam o intervalo de incerteza MCS associado ao percentil $L$
$med_X$	Mediana de uma distribuição de probabilidade associada a uma variável aleatória $X$
$m_c$	Massa convencional
$m_i$	Número de elementos de um espaço de probabilidade
$m, m_k$	Massa (unidade: kg)
$m$	Módulo de um gerador congruencial
$\bar{m}$	Vector semente do gerador de Hill-Wichmann
$M$	Operação que relaciona os conjuntos $Q$ e $N$
$M_r$	$r$ 'ésimo momento da amostra em torno de 0
$M'_r$	$r$ 'ésimo momento da amostra em torno do valor médio
$n_i$ (v)	Quantidade de matéria (mol)
$N$	Classe de números
$p$	Número primo
$p_1, p_2$	Números primos ou números primos entre si
$p$	Período de um gerador de números pseudo-aleatórios
$p$	Pressão (unidades: Pa e bar)
$P$	Relações numéricas (cap. 2)
$\mathcal{P}$	Sistema relacional numérico
$q$	Índice numérico que identifica a probabilidade na definição de um quantil
$q$	Mantissa
$q_i$	“Qualidade” ou manifestação individual; Quantidade / grandeza mensurável
$\bar{q}$	Valor médio de uma amostra associada a uma grandeza mensurável $Q$
$Q$	Conjunto de “qualidades”
$Q$	Variável aleatória associada a uma quantidade / grandeza mensurável
$Q_m$	Caudal mássico (unidade: kg/s)
$r$	Mantissa normalizada
$r$	Raio
$R, R'$	Área de rejeição no método de aceitação-rejeição
$R$	Resistência eléctrica (unidade: $\Omega$ )
$R_s$	Resolução do sistema de medição
$R$	Grau de fiabilidade (associado à estimativa dos limites de variação de uma fonte de incerteza determinada pelo método do tipo B)
$R_i$	Relação empírica individual
$\mathcal{R}$	Conjunto de relações empíricas
$S$	Entropia

---

---

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$S, S_i$	Sensibilidade (do sistema de medição)
$s_o$	Estado inicial ou semente de um GNPA
$s_i$	Elemento de ordem $i$ de uma sequência numérica
$\bar{s}$	Inverso multiplicativo de ( <b>s mod m</b> )
$s(q) ; s_q$	Desvio-padrão experimental da amostra
$s(\bar{q}) ; s_{\bar{q}}$	Desvio-padrão experimental da média
$s^2(\bar{q}) ; \sigma^2(\bar{q})$	Variância experimental da média
$\bar{s}_i$	Vector de elementos de ordem $i$ de um gerador congruencial matricial
$\mathcal{S}$	Espaço com um número finito de estados
$\mathcal{S}$	Escala de representação da medição
$t$	Valor intermédio de uma distribuição de probabilidade
$t$	Tempo (unidade: s)
$t_p$	Factor de expansão para um intervalo de confiança de $p$ (usando a distribuição de probabilidade $t$ -Student)
$T_r$	Temperatura de referência (unidade: K)
$T$	Temperatura termodinâmica (unidade: K)
$T_1$ e $T_2$	Estatísticas representando limites de intervalos de confiança
$T$	Função de transição ou função de recorrência
$\mathcal{U}$	Conjunto finito de símbolos de saída
$u_o$	Primeiro elemento de uma sequência numérica
$u_i$	Elemento de ordem $i$ de uma sequência numérica
$u$	Observação ou estimativa de uma variável aleatória uniforme
$u(q)$	Incerteza (ou componente de incerteza) de medição padrão associada a uma grandeza mensurável $Q$
$u_a(q)$	Componente de incerteza de medição padrão associada a uma grandeza mensurável $Q$ e devida a um elemento ou factor $a$
$U_c(q)$	Incerteza de medição padrão combinada associada a uma grandeza mensurável $Q$
$U_p(q)$	Incerteza (ou componente de incerteza) de medição expandida (para um intervalo de confiança de $p$ ) associada a uma grandeza mensurável $Q$
$U$	Variável aleatória de uma distribuição de probabilidade uniforme
$v$	Semi-soma de dois valores extremos de uma distribuição de probabilidade
$V$	Estimador de estatística do teste $\chi^2$
$V_i$	Variável aleatória
$V$	Matriz variância-covariância
$w$	Semi-diferença de dois valores extremos de uma distribuição de probabilidade
$w_i$	Classe ou categoria de “objectos”
$W$	Probabilidade termodinâmica
$w(q)$	Incerteza (ou componente de incerteza) de medição padrão relativa associada a uma grandeza mensurável $Q$
$x, x_i, \hat{x}_i$	Estimativa de uma variável aleatória representando uma grandeza de entrada
$\bar{x}_i$	Média aritmética de uma amostra de valores relativos a uma grandeza de entrada
$x$	Observação ou estimativa de uma variável aleatória $t$ -Student
$X$	Variável aleatória de uma distribuição de probabilidade $t$ -Student

---

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$X_i$	Variável aleatória
$\mathbf{X}$	Variável aleatória representando uma grandeza de entrada (do modelo matemático)
$\mathbf{X}$	Vector ou matriz de grandezas de entrada de um modelo matemático
$y, \hat{y}$	Estimativa de uma variável aleatória representando uma grandeza de saída
$\bar{y}_i$	Média aritmética de uma amostra de valores relativos a uma grandeza de saída
$y_L, y_H$	Percentis mínimo (Lower) e máximo (Higher) associados à análise de exactidão aplicada na MCS
$Y$	Variável aleatória representando uma grandeza de saída (do modelo matemático)
$\mathbf{Y}$	Vector ou matriz de grandezas de saída de um modelo matemático
$z$	Observação ou estimativa de uma variável aleatória normal padronizada
$Z$	Variável aleatória de uma distribuição de probabilidade normal padronizada
$\alpha$	Valor de probabilidade
$\alpha, \alpha_a$	Coefficiente linear de expansão térmica do elemento a
$\alpha_c$	Coefficiente linear de expansão térmica do cilindro (de uma balança manométrica)
$\alpha_p$	Coefficiente linear de expansão térmica do pistão (de uma balança manométrica)
$\beta$	Constante de inflexão da função densidade de probabilidade trapezoidal
$\delta, \delta_A, \delta_B, \delta_i$	Desvio de calibração
$\delta(\cdot)$	Função delta de Dirac
$\delta q_a$	Desvio associado ao erro de medição considerada como fonte de incerteza contributiva para a avaliação da incerteza de medição. O índice “a” representa a sigla que indica a origem da fonte de incerteza em causa.
$\delta y_H$	Diferença entre os percentis que determinam o intervalo de incerteza associado ao percentil $H$ do intervalo de incerteza MCS
$\delta y_L$	Diferença entre os percentis que determinam o intervalo de incerteza associado ao percentil $L$ do intervalo de incerteza MCS
$\delta\alpha$	Diferença entre coeficientes lineares de expansão térmica de um equipamento a calibrar e do padrão de referência
$\delta\theta$	Diferença entre a temperatura de um equipamento a calibrar e a temperatura do padrão de referência
$\phi$	Ângulo plano
$\phi(\cdot)$	Função densidade de probabilidade normal / gaussiana
$\phi(m)$	Função totiente de Euler
$\gamma$	Coefficiente de confiança
$i\bar{\eta}_\mu$	Região de integração $i$ de um integral de convolução
$\varphi$	Parâmetro de eficiência aplicado no método de aceitação-rejeição
$\varphi$	Ângulo plano; ângulo de inclinação do pistão (de uma balança manométrica)
$\lambda$	Coefficiente de distorção de primeira ordem
$\lambda(m)$	Ordem do elemento primitivo (Teorema B – anexo 3)
$\mu$	Média de uma população
$\mu_i$	Valor esperado para a estimativa de uma grandeza mensurável $X_i$
$\mu_3; \mu_1; \mu_2; \mu_4$	Posições relacionadas com as regiões de integração de um integral de convolução
$\mu'_r$	$r$ 'ésimo momento da população
$\nu$	Número de graus de liberdade da distribuição de probabilidade
$\nu_i$	Número de graus de liberdade associados a uma grandeza $x_i$
$\nu_{ef}$	Número de graus de liberdade efectivos (associados à grandeza de saída, $y$ )

---

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$\theta_p$	Parâmetro de uma função densidade de probabilidade da população
$\theta$	Temperatura (unidade: °C), intervalo de temperatura (unidade: °C), ou ângulo plano
$\theta_r, \theta_s$	Temperatura de referência (unidade: °C)
$\rho$	Transiente de sequência numérica
$\rho$	Massa volúmica de líquido (medição de caudal)
$\rho_a$	Massa volúmica do ar
$\rho_f$	Massa volúmica de um fluido
$\rho_{mk}$	Massa volúmica dos elementos flutuantes (de uma balança manométrica)
$\rho_{mk}$	Massa volúmica dos elementos flutuantes (de uma balança manométrica)
$\rho_p$	Massa volúmica de um corpo de referência (pesos-padrão, por exemplo)
$\rho[X,Y]$ ou $\rho_{X,Y}$	Coefficiente de correlação
$\sigma_Q$	Desvio-padrão da população referente a uma variável aleatória $Q$
$\sigma_f$	Tensão superficial do fluido (balança manométrica de massas suspensas)
$\sigma_{XY}$	Covariância entre duas variáveis aleatórias $X$ e $Y$
$\sigma^2$	Variância da população
$\sigma_Q^2$	Variância da população de uma variável aleatória $Q$
$\sigma_{\bar{Q}}^2$	Variância da população de médias de uma variável aleatória $Q$
$\tau$	Constante de tempo
$\tau$	Período de uma sequência numérica
$\omega$	Ângulo sólido
$\omega$	Elementos de um espaço de amostragem
$\omega_h$	Sensibilidade estática
$\zeta$	Frequência natural
$\zeta$	Erro (absoluto) da medição
$\zeta_q$	Número relativo ao q-ésimo quantil de uma distribuição de probabilidade
$\zeta_m$	Componente metodológica do erro (absoluto) da medição
$\zeta_i$	Componente instrumental do erro (absoluto) da medição
$\zeta_h$	Componente humana do erro (absoluto) da medição
$\Delta h$	Intervalo de comprimento / diferença de cota (de uma balança manométrica)
$\Delta hr$	Intervalo de valores de humidade relativa
$\Delta I_e$	Variação da indicação numa situação estacionária
$\Delta m_c$	Diferença entre valores de massa convencional
$\Delta p$	Intervalo de valores de pressão
$\Delta t$	Intervalo de tempo
$\Delta T$	Intervalo de valores de temperatura
$\Delta u(x_i)$	Estimativa da percentagem de “incerteza” inerente ao valor limite atribuído a uma componente contributiva para a incerteza de medição, $u(x_i)$
$\Phi(\cdot)$	Função distribuição cumulativa de probabilidade normal / gaussiana
$\Sigma$	Matriz variância-covariância associada às coordenadas polares
$\Omega$	Conjunto de classes de “objectos”
	Espaço de probabilidade
$\hat{\Omega}$	Ângulo sólido

---





### III. ÍNDICE DE MATÉRIAS

---

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Considerações gerais e enquadramento da temática da tese .....</i>	1
1.2 <i>Objectivos.....</i>	4
1.3 <i>Fases do desenvolvimento da tese.....</i>	6
1.4 <i>Organização da tese .....</i>	8
<b>2. UMA PERSPECTIVA DA METROLOGIA .....</b>	<b>11</b>
2.1 <i>Evolução histórica .....</i>	11
2.2 <i>Sobre a Teoria e a Filosofia da medição .....</i>	18
2.3 <i>Sobre a terminologia do Sistema Internacional de Unidades .....</i>	29
2.3.1 <i>Aspectos gerais.....</i>	29
2.3.2 <i>Definição de grandezas e unidades SI.....</i>	30
2.4 <i>Vocabulário Internacional de Metrologia .....</i>	33
<b>3. SISTEMAS DE MEDIÇÃO E A SUA CARACTERIZAÇÃO .....</b>	<b>37</b>
3.1 <i>Introdução .....</i>	37
3.2 <i>Sinal e informação .....</i>	39
3.3 <i>Estágios e elementos dos sistemas de medição .....</i>	45
3.3.1 <i>Estágio sensorial.....</i>	46
3.3.2 <i>Estágio de condicionamento.....</i>	48
3.3.3 <i>Estágio de registo e indicação.....</i>	49
3.3.4 <i>Transmissão.....</i>	50
3.3.5 <i>Potência.....</i>	50
3.3.6 <i>Segurança e protecção.....</i>	51
3.3.7 <i>Manutenção e calibração .....</i>	51
3.4 <i>Alguns elementos sobre a transdução de grandezas .....</i>	52
3.5 <i>Caracterização metrológica .....</i>	56
3.5.1 <i>Características de funcionamento em regime estático .....</i>	57
3.5.1.1 <i>Indicação do sistema de medição, intervalo de indicação e amplitude .....</i>	58
3.5.1.2 <i>Resolução do sistema de medição e resolução do dispositivo indicador .....</i>	58
3.5.1.3 <i>condições de referência e condições óptimas de um sistema de medição .....</i>	60
3.5.1.4 <i>Sensibilidade (estática).....</i>	60
3.5.1.5 <i>Limiar de mobilidade .....</i>	60
3.5.1.6 <i>Estabilidade de um sistema de medição .....</i>	61
3.5.1.7 <i>Folga (dead band) da indicação .....</i>	61
3.5.1.8 <i>Deriva .....</i>	61
3.5.1.9 <i>Variação por efeito de uma grandeza de influência.....</i>	62
3.5.1.10 <i>Repetibilidade .....</i>	62
3.5.1.11 <i>Linearidade .....</i>	63
3.5.2 <i>Características de funcionamento em regime dinâmico.....</i>	63
3.5.2.1 <i>Função de transferência sinusoidal .....</i>	64
3.5.2.2 <i>Instrumentos de ordem 0 .....</i>	65
3.5.2.3 <i>Instrumentos de 1ª ordem .....</i>	65
3.5.2.4 <i>Instrumentos de 2ª ordem .....</i>	66
3.5.2.5 <i>Teste utilizando sinais de entrada com configuração particular.....</i>	66
3.6 <i>Erro, incerteza e expressão do resultado da medição .....</i>	66
3.7 <i>Rastreabilidade e calibração.....</i>	72

<b>4.</b>	<b>FUNDAMENTOS DA ESTATÍSTICA E DA TEORIA DAS PROBABILIDADES APLICADOS EM METROLOGIA .....</b>	<b>77</b>
4.1	<i>Introdução .....</i>	77
4.2	<i>Alguns fundamentos e conceitos de base .....</i>	78
4.3	<i>Variáveis aleatórias e funções de probabilidade .....</i>	84
4.4	<i>Valores esperados, momentos e e funções geradoras de momentos ...</i>	87
4.5	<i>Algumas famílias paramétricas de distribuições de probabilidade de uma variável .....</i>	93
4.5.1	Distribuição de probabilidade uniforme .....	94
4.5.2	Distribuição de probabilidade triangular .....	96
4.5.3	Distribuição de probabilidade trapezoidal .....	98
4.5.4	Distribuição de probabilidade de configuração U ou arco seno .....	100
4.5.5	Distribuição de probabilidade normal .....	101
4.5.6	Distribuições de probabilidade coseno e meio coseno .....	104
4.5.7	Distribuição de probabilidade quadrática .....	105
4.6	<i>Distribuições de probabilidade multivariáveis .....</i>	106
4.7	<i>Conceitos e funções de probabilidade associados à amostragem .....</i>	109
4.8	<i>Intervalos de confiança .....</i>	118
<b>5.</b>	<b>ESTADO DOS CONHECIMENTOS .....</b>	<b>121</b>
5.1	<i>Nota introdutória .....</i>	121
5.2	<i>Estado dos conhecimentos em Metrologia .....</i>	122
5.3	<i>Intervenção dos organismos internacionais na disseminação dos conceitos da Metrologia .....</i>	125
5.4	<i>Caracterização metrológica de sistemas de medição .....</i>	127
5.5	<i>Qualidade e normalização .....</i>	128
5.6	<i>Introdução de metodologias de avaliação de incertezas de medição ....</i>	130
5.7	<i>Utilização do método de simulação de Monte Carlo em Metrologia .....</i>	132
5.8	<i>Comentários adicionais .....</i>	135
<b>6.</b>	<b>MÉTODO DE MONTE CARLO .....</b>	<b>137</b>
6.1	<i>Introdução .....</i>	137
6.2	<i>Raízes históricas e potencial do método de Monte Carlo .....</i>	138
6.3	<i>Elementos fundamentais da simulação por MCS .....</i>	139
6.3.1	Geradores de números pseudo-aleatórios .....	141
6.3.1.1	<i>Nota introdutória .....</i>	141
6.3.1.2	<i>Raízes históricas da geração de números pseudo-aleatórios</i>	142
6.3.1.3	<i>Definição e caracterização do gerador de números pseudo-aleatórios .....</i>	144
6.3.1.4	<i>Origem dos processos de geração de números “aleatórios” ..</i>	151
6.3.1.5	<i>Sobre a aritmética computacional.....</i>	151
6.3.1.6	<i>Gerador de von Neumann.....</i>	156
6.3.1.7	<i>Gerador congruencial linear.....</i>	156
6.3.1.8	<i>Gerador recursivo múltiplo.....</i>	159
6.3.1.9	<i>Gerador congruencial matricial.....</i>	161
6.3.1.10	<i>Geradores AWC, MWC e SWB.....</i>	162
6.3.1.11	<i>Gerador congruencial não linear.....</i>	162
6.3.1.12	<i>Gerador FSRG.....</i>	164
6.3.1.13	<i>Geradores combinados.....</i>	166
6.3.1.13	<i>Geradores com técnicas mistas.....</i>	169
6.3.2	Testes estatísticos .....	170
6.3.2.1	<i>Breve referência histórica.....</i>	170
6.3.2.2	<i>Testes estatísticos de <math>\chi^2</math>, de Kolmogorov–Smirnov e de Cramer-von Mises.....</i>	171
6.3.2.3	<i>Testes empíricos.....</i>	176
6.3.3	Geração de sequências numéricas pseudo-aleatórias de variáveis aleatórias não uniformes .....	181

6.3.3.1	<i>Nota introdutória</i> .....	181
6.3.3.2	<i>Método de transformação inversa</i> .....	183
6.3.3.3	<i>Método de aceitação-rejeição</i> .....	185
<b>7.</b>	<b>AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO</b> .....	<b>189</b>
7.1	<i>Introdução</i> .....	189
7.2	<i>Fase de formulação</i> .....	190
7.3	<i>Fase de cálculo</i> .....	191
7.4	<i>Determinação de incertezas usando o método analítico</i> .....	192
7.5	<i>Guia para avaliação de incertezas de medição (GUM)</i> .....	198
7.5.1	<i>Introdução</i> .....	198
7.5.2	<i>Enquadramento prévio</i> .....	198
7.5.3	<i>Modelo matemático, grandezas aleatórias envolvidas e sua dispersão</i> .....	199
7.5.4	<i>Lei de Propagação de Incertezas</i> .....	202
7.5.5	<i>Incerteza de medição expandida</i> .....	205
7.5.6	<i>Procedimento sintetizado de avaliação de incertezas de medição e tabela de balanço de Incertezas</i> .....	208
7.6	<i>Avaliação de incertezas de medição pelo método de Monte Carlo</i> .....	212
7.6.1	<i>Introdução</i> .....	212
7.6.2	<i>Etapas da simulação numérica usando MCS</i> .....	212
7.6.3	<i>Factores determinantes para o sucesso da aplicação MCS</i> .....	214
7.6.4	<i>Procedimento para aplicação da metodologia MCS</i> .....	216
7.6.5	<i>Seleção de ferramentas para a concretização experimental da metodologia MCS</i> .....	219
7.6.5.1	<i>Gerador de números pseudo-aleatórios</i> .....	219
7.6.5.2	<i>Métodos de conversão de funções</i> .....	226
7.6.5.3	<i>Algoritmo de ordenação de sequências</i> .....	233
7.6.5.4	<i>Critério de avaliação da dimensão das sequências face à exactidão requerida</i> .....	234
7.7	<i>Análise comparativa das metodologias apresentadas</i> .....	239
<b>8.</b>	<b>ESTUDO COMPARATIVO DE AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS USANDO O GUM E A MCS</b> .....	<b>247</b>
8.1	<i>Introdução</i> .....	247
8.2	<i>Estudo comparativo da avaliação da incerteza de medição associada à medição da pressão com balanças manométricas de massas-suspensas</i> .....	248
8.2.1	<i>Modelo matemático</i> .....	248
8.2.2	<i>Solução GUM</i> .....	251
8.2.2.1	<i>Condições iniciais do problema e formulação das componentes de incerteza</i> .....	251
8.2.3	<i>Solução MCS</i> .....	255
8.2.4	<i>Comparação de resultados</i> .....	258
8.3	<i>Estudo comparativo da avaliação da incerteza associada à medição de comprimento por comparação directa</i> .....	259
8.3.1	<i>Modelo matemático</i> .....	259
8.3.2	<i>Solução GUM</i> .....	260
8.3.2.1	<i>Estabelecimento do modelo matemático simplificado</i> .....	260
8.3.2.2	<i>Incerteza associada à calibração do equipamento de referência</i> .....	261
8.3.2.3	<i>Incerteza associada à medição da diferença em comprimento</i> .....	261
8.3.2.4	<i>Incerteza associada à diferença entre coeficientes lineares de expansão térmica</i> .....	262
8.3.2.5	<i>Incerteza associada à diferença de temperatura observada</i> ..	262
8.3.2.6	<i>Incerteza associada ao coeficiente linear de expansão térmica</i> .....	263

8.3.2.7	<i>Incerteza associada à diferença de temperatura entre equipamentos</i> .....	264
8.3.2.8	<i>Coefficientes de sensibilidade</i> .....	264
8.3.2.9	<i>Incerteza de medição padrão</i> .....	264
8.3.2.10	<i>Incerteza de medição expandida</i> .....	265
8.3.3	Solução MCS .....	267
8.3.4	Comparação de resultados .....	270
<b>8.4</b>	<b><i>Avaliação da incerteza de medição de caudal pelo método gravimétrico</i></b> .....	<b>274</b>
8.4.1	Descrição da instalação laboratorial e do modelo matemático .....	274
8.4.2	Solução GUM .....	280
8.4.2.1	Determinação da incerteza associada à medição da grandeza massa .....	282
8.4.2.2	Determinação da incerteza associada à medição da grandeza tempo .....	287
8.4.2.3	Determinação da incerteza associada à medição do coeficiente de impulsão .....	290
8.4.2.4	Determinação da incerteza de medição do caudal .....	293
8.4.3	Solução MCS .....	294
8.4.4	Comparação de resultados .....	299
<b>9.</b>	<b>ESTUDOS COMPLEMENTARES DE AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS EVIDENCIANDO O POTENCIAL DA MCS</b> .....	<b>303</b>
9.1	<i>Introdução</i> .....	303
9.2	<i>Avaliação da incerteza de medição associada a uma função quadrática</i> .....	304
9.3	<i>Avaliação da incerteza de medição associada a transformação de coordenadas</i> .....	311
9.4	<i>Avaliação da incerteza de medição de coeficientes determinados pelo método de eliminação gaussiana</i> .....	321
9.4.1	Enquadramento prévio .....	321
9.4.2	Breve descrição do método de eliminação gaussiana .....	322
9.4.3	Aplicação do método de eliminação gaussiana na calibração de termistores .....	324
9.4.4	Incerteza de medição associada aos coeficientes obtidos pelo método de eliminação gaussiana usando MCS .....	325
9.5	<i>Considerações complementares</i> .....	329
<b>10.</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE EVOLUÇÃO FUTURA</b> .....	<b>331</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>343</b>
<b>Anexo 1:</b>	A experiência de Buffon e a aplicação da simulação numérica no cálculo integral	
<b>Anexo 2:</b>	Elementos para a compreensão da métrica “Discrepância”	
<b>Anexo 3:</b>	Teoremas para a maximização do período em geradores congruenciais	
<b>Anexo 4:</b>	Complementos sobre os testes $\chi^2$ e Kolmogorov-Smirnov	
<b>Anexo 5:</b>	Testes “DIEHARD” de G. Marsaglia	
<b>Anexo 6:</b>	Sobre a validação de <i>software</i> utilizado na simulação computacional	
<b>Anexo 7:</b>	Distribuição de probabilidade meio-U ou meio-arcoseno	

## IV. ÍNDICE DE SIGLAS

---

AMCTM	Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology.
AWC(G)	Add-With-Carry (Generator).
BIPM	Bureau International des Poids et Mèures.
CEN	European Committee for Standardization.
CIPM	Comité International des Poids et Mèures.
CGPM	Conférence Générale des Poids et Mèures.
CGS	Sistema de medidas cujas unidades de base são o “centímetro”, o “grama” e o “segundo”.
DN	Diâmetro nominal (de condutas).
DRE-LVT	Direcção Regional de Economia de Lisboa e Vale do Tejo.
EA (ou EAL)	European Co-operation for Accreditation of Laboratories.
EAC	European Accreditation of Certification.
EN	European Norm .
EUROLAB	European Federation of National Associations of Measurement, Testing and Analytical Laboratories.
F <sub>d</sub> P	Função densidade de probabilidade.
F <sub>D</sub> C	Função distribuição cumulativa.
FSR(G)	Feedback Shift Register (Generator).
G.L.	Graus de liberdade.
GNPA	Gerador de números pseudo-aleatórios.
GUM	Guide for the Expression of Uncertainty in Measurement.
H-W	Hill – Wichmann (referido-se ao algoritmo para geração de números pseudo-aleatórios).
IEC	International Electrotechnical Commission.
IFAC	International Federation of Automatic Control.
IFCC	International Federation of Clinical Chemistry.
IFIP	International Federation of Information Processing.
IFORS	International Federation of Operational Research Societies.
i.i.d.	Independentes e identicamente distribuidas.
IMACS	International Association for Mathematics and Computers in Simulation.
IMEKO	International Measurement Confederation.
I.P.	Instrumento de Pesagem (não automático).
IPQ	Instituto Português da Qualidade.
ISA	International Federation of the National Standardizing Associations.
ISO	International Organization for Standardization.
ISO/TAG 4	ISO Technical Advisory Group on Metrology.
ISQ	Instituto de Soldadura e Qualidade.

IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry.
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics.
K-S	Kolmogorov – Smirnov (referindo-se ao teste estatístico).
LEHid	Laboratório de Ensaios Hidráulicos do Departamento de Hidráulica e Ambiente do LNEC.
LNEC	Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
LPI	Lei de Propagação de Incertezas.
MCMC	Monte Carlo Markov Chains.
MCS	Simulação numérica pelo método de Monte Carlo.
MKS	Sistema de medidas cujas unidades de base são o metro, o quilograma e o segundo. As iniciais correspondem aos termos “ <i>mètre</i> ”, “ <i>kilogramme</i> ” e “ <i>seconde</i> ”.
MKSC	Sistema de medidas derivada do Sistema Internacional, introduzida por Sommerfeld-Giorgi, cujas unidades de base são, para além do “metro”, do “quilograma” e do “segundo”, o “coulomb” (unidade de carga eléctrica), permitindo a sua extensão ao Electromagnetismo.
MWC(G)	Multiply-With-Carry (Generator).
NAG	Numerical Algorithms Group.
NASA	National Aeronautics and Space Administration (E.U.A.).
NIST	National Institute of Standards and Technology (E.U.A.).
NP	Norma Portuguesa.
NPL	National Physical Laboratory (Reino Unido).
OIML	Organisation Internationale de Métrologie Légale.
ONG	Organização Não-Governamental.
PT-Perfect	Polynomial-Time Perfect.
SI	Sistema Internacional de Unidades.
SPQ	Sistema Português da Qualidade.
SSfM	Software Support for Metrology Group.
SWC(G)	Subtract-With-Carry (Generator).
TAP	Transportes Aéreos Portugueses.
TC	Technical Committee.
UNESCO	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.
v.a.	Variável aleatória.
VIM	Vocabulário Internacional de Metrologia.

## V. ÍNDICE DE FIGURAS

---

### Capítulo 2

2.1: Padrão dimensional (Dubrovnik, Croácia).....	14
2.2: Orgânica desenvolvida a partir da “Convenção do Metro”.....	17
2.3: Modelo da Teoria de Conjuntos aplicado ao processo de medição.....	21
2.4: Conversão da informação obtida a partir da medição em “novo” conhecimento.....	26
2.5: Algoritmo do processo de medição.....	27

### Capítulo 3

3.1: Classificação de sinais determinísticos.....	41
3.2: Classificação de sinais aleatórios.....	41
3.3: Diagrama de elementos identificáveis no sistema de comunicação.....	45
3.4: Esquema de representação dos estágios do sistema de medição (com controlo).....	47
3.5: Diagrama ilustrativo de um transdutor compósito.....	54
3.6: Diagrama ilustrativo de um transdutor integrado.....	54
3.7: Indicador analógico de manómetro permitindo a interpolação da escala.....	59
3.8: Indicador analógico de manómetro com ponteiro sujeito a vibração.....	59
3.9: Determinação de um limiar de mobilidade .....	61
3.10: Combinação de funções de transferência de elementos de um sistema de medição e registo.....	64
3.11: Representação da componente sistemática aleatória do desvio.....	70
3.12: Representação da distribuição de probabilidade de duas amostras quaisquer de uma grandeza.....	73
3.13: Função distribuição de probabilidade de duas amostras quaisquer de uma grandeza, de uma amostra de referência e dos desvios de calibração respectivos.....	74
3.14: Hierarquia de rastreabilidade convencional.....	76
3.15: Exemplo de uma cadeia de rastreabilidade (com relações de calibração).....	76

### Capítulo 4

4.1: Função densidade de probabilidade uniforme.....	94
4.2: Função densidade de probabilidade triangular descentrada.....	96
4.3: Função densidade de probabilidade trapezoidal centrada.....	98
4.4: Função densidade de probabilidade de configuração U ou arcoseno .....	100
4.5: Função densidade de probabilidade normal.....	102
4.6: Função densidade de probabilidade normal padronizada .....	103
4.7: Função distribuição cumulativa normal padronizada.....	103
4.8: Função densidade de probabilidade coseno.....	104
4.9: Função densidade de probabilidade quadrática.....	106

### Capítulo 6

6.1: Esquema teórico de obtenção das $F_{\sigma}P$ das grandezas de saída .....	140
6.2: Esquema comparativo real vs. simulação .....	140
6.3: Esquema de simulação por MCS para uma grandeza de saída.....	141
6.4: Representação esquemática de uma sequência e do seu transiente e período .....	146

6.5:	Mecanismo de geração FSRG .....	165
6.6:	Processo de transformação inversa de valores de duas distribuições de probabilidade .....	183
6.7:	Representação de pontos numa distribuição cumulativa .....	183
6.8:	Representação da área correspondente ao integral numa distribuição de probabilidade cumulativa .....	184
6.9:	Ilustração das áreas de aceitação e de rejeição .....	185
6.10:	Representação de uma $F_dP$ envolvida por uma área rectangular definindo áreas de aceitação e de rejeição .....	186
6.11:	Representação de pontos aceites num processo hipotético de aceitação-rejeição .....	186
6.12:	Ajustamento de uma função ( $c.g_Y$ ) majorante da função $f_X(\cdot)$ e identificação das áreas de aceitação e de rejeição .....	187
6.13:	Aceitação ou rejeição de pontos gerados a partir de uma $F_dP$ uniforme .....	188

## Capítulo 7

7.1:	Processo de determinação da $F_dP$ da grandeza mensurável de saída .....	191
7.2:	Sequência de posições dos intervalos de integração .....	194
7.3a:	Primeiro intervalo de integração .....	194
7.3b:	Segundo intervalo de integração .....	194
7.3c:	Terceiro intervalo de integração .....	195
7.4:	Resultado da convolução de duas funções de probabilidade uniforme .....	196
7.5:	Procedimento de avaliação da incerteza de medição expandida e expressão do resultado da medição usando o GUM .....	211
7.6:	Diagrama ilustrativo da determinação da incerteza de medição usando a MCS .....	214
7.7:	Processo MCS conducente à expressão do resultado da medição .....	218
7.8:	Média aritmética em função da dimensão (3 sequências distintas) .....	222
7.9:	Desvio-padrão em função da dimensão da sequência (3 sequências distintas) .....	222
7.10:	Distribuição de valores médios obtidos com variação do valor de semente IX (1 a 30 000) em sequências de 200 000 valores .....	222
7.11:	Distribuição de desvios-padrão experimentais obtidos com variação do valor de semente IX (1 a 30 000) em sequências de 200 000 valores .....	223
7.12:	Distribuição de valores médios vs. desvios-padrão experimentais obtidos com variação do valor de semente IX (1 a 30 000) em sequências de 200 000 valores .....	223
7.13:	Histograma de valores médios obtidos (valor de semente IY entre 1 e 30 000) .....	224
7.14:	Distribuição sequencial de uma série de valores gerados .....	225
7.15:	Procedimento iterativo de avaliação do cumprimento do requisito de exactidão .....	238

## Capítulo 8

8.1:	Representação em corte do conjunto pistão-cilindro .....	249
8.2a e 8.2b:	Histogramas relativos aos valores da massa suspensa e da massa volúmica do ar obtidos por simulação .....	257
8.3:	Histograma relativo à sequência de valores da grandeza de saída – pressão – relativa ao 1º estudo .....	258
8.4:	Intervalos de Incerteza de medição expandida (99%) .....	259
8.5:	Histograma relativo à sequência MCS de valores de $l_s$ .....	268
8.6:	Histograma relativo à sequência MCS de valores de $\alpha_s$ .....	268
8.7:	Histograma relativo à sequência MCS da grandeza de saída $l$ .....	269
8.8:	Incerezas de medição expandida (95%) obtidas (2º estudo) .....	273
8.9:	Fotografia de parte da instalação laboratorial de ensaios hidráulicos do LNEC .....	277



8.10: Diagrama ilustrativo dos elementos que compõem um sistema de calibração de caudalímetros pelo método gravimétrico do LNEC .....	278
8.11: Cadeia de rastreabilidade associada à calibração de caudalímetros no LNEC .....	280
8.12: Comportamento ideal do registo temporal associado à execução das duas manobras do deflector de escoamento .....	285
8.13: Configuração real do registo temporal associado à execução das duas manobras do deflector de escoamento .....	286
8.14a e 8.14b: Dois posicionamentos possíveis dos instantes inicial e final para medição do tempo de ensaio (conforme requisitos normativos aplicáveis) .....	286
8.15: Função densidade de probabilidade da grandeza diferença de massa provocada pela diferença de intervalos de tempo observada nas manobras do deflector .....	297
8.16: Histograma MCS do Caudal (simulação para 50 kg/s) .....	298
8.17: Histograma MCS do Caudal (simulação para 10 kg/s) .....	298
8.18: Incertezas de medição padrão em percentagem (para caudal mássico de 10 kg/s) .....	300
8.19: Relação entre os desvios observados na simulação e a incerteza de medição .....	301

## Capítulo 9

9.1: Distribuição de probabilidade relativa à grandeza $X$ .....	306
9.2: Distribuição de probabilidade de $Y$ com amostra de 100 000 valores .....	306
9.3: Distribuição de probabilidade de $Y$ (100 000 valores) e parâmetros de localização .....	307
9.4: Posições das médias aritméticas e mediana .....	307
9.5: Diferença entre médias aritméticas e intervalos de incerteza obtidos usando o GUM e a MCS .....	310
9.6: Intervalos de incerteza centrados na média aritmética (GUM) e na mediana (MCS) .....	310
9.7: Imagens da medição de grandezas dimensionais e geométricas em padrões no LNEC .....	312
9.8: Coordenadas cartesianas .....	313
9.9: Coordenadas polares (esféricas) .....	313
9.10: Distribuição de probabilidade da coordenada polar $r$ .....	317
9.11: Distribuição de probabilidade da coordenada polar $\varphi$ .....	317
9.12: Distribuição de probabilidade da coordenada polar $\theta$ .....	317
9.13: Representação dos intervalos de incerteza de medição padrão .....	319
9.14: Função densidade de probabilidade do coeficiente $a$ .....	327
9.15: Função densidade de probabilidade do coeficiente $b$ .....	327
9.16: Função densidade de probabilidade do coeficiente $c$ .....	327

## Anexo 1

A1.1: Esquema de base da experiência da agulha de Buffon .....	1
A1.2: Representação de $f(\theta) = (L/2) \text{Sen}(\theta)$ e do seu integral entre 0 e $\pi$ (área sombreada) .....	2
A1.3: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)$ .....	4
A1.4: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)$ no intervalo $[0,2]$ .....	5

## Anexo 2

A2.1: Representação de uma região num espaço de representação bidimensional .....	2
A2.2: Exemplos de regiões de determinação da discrepância .....	4

## **Anexo 6**

<i>A6.1: Combinação do teste de referência com o teste de especificações matemáticas .....</i>	5
<i>A6.2: Comparação de resultados obtidos por via analítica e por MCS, relativa à convolução de duas distribuições uniformes .....</i>	6

## **Anexo 7**

<i>A7.1: Representação da função densidade de probabilidade meio-arcoseno .....</i>	3
<i>A7.2: Histograma resultante da aplicação da expressão (A7.3) em simulação MCS .....</i>	3

## VI. ÍNDICE DE QUADROS

---

### Capítulo 2

2.1: Grandezas e Unidades de base do SI.....	31
2.2: Definições de Unidades de base do SI.....	31
2.3: Grandezas e Unidades suplementares do SI.....	32
2.4: Definições de Unidades suplementares do SI.....	32

### Capítulo 3

3.1: Princípios físicos e materiais envolvidos em transdutores passivos.....	53
3.2: Princípios físicos de base de transdutores activos.....	53

### Capítulo 7

7.1: Determinação do factor de expansão (95%) com base nos graus de liberdade efectivos usando a distribuição de probabilidade t-Student .....	208
7.2: Tabela de balanço de incertezas de medição .....	211
7.3: Tabela de balanço de incertezas de medição usando a distribuição de probabilidade t-Student .....	212
7.4: Coeficientes de correlação relativos aos pares de sequências produzidas com variação mínima num dos elementos do vector de semente .....	225
7.5: Coeficientes de correlação obtidos usando o gerador H-W e a função "RANDOM" .....	226

### Capítulo 8

8.1: Tabela de balanço de incertezas relativo ao 1º estudo – balanças manométricas de massas suspensas .....	254
8.2: Intervalos de incerteza obtidos usando o GUM .....	255
8.3: Parâmetros das funções densidade de probabilidade usados na MCS .....	256
8.4: Resultados obtidos utilizando a MCS (1º estudo) .....	257
8.5: Comparação de resultados do 1º estudo.....	259
8.6: Parâmetros probabilísticos aplicáveis no 2º estudo.....	268
8.7: Resultados obtidos utilizando a MCS e o modelo matemático original (2º estudo).....	269
8.8: Incertezas de medição obtidas usando o GUM e MCS com dois modelos matemáticos distintos (2º estudo) .....	271
8.9: Incertezas de medição obtidas usando o GUM e MCS aplicado aos dois modelos matemáticos (original e simplificado na aplicação do GUM) .....	273
8.10: Resultados do estudo de sensibilidade aplicado à simulação por MCS .....	274
8.11: Condições de referência para calibração de caudalímetros .....	279
8.12: Tabela de balanço de incertezas relativo à medição da grandeza massa (de 1700 kg) .	284
8.13: Tabela de balanço de incertezas relativo à medição do tempo .....	289
8.14: Grandezas, distribuições de probabilidade e parametrização utilizadas na MCS .....	296
8.15: Resultados obtidos utilizando a MCS (LEHid – Caudal nominal de 50 kg/s) .....	298
8.16: Resultados obtidos utilizando a MCS (LEHid – Caudal nominal de 10 kg/s) .....	299
8.17a: Resultados obtidos pela MCS no exemplo de aplicação ao LEHid (usando distribuições de probabilidade de configuração U) .....	299

8.17a e 8.17b: Resultados obtidos pela MCS no exemplo de aplicação ao LEHid (usando distribuições de probabilidade de configuração meio-U) .....	299
8.18: Relação entre os desvios observados na simulação e a incerteza de medição .....	301

## Capítulo 9

9.1: Resultado obtidos pela simulação numérica (MCS) .....	308
9.2: Dados iniciais obtidos por via experimental .....	312
9.3: Resultados obtidos pela aplicação da MCS na transformação de coordenadas .....	317
9.4: Comparação de médias aritméticas calculadas pela via analítica e obtidas por MCS ....	318
9.5: Intervalos de incerteza de medição padrão obtidos .....	318
9.6: Valores de covariância obtidos .....	319
9.7: Valores experimentais e informação complementar de incerteza expandida .....	325
9.8: Valores dos coeficientes obtidos por MCS .....	325
9.9: Parâmetros das funções densidade de probabilidade usados na MCS .....	326
9.10: Resultados da simulação .....	327
9.11: Resultados comparados (série 1 – Simulação original, série 2 – análise de sensibilidade) .....	328

## Anexo 4

A4.1: Intervalos de probabilidade associados ao estimador do teste do $\chi^2$ .....	2
A4.2: Tabela indicadora dos resultados da distribuição K-S relativa a diferentes graus de liberdade e diferentes níveis de confiança .....	5

## VII. AGRADECIMENTOS

---

A elaboração de um documento desta natureza só é possível havendo um conjunto de circunstâncias favoráveis, dentro das quais tem um papel primordial aquelas que dependem das relações pessoais e profissionais. Como tal, o autor considera ser da mais elevada justiça mostrar o seu apreço a todos os que, de alguma forma, estimularam e permitiram a concretização desta tese.

À Maria João, à Inês, à Catarina e, também, à restante família pelo seu estímulo, apoio e motivação, fundamentais para manter a qualidade das relações familiares e para evitar que este período da minha vida fosse determinado, exclusivamente, por processos estocásticos.

Aos Orientadores desta tese, Engenheiro Carlos Oliveira Costa, Investigador do Laboratório Nacional de Engenharia Civil e Professor Doutor João Sousa Lopes, Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e M.D. Vice-Reitor da Universidade de Lisboa (2002-06), aos quais devo uma inestimável contribuição para o conteúdo da mesma, reflexo do seu empenho e paciência demonstrados nessa função, do seu sentido crítico e da partilha de conhecimentos pessoais, da qual beneficiei, traduzindo-se num importante enriquecimento profissional e pessoal.

À Direcção do Laboratório Nacional de Engenharia Civil por ter criado todas as condições que me permitiram a concretização desta tese e dos seus estudos, proporcionando um enquadramento profissional e humano apropriados para se atingir, com excelência, o objectivo de desenvolvimento científico e tecnológico.

Ao Engenheiro Francisco Carvalhal, Investigador e Vice-Presidente do LNEC, pelo seu estímulo e apoio permanentes e pelo seu empenho na criação contínua de condições, permitindo o meu desenvolvimento profissional e pessoal, aspectos determinantes para a concretização de mais esta etapa profissional.

Ao Engenheiro Manuel Pimenta de Castro, Investigador do LNEC e Director do Núcleo de Qualidade Metrológica, pelo seu apoio de década e meia, traduzido na sua disponibilidade, na sua franca colaboração e na partilha dos seus conhecimentos profissionais e humanos constituindo, para mim, um acervo de inestimável valor.

Ao Engenheiro José Duarte Henriques, Investigador do LNEC e Chefe do Laboratório de Ensaios Hidráulicos (LEHid), pelo seu estímulo, disponibilidade, sugestões e partilha de conhecimentos, particularmente importantes na concretização da actividade relacionada com os estudos desenvolvidos nesse laboratório.

Ao Doutor João Alves e Sousa, Investigador do Laboratório de Engenharia Civil da Madeira, e ao Engenheiro João Mimoso, Investigador do LNEC, por sugestões e inúmeras trocas de ideias que, ao longo dos anos, permitiram a consolidação de algumas das matérias que se reflectem directa ou indirectamente no conteúdo desta tese.

Ao Engenheiro Paulo Morais, Investigador do LNEC, pelo seu apoio e disponibilidade permanentes e por muitas sugestões que contribuíram para a realização dos estudos desenvolvidos, designadamente, na sua vertente computacional.

Aos Colegas do Centro de Instrumentação Científica pelas palavras de estímulo, pelo apoio e colaboração e pela qualidade de relações humanas existente neste Centro do LNEC, das quais tenho beneficiado, constituindo um factor de elevada importância na prossecução da actividade de investigação e desenvolvimento científico.

Ao Eng.º Téc. João Benevente, pela sua colaboração e disponibilidade para apoiar os estudos realizados e pelo apoio dedicado e permanente na actividade de Gestão do Laboratório Central de Apoio Metrológico, essencial para a minha disponibilidade visando a elaboração desta tese.

A José Paixão, Fernando Antunes, António Pais, João Fernandes e Vasco Damas, do Centro de Instrumentação Científica, pela sua disponibilidade e colaboração em diversas etapas dos estudos que foram desenvolvidos.

Ao Luís Dias do Departamento de Hidráulica e Ambiente, pela sua disponibilidade e colaboração nos estudos desenvolvidos no âmbito do LEHid.

Ao Dr. Carlos Manique Silva que, apesar de se encontrar a percorrer um caminho similar ao meu, se mostrou disponível para efectuar uma revisão da redacção deste documento contribuindo, dessa forma, para a sua melhoria. Para a sua tarefa particular de Doutoramento, os votos do maior sucesso.

Aos colegas da Biblioteca e das Artes Gráficas do LNEC pela sua colaboração e profissionalismo demonstrados no decurso dos processos de aquisição de muitas referências bibliográficas e na fase final de impressão da tese.

A todos os amigos e demais colegas pelo seu estímulo no decurso deste período de particular dedicação a esta tese e pela sua compreensão perante esse facto.

Lisboa, 6 de Maio de 2006

# 1. INTRODUÇÃO

## **1.1 Considerações gerais e enquadramento da temática da tese**

A medição representa, na actualidade, uma actividade fundamental com intervenção em inúmeros domínios de natureza tecnológica e científica. A sua evolução até ao estado actual é reflexo da crescente capacidade tecnológica e da assimilação progressiva de contribuições provenientes do pensamento científico.

A Metrologia, ou “Ciência da Medição”, visa melhorar a função de medir, determinar os seus limites e aprofundar as suas capacidades, por forma a melhor contribuir para o aperfeiçoamento do conhecimento dos fenómenos naturais e, por essa via, contribuir de modo mais significativo para o aperfeiçoamento dos conhecimentos teóricos que os procuram descrever. O seu carácter transversal, no que se refere a uma estrutura de conhecimento organizado por ramos científicos, conduziu a Metrologia a assumir as características de um ramo específico e, nesse sentido, desenvolver o seu suporte próprio, tornando obsoleta a ideia clássica e redutora de lhe atribuir uma dimensão meramente auxiliar.

No processo evolutivo da Ciência, a Metrologia sofreu, recentemente, uma re-orientação nos seus conceitos fundamentais, que se traduziu na adopção de um enquadramento probabilístico da medição em contraponto à perspectiva essencialmente determinística até então vigente.

Esta nova abordagem foi consequência de estudos desenvolvidos, sobretudo na segunda metade do Séc. XX, os quais foram consolidando progressivamente a axiomática e a fundamentação teórica adequada a uma estruturação formal da Metrologia, culminando nos anos 70 com a adopção dos 4 axiomas fundamentais da medição acrescidos de um quinto axioma relativo à incerteza, por L. Finkelstein. Esse novo enquadramento determinou a aceitação da dimensão probabilística na medição.

Como consequência natural desta evolução, as entidades que regulam as diversas vertentes com intervenção na Metrologia (BIPM, ISO, IEC e outras) procuraram estabelecer condições para a sua tradução prática, promovendo o estudo de metodologias apropriadas para esse efeito. A actividade das suas comissões técnicas permitiu encontrar um consenso alargado entre as principais instituições de normalização (internacional e sectorial) surgindo, nos anos oitenta, a primeira edição do Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM) e, em

1993, a primeira edição de um guia contendo uma metodologia para a avaliação de incertezas de medição: o GUM (1993, 1995).

Desde então, o GUM<sup>1</sup> tem sido determinante para o entendimento actual da medição e, em particular, do seu resultado, ao recentrar o problema metrológico na “incerteza de medição” relegando o conceito clássico de “erro de medição” para um plano meramente conceptual onde, aliás, continua a ter um papel fundamental. É a esta nova estrutura conceptual que se designa por “abordagem contemporânea” ou “abordagem da incerteza” [VIM (2005)].

A ascensão, de forma particularmente rápida, do conceito de “incerteza de medição” como face mais visível desta evolução conceptual foi potenciada pela introdução dos Sistemas de Gestão da Qualidade que assumiram esta nova perspectiva como um dos seus elementos e o GUM como uma das suas ferramentas.

Na fase inicial de concepção e publicação do GUM, talvez se pensasse que a resposta à sua implantação seria predominantemente positiva. Contudo, a sua rápida difusão (numa década) permitiu evidenciar duas realidades distintas: a capacidade da metodologia GUM para a resolução de muitos problemas de avaliação de incertezas de medição; e a sua inaptidão para cumprir a sua função relativamente a uma quantidade significativa de problemas metrológicos.

É esta realidade que justifica a necessidade de desenvolver metodologias de avaliação das incertezas de medição em contextos para os quais não existem na actualidade formas apropriadas de concretizar esse objectivo. Refira-se que esta necessidade adquire uma relevância particular em Organismos como o Laboratório Nacional de Engenharia Civil, cuja actividade experimental inserida na investigação científica requer um elevado rigor no desenvolvimento de processos de medição.

A procura de novas vias de abordagem para o problema da avaliação de incertezas de medição encontrou na simulação numérica uma via robusta para a sua concretização. É neste contexto que, recentemente, alguns autores (Siebert (2000) e Cox *et al.* (2000), por exemplo) introduziram em conferências dedicadas a métodos matemáticos e computacionais esta temática, sendo o método de Monte Carlo uma metodologia particularmente reconhecida neste domínio.

---

<sup>1</sup> As siglas GUM e MCS utilizadas neste documento representando, respectivamente, o método de avaliação de incertezas de medição proposto no Guia publicado pela ISO e a simulação numérica suportada no método de Monte Carlo encontram-se, presentemente, em revisão por uma Comissão Técnica da ISO. As siglas que são apontadas como substitutas das presentes são: GUF, indicando que o guia se reporta a um enquadramento “Framework” onde se insere o MCM (Monte Carlo Method).



Este método, cuja aplicação noutros domínios adquiriu notoriedade e onde o conhecimento acumulado constitui um acervo de grande significado, foi rapidamente adoptado como matéria de estudo. Deve-se referir que esta adopção é significativamente potenciada pelo estado actual de desenvolvimento dos meios computacionais essenciais à sua aplicação neste domínio.

O presente estudo tem como motivação um conjunto de razões básicas: a importância do problema metrológico em causa; as dificuldades encontradas na aplicação da metodologia promovida pelo GUM; e as potencialidades da simulação pelo método de Monte Carlo (abreviadamente designada, neste documento, por MCS).

## 1.2 Objectivos

O primeiro *objectivo* da tese, traduz-se na compreensão da evolução que conduziu ao estado actual dos conhecimentos, em particular, relacionados com o objecto da medição – a mensuranda; na caracterização dos elementos que asseguram a interface experimental para esse efeito (a instrumentação e os sistemas de medição); na identificação do resultado da medição (estimativa da mensuranda e sua incerteza de medição) e no estudo do suporte teórico que sustenta a análise probabilística do problema (a Estatística e a Teoria das Probabilidades) e a análise numérica envolvida nas metodologias de avaliação de incertezas de medição (quer do GUM e de metodologias similares, quer da simulação numérica suportada no Método de Monte Carlo).

O segundo *objectivo* da tese tem duas vertentes distintas. A primeira centra-se no problema fundamental subjacente aos estudos desenvolvidos: a “incerteza de medição”. Em particular, procura-se efectuar a sua caracterização conceptual num quadro onde a perspectiva probabilística se sobrepõe à perspectiva determinística e, além disso, proceder à descrição dos elementos inerentes à sua avaliação. Pretende-se que esta avaliação seja rigorosa e que reflecta a natureza do problema metrológico em observação utilizando-se, para tal, metodologias conhecidas – métodos analíticos ou de base analítica, entre os quais o GUM. Deste modo, procura-se atingir uma compreensão dos princípios e dos pressupostos de aplicação destas metodologias, com destaque para o GUM, por ser aquele cuja aplicação é dominante. Este estudo envolve, necessariamente, uma caracterização dos seus procedimentos e a identificação das suas condições de aplicação e das suas potencialidades e fragilidades.

A segunda vertente deste *objectivo* da tese, envolve o estudo e a caracterização da metodologia de simulação numérica suportada no Método de Monte Carlo como forma de promover a avaliação da incerteza. A sua elaboração requer uma estruturação procedimental aplicável, a sua caracterização, o estudo das suas etapas e da forma como estas influenciam o seu desempenho, a sua validação e a avaliação do seu grau de exactidão, bem como, as condições e restrições de aplicação.

O terceiro *objectivo* da tese visa uma comparação entre os métodos de aplicação vigentes, GUM, e nalguns domínios restritos, metodologias de raiz analítica, e a simulação e análise numérica usando o método de Monte Carlo. Em particular, pretende-se comparar as condições de aplicação, benefícios e riscos inerentes a cada uma delas, as suas potencialidades e a qualidade dos resultados obtidos. Desta análise comparativa deverá resultar a indicação

fundamentada de qual a metodologia de referência a aplicar em casos específicos de natureza metrológica.

O conteúdo deste terceiro objectivo é ilustrado com exemplos concretos envolvendo processos de medição seleccionados de modo a evidenciar alguns dos aspectos mais significativos dessa análise comparativa.

Foi neste quadro de objectivos que se estruturou a presente tese.

### **1.3 Fases de desenvolvimento da tese**

O plano de actividades delineado para a presente tese foi desenvolvido de acordo com uma organização preliminar com quatro fases.

A **primeira fase** consistiu na selecção e recolha de material bibliográfico relacionado com os fundamentos teóricos da Metrologia e da Instrumentação, da Estatística e da Teoria das Probabilidades, da avaliação de incertezas de medição usando a metodologia GUM e MCS. Esta pesquisa e consulta iniciais prosseguiram nas etapas que lhe sucederam quer pela necessidade de complementar conhecimentos específicos, quer para acompanhar a informação inserida em publicações e comunicações a eventos científicos.

A **segunda fase** concentrou-se no estudo da vertente conceptual e dos requisitos e influência de aspectos parcelares na concretização de programas apropriados à execução prática da MCS; e no desenvolvimento da programação e adaptação dos recursos computacionais às exigências de concretização de outros requisitos complementares ou auxiliares de cálculo, envolvidos quer na própria simulação, quer nos processos de medição experimental que conduziram a resultados aplicados nestes estudos.

A **terceira fase** envolveu a selecção e estudo de um conjunto de modelos matemáticos associados a processos metrológicos e estocásticos, visando estabelecer uma metodologia de análise dentro de um contexto representativo e realista da medição e, simultaneamente, com características que permitam efectuar a comparação entre as metodologias aplicáveis e evidenciar as suas vantagens relativas, fragilidades e aptidões.

A **quarta e última fase**, consistiu na avaliação da informação recolhida (bibliográfica, de simulação numérica e experimental) e da sua síntese no documento presente.

Um estudo desta natureza depende de múltiplos factores que se reflectem no seu conteúdo. Alguns destes factores concorrem para o seu favorecimento, destacando-se:

- a experiência no desenvolvimento de actividade prática de índole metrológica, essencial para a incorporação de conhecimentos quer de origem teórica, quer de origem empírica;
- a orientação científica que pela transmissão de conhecimento, pela discussão, pela crítica e, sobretudo, pela sugestão de caminhos que, divergindo por vezes dos originalmente estabelecidos, são, frequentemente, determinantes para se atingirem os objectivos propostos;

- a participação em eventos de natureza científica, especialmente aqueles onde é possível contactar com diferentes perspectivas de análise de problemas metrológicos;
- o acesso a bibliografia de grande relevância, integrando neste contexto o recurso à *internet* como veículo de grande potencial;
- o relacionamento profissional e os recursos em instrumentação e computação disponibilizados pelo LNEC;

De igual forma, algumas dificuldades encontradas devem ser apontadas:

- em muitas matérias, verifica-se que a informação que contém os fundamentos, se encontra em publicações relativamente antigas e, por essa razão, nem sempre fáceis de obter ou consultar;
- a replicação de informação com a mesma origem é, frequentemente, transcrita ou interpretada de forma distinta pelos seus autores, nem sempre de forma apropriada;
- a existência de um número significativo de textos que numa abordagem do tipo generalista de matérias complexas, não permitem aos seus leitores a reprodução dos processos que determinam a sua compreensão;
- o acesso atempado a bibliografia que, dentro da sua diversidade, seja, de facto, de referência; este acesso condiciona fortemente as soluções que se adoptam, podendo representar a diferença entre o sucesso e o insucesso dos resultados;
- a replicação em bibliografia de exemplos que, embora utilizados exhaustivamente, são pouco elucidativos de conceitos, formulações e técnicas;
- a utilização de recursos suportados na *internet* encontra, frequentemente, informação cujo conteúdo é incompleto, impreciso ou incorrecto requerendo, por isso, discernimento para seguir as linhas de investigação mais apropriadas.

A estes aspectos, poder-se-ão acrescentar duas reflexões complementares acerca de condições que permitiriam uma mais fácil concretização das actividades inerentes ao presente trabalho: o dispor-se, *ab initio*, de uma base de programação estruturada e de rotinas validadas para funções de cálculo ou para validação de rotinas desenvolvidas (*in-house*); e a preparação prévia e cuidada das actividades experimentais e de simulação numérica permitindo diminuir drasticamente o consumo de tempo.

## **1.4 Organização da tese**

A tese está organizada em 10 capítulos, cujo conteúdo essencial se apresenta a seguir.

No presente capítulo, faz-se uma exposição, em traços gerais, do conteúdo e dos objectivos da tese, a sua estrutura e organização, a natureza de cada capítulo e a sua articulação com os objectivos a atingir. Adicionalmente, fazem-se algumas reflexões que se afiguram relevantes no contexto dos estudos desenvolvidos.

O capítulo 2, apresenta uma perspectiva global da Metrologia. Partindo das suas raízes e evolução histórica, passando pelos elementos da fundamentação e da axiomática subjacentes à constituição deste ramo da ciência (com destaque para aqueles que suportam a teoria representacional da medição e a definição de escala de medição), bem como, a apresentação de elementos preponderantes no seu desenvolvimento, em particular, o sistema coerente de unidades e o Vocabulário Internacional de Metrologia.

O capítulo 3 apresenta uma caracterização do elemento de interface entre a medição e o resultado da medição: a instrumentação. Neste contexto, é atribuída uma importância particular à caracterização metrológica em virtude de, mediante a análise da instrumentação, ser possível avaliar o respectivo desempenho e, em particular, quantificar a sua inexactidão, a qual dá origem ao erro e à incerteza de medição.

O capítulo 4 apresenta conceitos<sup>2</sup> da Estatística e da Teoria das Probabilidades que sustentam os fundamentos da interpretação dos fenómenos estocásticos que caracterizam o processo de medição e, em particular, a interpretação dos resultados experimentais (como os expostos nos capítulos 8 e 9).

No capítulo 5 apresenta-se o estado dos conhecimentos em Metrologia, fazendo-se uma descrição crítica da evolução recente dessas facetas (formalismo e abordagem probabilística da medição, a instrumentação, os Sistemas de Gestão da Qualidade, a incerteza de medição e as metodologias para a sua avaliação, entre outras).

---

<sup>2</sup> Em particular, encontram-se neste cap. as definições formais de variável aleatória, experiência, probabilidade e espaço de probabilidade, o enquadramento de funções densidade de probabilidade e distribuição cumulativa essenciais para o entendimento de conceitos como o de “momento” (média, variância, desvio-padrão e outros) de aplicação generalizada nos capítulos seguintes, a caracterização das famílias paramétricas de distribuição de probabilidade mais usuais em Metrologia, os elementos fundamentais da observação do comportamento de variáveis aleatórias pela amostragem experimental, determinantes na identificação dos requisitos de aplicação e, finalmente, uma introdução ao conceito de intervalo de confiança utilizado na expressão das incertezas no resultado da medição.

O capítulo 6 trata os fundamentos da simulação e análise numérica usando o método de Monte Carlo. Nele, encontra-se uma descrição da origem deste método e das suas etapas, é caracterizada a diversidade de soluções existentes e são apresentados argumentos que sustentam a selecção, pelo autor, de ferramentas aplicadas no desenvolvimento dos estudos experimentais e na avaliação dos resultados obtidos.

No capítulo 7, são descritas, detalhadamente, as metodologias e os respectivos procedimentos de avaliação da incerteza de medição: a via analítica; a via do GUM; e a via da MCS. Simultaneamente, apontam-se condições e requisitos, e discutem-se potencialidades e fragilidades. No que se refere à MCS, a descrição é complementada com a inclusão de critérios e de resultados de teste relativos aos recursos utilizados.

No capítulo 8, efectua-se uma análise comparativa dos resultados experimentais obtidos utilizando as metodologias GUM e MCS, recorrendo a um conjunto de processos de medição, sendo de salientar que dois deles reproduzem descrições obtidas directamente de documentos<sup>3</sup> que suportam a aplicação do GUM em laboratórios metrológicos. Um terceiro, envolve uma instalação laboratorial de grande dimensão dedicada (entre outras funções) à calibração de caudalímetros pelo método gravimétrico. Este último tem o interesse adicional de representar um caso onde o processo de medição materializa a definição primária da grandeza caudal e, conseqüentemente, quer o conhecimento da incerteza com a máxima exactidão, quer o requisito de minimização dos efeitos que determina essa incerteza de medição adquirem uma elevada importância.

No capítulo 9 apresenta-se um conjunto complementar de estudos envolvendo processos de medição com o intuito de evidenciar o potencial da MCS enquanto via para a avaliação das incertezas de medição não só em circunstâncias onde concorre com as metodologias analítica e do GUM, mas também em circunstâncias onde ferramentas alternativas de avaliação não estão disponíveis.

Os exemplos apresentados ilustram num primeiro caso, um modelo não-linear que não cumpre estritamente as condições de aplicação do GUM, embora se admita a sua utilização enquanto aproximação, destacando-se a forma e o conteúdo da informação disponibilizada pela MCS; num segundo caso, a transformação de coordenadas aplicando funções trigonométricas, num contexto em que a variável independente é espacial, utilizando-se este exemplo para apontar limitações da aplicação da via analítica; num terceiro caso, a aplicação

---

<sup>3</sup> O próprio GUM, do qual se extrai um exemplo de aplicação do seu anexo H e um guia elaborado pela EA dedicado à aplicação da metodologia preconizada pelo GUM num processo de medição envolvendo a calibração de balanças manométricas de massas suspensas, no domínio da grandeza pressão.

da metodologia MCS a processos de medição que envolvem uma análise do tipo matricial sem constrangimentos, constitui um exemplo de avaliação de incertezas de medição numa situação onde os modelos matemáticos possuem relações implícitas e cujo tratamento envolve algum formalismo mais elaborado.

Finalmente, no capítulo 10, são apresentadas as conclusões e referidas algumas linhas de orientação para desenvolvimento futuro, alargando o âmbito do estudo iniciado para matérias que possam aprofundar o conhecimento, os procedimentos e técnicas, e a qualidade dos resultados relativos à avaliação de incertezas de medição.

Os anexos contêm elementos adicionais que visam facilitar a compreensão de algumas das matérias tratadas no corpo principal do documento e simplificar o acesso a informação cujo detalhe não se encontra habitualmente acessível.



## 2. UMA PERSPECTIVA DA METROLOGIA

### 2.1 *Evolução histórica*

A Metrologia é um ramo da ciência que, de acordo com a definição que se encontra no Vocabulário Internacional de Metrologia [VIM – IPQ (1996)], se debruça sobre a “*Ciência da medição*” e *compreende todos os aspectos, tanto teóricos como práticos, relativos à medição, quaisquer que sejam a sua incerteza e o domínio da ciência e da tecnologia a que se referem*”. Desta definição ressaltam dois elementos caracterizadores da Metrologia: a *medição* como objectivo do estudo e o carácter transversal na ciência.

O conceito de medição apresentado resulta da evolução observada ao longo da História e da acumulação do conhecimento que se deu no decurso dessa mesma evolução.

As raízes da sua estrutura conceptual encontram-se desde a antiguidade até aos dias actuais, e tem origem em factores diversificados que surgiram no início da organização humana em pequenas sociedades. Esses factores encontram-se associados, por exemplo, ao desenvolvimento das tecnologias de suporte à actividade agrícola, à arquitectura e à construção de engenhos, entre outros. A proliferação das relações comerciais entre os povos suscitou, também, uma necessidade natural de existência de meios de quantificação, sobretudo, com vista à sua tradução posterior em trocas envolvendo uma componente de natureza fiduciária.

Estas e outras razões, permitem que se compreenda que, logo nos primórdios da humanidade, se encontrem organizados alguns dos fundamentos da medição, traduzidos quer na vertente da quantificação de conjuntos quer na introdução de “padrões” rudimentares.

A concepção de artefactos dedicados à pesagem de objectos, para servirem de contentores volumétricos, para a observação do tempo e para “materializar” e “padronizar” comprimentos, são alguns dos exemplos primários encontrados em vestígios arqueológicos que remontam a 6000 AC. Na sequência da evolução dos conceitos associados, acompanhada da necessidade das autoridades imporem regras inibidoras das fraudes nas transações comerciais, resultou a evolução posterior, que levou à constituição de “padrões” que se podem integrar no contexto do que hoje se denomina “Metrologia Legal”. Esses vestígios, identificados desde cerca de 3000 AC, apontam para a constituição de padrões rudimentares de “unidades físicas” que

permitted to guarantee the “honesty” of a certain type of transaction. The “carat”<sup>1</sup> is one of these primitive units that still subsist in actuality – since then, associated with the transaction of noble metals and precious stones.

Impulsed by commercial exchanges and by the development of the great empires of antiquity, accompanied by the successive cultural assimilation, one observes the appearance of a structure of standards that, frequently, has strong conceptual similarities between them, in the civilizations of Sumeria and Babylonia, in Egypt, in Greece, in Rome and in the civilizations of the middle and far east. In all of them one finds archaeological objects with the function of defining “quantities” of reference for application in the “measurement” – of weights, of length, of time and, in some cases, involving “magnitudes” of conception more elaborated, such as volume, area, level and angle.

Despite the necessities being common, many of the objects of reference produced were developed or adapted in a local logic. For example, the definition of length was: the “pechy real” – about 0,524 m – in Ancient Egypt; the “dactylos” – about 0,530 m – in Babylonia; the “pous” or “pé” – whose dimension varies between 0,3083 m and 0,2970 m – in Ancient Greece. In Ancient Rome, the Greek measure was adopted modifying only the terminology [EIM (2004)].

Despite this distinction, these rudimentary concepts of Metrology contributed to the fact that some of these civilizations managed to concretize works with a high degree of exactness<sup>2</sup>, even for the present times.

Other foundations of Metrology find their origin in antiquity referring to, in particular, the use of subdivisions of standards – already then a common practice – well as the use of arithmetic divisions that, even today, are used. As an example, the recourse to binary, octal, decimal, duodecimal, hexadecimal and sexagesimal, among others, and even to their composition (the civilization of Sumeria had a complex system in which the bases 6, 10 and 60 were combined).

Currently, the base 10 – of influence of the Arabic arithmetic – is dominant, but, nevertheless, one finds reflected reminiscences of other alternatives in the definition of some

---

<sup>1</sup> O “carat” cuja abreviatura utilizada é ct., é utilizada como unidade de medida de peso para pedras preciosas, sendo o seu valor equivalente a 200 mg. De notar que, por vezes, se suscita alguma confusão com outra unidade designada por “karat”, a qual, se aplica ao grau de pureza de uma liga que inclui uma proporção do elemento: ouro. O ouro puro contém 24k, a designação 14k, por exemplo, significa que 14/24 partes do balanço da liga em causa é constituída por ouro.

<sup>2</sup> Por exemplo, na construção da grande pirâmide de Keops, no Antigo Egipto, e recorrendo ao apoio da Astronomia, atingiu-se uma variação não superior a 2 cm no alinhamento das faces da base, com uma extensão de cerca de 230 m; a diferença angular de nivelamento entre os 4 cantos da sua base é da ordem de 5”.

grandezas (a medição do tempo admite múltiplos cuja contagem se concretiza numa base de “12” ou “24” – na subdivisão do dia em horas – e de 60 – na subdivisão de horas e de minutos, o mesmo acontecendo com a medição angular). Por outro lado, razões de conveniência conceptual, impõem o recurso à base-2 e seus múltiplos, verificada na estrutura dos computadores (de base binária ou das suas potências sucessivas: base-4, base-8, base-16, base-32, etc.).

É na Grécia Clássica que se encontram as primeiras abordagens visando a compreensão dos fundamentos filosóficos da medição. A Escola Pitagórica procurou estabelecer uma relação entre os números, a aritmética e a realidade, Platão estudou a análise de magnitudes e Aristóteles, na sua “Metafísica”, analisou os conceitos envolvidos na medição.

A Idade Média introduziu um elemento perturbador das estruturas “métricas” pré-existentes. Com a conquista e fragmentação dos grandes impérios e a consequente perda do factor de unificação inerente à organização imposta por estes, as estruturas “métricas” foram sendo assimiladas de forma diferenciada, diferente de local para local.

Apesar dos esforços desenvolvidos no sentido da estabilização dos “padrões”, nomeadamente, durante o reinado de Carlos Magno (na transição do Séc.VIII para o Séc. IX), a sua proliferação foi crescendo, certamente potenciada pela natureza limitada das relações sociais baseadas no feudalismo. Com início nesse período e prolongando-se até meados do Séc. XVIII, encontra-se uma extraordinária diversidade de “padrões” (em finais do Séc. XVIII, um levantamento da situação em França demonstrou a existência de mais de 800 designações e cerca de 250 000 unidades de pesos e medidas [Alder (2002)]), muitos dos quais associado à morfologia humana, traduzindo com vigor a ideia do sofista grego Protágoras de que “o Homem é a medida de todas as coisas”. São exemplos, a dimensão do polegar, do palmo, do braço, do pé, do cúbito e da distância entre os braços esticados.

Este período da História contém estes aspectos negativos associados à diversificação dos padrões mas, também, aspectos positivos que devem, igualmente, ser realçados. Um deles foi a procura, iniciada nessa época, de se promover a difusão dos “padrões” nas comunidades da forma mais acessível possível, o que foi conseguido – a nível local – com algum sucesso. A solução encontrada para colocar o “padrão” numa posição privilegiada e de fácil acesso traduziu-se, predominantemente, na utilização de locais de feiras medievais e das edificações de natureza religiosa para esse efeito – é comum encontrar em praças de cidades dessa época e em muitas das catedrais Góticas da Europa, junto dos pórticos da sua fachada principal,

barras de ferro incrustadas e baixos relevos, cuja dimensão linear servia como “padrão” e, em particular, para promover a sua disseminação por comparação. Um exemplo ilustrativo encontra-se em Dubrovnik (República da Croácia), onde o “padrão” era materializado na dimensão do braço de uma estátua de cavaleiro medieval que se encontra colocada na sua praça central (Fig. 2.1).

Até tempos recentes, o espaço de referência privilegiado foi o religioso (igrejas, catedrais, etc.), tendo adquirido particular importância no caso da variável “tempo”. Com efeito, desde o desenvolvimento do relógio mecânico - em meados do Séc. XIV - que este foi adoptado para aviso público dos serviços religiosos, recorrendo aos sinos, acabando por regular, localmente, os horários de muitas outras actividades.



*Figura 2.1: Padrão dimensional (Dubrovnik, Croácia)*

No âmbito da Metrologia Legal, utilizou-se o espaço eclesiástico com a finalidade de manutenção de padrões dispondo os membros do clero de autoridade para a resolução de conflitos de natureza metrológica (usando padrões como os “pesos-legais”).

Esta diversidade de “padrões” traduziu-se em dificuldades, por vezes inultrapassáveis, no que refere à conversão das “quantidades”, facilitando as fraudes nas transações comerciais e dificultando o desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico. Estas razões eram mais do que suficientes para suscitar a ideia de produzir padrões de medição invariáveis e suportados em fenómenos naturais e universais, como defendeu Condorcet em 1775.

Em 16 de Fevereiro de 1791 foi formada uma comissão, constituída por Borda, Condorcet, Laplace, Lagrange e Monge com o objectivo de desenvolver um sistema de medição uniformizado. As três hipóteses de “referência” apontadas eram: o comprimento de um pêndulo sujeito a um período de 1 segundo à latitude de 45°; o comprimento de  $\frac{1}{4}$  do equador; e o comprimento de  $\frac{1}{4}$  de meridiano terrestre – desde o pólo norte ao equador.

A primeira opção foi afastada por envolver a grandeza tempo e pelas diferenças locais de natureza gravitacional. Foi considerada a terceira opção, do quarto de meridiano, por corresponder a uma solução mais simples que a segunda. A tarefa prática, atribuída aos

Geodestas Pierre-François Mechain e Jean-Baptiste Delambre, envolveu o trabalho de triangulação que decorreu durante 7 anos, entre Dunquerque e Barcelona.

Desta forma, em 26 de Março de 1791 definiu-se o metro como equivalente “à *décima milionésima parte de um quarto de meridiano terrestre*”.

O sistema métrico decimal foi introduzido em 7 de Abril de 1795, pela lei “Sur Poids et Mèures”. A unidade de massa foi definida a partir de um decímetro cúbico de água – matéria corrente, escolhida para possibilitar a sua fácil reprodução – correspondendo a um quilograma. Os primeiros padrões de comprimento e massa foram realizados em 1799 e depositados nos “Arquivos da República” em Paris. Entendendo a importância deste facto, Napoleão referindo-se de forma premonitória acerca da “Base du Système Métrique Decimal” que “*as conquistas vêm e vão, mas este trabalho perdurará no tempo*” [Alder (2002)].

Após anos de apuramento dos processos de consolidação e de disseminação destas grandezas de base, foi criada uma comissão de cientistas, por ocasião da Exposição Universal de Paris de 1867, seguindo-se a fundação do BIPM (Bureau International des Poids et Mèures) em 1875, no seguimento da Conferência Diplomática Internacional de 20 de Maio de 1875, em Versalhes, onde teve origem, também, o Tratado Internacional “Convenção do Metro” e do qual foram signatários 17 países<sup>3</sup>. Actualmente, são 51 os países membros e 17 os associados.

Uma das iniciativas subsequentes à criação do BIPM foi a de realizar (em 1889 e 1890) e distribuir cópias dos padrões fundamentais entre os estados signatários, tendo sido realizados 42 protótipos do quilograma e 30 protótipos do metro. A Portugal foram atribuídos, por sorteio, os protótipos com o n.º 10.

O desenvolvimento científico e tecnológico posterior tem permitido, desde então, uma notável evolução no que se refere à exactidão dos padrões, bem como, à sucessiva adopção de fenómenos que sustentam essas definições.

É importante notar que, por motivos económicos e políticos, se desenvolveu em paralelo, de forma intencional e fora do âmbito da “Convenção do Metro”, um sistema de unidades designado por “British Imperial System”, conhecido actualmente como “Sistema Imperial (de

---

<sup>3</sup> Portugal é membro signatário fundador, tendo o tratado sido assinado por José da Silva Mendes Leal. Os 17 países signatários foram: Rússia, Alemanha, Áustria-Hungria, Bélgica, Brasil, Confederação Argentina, Dinamarca, Espanha, Estados Unidos da América, França, Itália, Peru, Portugal, Suécia e Noruega, Suíça, Turquia e Venezuela.

Medidas)”, e cuja utilização é comum, sobretudo, em países da comunidade de Países de língua inglesa<sup>4</sup>.

Actualmente, coexistem diversas entidades que regulam parceladamente as questões de harmonização da Metrologia, estabelecendo uma ligação com a estrutura gerada a partir da “Convenção do Metro” (as suas facetas são resumidas no diagrama da Figura 2.2).

A introdução do “Sistema Internacional de Unidades” (SI) beneficiou de outros factores como a evolução no conhecimento científico e, também, da criação de dispositivos experimentais, processo fortemente desenvolvido desde o Renascimento. Este progresso permitiu a evolução dos processos de medição, no início puramente mecânicos, para outros tipos de processo de interacção com as mensurandas (envolvendo, por exemplo, fenómenos da Óptica, da Electricidade e do Magnetismo).

Este alargamento do espectro de recursos permitiu o incremento da sua complexidade e da sua potencialidade (um caso exemplar é a introdução, no Séc. XIX, dos transdutores eléctricos e magnéticos, cuja importância é determinante para a medição de grandezas físicas). Esta evolução justifica a diversidade de domínios que constitui, hoje, o âmbito de intervenção do SI: Mecânica, Electromagnetismo, Calor, Radiação, Óptica, Quantidade de Substância, etc.

Outro elemento indissociável desta evolução, observada no Século XX, resulta da introdução da electrónica e das tecnologias da informação. Em particular, o papel do novo elemento – o computador digital – na ciência actual é indiscutível.

Finalmente, refira-se que todo este potencial teve e tem como base privilegiada o formalismo matemático, desde sempre essencial para o aprofundamento e consolidação dos conhecimentos de base científica.

A Metrologia beneficiou destas diversas contribuições, cujo reflexo se observa na evolução das definições fundamentais das grandezas, na estrutura do SI e no suporte instrumental que as permitem concretizar.

---

<sup>4</sup> Esta situação tem provocado incidentes e acidentes importantes no passado e na actualidade, como é um exemplo, o acidente da sonda climática orbital enviada a Marte pela NASA, cuja destruição em 1999, segundo relatório da NASA [NASA, 2001], se deveu ao facto de um dos fornecedores utilizar o *sistema imperial de unidades* provocando um erro grosseiro no cálculo da distância de aproximação. Este erro custou 250 milhões de dólares. É reveladora a transcrição da parte final desse relatório: “NASA is the Nation’s most visible science and technology Agency, and is involved in highly publicized cooperative with a world that almost exclusively uses the metric system. Certainly an argument could be made that as the nations symbol of technological prowess, NASA has a role in promoting acceptance and use of the metric system. We believe the Agency should reassess its conversion to the metric system and determine the most appropriate approach for the Agency to successfully transition to the metric system”.

Também pelas razões apresentadas, se compreende que a estrutura do BIPM que tem a responsabilidade de gerir a informação de interesse neste meio, tenha sofrido um crescimento nas suas valências, adquirindo uma dimensão que a Figura seguinte procura ilustrar.

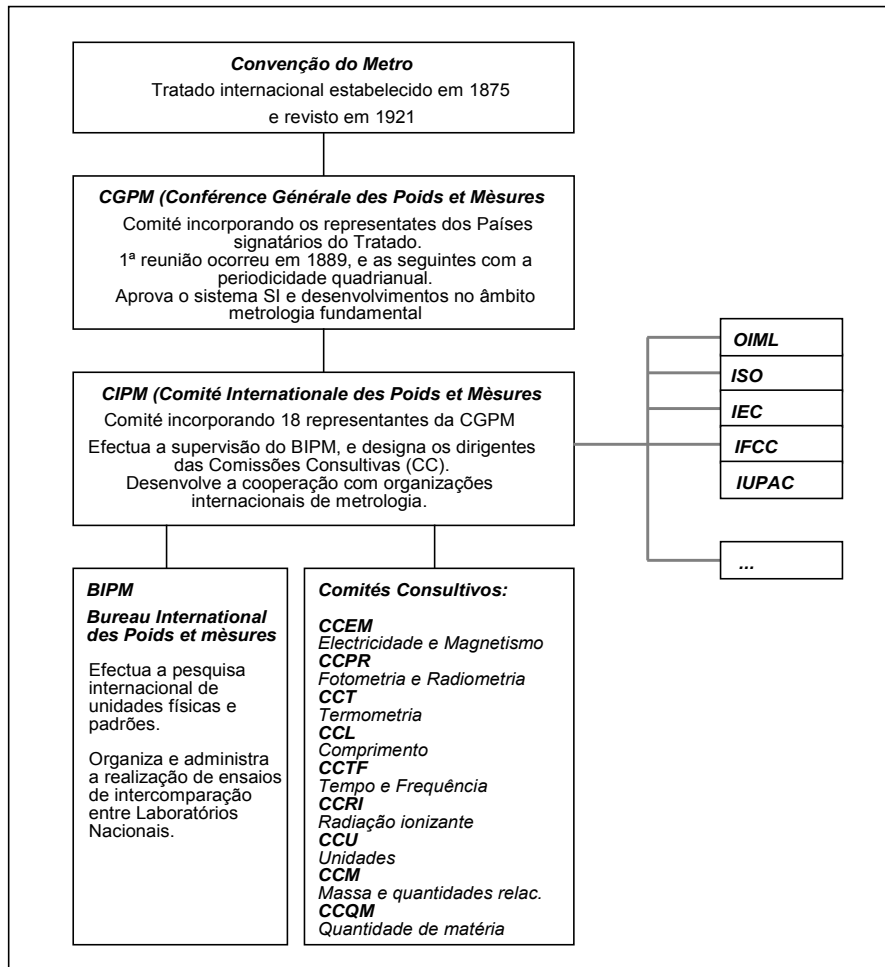


Figura 2.2: Orgânica desenvolvida a partir da “Convenção do Metro”

Nesta descrição da evolução científica e tecnológica, determinante para o desenvolvimento da Metrologia, encontram-se os argumentos que permitiram a modificação do estatuto deste ramo da Ciência, do mero enquadramento técnico/tecnológico para outro grau de importância e atenção. Como referiu L. Finkelstein, um dos percursores dos estudos contemporâneos nesta matéria, acerca do objecto da Metrologia “*A medição é o método mais fundamental da Ciência, concretizando o objectivo da investigação científica que sucede à descrição empírica dos fenómenos*”.

## 2.2 Sobre a Teoria e a Filosofia da medição

A Metrologia é um ramo da ciência cujo objecto é a medição de grandezas ou seja, recorrendo à definição proposta no VIM (1994), consiste “*no conjunto de operações que têm por objectivo determinar o valor de uma grandeza*”.

A problemática da medição nem sempre possuiu a importância e a atenção que tem na actualidade. Com efeito, é apenas no fim da primeira metade do Séc. XX que surgem as primeiras rupturas com a orientação clássica da Teoria da Medição motivadas, nomeadamente, pela intervenção das Ciências Sociais e do Comportamento.

Sucedendo às novas ideias introduzidas por Bentham e Pareto, encontram-se intervenções de carácter científico sobre esta matéria, por von Neumann e Morgenstern (1944), Stevens (1946, 1951 e 1959), Torgerson (1958), Tarski (1954), Suppes e Zinnes (1965) e Pfanzagl (1968), debruçando-se sobre questões como a formulação axiomática, os fundamentos e a Teoria representacional da medição Krantz *et al.* (1971).

Estes trabalhos tiveram uma particular difusão e suscitaram o interesse na comunidade científica, tendo influenciado os trabalhos percussores de Finkelstein e Sydenham, os quais, a partir dos anos 70, constituíram a estrutura e a fundamentação da Teoria e da Filosofia da Medição que suportam o estado actual de conhecimentos deste ramo da Ciência.

O ponto de partida para uma síntese dos conhecimentos é, naturalmente, a definição informal de “medição” que nos é apresentada por Finkelstein (1982): “*a medição é o processo de atribuição empírica de números a propriedades dos objectos e eventos do mundo real de forma a concretizar a sua descrição*”.

Este processo deverá ser *objectivo*, o que significa que essa atribuição de números a determinada *propriedade*, dentro dos limites de erro envolvidos, deverá ser independente do observador e, *empírico*, por resultar da observação.

No conceito apresentado, são identificáveis dois planos: o das propriedades e suas manifestações e o da sua representação numérica. A medição serve para estabelecer um mapeamento entre esses dois planos, de uma forma inequívoca (entenda-se unívoca) e que permita a sua comparação com outras manifestações da mesma propriedade.

Esta finalidade é conseguida introduzindo o formalismo da *Teoria representacional da medição*, cujos fundamentos se baseiam em Pfanzagl (1968) e em Krantz *et al.* (1971) e se



encontram descritos detalhadamente em Finkelstein (1982), (2003). Este formalismo é constituído por quatro condições:

- a) um *sistema relacional empírico* correspondente a uma *qualidade*;
- b) um *sistema relacional numérico*;
- c) uma *condição de representação*;
- d) uma *condição de unicidade*<sup>5</sup>.

A interpretação do significado de *sistema relacional empírico* tem como base o conceito de *qualidade*, designado neste formalismo por  $Q$  (por exemplo: comprimento, massa, etc.), do qual, se podem observar manifestações individuais,  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ . Estas, podem-se agrupar num conjunto onde se representam todas as manifestações possíveis.

$$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots\} \quad (2.1)$$

Em paralelo, Finkelstein define um outro conjunto<sup>6</sup>,  $\Omega$ , que contém classes de objectos, representando todos os *objectos* que possuem manifestações de elementos de  $Q$  (por exemplo, no caso da *qualidade* em causa ser o “comprimento”, uma “classe” ou “categoria de objectos” com manifestações dessa qualidade pode agrupar os padrões de materialização de comprimento). A sua representação é dada em (2.2).

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots\} \quad (2.2)$$

Considerando, adicionalmente, que existe em  $Q$  um conjunto  $\mathcal{R}$  de relações empíricas entre as manifestações  $q_i$ , descrito por (2.3),

$$\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n\} \quad (2.3)$$

Define-se um *sistema relacional empírico*,  $\mathcal{D}$  que descreve as manifestações da *qualidade* de interesse e as relações empíricas dessas manifestações.

$$\mathcal{D} = \langle Q, \mathcal{R} \rangle \quad (2.4)$$

A segunda condição, de existência de um *sistema relacional numérico*, parte da consideração de que  $N$  representa uma classe de números e  $\mathcal{P}$  um conjunto de relações definidas nesse conjunto  $N$ ,

<sup>5</sup> Tradução do autor de “*uniqueness*”.

<sup>6</sup> Embora este conceito não tenha uma utilização posterior significativa nesta secção, ele constitui parte integrante do formalismo de base introduzido por L. Finkelstein.

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n\} \quad (2.5)$$

sendo o *sistema relacional numérico*,  $\mathcal{N}$ , uma descrição da classe de números e das suas relações (2.6) – uma forma comum de exprimir este sistema relacional numérico  $\mathcal{N}$  consiste em o fazer traduzir no conjunto de número reais.

$$\mathcal{N} = \langle N, \mathcal{P} \rangle \quad (2.6)$$

A terceira condição, designada como *condição de representação*, traduz-se num requisito para a medição, reflectindo uma correspondência entre as manifestações observadas de uma determinada *qualidade* e os elementos de um *sistema relacional numérico*, de tal forma que se possa constituir uma implicação mútua entre as manifestações da *qualidade* (referente) e as suas imagens no conjunto de representação numérica.

Este relacionamento, define a “medição”, como uma *operação empírica objectiva* (2.7), interpretando que o sistema  $\mathcal{D} = \langle Q, \mathcal{R} \rangle$  é sujeito a um mapeamento homomórfico em  $\mathcal{N} = \langle N, \mathcal{P} \rangle$ . Essa tradução, através da operação  $M$ , relaciona as manifestações da *qualidade* com uma classe de números,

$$M : Q \rightarrow N \quad (2.7)$$

e a operação  $F$  relaciona as relações entre as manifestações  $\mathcal{R}$  com as relações definidas na classe de números  $\mathcal{P}$ ,

$$F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P} \quad (2.8)$$

o que se pode associar, a um mapeamento “um-a-um” de elementos cujo domínio é  $\mathcal{R}$  e cujo alcance é  $\mathcal{P}$  (a noção de mapeamento traduz a ideia prática de escala associada à quantificação de determinada *qualidade*, ou de “valoração das manifestações” dessa *qualidade*). A particularização da operação  $F$ , permite a expressão individual de números como função das relações empíricas (2.9).

$$P_i = F(R_i); P_i \in \mathcal{P}; R_i \in \mathcal{R} \quad (2.9)$$

Numa perspectiva pictórica, este relacionamento entre conjuntos pode ser ilustrado usando o diagrama da Figura (2.3) introduzido por Finkelstein (1975).

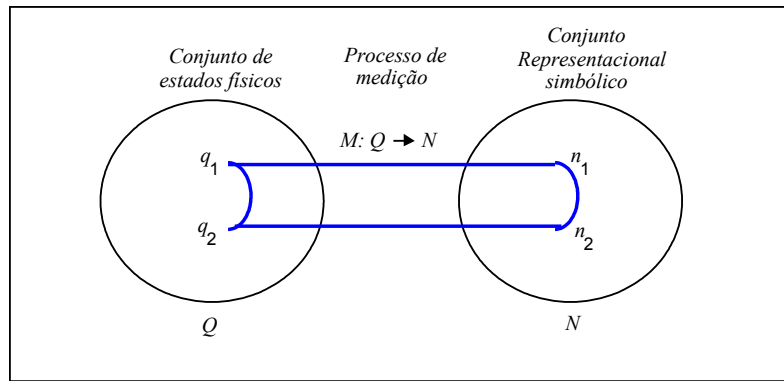


Figura 2.3: Modelo da Teoria de Conjuntos aplicado ao processo de medição

A quarta condição, dita *condição de unicidade*, resulta de se considerar que a *condição de representação* pode ser válida para mais do que um mapeamento  $M$ , correspondendo à possibilidade de se admitir a transformação de escalas relativas a uma propriedade – *qualidade* – sem que essa operação invalide as condições de cada representação. Esta *condição de unicidade* define, portanto, as classes de escalas de transformação, para as quais, a condição de representação é válida.

Dentro desta estrutura formal, as condições apresentadas quer para as relações estabelecidas quer para o mapeamento apontado, são compreensíveis num contexto determinístico. Consta-se, no entanto, pelo recurso à observação experimental, que a realidade envolve uma presença permanente do erro.

Com base nesta interpretação, foi introduzida uma condição adicional por Leaning e Finkelstein (1979): *A Incerteza*. Esta nova condição, introduzida na *Teoria representacional da medição*, é suportada nos conceitos de *sistema relacional probabilístico* e de *homomorfismo probabilístico*.

Com esta condição Finkelstein procura introduzir, com base no formalismo anterior, uma base lógica de análise de *qualidades* enquanto *sistemas relacionais empíricos*, extraído dessa análise o conceito de “escala de medição”. Para tal, apresenta o conceito de “medição extensiva”, que se define como a *medição de grandezas físicas, para as quais, se pode admitir a construção de uma operação com as propriedades e o formalismo da adição*.

A componente formal que suporta esta *Teoria de construção de escalas* foi iniciada com os trabalhos percursos de Helmholtz (1887), de Hölder (1901) e de Campbell (1920), com desenvolvimentos de sistemas de representação axiomática propostos por Pfanzagl (1968), Krantz *et al.* (1971) e aprofundados por Finkelstein (1982).

O estabelecimento de uma escala para um determinado *sistema relacional empírico*,  $\mathcal{D}$ , que estabeleça uma relação ordenada entre a classe de objectos  $\Omega$  que exibem manifestações da *qualidade*,  $Q$ , conjuntamente com uma operação  $\circ$  de combinação desses objectos, admitindo relativamente a  $\mathcal{D}$  o formalismo das propriedades da adição, constitui a base do que Finkelstein designa por “Escala extensiva da medição física” (por exemplo, a junção de dois objectos, cada qual com um “valor” de comprimento podem ser associados entre si, daí resultando um valor de comprimento combinado, cuja regra é a de adição, sendo representável numa escala de “comprimento” com uma relação de proporcionalidade relativamente aos “valores” individuais que o originam).

Acresce a essa base de desenvolvimento, a necessidade de estabelecer um procedimento operacional aplicável ao conjunto de objectos  $\Omega$  que possuem manifestações que se integram em  $\mathcal{D}$ , uma relação de equivalência empírica “ $\sim$ ” e uma relação transitiva empírica “ $\prec$ ”, constituindo um *sistema ordenado*  $\langle Q, \sim, \prec \rangle$  (por exemplo, um sistema ordenado na recta dos números reais, onde a relação de equivalência corresponde à igualdade e a relação de transitividade a relação “menor que”,  $<$ , pode-se apresentar como:  $\langle \mathbb{R}, =, < \rangle$ ).

Finalmente, a estrutura da escala fica completa (no contexto em causa, i.e., relativo a uma “escala extensiva”) incluindo nessa definição a operação de combinação dos objectos,  $\circ$ , relativamente à respectiva expressão da qualidade em cada caso.

Desta forma, o *sistema relacional empírico*  $\langle Q, \sim, \prec, \circ \rangle$  adquire uma estrutura com propriedades equivalentes às de um sistema relacional numérico  $\langle \mathbb{R}, =, <, + \rangle$ . Com efeito, ao dispor de uma *operação de ordenação empírica* e de uma “operação de combinação aditiva” de manifestações de determinada *qualidade*, possuem-se os elementos necessários ao estabelecimento de estrutura de uma escala.

Com base nesta estrutura, Finkelstein (1982) expõe os processos adicionais de constituição da “unidade” da escala e da constituição das suas fracções, bem como, os fundamentos das “Escala de concordância” (trad. de “matching scale”, por exemplo, uma escala baseada na concordância de cores) e das “Escala de classificação” (Trad. de “ranking scale” – por exemplo, a escala de dureza de materiais).

O desenvolvimento apresentado pressupõe o estabelecimento de um mapeamento directo entre o *sistema relacional empírico* e o *sistema relacional numérico*, o que nem sempre é

concretizável. Por isso, existe um formalismo derivado, onde este mapeamento se estabelece com recurso a outras *qualidades*, de forma indirecta (casos exemplares são as escalas de viscosidade e de densidade). Este formalismo encontra-se associado à constituição de escalas num contexto que se designa por: “medição indirecta”.

A descrição dos fundamentos de constituição deste tipo de escalas resulta, em traços gerais, de um ponto de partida que é uma *qualidade*  $\mathcal{D}_0 = \langle Q, \mathcal{R} \rangle$ , para a qual se pretende construir a “Escala de Medição”. Nesta situação, o suporte de análise de conjuntos é equivalente ao apresentado no caso da medição extensiva, embora, definido com recurso a outros *sistemas relacionais empíricos* associados a outras *qualidades* independentes da que se pretende obter:  $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n\}$  (onde  $\mathcal{D}_i = \langle Q_i, \mathcal{R}_i \rangle$ ). O mapeamento que origina a escala de representação tem uma estrutura que se apresenta na seguinte forma:

$$\mathcal{S}_i = \langle \mathcal{D}_i, \mathcal{N}_i, M_i, F_i \rangle \quad (2.10)$$

e onde cada objecto de uma classe  $w \in \Omega$  tem uma correspondência unívoca, simultaneamente, à *qualidade*  $q_0 \in Q$  e a um único elemento que integra as *qualidades*  $\mathbf{q} = \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle$  com  $q_i \in Q_i$ . O desenvolvimento deste formalismo, detalhado por Finkelstein (1982), conduz a uma estrutura de mapeamento do *sistema ordenado empírico*  $\mathcal{D}_0 = \langle Q_0, \sim, \prec \rangle$ , tal como no caso anterior.

Refira-se que este tipo de estruturação encontra-se associado ao que se designa por “medição indirecta de grandezas físicas”, obtida com base em operações funcionais multiplicativas de termos associados à medição de outras grandezas (por exemplo, a “densidade”, cujo valor se obtém a partir do rácio dos valores de “massa” e de “volume”), também designado por “medição derivada” [Krantz *et al.* (1971)], [Roussas (2005)].

Partindo deste formalismo de suporte, outros autores contribuíram para a estruturação do conceito da medição, apontando os seus alicerces numa perspectiva metodológica. Sydenham é um dos autores que aponta essa via, enraizada nos princípios do método científico introduzidos por Bertrand Russell e, com base neles, produzindo uma interpretação na perspectiva da compreensão do conceito de medição.

Seguindo a sua exposição dessa questão, admite-se que o conceito de medição se encontra associado à existência de 3 fases distintas [Sydenham *et al.* (1989)]:

- a) uma fase inicial de recolha, organização, ordenação e generalização da informação – que B. Russell aponta como a fase de observação de factos significativos;
- b) uma segunda fase onde se promove a concepção, desenvolvimento e repetição experimental – que B. Russell denomina de fase de desenvolvimento de hipóteses de teste;
- c) uma terceira fase, destinada a expressar o resultado em forma de lei científica, com base na compreensão e confiança adquiridas – que B. Russell define como dedução, em consequência das hipóteses formuladas, de leis que podem ser testadas com recurso à observação.

Nesta metodologia, a hipótese constitui um elemento associado ao conceito de “modelo”, considerado como suporte conceptual susceptível de validação, rejeição ou modificação consoante a informação obtida. Estes modelos incorporam “parâmetros”, os quais, ao assumirem valores numéricos, permitem a obtenção de resultados relativos a aplicações particulares, potenciando a sua comparação com a realidade física.

Essa capacidade de adquirir informação traduz-se numa intervenção na medição, explicando o papel central da mesma nas diferentes fases que foram apontadas, com particular incidência na intervenção na primeira fase e na terceira fase. Nesta última, onde intervém no teste e na validação dos modelos, é um elemento preponderante para a investigação científica.

Sendo o objectivo do processo de medição a aquisição de informação e, conseqüentemente, o aumento do grau de conhecimento, considera-se útil apresentar um esquema inspirado em Sydenham (1985) que traduz a influência da medição no aprofundamento e na aquisição de conhecimento.

Neste, o desenvolvimento do processo de medição implica a constituição de um sistema de medição, ele próprio, integrando um conjunto de elementos funcionais que contribuem para a sua definição. Como ponto de partida, deve ser equacionada a apresentação da sua estrutura de acordo com um modelo, o qual, pode assumir distintas vias de representação [Sydenham (1982a), (1982b)]:

- a) *linguística*, expressando o relacionamento pretendido por comunicação linguística;
- b) *física*, reprodução de uma réplica física do sistema a estudar;
- c) *icónica*, ou *gráfica*, baseada numa representação onde se expressam as relações através de grafismos (gráficos, tabelas, etc.);
- d) *matemática*, recorrendo a equações para expressar o relacionamento dos diferentes aspectos que caracterizam o sistema.

O modelo de *representação linguística*, que recorre à linguagem corrente para expressar parâmetros, suas interacções e para descrever o sistema, tem particular interesse numa fase primária onde são envolvidas relações humanas. A sua utilização é, frequentemente, complementada por métodos do tipo pictórico. Este modelo tem como principal desvantagem não ser possível produzir uma comunicação com o grau de exactidão requerido.

O modelo de *representação física*, constitui uma alternativa utilizada em situações onde a construção de uma réplica à escala possui vantagens económicas, permite a utilização directa de interacção com o sistema – por exemplo, introduzindo soluções alternativas – e representa uma alternativa ao desenvolvimento do estudo de comportamento dinâmico de sistemas. O grau de sofisticação é um elemento que depende dos objectivos da aplicação e da utilização.

O modelo de *representação icónica*<sup>7</sup>, consiste na representação de conceitos ou na descrição de matérias/assuntos mediante recurso a representações pictóricas (desenhos, figuras, imagens, etc.).

Finalmente, o modelo de *representação matemática* envolve a definição formal do relacionamento que se estabelece ente grandezas, recorrendo ao simbolismo matemático representacional. De entre outras vantagens, duas cuja importância se deve destacar são: uma profundidade de conhecimento que, muitas vezes, ultrapassa a questão observacional, adquirindo e expressando fundamentos fenomenológicos; a introdução da capacidade de “previsão”, objectivo subjacente à actividade científica.

A constituição deste tipo de modelos envolve graus de dificuldade e conteúdos de informação diferentes, verificando-se que, em geral, a modelação ocorre através de transições sucessivas entre os tipos de representação apontados, iniciando-se com representações linguísticas, passando por representações icónicas e de modelação física, de complexidade intermédia, atingindo as representações de natureza matemática, reconhecidamente, aquelas que incorporam maior detalhe sobre o desempenho mas, igualmente, as que são mais difíceis de conceber face à imperfeição inicial do conhecimento dos sistemas.

A concepção de um sistema de medição envolve, portanto, um conjunto de etapas relacionadas de forma sequencial: a “avaliação do sistema”, a caracterização da sua “extensão” e das suas “fronteiras”; a localização e identificação de “referências” ou “atributos”; e a selecção das “mensurandas”.

---

<sup>7</sup> Do grego “ikon” significando “imagem”.

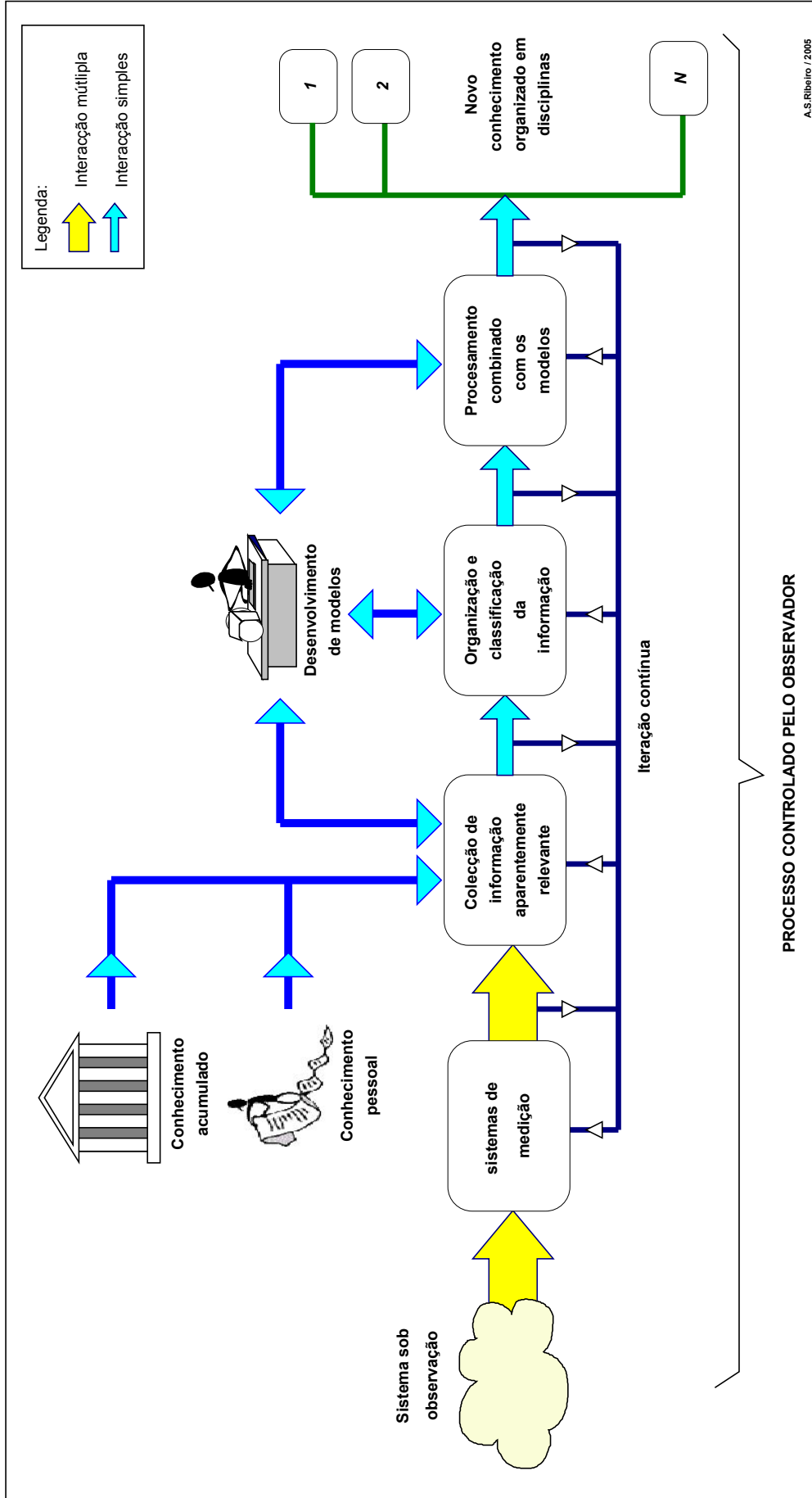


Figura 2.4: Conversão da informação obtida a partir da medição em “novo” conhecimento – inspirado em [Sydenham et al. (1989)]



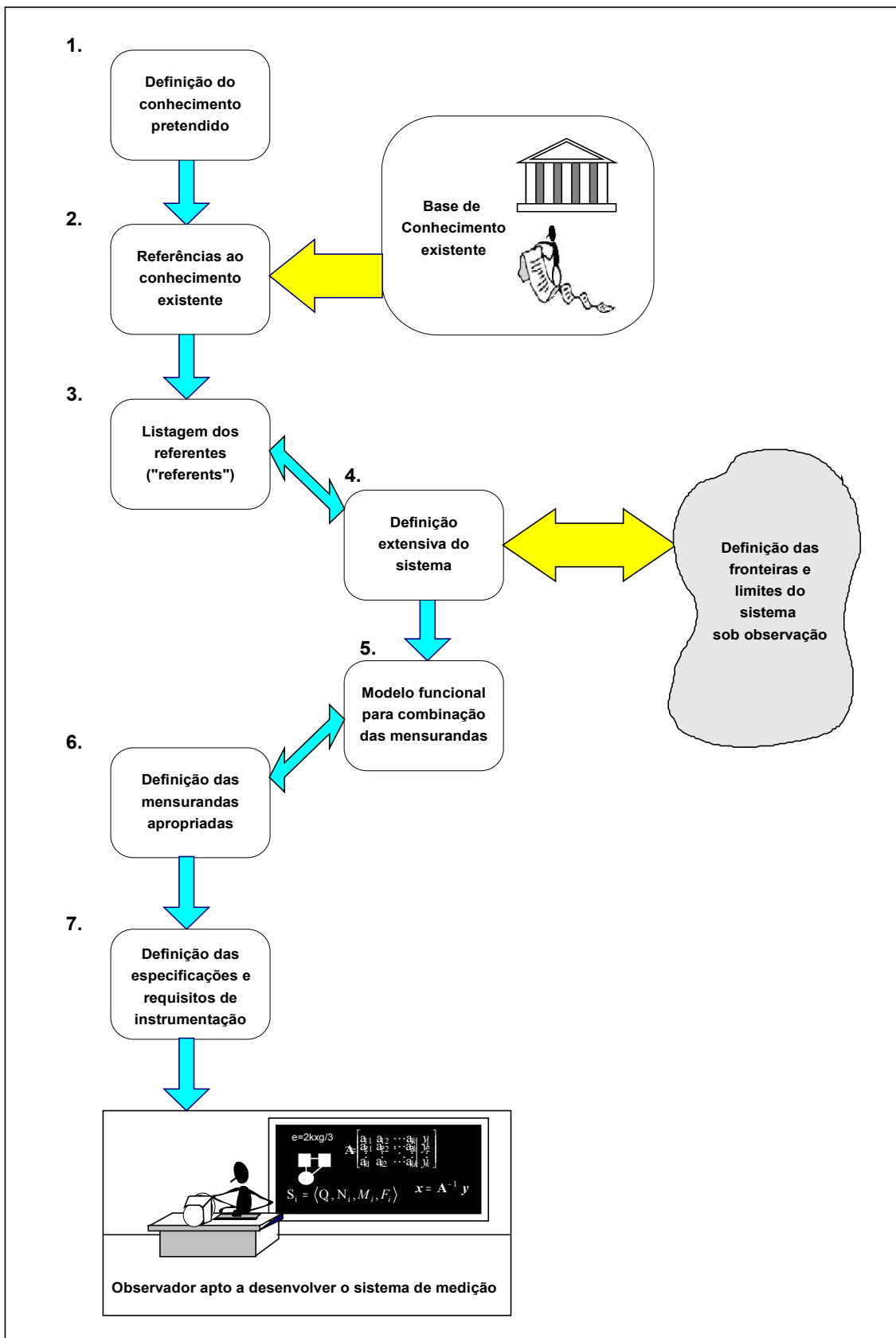


Figura 2.5: Algoritmo do processo de medição – inspirado em [Sydenham et al. (1989)]

A análise deste conjunto de elementos requer, adicionalmente, o recurso ao conhecimento existente de modelos conceptuais para combinação de mensurandas e de instrumentação capacitada para concretizar a transferência de informação pretendida, o que permite a um observador a construção do “algoritmo do sistema de medição”. No diagrama da Fig. 2.5 apresenta-se a perspectiva de Sydenham *et al.* (1989) para o referido algoritmo, no qual, se encontram as suas etapas.

A tarefa inicial consiste na definição do conhecimento que se pretende obter e na consulta/documentação de conhecimento existente sobre a matéria que sustenta a possibilidade de realização da medição (*etapas 1 e 2*).

Na fase seguinte (*terceira etapa*), estabelece-se a “lista de atributos” relevantes para o processo em causa (Sydenham designa esses atributos por “*referents*”). Deve-se notar que os atributos podem possuir distintos graus de complexidade e que, eventualmente, alguns poderão ter uma natureza qualitativa não mensurável enquanto que outros, ao contrário, podem ser mensuráveis. Esta etapa inclui a realização dessa análise.

A *quarta etapa* consiste em estabelecer a definição extensiva do sistema, efectuando o enquadramento dos “atributos” em coerência com as fronteiras do espaço de observação pretendido. Para conseguir essa coerência poderá ser necessário efectuar uma reformulação da etapa anterior, traduzindo-se no sentido bidireccional da relação exposta na Figura.

Segue-se a *quinta etapa*, na qual se procura definir o modelo de combinação de mensurandas com base na descrição extensiva do sistema observável.

Na *sexta etapa*, definem-se as mensurandas com base no modelo, havendo novamente uma necessidade de coerência desta com a etapa anterior – onde se define o modelo – uma vez que a concretização do objectivo de conversão dos *atributos* em *mensurandas* requer que os referidos “atributos” correspondam a propriedades que possam ser mensuráveis, seja de forma directa ou indirecta.

Segue-se a *sétima e última etapa*, onde se efectua a selecção de instrumentação adequada para o efeito pretendido – com base na informação acumulada no processo descrito – permitindo, finalmente, o desenvolvimento do sistema de medição.

O objectivo da medição enquadra-se, portanto, no objectivo geral de aquisição de conhecimento aplicável na compreensão de fenómenos físicos e encontra-se suportada em 4 elementos chave [Sydenham (2003)]: a “mensuranda”, o “princípio da medição” (modelo interpretativo), o “método de medição” e a “instrumentação”.

Destes elementos refira-se que, de acordo com a definição do VIM (1994), a “mensuranda” é a grandeza que se pretende submeter à medição; o “princípio da medição”, define-se como “*o fundamento científico que a suporta*”, o “método de medição”, como “*a sequência lógica de operações, descritas genericamente, utilizadas na execução de medições*”, cuja descrição pormenorizada constitui um “procedimento de medição”. Quanto ao “instrumento de medição”, a sua definição é “*o dispositivo destinado à execução da medição, isolado ou em conjunto com equipamentos suplementares*”

Todos estes elementos contribuem, de alguma forma, para a existência de perturbações que afectam o conteúdo de informação envolvido no processo de medição, determinando a impossibilidade de se obter, como resultado da medição, o “valor verdadeiro da grandeza” e, conseqüentemente, criam as condições para a introdução do conceito de incerteza de medição.

## **2.3 Sobre a terminologia do Sistema Internacional de Unidades**

### **2.3.1 Aspectos gerais**

A normalização da terminologia e das convenções associada às grandezas e unidades físicas, representou uma importante evolução no entendimento e compreensão mútuas entre os intervenientes envolvidos na sua utilização.

A constituição de uma estrutura de um sistema desta natureza (suportado em sistemas precedentes, designadamente, da mecânica – CGS e MKS, por exemplo) envolve, necessariamente, um conjunto de aspectos que sustentam a sua “coerência” – objectivo fundamental da sua construção – e a sua “racionalidade”.

Esta normalização foi proposta pela 9ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM), realizada em 1948 – Resolução n.º 6 – respondendo a uma iniciativa da União Internacional de Física Pura e Aplicada (IUPAP), ao Comité Internacional de Pesos e Medidas (CIPM), de modo a que fossem consultados os meios interessados no sentido de se estabelecer um “sistema prático de unidades de medida” por parte dos Países signatários da “Convenção do Metro” (1875, 1907, 1921).

No seguimento das propostas recolhidas, por decisão da 10ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (1954, Resolução n.º 6) e da 14ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (1971, Resolução n.º 3), foram adoptadas como unidades de base do “Sistema Internacional” (SI), as unidades das grandezas: comprimento, massa, tempo, intensidade de corrente eléctrica, temperatura termodinâmica, quantidade de matéria e intensidade luminosa.

A designação de “Sistema Internacional de Unidades”, bem como a respectiva abreviatura “SI”<sup>8</sup>, foram adoptadas na 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (1960, Resolução n.º 12).

É importante salientar que o conteúdo das decisões das CGPM, da qual Portugal faz parte, tem um carácter de recomendação<sup>9</sup>, tendo sido introduzidas em Portugal pelo Ministério da Educação em 1972 e encontrando-se, na actualidade, ao abrigo da Directiva do Parlamento Europeu e do Conselho 1999/103/CE, de 24 de Janeiro de 2000.

Dada a extensão da definição do SI, esta parte descreve apenas alguns dos aspectos de maior relevância sobre o seu conteúdo e algumas das regras para a sua expressão [Almeida (1997)]. Um complemento apropriado a esta secção envolve a consulta de bibliografia de referência específica [ISO-31 (1992, 1998)].

### 2.3.2 Definições de grandezas e unidades SI

A estrutura do SI envolve a constituição de um conjunto de “unidades de base”, sete unidades fundamentais e coerentes, consideradas independentes do ponto de vista dimensional, a partir das quais se determinam as restantes “unidades derivadas” que são utilizadas nos diferentes ramos científicos e técnicos. Os Quadros 2.1 e 2.2 resumem a informação relativa às grandezas e unidades de base.

Conjuntamente com a definição das grandezas de base, a 11ª CGPM introduziu uma categoria adicional de grandezas designadas por “grandezas suplementares”, resultante de uma indefinição na sua classificação como grandezas de base ou como grandezas derivadas. Encontram-se nesta classe o “ângulo plano” e o “ângulo sólido”. As “unidades suplementares” são, na actualidade e após deliberação da CIPM, interpretadas como “unidades derivadas adimensionais”. Nos Quadros 2.3 e 2.4 referem-se as suas definições.

---

<sup>8</sup> A sigla SI é expressa em caracteres romanos direitos e não contém pontos (i.e., não deve escrever-se S.I.).

<sup>9</sup> O estatuto de lei foi atribuído apenas em 1983, pelo Decreto-Lei n.º 427/83 de 7 de Dezembro. Foram introduzidas rectificações complementares nos Decretos-Leis n.º 320/84 de 1 de Outubro e n.ºs 222/88 e 223/88 de 28 de Julho. Estes Decretos-Lei foram revogados pelo Decreto-Lei em vigor, n.º 238/94 de 19 de Setembro, constituindo o acervo de disposições legais sobre esta matéria.

Por deliberação do Conselho de Ministros foi transposta para a ordem jurídica interna a Directiva do Parlamento Europeu e do Conselho 1999/103/CE, de 24 de Janeiro de 2000, alterando o Decreto-Lei 238/94, sob a designação de Decreto-Lei 254/2002 de 22 de Novembro. As alterações envolvidas reportam-se à adaptação face às resoluções da 19.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, nomeadamente, o alargamento da lista de prefixos do SI - relativos a múltiplos e submúltiplos das unidades do SI - e às regras de utilização prática do SI estabelecidas na norma internacional ISO 1000 (1992).

Quadro 2.1: Grandezas e Unidades de Base do SI

Grandeza			Unidade SI	
Designação	Símbolo	Dimensão	Designação	Símbolo
Comprimento	$l, L$	L	metro	m
Massa	$m$	M	quilograma	kg
Tempo	$t$	T	segundo	s
Corrente eléctrica <sup>10</sup>	$I$	I	ampere	A
Temperatura termodinâmica	$T$	$\theta$	kelvin <sup>11</sup>	K
Quantidade de matéria	$n, (\nu)$	N	mole	mol
Intensidade luminosa	$I_v$	J	candela <sup>12</sup>	cd

Quadro 2.2: Definições de Unidades de Base do SI<sup>13</sup>

Unidade	
Designação	Definição
metro	Comprimento do trajecto percorrido no vazio pela luz durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 do segundo. [17ª CGPM – 1983, Resolução n.º 1.]
quilograma	Unidade de massa igual à massa do protótipo internacional do quilograma. [3ª CGPM – 1901]
segundo	Duração de 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de cézio 133. [13ª CGPM – 1967, Resolução n.º 1.]
ampere	Intensidade de uma corrente constante que, mantida em dois condutores paralelos, rectilíneos, de comprimento infinito, de secção circular desprezável e colocados à distância de 1 m um do outro, no vazio, produziria entre estes condutores uma força igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N por metro de comprimento. [9ª CGPM – 1948]
kelvin	Unidade de temperatura termodinâmica, correspondente à fracção 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água. [13ª CGPM – 1967, Resolução n.º 4.]
Mol	Quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quanto os átomos que existem em 0,012 kg de carbono 12; quando se utiliza a mole, as entidades elementares devem ser especificadas e podem ser átomos, moléculas, iões, electrões, outras partículas ou agrupamentos especificados de tais partículas. [14ª CGPM – 1971, Resolução n.º 3.]
candela	Intensidade luminosa, numa direcção dada, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência de $540 \times 10^{12}$ Hz e cuja intensidade energética nessa direcção é 1/683 W por esterradiano. [16ª CGPM – 1979, Resolução n.º 3.]

<sup>10</sup> A designação “Corrente eléctrica” foi introduzida pela norma ISO 31/5 em substituição da designação “Intensidade de corrente eléctrica”, embora essa terminologia se mantenha na NP 172 (1986).

<sup>11</sup> O termo kelvin e o símbolo K também são utilizados para exprimir intervalos ou diferenças de temperatura (cf. 13ª CGPM). É admitido exprimir a temperatura termodinâmica,  $T$ , expressa em kelvin e a temperatura Celsius (cujo símbolo é  $t$  ou  $\theta$ ), definida a partir da equação:  $t = T - 273,15$ , devendo o resultado ser expresso em grau Celsius (°C).

<sup>12</sup> Do latim *candela*, cujo significado é “vela”.

<sup>13</sup> Traduções adaptadas de acordo com o Decreto-Lei 238/94 de 19 de Setembro.

Quadro 2.3: Grandezas e Unidades Suplementares do SI

Grandeza			Unidade SI	
Designação	Símbolo	Dimensão	Designação	Símbolo
Ângulo plano	$\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi$	Grandeza adimensional	radiano	rad
Ângulo sólido	$\Omega, \omega$	Grandeza adimensional	esterradiano	sr

Quadro 2.4: Definições de Unidades Suplementares do SI

Unidade	
Designação	Definição
radiano	Ângulo plano compreendido entre dois raios que, na circunferência de um círculo, intersectam um arco de comprimento igual ao raio desse círculo. [11ª CGPM – 1960, Resolução n.º 12.]
esterradiano	Ângulo sólido que, tendo um vértice no centro de uma esfera, intersecta na superfície desta uma área igual à de um quadrado tendo por lado o raio da esfera. [11ª CGPM – 1960, Resolução n.º 12.]

Suportado na definição das grandezas e unidades de base e nas grandezas suplementares, definidas no contexto do SI, é possível definir uma diversidade de grandezas derivadas, aplicáveis a domínios particulares do conhecimento científico – espaço, tempo e mecânica; calor; electricidade e magnetismo; luz e radiações electromagnéticas afins; reacções nucleares e radiações ionizantes; química-física e molecular; e propriedades e estados da matéria.

Refira-se, adicionalmente, a existência de um conjunto de grandezas admitidas conjuntamente com as do SI, embora não fazendo parte integrante do mesmo, nas quais se encontram: na grandeza tempo, a hora, h, o minuto, min, e o dia, d; na grandeza ângulo plano, o grau,  $1^\circ = (\pi/180)$  rad, o minuto,  $1' = (1/60)^\circ = (\pi/10\ 800)$  rad, e o segundo,  $1'' = (1/60)' = (\pi/648\ 000)$  rad; na grandeza volume, o litro, L ou l, equivalente a  $10^{-3}$  m<sup>3</sup>; e na grandeza massa, a tonelada, t, equivalente a  $10^3$  kg.

São, ainda, identificadas “unidades fora do SI” mas aceites como úteis em domínios especializados, como é o caso do electrão-volt (eV) na grandeza energia, e da unidade de massa atómica (u) na grandeza massa.

Finalmente, reconhecem-se algumas “unidades temporariamente admitidas”, devido ao enraizamento em domínios particulares, prevendo-se a sua progressiva eliminação. Encontram-se neste caso a milha marítima, o nó (milha marítima por hora), o angström, o are, o hectare, o bar, o barn, o gal, o curie, o röntgen, o rad e o rem.

## **2.4 Vocabulário Internacional de Metrologia**

Um “vocabulário de Metrologia” agrupa um conjunto de palavras reconhecidas por determinada comunidade – neste caso, científica – constituindo um léxico de termos e conceitos envolvidos na linguagem aplicada no âmbito da Metrologia.

Tal como aconteceu no contexto da simbologia, que conduziu à definição do SI, a harmonização da terminologia tem sido entendida como um dos objectivos das Organizações Internacionais que regem os assuntos deste ramo da ciência, de modo a criar condições benéficas para o seu desenvolvimento.

Este objectivo foi potenciado pelo facto de, em meados dos anos 80 (do Séc. XX), ter ocorrido uma re-orientação da abordagem do problema metrológico, de uma concepção clássica – determinística – para uma concepção moderna – probabilística – envolvendo o conceito de incerteza de medição e outros decorrentes da sua inclusão. A necessidade de definição de um vocabulário aplicável nesta área resultou, assim, das necessidades originais acrescidas da necessidade de esclarecimento e de actualização da terminologia vigente, conduzindo à edição da primeira edição do “Vocabulário Internacional de Metrologia”, em 1984. Posteriormente, esta publicação foi objecto de revisão em 1993, originando a sua 2ª Edição (neste documento usa-se a sigla VIM para indicar o nome deste vocabulário) [VIM (1994)].

A revisão do VIM (1994), permitiu a reformulação de alguns conceitos como o de “valor verdadeiro de uma grandeza”, e a introdução dos conceitos de “incerteza aleatória” e de “incerteza sistemática”, entre outros, emergentes da re-orientação promovida pela ISO e traduzida na publicação do GUM (1993, 1995).

No presente momento, este documento encontra-se novamente em revisão [VIM (2005)] – cumprindo uma regra de periodicidade de revisão de 10 anos – contendo propostas de modificação significativas, uma das quais, se traduz na evolução da sua orientação, no sentido de unificar o suporte das definições em torno do conceito de “incerteza de medição” em substituição da situação anterior, onde este partilha essa responsabilidade conjuntamente com o conceito de “erro de medição”.

Do seu conteúdo fazem parte definições importantes para o contexto de desenvolvimento deste documento, considerando-se útil efectuar um resumo da estrutura e do conteúdo do documento mais actualizado.

Com efeito, traduzindo uma evolução da organização do índice de matérias, o VIM (2005), agrupa o seu conteúdo em cinco capítulos (1. Grandezas e Unidades; 2. Medição; 3. Dispositivos para a medição; 4. Características dos sistemas de medição; 5. Padrões de medição) enquanto que o índice de matérias do VIM (1994), contém uma estrutura de 6 capítulos (1. Grandezas e Unidades; 2. Medições; 3. Resultados de medição; 4. Instrumentos de medição; 5. Características dos instrumentos de medição; 6. Padrões).

Relativamente ao VIM (2005) destaca-se a importância da integração do léxico com documentação afim, como a que foi introduzida com o Guia ISO de avaliação de incertezas [GUM (1993, 1995)], bem como, a orientação das definições para uma base comum: a incerteza de medição. Por outro lado, a clarificação e introdução de conceitos é um dos aspectos mais relevantes, como o de “*Resolução de um sistema de medição*”, que corresponde a um dos termos de utilização mais frequente.

A definição da “incerteza de medição”, considerando o contexto deste documento, é um termo que assume particular relevância, sendo transcrita a sua tradução da versão do VIM (2005) mais recente (trad. livre do autor para português).

“Incerteza de medição:

Parâmetro que caracteriza a dispersão dos valores da grandeza que se podem atribuir à mensuranda, com base na informação utilizada.

NOTAS.

1. A incerteza de medição caracteriza quantitativamente o conhecimento acerca da mensuranda, baseado na informação utilizada.
2. A incerteza de medição caracteriza a dispersão de um conjunto ou a distribuição de valores da grandeza relativos à mensuranda, e obtidos mediante informação disponível. A dispersão resulta da **incerteza da definição** da mensuranda (trad. de “*Definitional uncertainty*” – componente da incerteza de medição resultante da quantidade de discriminação intrinsecamente finita da definição da mensuranda) e dos efeitos sistemáticos e aleatórios da medição.
3. Se um valor individual da grandeza, como estimativa da mensuranda, se modifica, a incerteza de medição associada pode, igualmente, sofrer uma modificação.
4. O parâmetro pode ser, por exemplo, o desvio padrão designado por **incerteza de medição padrão** (ou um seu múltiplo), ou a semi-amplitude de um intervalo, dispondo de um probabilidade expandida declarada.



5. A incerteza de medição incorpora, geralmente, muitas componentes. Algumas dessas componentes podem ser determinadas a partir de uma **avaliação do tipo A da incerteza de medição** a partir da distribuição estatística dos valores da grandeza suportadas em séries de medições e podem ser caracterizadas pelos desvios padrão experimentais. As outras componentes, as quais podem ser determinadas a partir de uma **avaliação do tipo B da incerteza de medição**, também podem ser caracterizadas por desvios padrão, determinada a partir de distribuições de probabilidade que se assume que as representam, baseadas na experiência ou noutra informação.
6. Entende-se que o valor de uma grandeza de um **resultado de medição**, representa a melhor estimativa do valor da mensuranda, e que todas as componentes da incerteza de medição, incluindo as que resultam de efeitos sistemáticos, como as componentes associadas às correcções e a valores atribuídos a **padrões de medição**, contribuem para a dispersão.
7. Dependendo da utilização pretendida, a **incerteza de medição expandida** de um **resultado de medição** poderá ser dada com um **factor de expansão**, originando um **intervalo de expansão**, onde se entende que contém o valor da mensuranda com elevado grau de probabilidade ou incorpora uma fracção alargada declarada dos valores da grandeza dispersos que são atribuídos à mensuranda.”



### 3. SISTEMAS DE MEDIÇÃO E A SUA CARACTERIZAÇÃO

#### 3.1 Introdução

A actividade de medição tem um papel central no contexto da Metrologia, sendo possível a sua concretização pela interposição, entre a mensuranda e o observador, de um meio capaz de recolher a informação proveniente da grandeza sob observação e o fazer chegar ao receptor dessa informação. Esse elemento de ligação é o *sistema de medição*.

É do conhecimento corrente que não é possível estabelecer um relacionamento desta natureza (entre a mensuranda e o observador usando um sistema de medição) de forma perfeita, existindo sempre condições intrínsecas e exógenas que determinam essa situação. Interessa, portanto, estudar e conhecer os diferentes factores que influenciam o processo de medição com o intuito de minimizar o seu efeito.

Neste sentido, o objectivo deste capítulo, é o de apresentar alguns elementos que por um lado, caracterizam os sistemas de medição e por outro lado, contribuem para a “imperfeição” da medição. Com este conhecimento acerca dos sistemas de medição devem ser promovidos cuidados aplicáveis quer na fase de concepção e desenvolvimento dos sistemas quer na fase de medição e de obtenção de resultados de medição [Mimoso (1999)].

Esta necessidade da presença dos sistemas de medição como elementos integrados nos processos de medição produz uma realidade de “imperfeição” que é considerada inquestionável. Existem diversas razões que podem ser apontadas para a sua origem:

- a diversidade de equipamentos de medição (diversidade de padrões que materializam grandezas físicas e diversidade de instrumentos de medição que permitem a comparação dos resultados obtidos nos processos de medição com proporções relativas à definição das grandezas físicas envolvidas);
- o comportamento diferenciado dos equipamentos, determinado pelas funções a que se destinam e pelas circunstâncias da sua utilização;
- as limitações intrínsecas dos modelos conceptuais que suportam o princípio e o método de medição;
- as limitações associadas às propriedades específicas de materiais, cuja variabilidade constitui a forma de promover a medição;
- a degradação natural dos equipamentos – pelo desgaste resultante do uso ou pela evolução temporal das características dos materiais que os constituem – reflectindo-se em modificações nas suas propriedades e no seu desempenho;

A existência destes factores associados aos sistemas de medição, determina a necessidade de avaliar as limitações e suas consequências e de delimitar as condições de utilização, visando a minimização dos efeitos perturbadores da medição.

Acresce a esta situação que a realidade de cada medição reflecte um conjunto de circunstâncias que são válidas em cada momento, mas não necessariamente válidas num momento imediatamente posterior.

Esta inexactidão provocada pelo acto de medição requer, portanto, um conhecimento acerca do seu desempenho, conduzindo a um tipo de avaliação denominada “caracterização metrológica” e que traduz a identificação e a caracterização das propriedades e dos comportamentos dos sistemas que, de alguma forma, podem interferir com o processo de medição e, conseqüentemente, afectar o seu resultado.

Neste contexto da caracterização metrológica, existe uma perspectiva que se encontra relacionada como o facto dos sistemas de medição possuírem uma dinâmica de evolução, ao longo de uma variável independente (geralmente o tempo ou o espaço), de propriedades e comportamentos impondo o requisito de calibração e/ou da verificação periódica.

A calibração possui a vantagem adicional de permitir que o sistema de medição integre cadeias de rastreabilidade, mediante as quais estabelece ligações com padrões de referência onde adquire a pretendida exactidão. A rastreabilidade da medição associada ao conhecimento do historial permite conhecer o estado actual do sistema de medição e efectuar a “previsão” do seu estado futuro (naturalmente, enquadrado num conjunto de condicionamentos de origem científica, empírica, de bom senso, ou outros).

A avaliação periódica do desempenho dos sistemas de medição relativamente às suas características metrológicas são a via para a garantia da adequada rastreabilidade aos padrões primários de cada grandeza em causa e, simultaneamente, para o conhecimento do grau de incerteza envolvido no processo de transferência de exactidão. Este processo constitui o que se entende por *qualidade metrológica* da instrumentação e dos padrões (o termo “instrumentação” designará, adiante, os “instrumentos” e “padrões”, bem como, os sistemas de medição).

Nas secções seguintes efectua-se uma exposição dos factores intrínsecos e dos factores exógenos que determinam a “caracterização metrológica” da instrumentação e condicionam o processo de medição em que esta é envolvida, identificando os aspectos considerados essenciais para a tarefa associada à sua quantificação. No contexto da Metrologia, esta

avaliação desempenha um papel crucial para a compreensão dos sistemas de medição e, sobretudo, para a sua análise numa perspectiva de exactidão e de “confiança” dos resultados obtidos, permitindo a percepção dos factores que contribuem para a incerteza de medição, cuja avaliação representa o objectivo primordial no contexto desta dissertação.

A exposição que se segue envolve os elementos que propiciam a ocorrência de fontes de incerteza, as diferentes perspectivas de organização e de classificação associadas à descrição dos elementos que constituem os sistemas de medição e os conceitos fundamentais associados à medição: *o sinal e a informação; os elementos funcionais; os regimes de comportamento; seguindo-se os conceitos e parâmetros de caracterização metrológica; os conceitos associados à calibração e rastreabilidade, nomeadamente, o erro e a incerteza de medição até se atingir o objectivo fundamental que é a expressão do resultado da medição.*

### **3.2 Sinal e Informação**

A observação experimental envolve necessariamente a transferência de informação da mensuranda para o sistema de medição [Hofmann (1982)]. O elemento portador dessa informação é o *sinal*: “*a grandeza que representa a mensuranda e lhe está funcionalmente ligada*” [VIM–IPQ (1996)].

A sua tarefa consiste em servir de “*suporte da informação respeitante ao comportamento observável de um qualquer sistema*” [Carvalho *et al.* (1991)], transportando a informação resultante da ligação que se estabelece entre a mensuranda e o sistema de medição, podendo ser considerado como parte integrante da instrumentação.

Na actualidade, uma parte significativa dos sinais possui uma proveniência que se associa a fenómenos eléctricos, embora, outras origens constituam igualmente origem de sinais como, por exemplo, movimentos mecânicos e de vibração.

O objectivo da geração, preservação e obtenção do sinal integra-se no objectivo geral de obter informação – por via experimental – e registar comportamentos de mensurandas. Esse registo é determinado pela natureza da mensuranda, i.e., pelo comportamento da sua propriedade, na qual reside a informação. Neste sentido, uma alternativa à definição de *sinal* apresentada, é dada por Sydenham (1989) como a “*representação simbólica de determinado atributo (ou combinação de atributos) de um sistema em observação*”.

A obtenção de registos da informação requer a existência de um referencial determinado por uma grandeza independente, sendo comum esta ser estabelecida com base no tempo –

*registro temporal* ou *registro no domínio do tempo* – ou no espaço – *registro espacial* ou *registro no domínio espacial*.

A descrição no domínio do tempo tem uma vasta aplicação na análise de características de sistemas dinâmicos, em particular, recorrendo ao *registro no domínio da frequência* – também referido como *registro espectral*.

Sobre as características do sinal, este é classificado como *contínuo* ou *discreto*, respectivamente, consoante o seu registro seja contínuo no referencial considerado, contendo, “*teoricamente, um número infinito de elementos de informação bruta*” [Carvalho *et al.* (1991)] ou constituído por um número finito de elementos – regular ou irregularmente espaçados – da informação.

É relevante considerar que esta característica do sinal deve ser consistente com a natureza da propriedade da mensuranda observável, de modo a que o sinal possa reflectir adequadamente a evolução da mensuranda no referencial seleccionado [Lesurf (1995)].

Um outra forma de classificação consiste na característica do sinal ser *determinístico* ou *aleatório*. A propriedade associada à capacidade de determinar o comportamento futuro de determinado sinal, no referencial independente considerado, com base na informação acumulada – que se traduz, correntemente, em representações de natureza matemática – caracteriza o *sinal determinístico*. Essa “previsão” deve ser interpretada no âmbito da situação ideal, uma vez que, no caso real, existem perturbações que condicionam o seu desempenho – ruído, grandezas de influência, etc. Desta forma, considera-se que esta classificação não é contraditória com a perspectiva de lhe associar uma incerteza de medição.

Ao contrário, o *sinal aleatório* não permite determinar o seu comportamento futuro, embora, a informação acumulada permita obter, geralmente, a probabilidade de ocorrência da sua evolução com base em funções de densidade de probabilidade. Este tipo de análise enquadra-se no que se entende por processos estocásticos, cujos conceitos fundamentais serão apresentados no próximo capítulo.

No contexto desta propriedade de “previsibilidade” do comportamento do sinal determinístico, observam-se facetas distintas.

No que se refere aos sinais *determinísticos*, estes podem ser classificados como *periódicos*, quando o seu comportamento é repetido, de acordo com um determinado período de tempo; no caso contrário, é classificado como *não-periódico*.

Os sinais *periódicos* podem ser subdivididos, ainda, em sinais *sinusoidais* ou em sinais *não-periódicos* ou *complexos*. No que se refere aos sinais *não-periódicos*, podem ser subdivididos em sinais *quase-periódicos* ou em sinais *transitórios*. Este último distingue-se pela particularidade da sua amplitude ser decrescente com a evolução do valor da variável independente – temporal. Um esquema resumido é apresentado na Fig. 3.1.

No que se refere aos sinais *aleatórios*, podem-se classificar como *estacionários*, quando a sua caracterização do ponto de vista estatístico é permanente, ao longo do tempo; quando tal não se verifica, designam-se como *não estacionários*. No primeiro caso, classifica-se como *ergódico*, quando as suas médias estatísticas se mantêm independentemente das condições iniciais, i.e., as referidas médias mantêm a sua validade ainda que a amostragem se efectue numa outra posição qualquer da referência temporal. No caso contrário, classifica-se como *não ergódico*. Um resumo da classificação dos sinais aleatórios, encontra-se na Fig. 3.2.

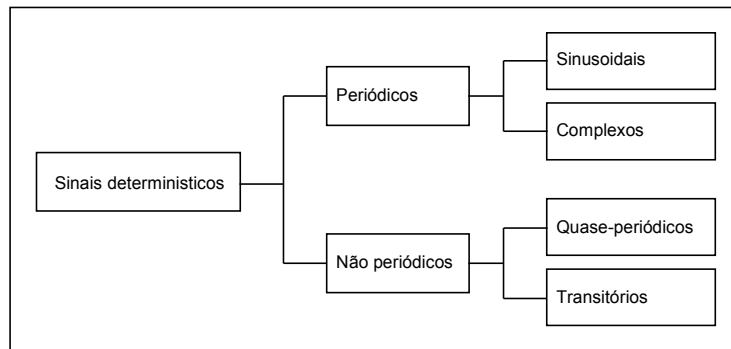


Figura 3.1: Classificação de sinais determinísticos

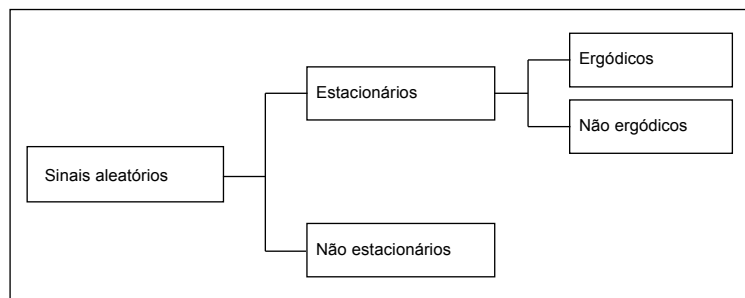


Figura 3.2: Classificação de sinais aleatórios

A definição de sinal incorpora um conceito, de “informação” contida na “mensagem”, que importa esclarecer. Para tal, é necessário introduzir previamente os conceitos de termodinâmica estatística e de Teoria da Informação que permitem esse esclarecimento.

Na linguagem comum, a “informação” é *uma colecção de factos, ideias, entidades, conceitos e atributos que definem um assunto ou um objecto*. No contexto desta interpretação, poder-se-á enquadrar a situação em que as “declarações” envolvidas sejam irrelevantes ou

insignificantes, o que, como se compreenderá adiante, se distingue do conceito de “informação” suportado na Teoria da Informação.

Para se compreender o conceito subjacente ao termo é importante começar por relembrar as suas raízes. Para tal, é necessário regressar ao Século XIX, à introdução de um novo conceito, por Clausius em 1865, aplicável no contexto da termodinâmica e designado por *entropia*. Este conceito, para além de revolucionar a estrutura conceptual clássica (determinística) da termodinâmica – *Ciência que trata da energia e das suas relações com a matéria*” [Peixoto e Rodrigues (1991)] – assimilando uma influência das correntes em voga na época, envolveu os conceitos emergentes da Estatística e da Teoria das Probabilidades [Callen (1985)].

O conceito de *entropia* sofreu uma generalização inesperada alargando-se e ultrapassando os limites tradicionais da ciência (integrando-se em contextos como o da Sociologia e das Ciências Sociais, na Linguística, na Arte e na Filosofia, entre outros). Esta generalização deve-se, entre outras razões, à sua inclusão por Shannon (1948), num contexto completamente novo: A Teoria da Informação.

Em 1866, Boltzmann, ao procurar uma interpretação mecanicista para o segundo princípio fundamental da Termodinâmica [Fermi (1937)], [Callen (1985)], acabou por introduzir uma fórmula – *Teorema H* – que relaciona a *entropia* com a *probabilidade termodinâmica*<sup>1</sup>.

$$S = k \cdot \text{Log}W + \text{const} \quad (3.1)$$

A fórmula de Boltzmann (3.1) relaciona duas grandezas de natureza distinta: a *entropia*, S, do domínio da Física; e a *probabilidade termodinâmica*, W, do domínio da matemática (k é designada por *constante de Boltzmann*).

O carácter probabilístico da *entropia* revela a tendência natural de um sistema (isolado) de passar de um estado de menor probabilidade para outro de maior probabilidade (tendência para a igualização), conduzindo ao aumento da mesma. Essa probabilidade cresce com o aumento da “desordem”, daí a analogia que é comum estabelecer entre o conceito de “entropia” e de “desordem”. Ao contrário, conforme refere Peixoto (1968) *a ordem caracteriza-se pela diferenciação das partes diversificadas de um sistema e da sua separação e organização por categorias*.

---

<sup>1</sup> Sobre a expressão em causa, refira-se que, num sistema constituído por N micro-estados e i categorias, W representa o “peso estatístico” dos i microestados possíveis, traduzindo-se na expressão:  $W = N! / N_1! N_2! \dots N_i!$ .



A preocupação emergente na década de 40 com a problemática associada à transmissão de mensagens e dos conceitos associados, suscitou o desenvolvimento de estudos que tiveram como resultado a introdução dos fundamentos da Teoria da Informação, de que Shannon foi precursor. Esta Teoria preocupa-se com *a quantidade de informação condicionada numa mensagem atravessando um canal de comunicação* [Sydenham (1982a)].

Neste contexto, a “informação” é o que distingue o “conhecimento” do “desconhecimento”. Shannon (1948) encontra uma interpretação partindo de uma ideia fundamental: *o que é importante numa mensagem que se recebe é a alteração de incerteza que existia antes de receber a mensagem*. Dito de outra forma por Peixoto e Rodrigues (1991): *“a nossa expectativa sobre a realização de um acontecimento futuro está associada a um certo grau de incerteza, ou a uma falta de informação. ... O efeito da mensagem depende, portanto, do nosso estado de conhecimento em relação a um dado acontecimento. Logo, o conteúdo de informação recebido é, portanto, dado pelo decréscimo da falta de informação, isto é, pela diferença entre a incerteza que existia antes de receber a mensagem e a incerteza que resta depois de receber a mensagem.”*

Desta ideia, resulta uma interpretação (de Shannon, por sugestão de von Neumann) que conduziu à adopção do conceito de “entropia” – “desordem” – como sendo análogo ao de “incerteza” – representando a “falta de informação”, caracterizando um sistema com elevada entropia como correspondendo a um sistema do qual se possui pouca informação.

Estabelece-se, igualmente, uma lei de conservação aplicada às duas quantidades: a *incerteza*,  $H$ , e a *informação*  $I$ . Em simultâneo, a aplicação desse princípio obriga a considerar que existem estados de *informação* máxima,  $I_{\max}$ , e de *incerteza* máxima,  $H_{\max}$ ,

$$H + I = \text{const.} = H_{\max} = I_{\max} \quad (3.2)$$

ou, numa forma alternativa de representação baseada nas diferenças entre as quantidades envolvidas,  $\Delta H + \Delta I = 0$ , isto é, considera que existe um balanço onde os ganhos de *informação* correspondem exactamente às perdas de *incerteza* e *vice-versa*.

Partindo do princípio de que a quantidade de *informação* pode ser avaliada pelo variação do grau de *incerteza*, considerando que existem  $n$  possibilidades distintas, pode-se demonstrar [Shannon (1948)] que a expressão da *incerteza* se explicita como:

$$H(n) = k \cdot \text{Log } n \quad (3.3)$$

verificando-se que esta tem um desenvolvimento que resulta de se considerarem  $n$  acontecimentos equiprováveis (estado de *entropia / incerteza* máxima), isto é,  $p = 1/n$ , de que resulta,

$$H(p) = k \cdot \text{Log} \left( \frac{1}{p} \right) = -k \cdot \text{Log} p \quad (3.4)$$

evidenciando que a quantidade *incerteza* é uma função decrescente da *probabilidade* dos acontecimentos. A generalização de (3.4) para  $N$  grupos conduz à conhecida *fórmula de Shannon* (1948).

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = -k \cdot \sum p_i \text{Log} p_i \quad (3.5)$$

Novamente, assumindo que os acontecimentos são equiprováveis,  $p_1 = p_2 = \dots = p_N = 1/N$ ,

$$H = k \cdot \text{Log} N \quad (3.6)$$

cuja configuração lembra, efectivamente, a *fórmula de Boltzmann*.

No artigo que Shannon (1948) publicou introduzem-se outros conceitos de aplicação corrente na actualidade, referindo-se as expressões relacionadas com a quantificação da capacidade dos canais de comunicação, a transformação de base do logaritmo de base 10 para base 2, adaptado a problemas de natureza binária – cuja importância no tratamento de sinais digitais é evidente – bem como, a unidade aplicável à quantificação da *entropia*: *bit/símbolo* (Woschni (1982) admite que esta unidade é definida como *o número de decisões binárias necessárias, em média, para distinguir um estado do conjunto de todos os estados possíveis*).

O trabalho de Shannon abriu um novo caminho para a utilização do conceito de *entropia*, pela demonstração de que esse conceito se poderia alargar a qualquer processo aleatório<sup>2</sup>.

O interesse de referir este desenvolvimento particular que conduziu à fórmula de Shannon reside, por um lado, na observação de um processo evolutivo, no domínio da Termodinâmica, similar ao que ocorre na Metrologia em tempos mais recentes, envolvendo a transição de uma perspectiva determinística para uma perspectiva probabilística e, por outro lado, por conduzir a uma análise que envolve conceitos “familiares” como o de “*incerteza*”

---

<sup>2</sup> Outras contribuições posteriores consolidaram esta nova via, destacando-se como exemplos ilustrativos, três das mais significativas: a introdução, por Brillouin (1956) do conceito de “*neguentropia*” cuja variação tem o mesmo sinal da “*informação*”; e a introdução, por E.T. Jaynes (em 1957), de um formalismo desenvolvido para a fundamentação de entropia máxima; finalmente, deve-se a Goldman (1953) a introdução da entropia diferencial para sinais analógicos:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \text{Log}[w(x)] dx$$

associado ao *desconhecimento ou a falta de informação completa do objecto sob observação* envolvido no estudo de processos estocásticos, tal como acontece na medição.

Introduzidos os conceitos teóricos, é importante referir a sua transposição para a prática da medição. Assim, uma representação comum do sistema de comunicação [Woschni (1982)] envolve, em sentido genérico, a transmissão de uma *mensagem* sob a forma de sinal, de uma *fonte* para um *receptor*, passando por estágios intermédios onde se encontram elementos que podem intervir no processo (e na natureza do sinal – amplitude, fase, ... ), até este atingir o objectivo final: o *receptor da informação*.

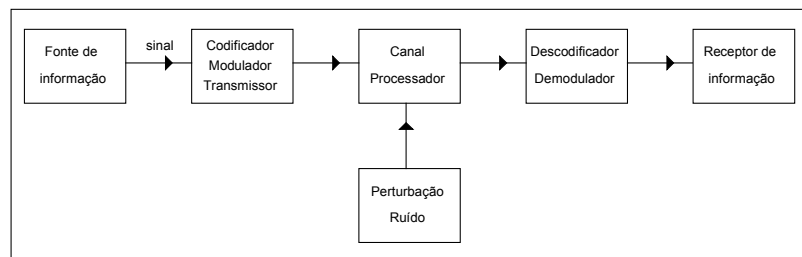


Figura 3.3: Diagrama de elementos identificáveis no sistema de comunicação

Os termos apresentados, de codificação e modulação, aplicam-se a casos em que o sinal é digital ou analógico, respectivamente. A seta apresentada corresponde à representação do sinal indicando, simultaneamente, o seu sentido de propagação.

Esta representação da comunicação, comum a outros ramos da ciência, para além de incorporar alguns dos termos que foram introduzidos na caracterização dos sinais, possibilita partir para uma identificação e descrição, no contexto dos sistemas de medição, dos *elementos funcionais* constituintes, os quais, são objecto de descrição da próxima secção.

### 3.3 Estágios e elementos dos sistemas de medição

Uma das formas de representação dos sistemas de medição é a forma figurativa. Como tal, é habitual a adopção de diagramas descritivos do processo associados ao mapeamento da variável correspondente a uma qualidade observável, numa representação equivalente apresentada ao observador. Esta forma esquemática de exposição, admite a possibilidade de se orientar a informação numa perspectiva do sinal e da comunicação (caso tratado na secção anterior) ou numa perspectiva das relações de transferência de *energia* ou de *massa* envolvidas no processamento de sinais envolvidos ou, ainda, na perspectiva de representação de estágios de natureza funcional interligados e associados ao circuito de informação, sendo esta última, a perspectiva que se irá desenvolver de seguida.

Em termos genéricos, os sistemas de medição podem ser separados em elementos conceptuais, admitindo uma representação esquemática como a apresentada na Figura 3.4. Nesta, equivalente a muitas outras que se encontram na bibliografia [Doebelin (1975) e Sydenham (1982b), (1985)], é possível encontrar os *estágios* que definem “partes” do sistema (na Figura apresentada considera-se a presença de controlo no processo de medição). Nestes *estágios* enquadram-se os elementos fundamentais que executam as diferentes operações do referido sistema. A descrição que se segue, adopta conceitos introduzidos por Finkelstein, Sydenham, Doebelin, Woschni e outros autores que, nas décadas de 70 e de 80 (Séc. XX) procuraram concretizar a sua sistematização.

Fig. 3.4, observam-se 3 estágios que, de uma forma directa, “transportam” a informação da mensuranda para o *observador* – o *estágio sensorial*, o *estágio de condicionamento* e o *estágio de arquivo e apresentação* – sendo estes complementados por *estágios suplementares* que garantem aspectos funcionais igualmente importantes – nesse caso, encontram-se a *transmissão*, a *potência*, a *segurança e protecção* e a *manutenção e calibração*.

### 3.3.1 Estágio sensorial

Este estágio reflecte a interface de relacionamento entre o sistema de medição e a mensuranda. Com efeito, tendo sido definido o *atributo* da variável observável que se pretende conhecer, o propósito do elemento que o constitui é o de, recorrendo a um processo de filtragem e selecção, extrair informação latente e, com base nessa informação, efectuar o seu subsequente mapeamento relacional numa escala de medição – incluindo a informação da sua forma e da sua magnitude – correspondendo a uma estrutura conceptual de quantificação.

A função primordial do *estágio sensorial* é a de produzir ou modificar um sinal que seja reconhecível e, simultaneamente, robusto face a perturbações indesejáveis – como o ruído. Para atingir esse objectivo, é necessário um equilíbrio entre a sua geração e a possível modificação (condicionamento) do sinal original, garantindo a sua robustez, o que se traduz em cumprir compromissos estritos relativamente ao balanço energético. Com efeito, desses compromissos resulta, frequentemente, a natureza dos elementos da fase seguinte, onde se concretiza esse condicionamento do sinal.

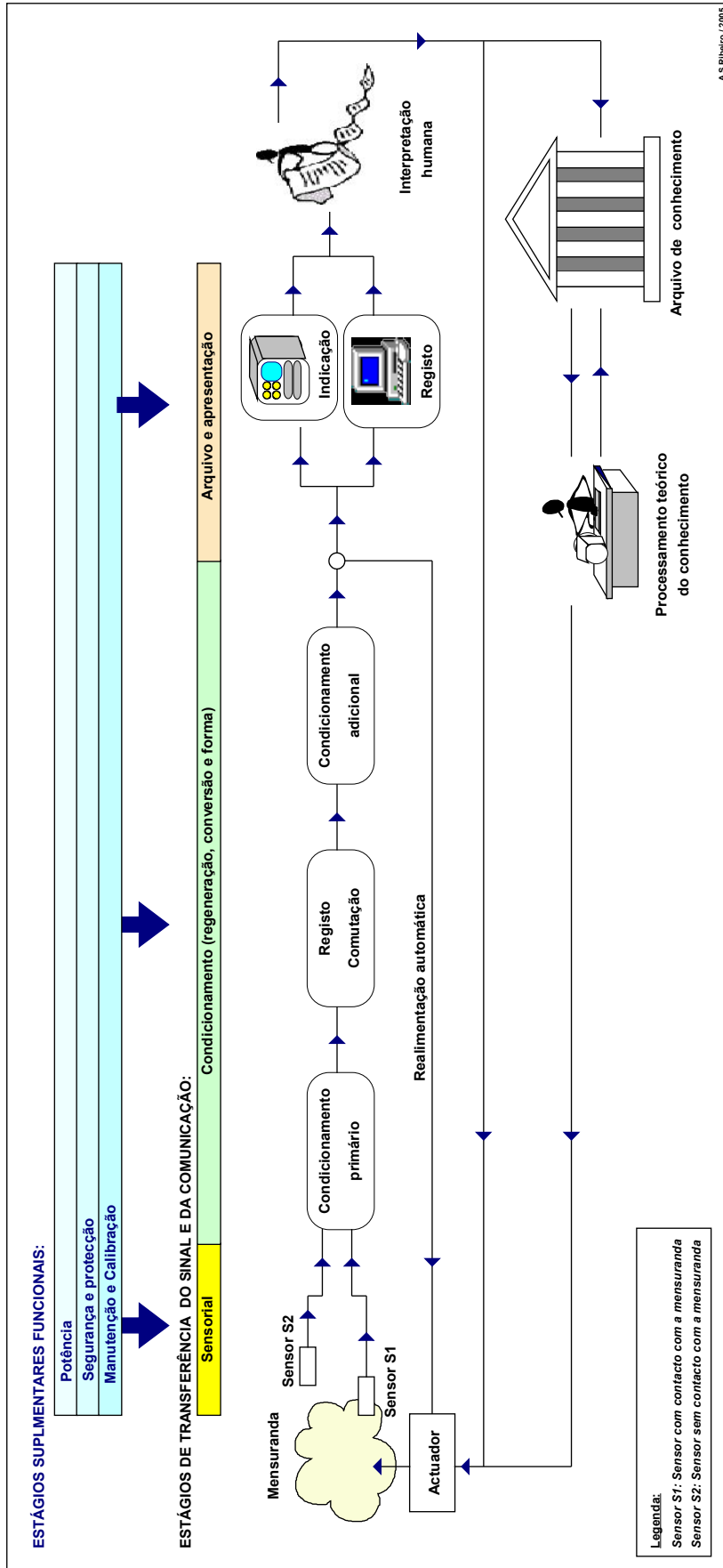


Figura 3.4: Esquema de representação dos estágios do sistema de medição (com controlo)

O seu elemento característico é o *sensor* que se define como “*elemento do sistema de medição que é directamente afectado pelo fenómeno, corpo ou substância que incorpora a grandeza mensurável*” [VIM (2005)].

Em determinados contextos e áreas científicas, o termo *detector* é utilizado como alternativa ao termo *sensor*. A sua definição indica que o “*detector é o dispositivo ou substância que indica a presença de um fenómeno, corpo ou substância, quando um determinado valor limiar é ultrapassado ou uma grandeza associada é excedida*” [VIM (2005)].

O elemento que constitui ou integra o *estágio (sensorial)* é, em geral, responsável pela transdução da forma de energia ou pela execução da conversão de variáveis relativas à mesma grandeza – mensuranda.

### 3.3.2 Estágio de condicionamento

Normalmente o sinal proveniente dos sensores não corresponde aos requisitos da sua utilização final (motivado pela natureza intrínseca do fenómeno associado à constituição ou modificação do sinal, pelos constrangimentos de robustez ou de equilíbrio relativamente à mensuranda e às grandezas de influência ou por outras razões).

Por isso, é comum integrar uma função de condicionamento nos sistemas de medição. Esta função consiste na incorporação de elementos com a capacidade de efectuar a *regeneração*, a *conversão* e a *formatação* dos sinais, efectuando a função de *pré-processamento do sinal* para compatibilização com os requisitos de estágios seguintes.

A *regeneração* é um processo que se aplica em circunstâncias onde se observa a degradação do conteúdo de dados transmitidos ou em que a amplitude dos sinais é inconveniente, por exemplo, por ser permeável ao ruído. Este tipo de intervenção é concretizada mantendo a forma original do sinal mas, efectuando uma amplificação ou uma redução da sua amplitude.

A compatibilização entre estágios do sistema de medição origina um outro tipo de intervenção que se designa por *conversão*. Com efeito, devido à natureza de elementos que constituem o sistema, poderá ser requerida a conversão da forma de energia do sinal noutra forma de energia, mais conveniente para o seu subsequente processamento, registo, e posterior interpretação.

Um terceiro processo consiste na *formatação*, a qual, corresponde a uma operação efectuada ao sinal de modo a modificar, propositadamente, as suas características para atingir finalidades tão distintas como a de preparar o sinal para a propagação (transmissão) num determinado meio, alterar a sua distribuição espectral de frequências para remover componentes de ruído, modificar o ganho para o adequar a uma estrutura de resposta em frequência, para referir alguns exemplos.

Como se depreende, a introdução destes elementos no sistema é condicionada, por um lado, pela natureza dos sinais gerados no *estágio sensorial* e, por outro lado, pelos requisitos associados aos estágios subsequentes (de registo, de visualização, etc.). A diversidade de possíveis aplicações justifica uma equivalente diversidade de elementos que podem constituir este *estágio*: os circuitos eléctricos; as placas de aquisição de dados; os “*data logger*”; os conversores analógico-digital; os moduladores de sinal; os filtros activos e passivos; etc.

### 3.3.3 Estágio de registo e indicação

Este estágio incorpora, por um lado, o registo e a manutenção dos dados e da informação e, por outro lado, a indicação ou interface com o observador.

Na actualidade, o registo e manutenção de dados associa-se a meios diversificados, no entanto, o recurso a meios de memória *permanente* ou *transitória* cuja origem se encontra associada a princípios da electrónica é, inquestionavelmente, o mais vulgar.

No que se refere à *indicação*, existe uma enorme diversidade de possibilidades, envolvendo estratégias simples e complexas, tais como: padrões de representação figurativa; indicadores numéricos a gráficos; indicadores sonoros e visuais; tabelas; visores; monitores de computador; padrões de *pixel*; registadores e indicadores analógicos; etc.

É importante realçar que, embora estes elementos sejam frequentemente associados a componentes acessórias do sistema, de facto, muitos deles possuem uma influência determinante na qualidade do resultado da medição (por exemplo: um registador de pena reproduz um sinal de acordo com a sua frequência própria o que pode interferir no resultado obtido; um monitor com definição desadequada pode ser “insensível” a determinado tipo de gradientes que se pretenda observar num padrão visual; um indicador pode efectuar um refrescamento inapropriado à amostragem adequada de um sinal variável no tempo).

Sydenham (1982b) propõe uma classificação genérica deste tipo de elementos, cujas categorias são: (VDU) de “*Visual Display Unit*”, i.e., unidades de indicação visual; (RDO) de “*Readout Digital*”, unidades de indicação digital; Monitores; Registadores; Terminais

gráficos; e Indicadores. Todos eles são agrupados no que se classifica como (MMS) de “*Man-Machine-System*” (Sistemas–Homem–Máquina) ou, modernamente, de (HMS) de “*Human-Machine-System*” (Sistemas–Humano–Máquina).

Como nota adicional, refira-se que o VIM (2005) distingue, em particular, o “*instrumento de medição indicador (instrumento de medição que fornece um sinal de saída transportando informação acerca do valor da grandeza mensurável) e o dispositivo indicador (dispositivo que fornece a indicação de um sistema de medição na forma visual)*”.

Para além destes estágios, a descrição do sistema de medição envolve outros elementos igualmente importantes, dos quais se fará uma breve referência.

#### 3.3.4 Transmissão

Os elementos que estabelecem a ligação entre os estágios apresentados, permitindo que o fluxo de informação seja transferido entre estes, representam um potencial factor de influência a considerar na análise dos sistemas de medição.

Com efeito, existem distintas formas de estabelecer as ligações para transmissão dos sinais, possuindo escalas microscópicas ou escalas gigantescas (planetárias), associadas à propagação em meios igualmente diversificados (em cabos eléctricos, na atmosfera, em fluidos, em fibra óptica, etc.). Nesse contexto, tem sido desenvolvido um léxico particular, relacionado com a *telemetria* (do grego “*tele*” – longínquo ou remoto – e “*metron*” – medir, referindo-se à tecnologia com capacidade de transmissão e recolha/recepção de dados usando canais de comunicação de longa distância), cujos termos já fazem parte da linguagem corrente (via, *on-line*, canal, transportador, *bus*, portas de comunicação, ...).

A importância do seu estudo advém, portanto de, na diversidade apontada se encontrarem situações onde se observam fenómenos que condicionam a informação transportada (por exemplo, a degradação dos sinais e a sua perturbação), o que se traduziu na incorporação de elementos integrantes dos sistemas de medição – repetidores, distribuidores, etc. – requerendo uma avaliação da sua intervenção nestes.

#### 3.3.5 Potência

Em grande parte das aplicações de sistemas de medição é necessária a incorporação de equipamentos que possam fornecer aos sistemas uma compensação energética pela energia dissipada na operação das suas funcionalidades.



Nalgumas situações, o sinal pode contribuir positivamente para o balanço energético do processo de medição (por exemplo, nas aplicações de antenas rádio) embora, no caso mais comum, essa contribuição seja insuficiente para autonomizar completamente os sistemas envolvidos. O desenvolvimento da tecnologia permite, na actualidade, a distribuição das fontes de potência pelos circuitos em contraponto com a situação original de concentração da fonte energética, o que, associada às crescentes exigências de autonomia de instrumentação e de instalações, tem modificado a forma de se observar os elementos que constituem este estágio, sendo indissociável, na actualidade, a análise das suas funções com a do sistema de medição na sua globalidade.

### 3.3.6 Segurança e protecção

Um outro elemento que tem vindo a adquirir importância é constituído pelas vertentes de segurança e protecção, as quais, traduzem exigências que são consideradas essenciais na actualidade: a robustez e a fiabilidade dos sistemas. Com efeito, são cada vez mais frequentes as situações em que, as circunstâncias inerentes à utilização de sistemas – de medição, em particular – envolvem um grau de risco. Por isso, julga-se necessário incorporar processos e mecanismos: de recuperação em casos de falha; de aviso; de redundância; de manutenção e de reacção a fenómenos exógenos e perturbadores; entre outros.

Essas exigências têm uma tradução que tem particular influência na fase de concepção e desenvolvimento, envolvendo uma actividade que adquiriu, por essa via, uma importância acrescida e até, algum grau de autonomia como matéria de estudo: a *verificação* e a *validação* dos sistemas.

### 3.3.7 Manutenção e calibração

Estes dois elementos fecham o elenco de estágios e elementos considerados preponderantes na descrição do sistema de medição.

No caso da *manutenção*, existem duas perspectivas distintas de análise: a *manutenção preventiva* e a *manutenção correctiva*.

A *manutenção preventiva* aplica-se numa fase de prevenção do risco permitindo, através da sua acção, minimizar os efeitos que podem afectar a integridade dos sistemas e, dessa forma, contribuir activamente para o insucesso de outros estágios importantes, com destaque para a segurança e protecção (refira-se que o conceito de *fiabilidade* tem uma interpretação enraizada nos estudos sobre a *vertente preventiva da manutenção*). Entre outros

aspectos igualmente importantes, destaca-se o efeito económico que a sua aplicação também possui, como o prolongamento da vida útil de componentes que integram os sistemas sujeitos a esses procedimentos.

A *manutenção correctiva* distingue-se por se aplicar a situações de ocorrências anómalas, avarias e outra situações de “quebra” de integridade, sendo necessário repor as situações anteriores, com idêntico desempenho e com a minimização de perdas.

No caso da *calibração*, a sua importância decorre da necessidade de garantia da “qualidade” dos resultados da medição.

A aceitação do postulado de inexistência da medição perfeita ou ideal (*vide* secção 3.5), traduz-se na admissão do erro e das incertezas como elementos inerentes à actividade metrológica. Neste sentido afigura-se útil a possibilidade de avaliar, em cada momento, os desvios provocados pelos factores de influência que perturbam a medição e de os corrigir, bem como, de poder dispor de um indicador quantitativo que expresse o grau de confiança relativo aos resultados obtidos.

### **3.4 Alguns elementos sobre a transdução de grandezas**

Uma das funções de destaque na realização do processo de medição é a transdução das grandezas sendo a sua compreensão útil para identificar condicionalismos particulares que se traduzem em componentes de incerteza.

A descrição resumida de alguns dos seus elementos de classificação parte da diferenciação dos transdutores, numa forma primária, entre *transdutores passivos* e *transdutores activos*.

Segundo Doebelin (1990), os *transdutores passivos* são aqueles onde a energia de saída é suportada na totalidade (ou na quase totalidade) pela energia proveniente do sinal de entrada. Neste tipo de transdutores verifica-se a existência de *sensibilidade* de um dos seus *atributos* (propriedades) à mensuranda. Essa relação pode ser determinada pela sua geometria e dimensões, pelas propriedades eléctricas dos materiais que constituem o transdutor (resistividade, constante dieléctrica, permeabilidade magnética) ou outras.

Na tabela de Asch (1991), encontram-se as características eléctricas que suportam essa relação de *sensibilidade* e os tipos mais comuns de materiais envolvidos. A energia envolvida pode ser a mesma ou traduzir uma conversão de energias (aplicando-se, nesse caso, o termo “transdução”).

Quadro 3.1: Princípios físicos e materiais envolvidos em transdutores passivos

Mensuranda	Característica eléctrica “sensível”	Tipo de material
Temperatura	Resistividade	Metais: Platina, níquel, cobre, semi-condutores
Temperatura próxima do zero absoluto	Constante dieléctrica	Vidros
Fluxo de radiação óptica	Resistividade	Semi-condutores
Deformação	Resistividade	Ligas de níquel, Silício dopado
	Permeabilidade magnética	Ligas ferromagnéticas
Posição	Resistividade	Materiais magnetoresistentes: bismuto, ligas índio-antimónio
Humidade	Resistividade	Cloreto de lítio
	Constante dieléctrica	Alumina, Polímeros
Nível	Constante dieléctrica	Líquidos isolantes

Os *transdutores activos*, por seu lado, requerem uma fonte de potência auxiliar destinada a fornecer a potência necessária para o sinal de saída. Tal como no caso anterior, poder-se-á observar ou não uma conversão de energia. No grupo de *transdutores activos* [Asch (1991)] identifica as grandezas de entrada (mensuranda) e de saída com um conjunto característico de efeitos físicos que suportam a conversão, expostos na tabela seguinte.

Quadro 3.2: Princípios físicos de base de transdutores activos

Mensuranda	Efeito de recurso	Grandeza de saída
Temperatura	Termoelectricidade	Tensão
Fluxo de radiação óptica	Piroelectricidade	Carga
	Fotoemissão	Corrente
	Efeito fotovoltaico	Tensão
	Efeito fotoelectromagnético	Tensão
Força, Pressão, Aceleração	Piezoelectricidade	Carga
Velocidade	Indução electromagnética	Tensão
Posição	Efeito Hall	Tensão

É de salientar que a utilização de transdutores passivos requerem a sua integração em circuitos eléctricos, os quais, têm configurações conhecidas [Dally (1993)]:

- *montagem potenciométrica*, incluindo uma fonte, um transdutor e uma impedância, em série;
- *montagem em ponte de impedâncias*, onde se utiliza o equilíbrio para medir a impedância do transdutor e o desequilíbrio para medir a variação da mesma impedância;

- *montagem em circuito oscilador*, sendo a impedância do transdutor uma parte do oscilador que determina a fixação da frequência de oscilação;
- *montagem com amplificadores operacionais*, sendo a impedância um elemento determinante do seu ganho;

Asch (1991) propõe, ainda, uma classificação suplementar: *transdutores compósitos*, *transdutores integrados* e *transdutores inteligentes*.

Os *transdutores compósitos* são caracterizados por uma associação em série envolvendo um sensor (elemento de prova) responsável pela conversão da mensuranda primária numa mensuranda secundária, interligada a um transdutor activo ou passivo que efectua a transdução para um sinal eléctrico.

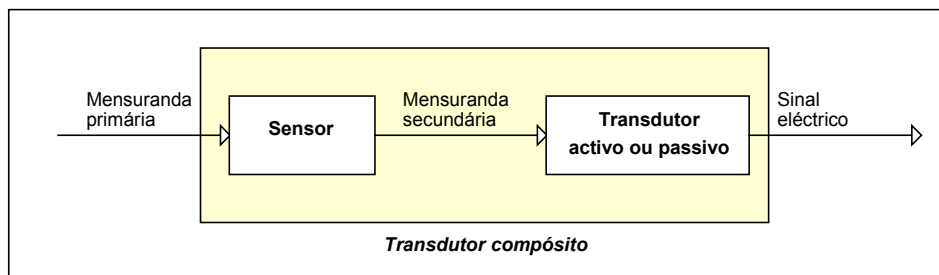


Figura 3.5: Diagrama ilustrativo de um transdutor compósito

Os *transdutores integrados* traduzem um tipo de desenvolvimento baseado na microelectrónica, resultando da aplicação num substrato adequado – habitualmente, silício – do sensor (elemento de prova) e/ou do transdutor e da electrónica associada.

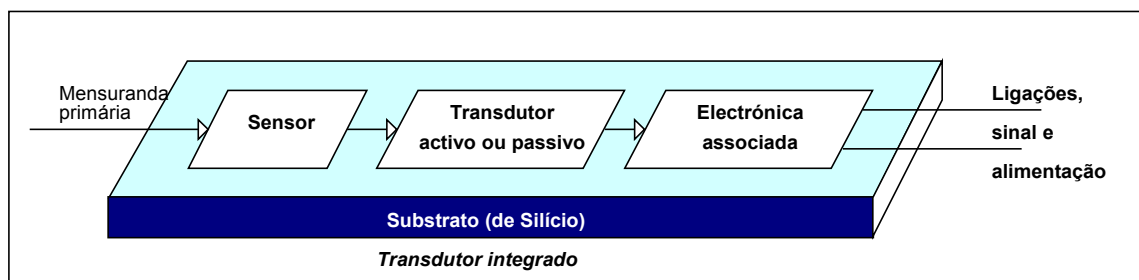


Figura 3.6: Diagrama ilustrativo de um transdutor integrado

A sua crescente utilização resulta de possuir algumas vantagens como: a possibilidade de miniaturização; a diminuição de custos de produção em série; o aumento da fiabilidade e da exactidão pela redução de ligações; a maior robustez relativamente a influências parasitas; e o condicionamento do sinal próximo da sua origem. Alguns exemplos de aplicação são os padrões de extensometria, resistências termométricas, fotodíodos e fototransístores<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Em Asch (1991) encontram-se indicados alguns dos elementos e ligas mais comuns na constituição de sensores, aplicados em filme ou depositados sob o substrato de base.

Os *transdutores inteligentes* designam sistemas de medição de grandezas físicas que incorporam uma cadeia de medição comandada por um microprocessador e uma interface bidireccional de comunicação. Em geral, estes envolvem: um transdutor principal dedicado à obtenção da mensuranda; transdutores secundários ou auxiliares para medição de grandezas de influência; elementos para conversão dos sinais provenientes dos transdutores em formato numérico (condicionadores, multiplexadores, amplificadores, conversores analógico-digital); um microprocessador para efectuar a gestão da informação, linearização, aquisição de dados, etc.; e uma interface de comunicação bidireccional de integração em sistemas computacionais.

Um dos aspectos de interesse na análise do *condicionamento* dos sinais envolve o processo de conversão do modo analógico num modo digital, cujo reflexo é particularmente importante no contexto da avaliação das incertezas de medição – a contribuição, para a avaliação da incerteza de medição, da componente associada à resolução é, frequentemente, o factor preponderante – sendo, por isso, referido.

Como forma de diferenciação elementar, refira-se que os sinais analógicos contêm a informação significativa da mensuranda, contrariamente aos sinais digitais, que resultam de uma conversão de informação de origem analógica em código binário.

Dos aspectos mais relevantes sobre este assunto, refira-se que a maior protecção que, em regra, caracteriza os sinais digitais face a perturbações exógenas, ao contrário dos sinais analógicos (frequentemente, mais permissivos a essas influências), é um dos factores de vantagem dos primeiros. Outra, resulta dos problemas de interpretação na interface com o observador, que os sistemas cuja indicação é analógica introduzem, como é o caso mais exemplar, do problema associado ao potencial erro de paralaxe na leitura.

Na actualidade, a automatização de sistemas, a inclusão de computadores e a complexidade de processamento associados à medição, aumentaram, por um lado a importância de se dispor de sinais do tipo digital e, por outro lado, generalizaram a inclusão, dos populares conversores analógico-digital e de conversores digital-analógico (respectivamente, em portas de entrada e em portas de saída de computadores).

Outro aspecto a merecer atenção encontra-se relacionado com o método de medição, o qual é, também, um potencial contribuinte para a avaliação das incertezas de medição.

Com efeito, existem dois métodos característicos para a concretização da medição, o *método de deflexão* e o *método de zero*. No primeiro caso, a mensuranda produz um efeito que se opõe à tendência “natural” do instrumento. No segundo caso, observa-se uma

tendência para o equilíbrio (zero), em geral, baseada num elemento de detecção de desvio à situação “natural” de balanceamento ou equilíbrio do instrumento de medição. A aplicação de um ou de outro método constitui um elemento de análise reflectido na qualidade da medição.

### **3.5 Caracterização metrológica**

O instrumento de medição pode ser descrito por duas vias envolvendo: as *características físicas* e as *características metrológicas*.

O primeiro tipo de características identifica informação sobre aspectos como a massa, a dimensão, o condicionamento externo, entre outros, cujo interesse no contexto deste documento é menor. Ao contrário, as *características metrológicas* encontram-se directamente relacionadas com os factores de influência que determinam as incertezas de medição e, como tal, merecem uma descrição mais aprofundada.

As *características metrológicas* podem ser definidas como [Rabinovich (2000)]:

*“aquelas que possibilitam o julgamento da adequação de cada instrumento para efectuar medições dentro de determinada gama, com uma exactidão conhecida, obtendo um valor da mensuranda e a estimativa da sua inexactidão”.*

O contexto da introdução do que se entende por características metrológicas resulta da relação existente entre o modelo conceptual ideal e a concretização real da instrumentação, inevitavelmente, uma reprodução imperfeita<sup>4</sup> [Barker *et al* (2001)]. A aceitação desta realidade prática conduz à adopção do que Rabinovich classifica como os “*Postulados da Teoria da Medição*” (vide página 67), directamente relacionável com os conceitos de erro e de incerteza de medição.

A caracterização metrológica tem em vista, portanto, avaliar e quantificar a diferença entre o modelo ideal (contendo as *características metrológicas nominais*) e a realidade instrumental que é concretizada (com *características metrológicas da instrumentação* em causa), podendo ser observada, no contexto em que a variável independente é o tempo, segundo duas perspectivas distintas: o *funcionamento em regime estático* e o *funcionamento em regime dinâmico*.

---

<sup>4</sup> Dois exemplos ilustrativos: um bloco-padrão que conceptualmente e na forma ideal é um paralelepípedo regular, com faces exactamente paralelas e sem irregularidades, realiza entre duas faces um comprimento exacto; um termómetro de dilatação de líquido em vidro ideal, dispõe de um capilar sob a forma de um cilindro de diâmetro exacto e constante em todas as suas secções transversais, o líquido sofre uma dilatação uniforme na escala considerada e, entre outras características, não existem forças que perturbem a deslocação da coluna de líquido, como a tensão superficial.

De facto, em cada um destes regimes encontram-se descrições de características específicas e distintas, das quais, pela sua vastidão, são apenas apresentadas algumas referências breves relativas ao contexto da medição em regime dinâmico e mais detalhadas relativamente ao regime estático. O ênfase atribuído ao segundo tipo de regime de funcionamento, resulta de se enquadrar na perspectiva da *calibração estática*<sup>5</sup>, sendo esta a vertente de aplicação da avaliação de incertezas de medição que condiciona o desempenho da instrumentação e, conseqüentemente, a medição.

### 3.5.1 Características de funcionamento em regime estático

No regime de funcionamento estático as componentes da mensuranda e das grandezas de influência (entendendo-se que ambas geram as contribuições que constituem o sinal de entrada) mantêm os seus valores constantes num intervalo de tempo – de medição.

Nesse contexto, considera-se que o sinal de entrada exhibe um comportamento dito “estático”, e pode-se caracterizar o comportamento do instrumento de medição admitindo a possibilidade (teórica, mas com dificuldades habituais de concretização prática) de promover a modificação de uma das componentes desse sinal mantendo as restantes os seus valores constantes, e observando o efeito produzido no sinal de saída.

A dificuldade prática de se concretizar este tipo de estudos resulta da diversidade de causas que podem contribuir, em cada caso, para a constituição do sinal: a variabilidade intrínseca da mensuranda; a capacidade efectiva que se dispõe para manter dentro de limites estabelecidos os valores de grandezas de influência; e as limitações naturais da instrumentação – de carácter mecânico, eléctrico, de conversão analógica-digital, etc.; entre outras. Estes factores justificam a substituição do termo “regime estático” pelo termo “regime estacionário”, mais próximo da realidade (onde se controlam os componentes que contribuem para o sinal de entrada dentro de limites que se procura minimizar).

Como é fácil imaginar, dada a diversidade de potenciais componentes contributivas para a composição dos sinais, existe uma correspondente diversidade de formas de caracterização metrológica que podem ser referidas. Como tal, serão apresentadas aquelas que, mais vulgarmente, são adoptadas para esse efeito. A definição apresentada em cada uma delas resulta da tradução, pelo autor, do conteúdo do VIM (2005).

A lógica subjacente à caracterização metrológica consiste em efectuar uma avaliação dos desvios de desempenho real do instrumento face à situação de comportamento ideal,

---

<sup>5</sup> Refira-se que, em muitos casos, a mensuranda não se encontra efectivamente numa situação estática mas controlada dentro de determinados limites devendo se designar essa situação, em rigor, como *estacionária*.

constituindo, por essa via, uma forma de quantificar a “imperfeição” da realização ou da medição de grandezas por parte dos instrumentos em causa.

Como ponto de partida desta descrição são introduzidos alguns conceitos de carácter genérico, que definem elementos de caracterização dos instrumentos de medição.

#### **3.5.1.1 Indicação do sistema de medição, intervalo de indicação e amplitude**

A *indicação* (do sistema de medição),  $I$ , define-se como “o valor da grandeza fornecido na saída do sistema de medição”.

Essa indicação poderá corresponder a uma posição numa escala graduada inserida num indicador – considerando uma saída do tipo analógico – ou a um valor numérico apresentado num formato de saída digital ou, ainda, num formato de padrão codificado.

A apresentação da indicação é limitada por um “*intervalo de indicação*”, o qual, corresponde ao “*conjunto de valores de uma grandeza limitado pelos valores extremos que são possíveis de obter como indicações de um sistema de medição*”. Em regra, a sua expressão é traduzida na indicação dos valores extremos (por exemplo,  $-20\text{ °C}$  a  $+50\text{ °C}$  correspondem ao valor mínimo e ao valor máximo que limitam o conjunto).

De uma forma similar, define-se o *intervalo nominal* (de indicação) como “o conjunto de valores de uma grandeza, limitado pelos valores das indicações extremas – valores arredondados ou aproximados – que podem ser obtidos com um ajustamento particular de controlo do sistema de medição e utilizado para designar esse ajustamento” (por exemplo, o intervalo nominal de indicação de  $+100\text{ V}$  a  $+200\text{ V}$  exprime os valores nominais mínimo e máximo de uma determinada escala de um instrumento de medição).

Com base nestes valores define-se a *amplitude* (de um intervalo nominal) como “o valor absoluto da diferença entre os valores extremos da grandeza que determinam o intervalo de indicação nominal” (considerando o exemplo anterior, a amplitude é de  $+100\text{ V}$ ).

#### **3.5.1.2 Resolução do sistema de medição e resolução do dispositivo indicador**

A *resolução do sistema de medição* é, por definição, “a menor variação no valor da grandeza mensurável com um instrumento de medição, que causa uma modificação perceptível na respectiva indicação”.

A *resolução*,  $R_s$ , de um dispositivo indicador é “a menor diferença entre indicações desse dispositivo que se pode distinguir significativamente”.



Ao contrário do que acontece com a indicação do tipo digital, cuja interpretação da definição é clara - coincide com a unidade do menor algarismo significativo – podem existir conclusões distintas na interpretação do conceito de resolução no caso de indicações analógicas, as quais admitem interpolações e, conseqüentemente, pode-se adoptar um grau de discriminação da escala superior à *divisão* definida como “a dimensão da grandeza correspondente ao intervalo entre marcações sucessivas de traços de uma escala”.

A interpretação correcta, faz corresponder ao valor da resolução do sistema a *melhor estimativa perceptível da indicação*. Supondo, como exemplo, o mostrador de um manómetro analógico (Fig. 3.7), cuja “resolução entre marcações sucessivas da escala” corresponde a 1 bar, mas permitindo a estimativa de valores até 1/5 dessa dimensão, a *resolução efectiva* do sistema de medição corresponde a  $(1/5) \times 1 \text{ bar} = 0,2 \text{ bar}$ .

Encontram-se referências a esta matéria em normas de calibração como é um exemplo a norma de calibração [NP EN 837-1 (1997)], na qual, se admite a estimativa até 1/10 da dimensão da grandeza entre traços sucessivos da escala.

De igual modo mas em sentido inverso, a *resolução efectiva* poderá reflectir um valor superior à dimensão entre traços sucessivos da escala do indicador quando se considere que elementos externos, como o ruído, impedem a percepção da modificação nesse nível de discriminação. O exemplo da Figura 3.8 exhibe um mostrador cuja divisão corresponde a 0,2 bar mas onde as condições de utilização determinam uma *resolução* prática de 0,4 bar.

Este segundo exemplo admite, num contexto de quantificação de incertezas de medição, uma interpretação alternativa, na qual se considera que a resolução corresponde à menor divisão da escala e se contabiliza o intervalo de oscilação do ponteiro como uma componente de instabilidade (*vide* secção 3.5.1.6 dedicada à estabilidade de um sistema de medição).

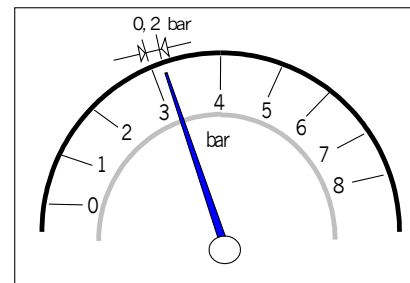


Figura 3.7: Indicador analógico de manómetro permitindo a interpolação da escala

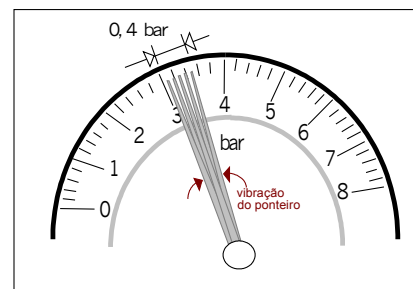


Figura 3.8: Indicador analógico de manómetro com ponteiro sujeito a vibração

### 3.5.1.3 Condições de referência e condições óptimas de um sistema de medição

As condições de referência (de um sistema de medição) são “as condições prescritas de utilização destinadas à avaliação do desempenho de um sistema de medição ou para a comparação de resultados de medição”. Este conceito tem particular importância no contexto da medição por especificar os intervalos de valores admissíveis para as grandezas de influência. De forma equivalente, as “condições óptimas (de um sistema de medição)” definem-se como “as condições de utilização de um sistema de medição, nas quais, a sua contribuição para a incerteza de medição é mínima”.

### 3.5.1.4 Sensibilidade (estática)

A sensibilidade (de um sistema de medição),  $S$ , caracteriza-se como “o quociente entre a alteração da indicação de um sistema de medição ( $I_0$ ) e a correspondente alteração do valor da grandeza mensurável ( $q_i$ )”.

Considerando que  $Q_i$  corresponde à posição de funcionamento do sistema de medição onde se determina essa relação, então, a sensibilidade,  $S_i$ , para essa situação particular, exprime-se de acordo com a equação seguinte.

$$S_i = \left( \frac{I_0}{q_i} \right)_{Q_i} \quad (3.8)$$

Por exemplo, um termómetro de resistência de platina de  $100 \Omega$ , numa gama de temperatura compreendida entre  $0^\circ\text{C}$  e  $100^\circ\text{C}$ , tem na vizinhança de  $0^\circ\text{C}$ ,  $S_i = 0,39 \Omega/^\circ\text{C}$  e na vizinhança de  $130^\circ\text{C}$ ,  $S_i = 0,38 \Omega/^\circ\text{C}$ , enquanto que, na mesma gama de temperatura, uma termoresistência, cujo comportamento é não linear, tem na vizinhança de  $0^\circ\text{C}$ ,  $S_i = 835 \Omega/^\circ\text{C}$  e na vizinhança de  $130^\circ\text{C}$ ,  $S_i = 3,8 \Omega/^\circ\text{C}$ . Este exemplo permite constatar que o valor de sensibilidade será único ( $S$ ) se for independente da posição de funcionamento do sistema de medição,  $Q_i$ . Esta relação serve de suporte, igualmente, para a caracterização da situação em que se considera a verificação das condições de linearidade (no primeiro caso apresentado,  $\delta R / \delta \theta \Leftrightarrow \Delta R / \Delta \theta \cong \text{Constante}$ , na gama de medição considerada).

### 3.5.1.5 Limiar de mobilidade

Para a compreensão deste parâmetro é conveniente referir previamente que, no contexto dos instrumentos de medição, a sua mobilidade se entende como a sua “aptidão para responder a pequenas variações do valor do estímulo”. Entende-se por limiar de mobilidade “a maior alteração no valor da grandeza mensurável por um instrumento de medição que não produz uma alteração detectável na correspondente indicação”.

Um exemplo consiste em considerar um instrumento de pesagem cuja resolução é de 0,1 g (i.e. 100 mg). Um ensaio a determinada carga (por exemplo, 100 g) pode ser efectuado com pesos equivalentes a submúltiplos da resolução (10 mg, 20 mg, etc.), colocados sucessivamente no receptor de pesagem, visando determinar a carga efectiva que concretiza as transições da indicação (por exemplo, de 100,1 g para 100,2 g e desta para 100,3 g). A diferença de carga efectiva observada traduz o limiar de mobilidade pretendido (cf. Fig. 3.9).

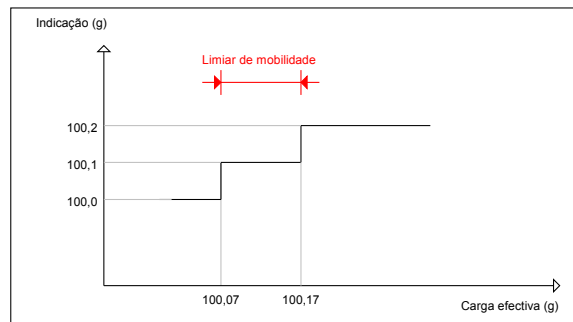


Figura 3.9: Determinação de um limiar de mobilidade

### 3.5.1.6 Estabilidade de um sistema de medição

A *estabilidade de um sistema de medição* entende-se como “a capacidade do sistema de medição de manter constantes ao longo do tempo as suas características metroológicas”.

A sua quantificação resulta da observação da situação em causa na perspectiva inversa, isto é, a determinação da variação da indicação detectada na indicação, considerando que a mensuranda se encontra numa situação estacionária.

$$\Delta I_e = I_{\max} - I_{\min} \quad (3.10)$$

### 3.5.1.7 Folga (dead band) da indicação

A *folga de um instrumento de medição* entende-se como “o intervalo máximo através do qual o valor de uma grandeza mensurável por um sistema de medição se pode alterar, em ambas as direcções, sem que esse facto produza uma alteração detectável na indicação correspondente”. Este intervalo é, por vezes, deliberadamente aumentado quando se pretende evitar a modificação da resposta associada a estímulos indesejáveis de pequena amplitude.

### 3.5.1.8 Deriva

A *deriva* define-se como “uma alteração da indicação de um sistema de medição, geralmente de forma lenta e contínua, não relacionável com a alteração da mensuranda nem com a alteração das grandezas de influência”.

Um exemplo é a *deriva secular*, fenómeno descoberto por Joule<sup>6</sup> e relacionado com a observação de uma deriva de longo período devido à variação do volume do bolbo de termómetros de líquido-em-vidro [NPL (1993), (1998)].

#### **3.5.1.9 Variação por efeito de uma grandeza de influência**

A *variação por efeito de uma grandeza de influência* entende-se como “a diferença de indicações num sistema de medição, para o mesmo valor da grandeza mensurável quando uma grandeza de influência assume, sucessivamente, dois valores diferentes”. Esta definição pode ser encarada como uma forma alternativa de expressão do anterior conceito de “reprodutibilidade dos resultados de medição” (*Aproximação entre os resultados das medições da mesma mensuranda efectuada com alteração das condições de medição*) que se encontra detalhado no VIM (1994).

#### **3.5.1.10 Repetibilidade**

A *repetibilidade* é entendida como uma “*propriedade do sistema de medição de fornecer indicações similares aproximadas para medições replicadas da mesma grandeza mensurável nas mesmas condições de medição*”.

Manter as “*mesmas condições de medição*”, também designadas por “*condições de repetibilidade*”, consiste em controlar as grandezas de influência dentro de limites de variação mínimos. As grandezas de influência consideradas encontram-se, genericamente, associadas ao instrumento de medição, ao método e procedimento, ao observador, ao local e à realização das replicações num período de tempo curto.

O conceito apresentado tem uma natureza qualitativa, sendo aceite que a sua expressão quantitativa é obtida através do desvio-padrão experimental da amostra (cuja expressão se encontra no capítulo 4), ou seja, considerando duas amostras experimentais (obtidas em *condições de repetibilidade*), aquela que possuir menor desvio-padrão experimental da amostra, possui menor dispersão dos valores e, conseqüentemente, melhor *repetibilidade*.

#### **3.5.1.11 Linearidade**

Quando é expectável e se assume como hipótese que a relação estabelecida entre a grandeza de saída e a grandeza de entrada, num determinado sistema de medição, é uma relação linear, é usual estabelecer um parâmetro que se designa por *desvio de linearidade*. Este parâmetro reflecte “a diferença (em cada ponto ou numa gama de medição) entre a situação ideal (valor expectável do modelo) e a situação real (indicação experimental)”.

---

<sup>6</sup> Após um estudo do comportamento dos termómetros de dilatação de líquido durante 40 anos em que observou variações típicas da indicação, da ordem de 0,04 °C no primeiro ano e variações subsequentes da ordem de 0,01 °C/ano.

Uma das formas de exprimir o desvio observado é através de valores relativos máximos, ou seja, pela maior indicação percentual do rácio entre o desvio observado e o valor da grandeza, em cada um dos patamares de funcionamento do instrumento de medição.

### 3.5.2 Características de funcionamento em regime dinâmico

As *características metrológicas* no contexto do *funcionamento em regime dinâmico* (referido, de forma abreviada, como “*comportamento dinâmico*”) procuram evidenciar as propriedades inerciais dos instrumentos de medição, isto é, o comportamento do sinal de saída em função do sinal de entrada, quando este último possui uma determinada configuração caracterizada por uma variação no tempo.

O estudo do comportamento dinâmico de um sistema de medição tem como modelo matemático de referência a equação diferencial linear ordinária com coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n q_0}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_0}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = \\ = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde,  $q_0$  representa a grandeza de saída,  $q_i$  a grandeza de entrada,  $t$  a variável correspondente ao tempo, e os coeficientes  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $(b_m, b_{m-1}, \dots, b_0)$  as combinações de parâmetros do sistema físico, de valor constante. Uma forma alternativa de representação, igualmente comum, substitui os termos diferenciais pelo operador  $D = d/dt$ .

A resolução de equações deste tipo, faz-se, por exemplo, pela aplicação da *Transformada de Laplace* ou pela via “clássica” de tratamento de *operadores diferenciais* originando, como solução, raízes reais e/ou complexas. Os operadores clássicos e as Transformadas de Laplace fornecem soluções analíticas. Contudo, na actualidade, existe uma alternativa atraente para efectuar a análise dinâmica dos sistemas: a simulação digital.

Como suporte desta análise – de comportamento dinâmico de sistemas de medição – assume particular importância a função que determina a relação entre a entrada e a saída do sistema como se este se tratasse de uma simples relação algébrica: a função operacional de

transferência,  $\frac{q_0}{q_i}(D)$ .

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0} \quad (3.13)$$

Usando este tipo de descrição é possível caracterizar um sistema de medição usando diagramas de blocos e funções operacionais de transferência, bem como a sua combinação, conforme se apresenta na Figura seguinte.

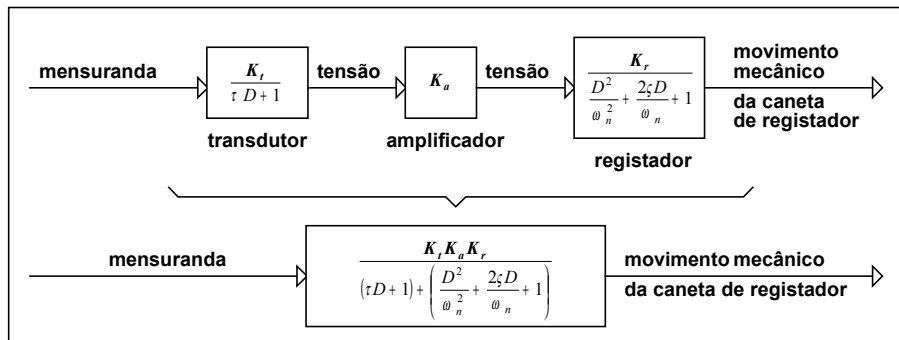


Figura 3.10: Combinação de funções de transferência de elementos de um sistema de medição e registro

Desta forma, dispondo de sinais controlados de entrada, uma via para a concretização dessa análise consiste em efectuar uma simulação, introduzindo esses sinais de entrada (de teste) nos sistemas e comparando-as com o desempenho expectável / ideal. Uma configuração típica é apresentada na subsecção 3.5.2.1, baseada na aplicação da função sinusoidal.

A natureza da resposta aos sinais de entrada permite, como resultado particularmente importante, classificar os instrumentos de medição por ordens de resposta e em função desse conhecimento, não só efectuar uma previsão e interpretação da resposta característica a determinado tipo de estímulos como, também, observar a sua adequação à medição de determinada grandeza, uma vez que o conhecimento da variabilidade da mensuranda num determinado contexto de realização da medição poderá permitir uma avaliação do comportamento – resposta – do instrumento utilizado nessa medição.

### 3.5.2.1 Função de transferência sinusoidal

Um dos testes de referência consiste em avaliar a resposta (em estado estacionário) a um sinal de entrada,  $q_i$ , correspondente a uma função sinusoidal, com a forma  $(A_i \text{sen} \omega t)$ , esperando-se observar um sinal sinusoidal da mesma frequência,  $\omega$ , dispondo de eventuais diferenças na amplitude e na fase.

A modificação da frequência do sinal de entrada produz, em geral, uma alteração destes parâmetros (amplitude e fase), constituindo uma análise que se designa por *resposta em frequência do sistema*, representada graficamente, através de curvas de rácio de amplitudes e de desvio de fase em função da frequência. A função de transferência sinusoidal é dada pela expressão seguinte.

$$\frac{q_0}{q_i}(i\omega) = \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + b_1(i\omega) + b_0}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0} \quad (3.14)$$

Nesta,  $i$  representa um número imaginário ( $\sqrt{-1}$ ) e  $\omega$  a frequência angular ( $\omega=2\pi f$ ) expressa em radianos por unidade de tempo. A representação num plano complexo, dos fasores, é uma forma característica de representação dos sinais envolvidos, o que, combinado com o conhecimento de soluções trigonométricas permite uma análise e interpretação das relações estabelecidas entre os sinais de entrada e de saída obtidos nestas circunstâncias.

Recuperando o contexto da expressão que determina a função de transferência apresentada em (3.14), deve-se notar que, apesar da expressão referir a possibilidade de um número de ordem elevado, na realidade muitos dos sistemas têm uma relação bem mais limitada, admitindo uma representação tipicamente distribuída entre a ordem 0 e a ordem 2. As respectivas expressões da função operacional de transferência são apresentadas de seguida.

### 3.5.2.2 Instrumentos de ordem 0

O caso mais simples de relação estabelecida entre o sinal de saída e o sinal de entrada, consiste no instrumento de ordem zero, para o qual, se verifica que o sinal de saída “segue” de forma ideal o sinal de entrada:

$$a_0q_0 = b_0q_i \quad (3.15)$$

Uma forma alternativa de representação considera a utilização da *sensibilidade estática* (também designada por *ganho em estado estacionário*),  $K$ .

$$a_0q_0 = \frac{b_0}{a_0}q_i = K \cdot q_i \quad (3.16)$$

Este tipo de sistema é referido frequentemente como representando o desempenho dinâmico perfeito ou ideal.

### 3.5.2.3 Instrumentos de 1ª ordem

Os instrumentos de medição designados de primeira ordem são os que se representam pela expressão seguinte:

$$a_1 \cdot \frac{dq_0}{dt} + a_0q_0 = b_0q_i \quad (3.17)$$

dividindo a expressão anterior por  $a_0$ ,

$$\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{dq_0}{dt} + q_0 = \frac{b_0}{a_0} q_i \quad (3.18)$$

resulta a expressão (3.19) que representa a função operacional de transferência para este tipo de instrumentos (onde  $\tau$  representa uma constante de tempo dada por  $a_1/a_0$  e  $K=b_0/a_0$ ).

$$\frac{q_0(D)}{q_i} = \frac{K}{\tau D + 1} \quad (3.19)$$

#### 3.5.2.4 Instrumentos de 2ª ordem

Os instrumentos de medição designados de segunda ordem são os que se representam pela expressão seguinte:

$$a_2 \cdot \frac{d^2 q_0}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i \quad (3.20)$$

Neste, como no caso anterior, faz-se notar que o segundo membro poderia ter mais termos representados no segundo membro. No entanto, esta formulação é a mais comum e aceite como representativa deste tipo de instrumentos.

Efectuando as substituições dos termos  $K=(b_0/a_0)$  representando a *sensibilidade estática*,

$\omega_n = \sqrt{\frac{b_0}{a_2}}$  representando a *frequência natural* em rad/s e  $\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ , representando o

*factor de amortecimento* – grandeza adimensional – resulta a expressão da função operacional de transferência.

$$\frac{q_0(D)}{q_i} = \frac{K}{D^2 / \omega_n^2 + 2\zeta D / \omega_n + 1} \quad (3.21)$$

#### 3.5.2.5 Teste utilizando sinais de entrada com configuração particular

Para se efectuar a avaliação do desempenho dinâmico dos sistemas de 1ª e de 2ª ordem, recorre-se à utilização de sinais de entrada com configurações particulares. Em [Sousa Lopes (1989), (1991)] e [Doebelin (1990)], por exemplo, encontram-se descrições detalhadas da resposta dos instrumentos a diversos tipos de sinais de entrada, sendo os mais comuns os sinais de impulso, degrau, rampa, para além da análise em frequência e de sinais transientes.

### 3.6 Erro, incerteza e a expressão do resultado da medição

O objectivo final da medição, na perspectiva probabilística actual, consiste na obtenção de uma estimativa de determinada *qualidade* ou *propriedade* de um observável, a grandeza



mensurável e da sua incerteza. A compreensão do processo conducente à sua explicitação é o que se descreve em seguida.

A medição resulta, em particular, da intervenção do processo de medição, envolvendo diferentes componentes que constituem o sistema de medição e que possuem a capacidade de influenciar a concretização da mesma. Esta é a razão primordial pela qual se adoptam os “Postulados da Teoria da Medição” [Rabinovich (2000)]:

1. *o valor verdadeiro da grandeza mensurável existe;*
2. *o valor verdadeiro da grandeza mensurável é constante;*
3. *o valor verdadeiro da grandeza mensurável não se pode determinar.*

Da aceitação destes Postulados decorre, inevitavelmente, que na actividade de medição se obtém um resultado que contem um *erro* desconhecido. A definição VIM (2005) de “*erro (absoluto) da medição*”,  $\zeta$ , é:

*“a diferença entre o valor – estimativa – da grandeza mensurável obtido pela medição e o valor verdadeiro da grandeza”.*

Designando o valor verdadeiro da grandeza por  $A$  e o valor obtido pela medição por  $\tilde{A}$ , o *erro (absoluto) da medição* é dado por,

$$\zeta = \tilde{A} - A \quad (3.22)$$

envolvendo a dita componente considerada inatingível (o *valor verdadeiro da grandeza*).

Esta impossibilidade prática não determina, contudo, que não seja possível ou desejável procurar extrair informação prática a partir da sua definição. Com efeito, é possível estabelecer que o *erro da medição* é constituído por componentes de três proveniências genéricas [Rabinovich, 2001]: uma *componente metodológica*,  $\zeta_m$ , uma *componente instrumental*,  $\zeta_i$ , e uma *componente humana*,  $\zeta_h$ .

$$\zeta = \zeta_m + \zeta_i + \zeta_h \quad (3.23)$$

Em cada uma destas componentes e em cada caso particular de medição, poder-se-á encontrar uma diversidade significativa de *factores de influência* que contribuem para a constituição desse erro da medição.

No caso da *componente metodológica do erro*, encontram-se factores como: a inadequada formulação da Teoria relativa ao fenómeno que suporta a medição; a inexactidão

das relações que determinam a estimativa da mensuranda; a discrepância entre o modelo conceptual do objecto e a realidade do próprio objecto.

No caso da *componente instrumental do erro*, encontram-se factores como: a imperfeição inerente aos instrumentos e sistemas de medição; o desempenho intrínseco da instrumentação; a influência de factores exógenos – determinadas por grandezas de influência nas condições de referência – cuja variabilidade pode determinar a causa de desvios quer na mensuranda sob observação quer nas mensurandas que constituem parte integrante do processo de medição.

No caso da *componente humana do erro*, observável em situações onde essa intervenção seja influente, ela depende de factores como: a interpretação humana da informação – a decisão e registo do momento de uma ocorrência, a observação e interpretação de padrões, a interpretação de leituras de dispositivos de indicação analógica, etc.

Sendo o *erro de medição* impossível de conhecer, no entanto, é possível obter pela via da *calibração* – comparação com padrões (instrumentos e sistemas de medição ou medidas materializadas de grandezas) – estimativas desse *erro*. Estas estimativas designam-se por *desvios de calibração*,  $\delta$ , definidos como:

“a diferença entre o valor observado e o valor de referência da grandeza”<sup>7</sup>

ambos possuindo uma realidade experimental.

Com base nesta descrição, a introdução do conceito de *incerteza de medição* decorre, então, de um conjunto de considerações adicionais:

- a) considerando que o valor observado é  $\tilde{A}$ , que o valor de referência da grandeza – resultante da calibração – é  $\hat{A}$  e que a estimativa do *erro da medição* é dada pelo *desvio de calibração*,  $\delta$ , então, a equação (3.22) pode ser re-escrita originando:

$$\delta = \tilde{A} - \hat{A} \quad (3.24)$$

- b) com base na definição do *erro da medição*,  $\zeta$ , poder-se-á definir o *erro relativo da medição*,  $\varpi$ , o qual corresponde ao rácio entre o *erro da medição* e o *valor verdadeiro da grandeza*.

Uma vez que se encontra suportado num conceito não determinável – *erro de medição* – requer, igualmente, que se recorra a uma estimativa,  $\varpi$ , resultante do rácio entre a estimativa dos limites do erro de medição (*desvio de calibração*),  $\delta$ , e a *estimativa da mensuranda* obtida pela medição.

---

<sup>7</sup> Nesta definição, o “valor de referência da grandeza” que é quantificável, substitui o termo “valor verdadeiro da grandeza”.

$$\hat{\varpi} = \frac{\delta}{A} \quad (3.25)$$

A utilidade frequentemente encontrada neste rácio resulta do facto do seu valor, em regra, ser independente do *valor verdadeiro da mensuranda*.

- c) decorrendo do facto do *erro* ser não nulo e poder ser positivo ou negativo, uma estimativa do *erro* deverá respeitar a desigualdade:  $|\zeta| \leq |\delta|$  – como refere [Rabinovich (2000)], de facto, a forma geral pressupõe que  $\delta_1 \leq \zeta \leq \delta_2$  verificando-se como casos particulares comuns que  $|\delta_1| = |\delta_2| = |\delta|$  ou que  $|\delta| = \max(|\delta_1|, |\delta_2|)$ .

Esta última interpretação justifica, em particular, a utilização do valor superior do desvio de calibração para, por um lado, representar a sua estimativa e, por outro lado, constituir um parâmetro de comparação entre instrumentos análogos [Lord *et al* (2003)].

Em resumo, apesar do conhecimento do erro ser inacessível, o seu estudo proporciona um potencial de informação não desprezável, designadamente, pelo estabelecimento de limites de enquadramento proporcionados pelas suas estimativas, possibilitando o desenvolvimento de um grau de qualificação primária visando a comparação entre os resultados de medição.

Em condições ideais esperar-se-ia que a medição conduzisse à obtenção de uma estimativa coincidente com o *valor (verdadeiro) da grandeza e*, conseqüentemente, uma estimativa do *erro* coincidente com zero. A realidade evidenciada pela calibração mostra que a medição sucessiva, inevitavelmente, traduz-se na observação de desvios cujos valores são distintos e se afastam de zero, permitindo concluir que ele possui um carácter dual: de natureza sistemática, porque o seu valor médio se pode traduzir num afastamento determinado da medição relativamente a um valor de referência (caso contrário, o valor médio associado à medição dos erros seria sempre nula); e, simultaneamente, de natureza aleatória, uma vez que se observa uma dispersão de valores característica (de distribuição de probabilidade normal) em torno desse valor médio<sup>8</sup>.

Esta observação pode-se evidenciar se o raciocínio for colocado no sentido oposto: se não existirem componentes “*aleatórias*” ou “*sistemáticas*”, o desvio será nulo e o resultado da medição será, inevitavelmente, o valor verdadeiro da grandeza; se o desvio for integralmente de natureza sistemática, então, a repetição de medições teria que conduzir a uma repetição do resultado da medição – ainda que deslocado face ao valor verdadeiro da grandeza; finalmente, se o desvio fosse estritamente aleatório, então, o resultado seria naturalmente disperso, mas, o seu valor médio seria, também e inevitavelmente, sempre o mesmo.

<sup>8</sup> Do ponto de vista prático, quando se refere a “observação natural de dispersão de valores” obtida pela medição de grandezas físicas, pressupõe-se que o sistema de medição utilizado possui uma capacidade de discriminação suficiente para detectar essas variações.

Desta forma, da repetição do processo de medição conducente à obtenção de uma estimativa do “desvio de calibração”,  $\delta$ , resulta uma distribuição de valores que, em regra, se afasta de zero (o zero, neste caso, corresponde à estimativa do valor de referência – “*valor convencionalmente verdadeiro*” de um padrão) e cuja dispersão de valores possui uma natureza aleatória, como se ilustra na Figura seguinte (admitindo um patamar de medição  $i$ ).

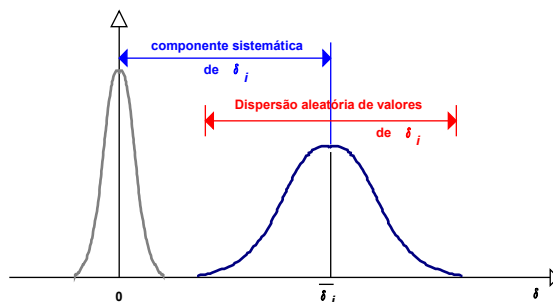


Figura 3.11: Representação das componentes sistemática e aleatória do desvio

Aceita-se, portanto, que o *erro da medição* é constituído pelas componentes apresentadas na expressão (3.23) – contendo elementos da metodologia, da instrumentação e humana – e estas, por sua vez, são constituídas por parcelas de natureza aleatória e de natureza sistemática. A sua estimativa, determinada pelo *desvio de calibração*, possui uma componente aleatória (da qual, a dispersão de valores é uma das contribuições) que caracteriza a *incerteza de medição*.

Rabinovich (2000) refere que “*é importante não esquecer que é o erro de medição que caracteriza a incerteza do resultado da medição e a dispersão e não-reprodutibilidade da medição*” lembrando, igualmente, que “*por esta razão, não é verdadeiramente importante estimar o erro com exactidão, ao contrário, é importante estimar a incerteza com o maior rigor, sobrestimando e nunca subestimando o seu valor, mas mantendo a sobrestimação ao mínimo*”<sup>9</sup>.

Regressando à caracterização dual do “*desvio de calibração*”, a sua componente sistemática é quantificável e, como tal, deve conduzir a uma correcção. O mesmo não acontece com a componente aleatória, que estabelece um intervalo de valores de acordo com uma distribuição de probabilidade e, por essa razão, associada à “*incerteza*” intrínseca do processo de calibração.

Na realidade, a dispersão de valores que se observa resulta de uma diversidade de factores que, em regra, não permitem uma avaliação individualizada – entenda-se,

<sup>9</sup> Este aspecto da **sobre-estimação** e da **subestimação** será particularmente destacado na análise comparativa efectuada no capítulo 8, entre resultados da avaliação da incerteza de medição aplicando a metodologia do Guia ISO de avaliação de Incertezas (GUM) e a metodologia de simulação numérica baseada no método de Monte Carlo.

independente dos outros factores – do seu efeito durante o processo de medição [Fuller (1987)]. Este elemento de dificuldade é, no entanto, compensado pelo conhecimento frequentemente disponível e acumulado, bem como, pela capacidade de dispor de modelos que permitem efectuar um relacionamento com base em modelos matemáticos entre as grandezas de influência e a mensuranda e pela capacidade de efectuar a medição de grandezas de influência, em simultâneo, com a obtenção da mensuranda.

Entendendo que quer a componente sistemática quer a componente aleatória do erro são constituídas por contribuições com diferentes origens (instrumentais, metodológicas e humanas), a sua quantificação adquire uma importância fundamental para a expressão do resultado da medição.

- no caso das *contribuições de natureza sistemática*, porque estas possibilitam a eventual correcção da estimativa da mensuranda obtida pelo sistema de medição;
- no caso das *contribuições de natureza aleatória*, porque estas determinam a incerteza de valores que se pode associar à estimativa corrigida (ponto anterior).

Daqui se depreende, igualmente, que o conteúdo informativo do **resultado da medição** deve ser expresso como:

- *a estimativa da mensuranda corrigida de acordo com as componentes sistemáticas do erro observadas;*
- *a incerteza de medição que se associa a essa estimativa, traduzindo o conjunto de componentes aleatórias do erro que a afectam.*

Em ambos os casos, a obtenção da informação decorre do conhecimento do modelo matemático (relação funcional) que relaciona a grandeza de saída,  $Y$ , com as grandezas de entrada,  $X_i$  e que genericamente se representa por:

$$Y = f(X_1, \dots, X_n) \quad (3.26)$$

Na prática experimental existe uma frequente impossibilidade de se obter uma amostragem da população completa realizando-se, em vez disso, estimativas suportadas em amostras limitadas das grandezas de entrada,  $x_i$ , as quais servem como argumentos para a obtenção da *estimativa da mensuranda*,  $y$ .

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.27)$$

Destas amostras resultam valores médios,  $\bar{x}_i$ , e desvios-padrão experimentais da média,  $s_{\bar{x}_i}$ , constituindo estimadores dos parâmetros que caracterizam a população em observação. Estas estimativas permitem a obtenção da pretendida estimativa da mensuranda (admitindo-se que as médias se encontram devidamente corrigidas de contribuições sistemáticas de componentes de erro),

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \quad (3.28)$$

e da dispersão associada a essa estimativa, determinada (usando o GUM) por uma função  $u$ , genericamente, do tipo:

$$s_{\bar{y}} = u(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, s_{\bar{x}_1}, \dots, s_{\bar{x}_n}) \quad (3.29)$$

A expressão da incerteza de medição que resulta de (3.29) tem a configuração habitual de uma distribuição de probabilidade normal, cujos limites dependem do nível de confiança considerado. Como tal, foi necessário definir qual o nível de probabilidade associado à declaração dos intervalos de incerteza, permitindo efectuar uma comparação entre resultados provenientes de diferentes processos, sistemas de medição e metodologias. Estabeleceu-se como critério, no caso da Metrologia, a expressão do intervalo de incerteza de medição relativo a 95% de probabilidade ou de confiança.

Assim, no contexto actual da Metrologia, a expressão do resultado da medição resulta da indicação da estimativa da medição,  $\hat{y}$ , acompanhada dos limites da incerteza de medição, expressos para um intervalo de probabilidade de 95%,  $U_{95}(\hat{y})$ .

$$(\hat{y} \pm U_{95}(\hat{y})) \cdot [\text{unidade de } Y] \quad (3.30)$$

### 3.7 Rastreabilidade e calibração

O conceito de *rastreabilidade* da medição encontra-se interligado com o conceito de normalização. A sua introdução resultou de sequências de acontecimentos que demonstraram a necessidade de “*padronização*” de sistemas envolvendo a medição<sup>10</sup>.

A questão da normalização envolveu o estudo da “*garantia da qualidade*” das medições, ou seja, a confiança dos resultados, originando diversas vertentes de estudo como a de “*controlo de qualidade*” e de “*rastreabilidade das medições*” ou “*rastreabilidade metrológica*”.

<sup>10</sup> Um exemplo que, de certa forma, terá demonstrado essa necessidade é descrito em [Sydenham (1982)]: em 1904, um guarda-noturno, na tentativa de combater um incêndio no National Bureau of Standards (Washington) não conseguiu fazer a ligação dos seus dispositivos de combate a incêndios e a tomada de hidrante por possuírem dimensões distintas. Esse facto, com outras personagens, repetiu-se pouco tempo depois em Baltimore, com consequências desastrosas. Um estudo subsequente mostrou a existências de 600 dimensões distintas de junções deste tipo em uso.

Note-se que a medição de grandezas físicas se traduz na obtenção de resultados que, na ausência de informação suplementar, não permite inferir sob a sua “qualidade”. A indicação de um sistema de medição, por si só, representa um acréscimo de informação cuja “confiança” é muito reduzida, como se depreende da ilustração seguinte.

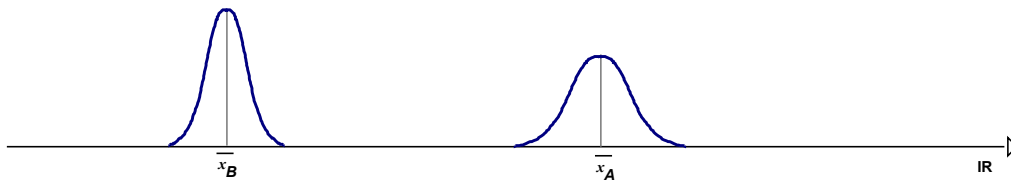


Figura 3.12: Representação da distribuição de probabilidade de duas amostras quaisquer de uma grandeza

Nesta, são representados, na recta real, dois resultados ( $x_A$  e  $x_B$ ) obtidos a partir de amostras de valores similares (conhecendo-se os seus valores médios e as suas dispersões), não sendo possível indicar qual dos dois possui maior “exactidão”, definida como “a diferença entre o valor resultante da medição e o valor verdadeiro da grandeza”).

Esta situação revela a necessidade de se introduzir, portanto, uma referência (não o *valor verdadeiro da grandeza* – desconhecido – mas o *valor convencional da grandeza* – valor de referência de calibração, por exemplo). Com efeito, se for incluída nesta Figura um resultado adicional, constituído por um valor atribuído à mesma quantidade da grandeza em causa,  $x_{ref}$ , correspondendo, dentro de um determinado nível de probabilidade, à melhor estimativa dessa grandeza<sup>11</sup>, é possível determinar os “desvios de calibração”,  $\delta_A$  e  $\delta_B$ , entre o *valor de referência* e as estimativas - médias – indicadas. Desta forma, poder-se-á concluir qual das estimativas se encontra mais próxima do valor correcto.

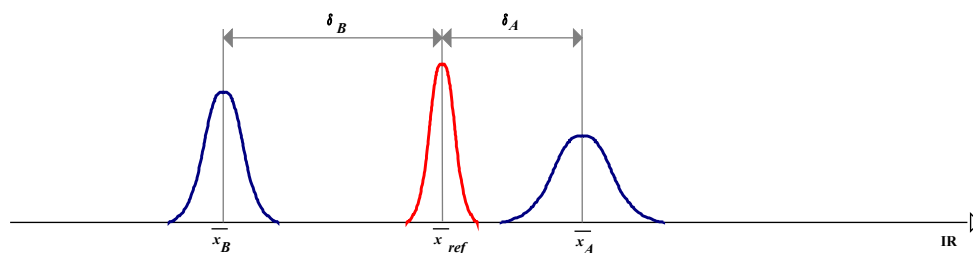


Figura 3.13: Função distribuição de probabilidade de duas amostras quaisquer de uma grandeza, de uma amostra de referência e dos desvios de calibração respectivos

A introdução deste elemento de referência como meio de comparação, cujo valor possui um determinado nível de probabilidade (confiança), constitui o princípio subjacente à actividade de “calibração”. O VIM (2005) define a sua acção como

<sup>11</sup> O VIM, (1994) designa esse valor por *valor convencionalmente verdadeiro*, o VIM (2005) designa-o simplesmente por *valor de uma grandeza*. Neste documento, será adoptado o primeiro termo ou o termo “*valor de referência (de uma grandeza)*”.

*“a operação que estabelece a relação, obtida tomando como referência um ou mais padrões de medição e as correspondentes indicações de um sistema de medição, desenvolvida em condições específicas e determinando a incerteza de medição”.*

Uma questão importante é saber “quais as razões que justificam a calibração de instrumentos e de sistemas de medição?” - A resposta envolve quatro vantagens associadas:

- 1) à avaliação da “*exactidão*” da indicação;
- 2) à confiança na fiabilidade do seu desempenho;
- 3) à capacidade de comparação com outros equipamentos;
- 4) à sua integração no sistema unificado do SI.

A operação de calibração depende em particular de um elemento que fornece o valor de referência: *o padrão de medição*. De acordo com o VIM (2005) este representa a “*realização da definição de uma dada grandeza, com valor e incerteza de medição declarados, e utilizado como referência*” (por exemplo, uma massa padrão de 1 kg ou uma resistência padrão de 100  $\Omega$ ).

Esta definição, contudo, não descreve a diversidade de realizações de padrões que se pode dispor. Por essa razão, existem definições suplementares, com maior grau de detalhe, associadas a características particularizadas pela sua natureza de concepção ou de aplicação:

- *padrão (de medição) primário*, padrão de medição cujo valor da grandeza e incerteza de medição são estabelecidas sem relação a outro padrão de medição, para uma grandeza do mesmo tipo (é o primeiro padrão numa hierarquia de calibração);
- *padrão (de medição) secundário*, padrão de medição cujo valor da grandeza e incerteza de medição são atribuídas mediante a calibração por comparação com um padrão de medição primário, para uma grandeza do mesmo tipo (a sua relação com o padrão primário pode ser directa ou intermediada por um sistema de medição);
- *padrão (de medição) de referência*, padrão de medição utilizado para a calibração de padrões de trabalho, numa determinada organização ou num determinado local;
- *padrão (de medição) de trabalho*, padrão de medição utilizado rotineiramente na calibração ou verificação de sistemas de medição, medidas materializadas ou materiais de referência;
- *padrão (de medição) intrínseco*, padrão de medição baseado numa propriedade, fenómeno ou substância suficientemente estável e reproduzível (estabelecido por consenso não se relacionando com outro padrão de medição do mesmo tipo).

A calibração de instrumentos e sistemas de medição envolve, portanto, uma operação de comparação com padrões de “melhor qualidade” que, por sua vez, são comparados com



outros padrões de “qualidade superior” e assim sucessivamente, até se atingir o padrão primário que, por definição, é obtido pela realização fundamental da grandeza.

Esta sequência de operações permite, por um lado, ao instrumento ou sistema de medição adquirir *rastreabilidade metrológica* a um *padrão primário da grandeza* mensurável de aplicação e, por outro lado, constituir uma *cadeia de rastreabilidade*. Estes dois importantes conceitos encontram-se definidos no VIM (2005):

- *rastreabilidade metrológica*, propriedade de um resultado de medição de se relacionar com uma referência metrológica declarada, através de uma cadeia ininterrupta de calibrações de um sistema de medição ou de comparações, cada qual contribuindo para a incerteza de medição declarada;
- *cadeia de rastreabilidade*, cadeia de sistemas de medição alternados com procedimentos de medição e padrões de medição associados, de um resultado de medição a uma referência metrológica declarada.

Acerca do processo de rastreabilidade resultante da calibração deve-se referir, adicionalmente, que o primeiro conceito determina que a incerteza de cada elemento da cadeia de rastreabilidade de nível mais elevado (referência) é contabilizada como uma contribuição para a incerteza dos elementos hierarquicamente em níveis inferiores. Por outro lado, a interpretação do conceito de cadeia de rastreabilidade resulta da introdução do conceito complementar de *hierarquia de calibração*, que corresponde “à *sequência de calibrações de sistemas de medição entre uma referência metrológica declarada e o sistema de medição final*”.

A representação convencional da hierarquia de rastreabilidade adopta a configuração exposta na Figura (3.14), cuja tradução prática em cadeias de rastreabilidade tem uma configuração similar à exposta na Figura (3.15). Deve-se referir, contudo, que esta estrutura tende a modificar-se no futuro, sobretudo, pelo facto do desenvolvimento dos padrões primários seguir uma via distinta daquela que foi definida originalmente, substituindo a materialização dos padrões primários e a subsequente transferência da sua exactidão para os restantes elementos destas cadeias recorrendo a comparações efectuadas periodicamente por processos que permitem o desenvolvimento local dos padrões primários e os sujeita a comparações interlaboratoriais periódicas determinando, com base nestas, o seu grau de exactidão.

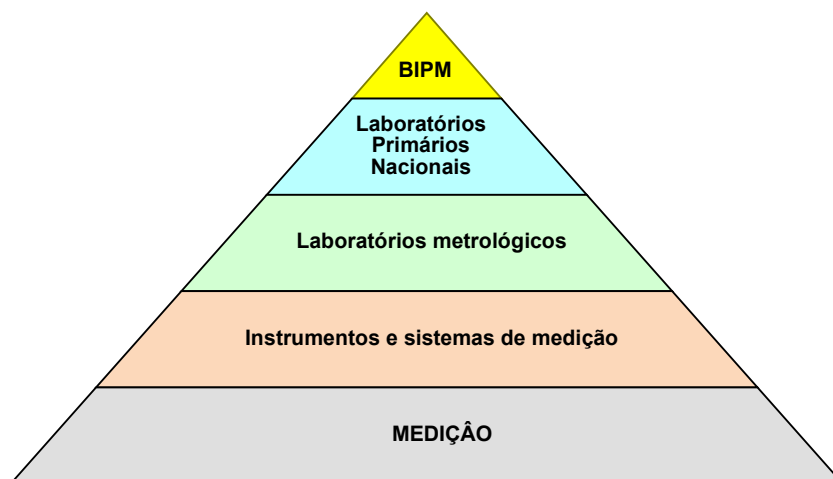


Figura 3.14: Hierarquia de rastreabilidade convencional

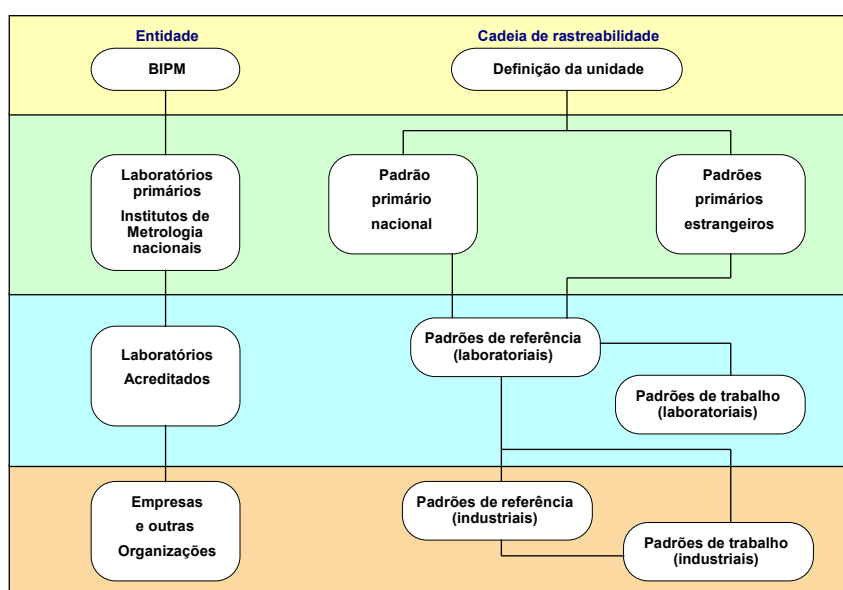


Figura 3.15: Exemplo de uma cadeia de rastreabilidade (com relações de calibração)

Na actualidade, subsiste apenas a grandeza de base SI de “massa” como um padrão primário que é materializado, ao contrário do que acontece com as restantes grandezas de base, cujas definições de padrões resultam de um conjunto de requisitos experimentais, os quais podem ser concretizados localmente com o máximo “*grau de exactidão*”.

## **4. FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA E DA TEORIA DAS PROBABILIDADES APLICADOS EM METROLOGIA**

### **4.1 Introdução**

A aplicação dos conceitos de Estatística e da Teoria das Probabilidades tem, para a Metrologia, uma importância central, por ser nelas que se encontram enraizados alguns dos fundamentos que sustentam a sua estrutura.

Essa sua influência observa-se na natureza dos fenómenos que determinam o comportamento das mensurandas, no comportamento dos sistemas de medição e na relação estabelecida com as grandezas de influência envolvendo todo o processo que conduz à obtenção dos resultados da medição.

No contexto particular deste estudo esta importância é acrescida por se apontarem soluções, suportadas em simulação e análise numérica para a avaliação de incertezas de medição, cuja concretização depende de um conjunto de etapas que requerem a sua validação face à natureza estocástica dos processos de medição envolvidos. Os elementos de base para esta validação encontram o seu suporte, também, na Estatística e na Teoria das Probabilidades.

A natureza dos problemas e das soluções que se encontram estudadas nestes domínios é tão vasta e diversificada que seria impraticável efectuar qualquer tipo de resumo abrangente neste documento. Optou-se por isso por descrever um conjunto de aspectos considerados mais relevantes para a fundamentação do conteúdo deste texto.

Em particular, são apresentados os conceitos que suportam o desenvolvimento subsequente do capítulo e da sua aplicação posterior ao problema de natureza estocástica envolvendo a medição e a avaliação de incertezas, nomeadamente, os conceitos de probabilidade e de variável aleatória, seguindo-se depois o enquadramento genérico de funções densidade de probabilidade e de funções de distribuição cumulativas, fundamentais na descrição de momentos de distribuições. Esta descrição permite atingir os conceitos de valor esperado e, nestes, os conceitos de média, de variância e de desvio-padrão, essenciais na compreensão das metodologias a estudar por se associarem aos conceitos centrais de estimativa e de incerteza de medição.

Na sequência apresentada, encontra-se a descrição de um conjunto de famílias paramétricas e seus parâmetros aplicadas, também, no contexto das metodologias em estudo, seguindo-se uma descrição resumida dos elementos que caracterizam o processo de amostragem, preponderante na perspectiva experimental da medição, concluindo-se com a introdução dos conceitos relacionados com os intervalos de confiança, aplicados na determinação de intervalos de incerteza de medição expandida.

Outros elementos, onde se incluem alguns *Teoremas*, são incorporados com o objectivo de permitir, por um lado, a compreensão do desenvolvimento teórico envolvido na descrição apresentada e, por outro lado, como forma de evidenciar alguns dos pressupostos da aplicação a processos de medição no contexto estocástico em que se desenvolvem.

## **4.2 Alguns fundamentos e conceitos de base**

A introdução das definições e conceitos fundamentais – no contexto da Metrologia – carece, necessariamente, de um ponto de partida. No contexto da medição – como actividade experimental – considerou-se adequado tomar como ponto de partida o conceito de *experiência aleatória*.

Em Murteira (1979) refere-se que o entendimento de “*experiência*” coincide com “*qualquer processo ou conjunto de circunstâncias capaz de produzir resultados observáveis*”. O acréscimo do termo “*aleatória*” traduz-se em acrescentar que “*o processo ou conjunto de circunstâncias em causa é de natureza estocástica*”.

Numa perspectiva frequencista, a interpretação adoptada considera que, da repetição das experiências – de que resultam observações – se podem obter *frequências absolutas* ou *frequências relativas* de acontecimentos.

A *experiência* incorpora, necessariamente, a existência de *resultados* – número ou conjunto de números, atributo ou conjunto de atributos, ou outras combinações – que constituem o que se designa por *espaço de resultados* ou *espaço de amostragem* e que se pode definir como “*o conjunto fundamental formado por todos os resultados que se pode obter quando se realiza a experiência*” [Murteira (1979)]. O espaço de amostragem é representado, habitualmente, por  $\Omega$ , e os elementos individuais representam-se por  $\omega_i \in \Omega$ .

Este enquadramento permite classificar o espaço de amostragem como *discreto*, se este possui um número finito ou uma infinidade numerável de elementos; ou como *contínuo*, se é constituído por um conjunto de elementos não numerável <sup>1</sup>.

O espaço de resultados pode resultar de uma combinação de  $n$  experiências aleatórias de que resultam  $n$  acontecimentos, caso em que o espaço de resultados  $\Omega$  é determinado pelo produto cartesiano  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ . Ou seja, se a experiência é a que se encontra associada ao espaço  $\Omega_i$ , contendo  $m_i$  elementos, o espaço de resultados da combinação de experiências conterá  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$  elementos.

No que se refere aos resultados da experiência define-se o termo “*acontecimento*” como *um subconjunto de  $\Omega$* . A realização de um acontecimento  $A \subset \Omega$ , dá-se quando o resultado  $\omega$  da experiência pertence a  $A$  ( $\omega \in A$ ). Os acontecimentos constituídos por um único elemento,  $A \equiv \{\omega\}$ , designam-se por *acontecimentos elementares* <sup>2</sup>.

A “*classe contendo a totalidade de acontecimentos associados a uma dada experiência*” define-se como *espaço de acontecimentos*, e representa-se por  $\mathcal{A}$ .

Diversos autores (com destaque para Kolmogorov em “*Foundations of the Theory of Probability*”, editada em 1933 e Kolmogorov *et al* (1982)) contribuíram para a formulação de uma axiomatização da Teoria das Probabilidades permitindo a definição da *função probabilidade*. (neste documento, usa-se o termo *distribuição de probabilidade* com o mesmo sentido).

A associação, aos acontecimentos, das respectivas frequências – de ocorrência – permite estabelecer os 3 *Axiomas* que caracterizam a função probabilidade,  $P(A)$ :

*A função probabilidade  $P[\cdot]$  é uma função de conjuntos com domínio  $\mathcal{A}$  (Álgebra de acontecimentos) e contradomínio no intervalo  $[0,1]$ , satisfazendo os seguintes axiomas:*

- A1)  $P[A] \geq 0$ , para qualquer  $A \in \mathcal{A}$ ;
- A2)  $P[\Omega] = 1$ ;
- A3)  $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$  se  $A \cap B = \emptyset$ .

<sup>1</sup> Por exemplo, o espaço de resultados  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$  constituído pelo resultado de um lançamento de um dado é um “espaço de resultados discreto”; o espaço de amostragem associado ao intervalo de tempo entre a ocorrência de chamadas telefónicas sucessivas numa central telefónica é um “espaço de amostragem contínuo”.

<sup>2</sup> No lançamento de um dado podem ser observados seis acontecimentos elementares:  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$  e uma diversidade de acontecimentos não elementares, por exemplo,  $\{2,4,6\}$ , representando resultados correspondentes a um número par.

Estes *Axiomas* originaram o desenvolvimento de diversos *Teoremas*, cuja aplicação é partilhada pela Metrologia com outros ramos da Ciência.

Esta concepção “*clássica*”, também designada por “*frequencista*”, embora útil para introduzir o conceito de probabilidade e de função de probabilidade possui limitações intrínsecas resultantes:

- de se requerer que o espaço de resultados,  $\Omega$ , seja finito (uma vez que no caso contrário, verificar-se-ia um resultado associado à definição de frequência relativa cujo valor seria sistematicamente zero:  $P[\{\omega_i\}] = n_i/\infty$ );
- de se considerar que os *acontecimentos elementares* que constituem o espaço de resultados dispõem de igual probabilidade, i.e.,  $P[\{\omega_i\}] = 1/n$  sendo  $i = 1, \dots, n$ ;
- de se assumir que o espaço de resultados,  $\Omega$ , pode ser determinado *a priori*.

Este conjunto de *Axiomas*, sendo adequado à representação de espaços de dimensão finita, necessita de uma reformulação do seu *Axioma A3* de modo a considerar quer a união de uma sucessão infinita de “*acontecimentos mutuamente exclusivos*” quer a determinação da respectiva probabilidade. Essa generalização tem a forma seguinte [Mood *et al.* (1974)]:

*A3')* Se  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$  é uma sequência de acontecimentos mutuamente exclusivos em  $\mathcal{A}$ , ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j = 1, 2, \dots$ ) e se  $A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ , então,

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

Deve-se realçar que a descrição axiomática é apenas uma das possíveis formas de definir o conceito de probabilidade. Com efeito, outras formas possíveis são [Papoulis (1965)]:

- a definição com base na *frequência relativa* (introduzida por Richard von Mises), determina a probabilidade,  $P[A]$ , de um acontecimento,  $A$ , como o limite da *frequência relativa*  $n_A/n$ , de ocorrências desse acontecimento.

$$P[A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (4.1)$$

- a definição com base na Teoria clássica, ou definição formulada *a priori*, partindo do pressuposto que se conhece o número total de *acontecimentos possíveis*,  $N$ , e o número de casos favoráveis (relativos ao acontecimento  $A$ ),  $N_A$ , sendo a probabilidade determinada pelo rácio entre o número de *acontecimentos favoráveis* e o número total de *acontecimento possíveis*.

$$P[A] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \quad (4.2)$$

- a definição de probabilidade como medida subjectiva de crédito, definição aplicável a *acontecimentos individuais* expressando o “crédito” desse acontecimento, corresponde a uma interpretação racional indutiva que se distingue das restantes formas apresentadas. Frequentemente, a sua aplicação encontra-se meramente no contexto linguístico ou numa perspectiva dedutiva de estágios preliminares da investigação científica.

Na apresentação destes *Axiomas*,  $\mathcal{A}$ , representa uma *Álgebra de acontecimentos*, a qual, de acordo com a aplicação de um Teorema fundamental da Teoria das Probabilidades designado por *Teorema de Extensão* [Mood *et al.* (1974)], admite a extensão da função de probabilidade para uma  $\sigma$ -Álgebra (*vide* Papoulis (1965), Wylie (1975) ou Murteira (1979)).

Considerando a definição de *Campo de Borel* [Papoulis (1965)], definem-se “acontecimentos” como “os subconjuntos possíveis de  $\Omega$  constituindo um Campo de Borel  $\mathcal{A}$ ”, (uma vez que se pretende garantir que o resultado de uniões, intersecções, etc., de subconjuntos produzem, como resultado, conjuntos que continuam a constituir “acontecimentos” sendo possível, por isso, atribuir-lhes valores de probabilidade).

Retomando a orientação anterior, tendo sido definidos os conceitos de espaço de resultados,  $\Omega$ , de espaço de acontecimentos,  $\mathcal{A}$ , e de função probabilidade,  $P[\cdot]$  – recorrendo à estrutura axiomática apresentada – poder-se-á desenvolver, então, o importante conceito de *espaço de probabilidade* como:

*Um triplete ordenado  $(\Omega, \mathcal{A}, P[\cdot])$  onde  $\Omega$  representa um espaço de resultados (ou espaço de amostragem),  $\mathcal{A}$ , representa uma colecção (assumida como uma álgebra) de acontecimentos (cada qual constituindo um subconjunto de  $\Omega$ ) e  $P[\cdot]$  a função de probabilidade com domínio  $\mathcal{A}$ .*

Este triplete constitui o suporte axiomático do que se define como *experiência*,  $\mathcal{E}$ , a qual deve ser especificada a partir dos três conceitos envolvidos  $\mathcal{E} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}[\cdot])$  :

- a) o *espaço de resultados*,  $\Omega$ , ou *acontecimento certo*;
- b) o *Campo de Borel*,  $\mathcal{A}$ , contendo subconjuntos designados por *acontecimentos*;
- c) um número  $P[\cdot]$  atribuído a cada *acontecimento*, designado por *probabilidade do acontecimento*, cumprindo os Axiomas *A1, A2, A3 e A3'*.

Com base nos diversos conceitos apresentados, resultam consequências que são merecedoras de destaque.

Uma delas, é a distinção entre *resultados* (“outcomes”) e *acontecimentos* (“events”), sendo os primeiros – os *resultados* – os elementos obtidos pela realização da experiência,  $A_i$ , enquanto que os segundos – os *acontecimentos* – são subconjuntos incorporando os resultados da amostra. Os *acontecimentos* “de interesse” não necessitam, portanto, de incorporar todos os resultados possíveis<sup>3</sup>.

Outra consequência, resulta da introdução dos conceitos de *probabilidade condicional* e de *acontecimentos independentes*. Com efeito, considerando dois *acontecimentos*  $A$  e  $B \in \mathcal{A}$ , e o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P[\cdot])$ , a *probabilidade condicional do acontecimento*  $A$  *dado o acontecimento*  $B$ , designa-se por  $P[A|B]$  e define-se por:

$$P[A|B] = \frac{P[AB]}{P[B]} \quad \text{se } P[B] > 0 \quad (4.3)$$

onde  $P[AB] = \frac{N_{AB}}{N}$ , sendo  $N_{AB}$  o número de ocorrências do acontecimento  $[A \cap B]$  em  $N$  acontecimentos observados.

Esta definição permite obter outros *Teoremas* [Mood *et al.* (1974)], dois dos quais têm particular importância: o *Teorema da Probabilidade Total* e o *Teorema de Bayes*.

O *Teorema da Probabilidade Total* diz-nos que:

*Para um dado espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P[\cdot])$ , sendo  $B_1, B_2, \dots, B_n$  uma colecção de acontecimentos mutuamente exclusivos em  $\mathcal{A}$ , satisfazendo  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n B_j$  com  $P[B_j] > 0$  para  $j = 1, \dots, n$ , então, para qualquer acontecimento  $A \in \mathcal{A}$ ,*

$$P[A] = \sum_{j=1}^n P[A|B_j] \cdot P[B_j] \quad (4.4)$$

Usando a combinação da definição de *probabilidade condicional* e o *Teorema da Probabilidade Total*, resulta o *Teorema de Bayes* [Paulino *et al.* (2003)]:

*Para um dado espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P[\cdot])$ , sendo  $B_1, B_2, \dots, B_n$  uma colecção de acontecimentos mutuamente exclusivos em  $\mathcal{A}$ , satisfazendo*

<sup>3</sup> Um exemplo simples encontra-se associado ao lançamento de um dado, cuja realização de uma experiência permite observar o resultado “4”. Esse facto permite dizer que se observou a ocorrência do acontecimento  $A_4$  que contém o elemento “4”. Esse acontecimento pode estar incluído em diferentes subconjuntos:  $\{4\}$ ,  $\{\text{números par}\}$ ,  $\{4,5,6\}$ , etc.



$\Omega = \bigcup_{j=1}^n B_j$  com  $P[B_j] > 0$  para  $j = 1, \dots, n$ , então, para qualquer acontecimento  $A \in \mathcal{A}$  que verifique  $P[A] > 0$ ,

$$P[B_k | A] = \frac{P[A | B_k] \cdot P[B_k]}{P[A]} \quad (4.5)$$

A origem desta abordagem deve-se a R. Price (1763) que publicou a obra póstuma do Rev.º Thomas Bayes intitulada “*An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*”. Em 1939, Harold Jeffreys recupera o bayesianismo, como reacção à abordagem clássica predominante. Deste então, tem engrossado o número de pessoas que se dedicam ao seu estudo no que se designa por “Inferência Bayesiana” [Tuninski *et al* (1997)], [Lira *et al* (2001), (2006)], [Kacher *et al* (2003)].

A importância do *Teorema de Bayes* resulta da sua abordagem onde a experiência é o factor condicionante e preponderante da sua caracterização, isto é, o conhecimento acumulado nas experiências determina o resultado do valor da probabilidade atribuído a um acontecimento. Dito de outra forma, considera-se que a informação obtida *a priori* pela experiência possui um grau de importância que não se pode desprezar, uma vez que essa situação não é equivalente aquela onde o investigador se encontra num estado de ignorância total face ao problema em causa.

A ideia subjacente à aplicação do *Teorema*, envolvendo o conceito de aprendizagem, revela-se fundamental em estudos de *Inferência Estatística* na actualidade, invertendo a orientação clássica que parte da causa para o efeito, retirando informação da observação dos efeitos para efectuar a “previsão” da probabilidade da causa. É evidente a importância da aplicação deste conceito [Buescu (2005)], por exemplo, quando se abordam problemas no contexto da medicina para os quais, em geral, se pretende obter informação acerca das causas.

A avaliação da possível dependência mútua entre acontecimentos, detectável pela aplicação de métodos bayesianos, introduz um outro conceito de grande importância: a *independência entre acontecimentos*. Essa importância revela-se quando se considera a independência como uma condição essencial para a caracterização de resultados provenientes da amostragem em experiências aleatórias. Em particular, esta questão é relevante na medição, uma vez que constitui um dos seus requisitos de constituição das amostras.

A sua definição é a seguinte:

“Para um dado espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P[\cdot])$ , sendo  $A$  e  $B$  dois acontecimentos em  $\mathcal{A}$ , estes consideram-se independentes se uma qualquer das seguintes condições for satisfeita:

- a)  $P[AB] = P[A] \cdot P[B]$
- b)  $P[A|B] = P[A]$  se  $P[B] > 0$ ;
- c)  $P[B|A] = P[B]$  se  $P[A] > 0$ ”.

A estruturação de conceitos que foi apresentada abre caminho para a secção seguinte, onde estes são utilizados na apresentação dos conceitos fundamentais de *variável aleatória* e da *função probabilidade*, os quais, são os elementos de suporte à abordagem probabilística da actividade experimental associada à medição.

### 4.3 Variáveis aleatórias e funções de probabilidade

Um dos objectivos do processo experimental é o de atribuir valores de probabilidade a determinados acontecimentos, o que conduz à introdução do conceito de *variável aleatória* como elemento integrado na experiência (portanto, enquadrado num espaço de probabilidade), cuja aplicação permite a pretendida quantificação.

A definição formal de *variável aleatória* [Mood *et al.* (1974)] refere que:

“Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P[\cdot])$ , uma *variável aleatória*, designada por  $X$  ou  $X(\cdot)$ , é uma função  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $X(\cdot)$  deve ser tal que, para qualquer número real  $\xi$ , o conjunto  $A_\xi$  definido por  $A_\xi = \{\omega : X(\omega) \leq \xi\}$  pertence a  $\mathcal{A}$ ”.

A segunda parte da definição tem menor importância, envolvendo o requisito de que a colecção de  $\omega$ 's para os quais  $X(\omega) \leq \xi$ , para qualquer número real  $\xi$ , constituam também acontecimentos – i.e., elementos de  $\mathcal{A}$ . De facto, esta condição não é restritiva quando se pretende utilizar o conceito de *variável aleatória* apenas na descrição de acontecimentos.

A compreensão desta definição pode ser auxiliada através de um exemplo: Considere-se um lançamento de um dado, cujo resultado possível se encontra no espaço de resultados  $\Omega =$

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$\{1\} \rightarrow 1$
$\{2\} \rightarrow 2$
$\{3\} \rightarrow 3$
$\{4\} \rightarrow 4$
$\{5\} \rightarrow 5$
$\{6\} \rightarrow 6$

$\{1,2,3,4,5,6\}$ . Então, poder-se-ão estabelecer as relações de quantificação expostas.

De igual forma se verifica que, para os diferentes valores da recta de números reais, o conjunto resultante pertence ao espaço de acontecimentos, conforme requisito apresentado na definição de variável aleatória.

$\xi < 1$	$A_\xi = \{\omega: X(\omega) \leq \xi\} = \emptyset \in \mathcal{A}$
$1 \leq \xi < 2$	$A_\xi = \{\omega: X(\omega) \leq \xi\} = \{1\} \in \mathcal{A}$
$2 \leq \xi < 3$	$A_\xi = \{\omega: X(\omega) \leq \xi\} = \{1, 2\} \in \mathcal{A}$
$3 \leq \xi < 4$	$A_\xi = \{\omega: X(\omega) \leq \xi\} = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{A}$
$4 \leq \xi < 5$	$A_\xi = \{\omega: X(\omega) \leq \xi\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{A}$
$5 \leq \xi < 6$	$A_\xi = \{\omega: X(\omega) \leq \xi\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$
$\xi \geq 6$	$A_\xi = \{\omega: X(\omega) \leq \xi\} = \Omega \in \mathcal{A}$

A *função distribuição cumulativa* ( $F_D C$ ), associada a uma variável aleatória  $X$ , define-se como uma função  $F_X(\cdot)$  de domínio  $\mathbb{R}$  e contradomínio  $[0, 1]$  que satisfaz:

$F_X(\xi) = P[X \leq \xi] = P[\{\omega : X(\omega) \leq \xi\}]$  para qualquer número real  $\xi$ . Esta função ( $F_D C$ ) tem as seguintes propriedades:

- i)  $F_X(-\infty) \equiv \lim_{\xi \rightarrow -\infty} F_X(\xi) = 0$  e  $F_X(+\infty) \equiv \lim_{\xi \rightarrow +\infty} F_X(\xi) = 1$ ;
- ii)  $F_X(\cdot)$  é uma função monótona não decrescente, ou seja, sendo  $\xi < \psi$  verifica-se  $F_X(\xi) \leq F_X(\psi)$ ;
- iii)  $F_X(\cdot)$  é uma função contínua à direita, ou seja,  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} F_X(\xi + h) = F_X(\xi)$ .

Estas propriedades permitem introduzir uma definição alternativa para a *função distribuição cumulativa*, como “qualquer função  $F_X(\cdot)$  cujo domínio é  $\mathbb{R}$  e o contradomínio  $[0, 1]$  e satisfazendo as 3 propriedades apresentadas acima”.

A função distribuição cumulativa constitui uma forma prática de determinação de valores de probabilidade associados aos acontecimentos a que corresponde um intervalo no contradomínio da variável aleatória (v.a.)  $X$ . Revela-se menos apropriada para obter a resposta, com igual facilidade, a questões envolvendo a determinação da probabilidade relativa a um elemento pontual do intervalo em causa. Este é um dos argumentos que sustenta a utilidade da introdução da *função densidade de probabilidade* ( $F_D P$ ).

Para melhor entender o papel desta função, refira-se que as variáveis aleatórias e as funções distribuição cumulativas podem representar *atributos* e *acontecimentos* de variável *discreta* ou *contínua*. Em particular, a v.a. diz-se *discreta* se os valores que assume são contáveis, determinando uma *função distribuição cumulativa discreta*.

No que se segue, usar-se-á a notação  $\{X = \xi\}$  como simplificação de  $\{\omega : X(\omega) = \xi\}$ .

Sendo  $X$  uma variável aleatória discreta, a F<sub>D</sub>C determina a probabilidade:

$$F_X(\xi) = P[X \leq \xi] \quad (4.7)$$

Considerando-se que a v.a.  $X$  é contável (o que se traduz em se considerar que existe um conjunto finito de números reais  $D = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  no qual a v.a. assume valores), então,

$$\Omega = \bigcup_n \{\omega : X(\omega) = \xi_n\} = \bigcup_n \{X = \xi_n\}$$

onde a segunda igualdade representa uma forma simplificada de expressão da relação exposta na primeira igualdade. Adicionalmente, considerando que,

$$\{X = \xi_i\} \cap \{X = \xi_j\} = \emptyset \quad \text{com } i \neq j,$$

verifica-se usando o terceiro *Axioma da Probabilidade* que,

$$\sum_{\xi_i \in D} P[X = \xi_i] = P[\Omega] = 1$$

atendendo a que  $P[X = \xi_i] > 0$  se  $(\xi_k) \in D$  e  $P[X = \xi_k] = 0$  se  $(\xi_k) \notin D$ , poder-se-á definir uma função  $f_X(\xi) = P[X = \xi]$ , designada por *função densidade de probabilidade*, possuindo as seguintes propriedades [Murteira (1979)]:

- i)  $f_X(\xi) \geq 0$  para  $\xi \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $\sum_{\xi_i \in D} f_X(\xi_i) = 1$ ;
- iii)  $P[B] = \sum_{\xi_i \in B} P[X = \xi_i]$  sendo  $B \subset D$ .

Por esta via, encontra-se um forma de relacionar a função distribuição cumulativa com a função densidade de probabilidade, utilizando a expressão (4.7) e considerando que  $\xi_i \in D$ .

$$F_X(\xi) = P[X \leq \xi] = \sum_{\xi_i \leq \xi} f_X(\xi_i) \quad (4.8)$$

A sua definição formal refere que “sendo  $X$  uma variável aleatória discreta admitindo os valores  $D = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ , então, a função  $f_X(\cdot)$  é designada por *função densidade de probabilidade discreta* e é definida pela seguinte expressão:

$$f_X(\xi) = \begin{cases} P[X = \xi_i] & \xi_i \in D \\ 0 & \xi_i \notin D \end{cases} \quad (4.9)$$

Um Teorema aplicável neste contexto [Mood *et al.* (1974)] determina que a função distribuição cumulativa se pode obter a partir da função densidade de probabilidade – cf. (4.8) – e *vice-versa*, utilizando a expressão seguinte.

$$f_X(\xi_i) = F_X(\xi_i) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h > 0)}} F_X(\xi_i - h) \quad (4.10)$$

Numa forma equivalente de representação de acontecimentos, encontra-se a perspectiva de análise associada a *variáveis aleatórias contínuas*: “Uma variável aleatória  $X$  designa-se por *contínua* se existe uma  $f_X(\xi)$  tal que,

$$F_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_X(v) dv \quad (4.11)$$

para qualquer número real  $\xi$ ”.

A função,  $f_X(\cdot)$ , de uma *variável aleatória contínua*  $X$  (usada na equação anterior) constitui o que se designa por *função densidade de probabilidade*. Desta expressão depreende-se que a função densidade de probabilidade também se pode obter a partir da função distribuição cumulativa, mediante a aplicação da relação inversa.

$$f_X(\xi) = \frac{dF_X(\xi)}{d\xi} \quad (4.12)$$

No caso de variáveis aleatórias contínuas, a função densidade de probabilidade, possui propriedades idênticas às que foram apresentadas para as variáveis aleatórias discretas.

- i)  $f_X(\xi) \geq 0$  para  $\xi \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\xi) d\xi = 1$ .

#### 4.4 Valores esperados, momentos e funções geradoras de momentos

O conceito de *valor esperado* foi, segundo [Murteira (1979)], um conceito introduzido por Huygens (*esperança matemática*, introduzida no seu *Tratado Formal de Probabilidades*, de 1654, opúsculo baseado na correspondência trocada entre Pascal e Fermat). Huygens designa-o por “*valor ou preço da sorte*”<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> A tradução prática deste conceito reflectia que a esperança matemática do comprador de um bilhete de lotaria seria equivalente à soma dos produtos das importâncias a ganhar pelas respectivas probabilidades verificando-se, simultaneamente, que com o aumento da dimensão das amostragens os valores de frequência se aproximam do valor da probabilidade.

O entendimento do seu significado [Maine *et al* (1985)] parte de se admitir uma variável discreta,  $X$ , cuja sucessão  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots$  determina uma FdP  $f_X(\xi_i)$ , estabelecendo-se uma expressão que define o valor esperado,  $E(X)$  ou  $\mu_X$ , da v.a.  $X$  (considerando que  $\sum_i |\xi_i| f_X(\xi_i) < \infty$ ).

$$E(X) = \sum_i \xi_i f_X(\xi_i) \quad (4.13)$$

De forma equivalente, para variáveis aleatórias contínuas, o valor esperado é determinado pela expressão seguinte.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \cdot f_X(\xi) d\xi \quad (4.14)$$

Este parâmetro (valor esperado), corresponde à posição de centralidade dos valores que pode tomar uma variável aleatória, daí a sua associação a uma *medida de localização central da densidade da variável aleatória*. O valor esperado (por vezes, designado por *média*) tem um conteúdo informativo incompleto, nomeadamente, em virtude de não fornecer indicações sobre outras características da função, igualmente importantes, como seja o afastamento dos valores que constituem a amostra relativamente a esse valor esperado.

Interessa, portanto, dispor de outros parâmetros, em particular, um que expresse a *dispersão* observado na distribuição de probabilidade da variável aleatória de interesse  $X$ . Esse parâmetro é a *variância*, representada por  $\sigma_X^2$  ou por  $\text{var}[X]$ , dada por (4.15a) ou (4.15b) consoante a variável aleatória é discreta ou contínua, respectivamente.

$$\sigma_X^2 = \sum_i (\xi_i - \mu_X)^2 f_X(\xi_i) \quad (4.15a)$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu_X)^2 f_X(\xi) d\xi \quad (4.15b)$$

A introdução deste parâmetro de segunda ordem (termo quadrático), tornou-se necessária para evitar o cancelamento de termos que seria obtido usando um parâmetro equivalente de 1ª ordem. No entanto, a introdução de um parâmetro envolvendo termos de ordem quadrática impede a sua comparação directa com os valores observados por amostragem.

Este facto originou a adopção do parâmetro *desvio-padrão experimental*,  $\sigma_X$ , da variável aleatória  $X$  como mais apropriado para esse efeito, sendo dado por:  $\sigma_X = +\sqrt{\sigma_X^2}$ .

Este conceito de valor esperado pode ser aplicado, não só às variáveis aleatórias como, também, a funções de variáveis aleatórias [Rice (1985)]. Assim, considerando uma variável aleatória  $X$ , e de uma função  $g(\cdot)$  cujo domínio e contradomínio se encontram na recta dos números reais, a *esperança* ou *valor esperado da função*  $g(\cdot)$  aplicada à v.a. designa-se por  $E[g(X)]$  e é obtida, no caso discreto, por (4.16) e no caso contínuo por (4.17).

$$E[g(X)] = \sum_i g(\xi_i) f_X(\xi_i) \quad (4.16)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) f_X(\xi) d\xi \quad (4.17)$$

A expressão do valor esperado de uma função pode ser generalizado aplicando-se, por exemplo, à *média*, onde  $g(X) = X$  e  $E[g(X)] = E[X]$ ; e à *variância*, onde  $g(X) = (\xi_i - \mu_X)^2$  e  $E[g(X)] = E[(\xi_i - \mu_X)^2] = \text{var}[X]$ .

Da definição de valor esperado resultam propriedades úteis, como:

- i)  $E[c] = c$  sendo  $c$  uma constante;
- ii)  $E[c \cdot g(X)] = c \cdot E[g(X)]$ , sendo  $c$  uma constante;
- iii)  $E[c_1 \cdot g_1(X) + c_2 \cdot g_2(X)] = c_1 \cdot E[g_1(X)] + c_2 \cdot E[g_2(X)]$ , sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes;
- iv)  $E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)]$  se  $g_1(\xi) \leq g_2(\xi)$  para todos os valores de  $\xi$ .

No caso da variância, existe uma expressão específica. Com efeito, sendo  $X$  uma variável aleatória e admitindo que  $E[X^2]$  exista:

$$\text{var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - [E(X)]^2 \quad (4.18)$$

Esta expressão fornece uma segunda via para a determinação da variância que se revela de grande utilidade em casos práticos como os expostos no Cap. 7, na obtenção das expressões de variâncias relativas a funções densidade de probabilidade de interesse em Metrologia (uniforme, triangular, e de configuração U, por exemplo).

O conceito de valor esperado tem, também, importância ao se incorporar na dedução da *Desigualdade de Chebyshev*, que serve de suporte à demonstração da *Lei dos Grandes Números* e à sua subsequente aplicação no *Teorema do Limite Central*.

*Teorema 1 (Desigualdade de Chebyshev)*

*Seja  $X$  uma variável aleatória e  $g(\cdot)$  uma função não negativa de domínio a recta de números reais, então:*

$$P[g(\xi) \geq k] \leq \frac{E[g(\xi)]}{k} \text{ para qualquer } k > 0. \quad (4.19)$$

Com base neste *Teorema*, foi desenvolvido um *Corolário* com particular importância por antecipar, de certa forma, o problema dos intervalos de confiança das distribuições, uma vez que permite estabelecer – como se verá adiante – valores limite para intervalos de probabilidade aplicáveis a qualquer função.

*Corolário ao Teorema da Desigualdade de Chebyshev<sup>5</sup>:*

*Considerando que  $X$  representa uma variável aleatória com variância finita, então:*

$$P[|X - \mu_X| \geq r\sigma_X] = P[(X - \mu_X)^2 \geq r^2\sigma_X^2] \leq \frac{1}{r^2} \quad (4.20)$$

*para qualquer  $r > 0$*

Um desenvolvimento deste *Corolário* é consequência da modificação (4.21) e da representação expandida efectuada em (4.22), permitindo exprimir a probabilidade associada a intervalos de forma proporcional ao valor do *desvio-padrão*.

$$P[|X - \mu_X| < r\sigma_X] \geq 1 - \frac{1}{r^2} \quad (4.21)$$

$$P[\mu_X - r\sigma_X < X < \mu_X + r\sigma_X] \geq 1 - \frac{1}{r^2} \quad (4.22)$$

Esta desigualdade permite determinar o minorante de intervalos de probabilidade. Por exemplo, o minorante do intervalo de probabilidade relativo a 2 vezes o desvio-padrão, i.e.,  $\pm 2\sigma_X$  (com  $r=2$ ) é igual a 0,75.

$$P[\mu_X - 2\sigma_X < X < \mu_X + 2\sigma_X] \geq 1 - \frac{1}{4} = 0,75 \quad (4.23)$$

---

<sup>5</sup> A sua demonstração resulta de se utilizar  $g(\xi) = (X - \mu_X)^2$  e  $k = r^2\sigma_X^2$ .



Uma forma de generalização do conceito de valor esperado origina a introdução do conceito de *momento* reflectindo o que, habitualmente, também se designa por *métrica*.

Entende-se por *momentos de uma variável aleatória ou de uma distribuição de probabilidade* os valores esperados de potências da variável aleatória que possuem a referida distribuição. Este conceito, traduzido para um formalismo, tem a seguinte forma:

*Sendo  $X$  uma variável aleatória, o momento de ordem  $r$  de  $X$ , designado por  $\mu_r'$ , e define-se por (4.24) supondo que o valor esperado existe.*

$$\mu_r' = E[X^r] \quad (4.24)$$

Deve-se referir que o conjunto dos “momentos” ( $\mu_1', \mu_2', \dots$ ) determina, de forma exacta a configuração da função de probabilidade.

De forma análoga, é definido o conceito de *momento central*:

*Sendo  $X$  uma variável aleatória, o momento central de ordem  $r$  de  $X$  em torno de  $a$  é dado por  $E[(X - a)^r]$ . No caso particular em que  $a = \mu_X$  esse momento central designa-se por  $\mu_r$  e é dado pela relação (4.25).*

$$\mu_r = E[(X - \mu_X)^r] \quad (4.25)$$

Destas definições resulta que o *momento de ordem 1 de  $X$*  corresponde à sua *média*,

$$\mu_1' = E[X] \quad (4.26)$$

que o *momento central de ordem 1 de  $X$  em torno da média* é dado por,

$$\mu_1 = E[(X - \mu_X)] = 0 \quad (4.27)$$

que o *momento central de ordem 2 de  $X$  em torno da média* é a sua *variância*,

$$\mu_2 = E[(X - \mu_X)^2] = \text{var}[X] \quad (4.28)$$

e, finalmente, que os *momentos centrais de ordem ímpar em torno da média* – desde que estes existam – e que possuam uma função densidade de probabilidade simétrica em torno de  $\mu_X$  são nulos. O facto do *momento central de ordem 1 em torno da média* ser nulo, inviabiliza a utilização do seu conteúdo informativo e explica o recurso à *variância* como fonte para obtenção da *métrica* da dispersão da amostra: o *desvio-padrão*.

O *momento central de 3ª ordem*,  $\mu_3$ , designa-se por *métrica de assimetria*, uma vez que o seu valor indica se a assimetria de uma distribuição de probabilidade é nula (resultado nulo) ou se a mesma possui uma forma assimétrica desviada à direita (traduzido num resultado positivo do estimador do parâmetro) ou desviada à esquerda (traduzido num resultado negativo do estimador do parâmetro). Um outro *momento central, de 4ª ordem*, determina uma *métrica de excesso* ou de “*kurtosis*” cuja utilização é, também, frequente [Johnson *et al* (1977)].

Com efeito, esta métrica, definida por  $\left[ \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right]$  e designada por *coeficiente de excesso* ou de *kurtosis*, diz-nos que a distribuição de probabilidade que a origina se encontra mais concentrada em torno da média que a da distribuição de probabilidade normal quando da sua aplicação resultam valores positivos e, no caso contrário – obtenção de valores negativos – que a sua distribuição de probabilidade se encontra mais dispersa em torno da média que a distribuição de probabilidade normal.

Relativamente ao *momento de 1ª ordem*, embora este seja correntemente associado à média de uma distribuição de probabilidade associada a uma variável aleatória, é importante notar que esse *parâmetro de localização* não corresponde à única possibilidade para cumprir essa função. De facto, outras duas métricas podem ser adoptadas como alternativas: a *mediana* e a *moda*.

O entendimento da definição de *mediana* carece da definição prévia do conceito de *quantil*. Assim, o *q-ésimo quantil de uma variável aleatória X ou da sua correspondente distribuição de probabilidade,  $P_q$ , define-se como o menor número  $\xi_q$ , que satisfaz a relação:  $F_X(\xi_q) \geq q$ .*

Na sequência da definição anterior, a *mediana,  $med_X$  ou  $P_{0,50}$ , de uma variável aleatória X corresponde ao quantil de ordem 0,50*. Em particular, no contexto de variáveis aleatórias contínuas, é comum encontrar a expressão da definição anterior na forma seguinte.

$$\int_{-\infty}^{med_X} f_X(\xi) d\xi = \int_{med_X}^{+\infty} f_X(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \quad (4.29)$$

A outra *métrica de localização* referida, a *moda da variável aleatória X*, define-se como o valor – caso este exista – onde a função densidade de probabilidade  $f_X(\cdot)$  atinge o valor máximo.

A importância destes parâmetros resulta do facto deles determinarem o conhecimento completo das distribuições de probabilidade pretendendo-se, portanto, possuir estimadores apropriados para a sua caracterização. Destes aspectos trata a parte seguinte.

#### **4.5 Algumas famílias paramétricas de distribuições de probabilidade de uma variável**

Na actualidade é conhecido um número bastante significativo de *famílias paramétricas de funções de distribuição de probabilidade*, algumas das quais têm aplicação mais frequente em Metrologia e, por essa razão, serão aqui destacadas.

Uma *família paramétrica de funções densidade de probabilidade*, é uma *colecção de funções densidade de probabilidade, indexadas por uma quantidade designada por parâmetro*. No caso da função ser relativa a uma variável, então, a sua representação simbólica deve identificar a variável – por hipótese,  $X$  – e a colecção de parâmetros que permite a relação funcional – por hipótese,  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , numa forma:

$$f_X(\xi; p_1, p_2, \dots, p_k) \text{ ou, simplificadamente, } f(\xi; p_1, p_2, \dots, p_k)$$

Por exemplo, as funções densidade de probabilidade de Poisson representam-se por:

$$f(\xi; \lambda) = \lambda e^{-\lambda \xi} \text{ para } \lambda > 0 \quad (4.30)$$

e a sua família paramétrica de funções densidade de probabilidade indica-se na forma:

$$\{f(\cdot; \lambda) : \lambda > 0\} \quad (4.31)$$

Das famílias de funções a seguir apresentadas, todas elas representam distribuições mais habituais no âmbito da Metrologia.

No que se refere ao conteúdo informativo apresentado, será constituído pela relação funcional que suporta o modelo de distribuição de probabilidade, os seus parâmetros, com destaque para os que são aplicados no contexto da avaliação de incertezas – *momento central de 1ª ordem* ou *média* e *momento central de 2ª ordem em torno da média* ou *variância* e, nalguns casos, pelo interesse da sua aplicação noutras secções deste documento, a *função distribuição cumulativa* e respectivos modelos modificados de aplicação computacional.

#### 4.5.1 Distribuição de probabilidade uniforme

A *função densidade de probabilidade uniforme* resulta de se admitir que todos os elementos que a constituem num intervalo de variação definido pelos limites  $[a, b]$  possuem uma probabilidade constante e equivalente a  $1/(b-a)$ , expressando-se por,

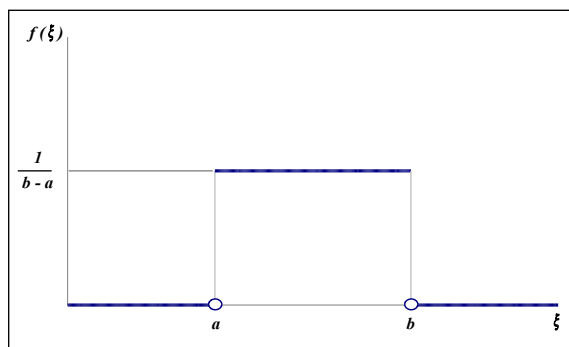


Figura 4.1: Função densidade de probabilidade uniforme

$$f(\xi; a, b) = \frac{1}{(b-a)} \quad \text{para } \xi \in [a, b] \quad (4.32)$$

ou numa forma alternativa,

$$f(\xi; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq \xi \leq b \\ 0 & \text{se } \xi > b \end{cases} \quad (4.33)$$

A equação em causa, resultante da aplicação do *Axioma* que iguala a probabilidade de todos os acontecimentos possíveis a 1, determina a constante a atribuir à probabilidade.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi; a, b) d\xi = \int_a^b f(\xi; a, b) d\xi = f(\xi; a, b) \int_a^b d\xi = f(\xi; a, b) \cdot (b-a) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\xi; a, b) = \frac{1}{(b-a)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

A *função distribuição cumulativa*, por sua vez, é obtida pela aplicação da sua definição,

$$F(\xi; a, b) = \int_{-\infty}^{\xi} f(v; a, b) dv = \int_a^{\xi} \frac{1}{(b-a)} dv = \frac{1}{(b-a)}(\xi - a) = \frac{(\xi - a)}{(b-a)} \quad (4.35)$$

A *média* e a *variância* são obtidas da seguinte forma (no caso da *variância*, a validade da expressão obriga a que  $b \neq a$ ).

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi; a, b) d\xi = \int_a^b \xi \frac{1}{(b-a)} d\xi =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{(b+a)}{2} \quad (4.36)$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (4.37)$$

Um caso particular é a *distribuição de probabilidade uniforme centrada*, i.e., com limites de variação correspondentes a  $[-a, +a]$  obtendo-se, nesse caso, os parâmetros que se seguem.

$$E(X) = 0 \quad (4.38a)$$

$$\text{var}(X) = \frac{a^2}{3} \quad (4.38b)$$

Uma simplificação corrente destas expressões resulta da transformação de parâmetros, substituindo os limites do intervalo pela sua semi-diferença (4.39a) e pela semi-soma (4.39b) (com utilidade na sua aplicação computacional neste mas, também, noutros casos como o da distribuição de probabilidade U, como se verá na secção 4.5.4).

$$w = \frac{(b-a)}{2} \quad (4.39a)$$

$$v = \frac{(b+a)}{2} \quad (4.39b)$$

verificando-se que, da introdução desta transformação em (4.33), (4.36) e (4.37), se obtêm as seguintes expressões:

$$f(\xi; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < a \\ \frac{1}{2w} & \text{se } a \leq \xi \leq b \\ 0 & \text{se } \xi > b \end{cases} \quad (4.40)$$

$$E(X) = v \quad (4.41)$$

$$\text{var}(X) = \frac{w^2}{3} \quad (4.42)$$

A *função densidade de probabilidade uniforme* é uma das funções contínuas mais utilizadas em Metrologia, tendo como principais motivações: a facilidade e conveniência de

tratamento estatístico e matemático; e a sua variância, quando comparada com variâncias de grande parte das outras distribuições de probabilidade, aplicadas ao mesmo intervalo de valores, constituir um majorante.

Como exemplo ilustrativo refira-se a sua aplicação na distribuição de probabilidade associada à resolução dos instrumentos de medição, os quais, têm uma resolução necessariamente finita. Neste caso, é razoável assumir que todos os valores compreendidos entre cada par de valores sucessivos da escala de medição são equiprováveis.

#### 4.5.2 Distribuição de probabilidade triangular

A *função densidade de probabilidade triangular*, no seu caso mais geral, corresponde a uma representação entre dois limites,  $[a,c]$ , com um vértice em  $b$  onde atinge o seu valor máximo  $h$ , verificando-se que, quando a posição  $b$  é equidistante das posições  $a$  e  $c$  a função é simétrica e, no caso contrário, assimétrica.

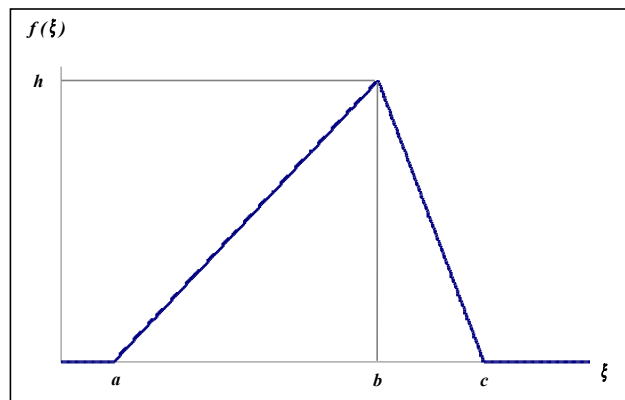


Figura 4.2: Função densidade de probabilidade triangular descentrada

A sua expressão geral é dada por,

$$f(\xi; a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \leq a \\ [(\xi - a)/(b - a)] \cdot h & \text{se } a \leq \xi \leq b \\ [(c - \xi)/(c - b)] \cdot h & \text{se } b \leq \xi \leq c \\ 0 & \text{se } \xi \geq c \end{cases} \quad (4.43)$$

verificando-se que ela é contínua à direita e à esquerda nas posições  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Por outro lado, a determinação do valor de  $h$  pode ser efectuada a partir da igualdade:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi; a, b, c) d\xi = \int_{-\infty}^a f(\xi; a, b, c) d\xi + \int_a^b f(\xi; a, b, c) d\xi + \int_b^c f(\xi; a, b, c) d\xi + \int_c^{+\infty} f(\xi; a, b, c) d\xi = (b - a) \frac{h}{2} + (c - b) \frac{h}{2} = (c - a) \frac{h}{2} \quad (4.44)$$

permitindo que se deduza a expressão do valor máximo.

$$h = \frac{2}{(c - a)} \quad (4.45)$$

A sua substituição em (4.43) conduz a uma expressão mais comum.

$$f(\xi; a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \leq a \\ \frac{2(\xi - a)}{(b - a) \cdot (c - a)} & \text{se } a \leq \xi \leq b \\ \frac{2(c - \xi)}{(c - b) \cdot (c - a)} & \text{se } b \leq \xi \leq c \\ 0 & \text{se } \xi \geq c \end{cases} \quad (4.46)$$

A sua função de probabilidade cumulativa tem a seguinte expressão,

$$F(\xi; a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \leq a \\ \frac{(\xi - a)^2}{(b - a) \cdot (c - a)} & \text{se } a \leq \xi \leq b \\ 1 - \frac{(c - \xi)^2}{(c - b) \cdot (c - a)} & \text{se } b \leq \xi \leq c \\ 0 & \text{se } \xi \geq c \end{cases} \quad (4.47)$$

e os seus *momentos* valor médio e variância, possuem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi; a, c, b) d\xi = \int_a^b \xi f(\xi; a, c, b) d\xi + \int_b^c \xi f(\xi; a, c, b) d\xi = \\ &= \frac{[2b^3 - 3ab^2 + a^3]}{3[(b - a) \cdot (c - a)]} + \frac{[c^3 - 3cb^2 + 2b^3]}{3[(c - b) \cdot (c - a)]} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[X] &= \frac{[3b^4 - 4ab^3 + a^4]}{6[(b - a) \cdot (c - a)]} + \frac{[c^4 - 4cb^3 + 3b^4]}{6[(c - b) \cdot (c - a)]} - \\ &- \left( \frac{[2b^3 - 3ab^2 + a^3]}{3[(b - a) \cdot (c - a)]} + \frac{[c^3 - 3cb^2 + 2b^3]}{3[(c - b) \cdot (c - a)]} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dois casos particulares, possuem expressões de *momentos* que são considerados relevantes: a distribuição de probabilidade triangular centrada numa posição  $t$  da recta; e a distribuição de probabilidade triangular centrada no valor zero.

No primeiro caso, considerando que essa distribuição é centrada em  $t$  e possui limites dados por  $[t - a, t + a]$ ,

$$E[X] = t \quad (4.50)$$

$$\text{var}[X] = \frac{a^2}{6} \quad (4.51)$$

De se igualar  $t = 0$  resulta o segundo caso particular, obtendo-se:

$$E[X] = 0 \quad (4.52)$$

$$\text{var}[X] = \frac{a^2}{6} \quad (4.53)$$

Tal como apontado relativamente às distribuições anteriores, existem exemplos ilustrativos de aplicação. É o caso da variação condicionada da temperatura em laboratório, podendo variar no intervalo  $[19\text{ °C}, 21\text{ °C}]$  em torno de  $20\text{ °C}$ , sendo este valor central mais provável que os valores observados próximo dos limites. Nestas circunstâncias, a distribuição de probabilidade adoptada mais apropriada é de configuração triangular, reflectindo o comportamento da variável aleatória.

#### 4.5.3 Distribuição de probabilidade trapezoidal

A *função densidade de probabilidade trapezoidal*, tem um duplo interesse na sua aplicação em Metrologia, por um lado, porque dela se obtêm a F<sub>d</sub>P uniforme e a triangular como casos particulares; e, por outro lado, porque pode representar a F<sub>d</sub>P de uma variável aleatória quando se requer uma representação intermédia entre as duas funções anteriormente citadas.

Assim, considere-se o caso em que a *função densidade de probabilidade trapezoidal* é simétrica, sendo centrada em  $t$  e dispoendo de posições de referência determinadas por  $(t \pm a)$  e  $(t \pm \beta a)$  conforme a figura seguinte e expressa de acordo com (4.53).

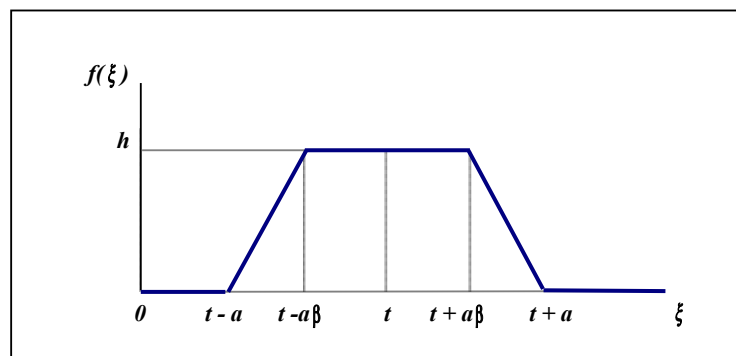


Figura 4.3: Função densidade de probabilidade trapezoidal centrada



$$f(\xi; a, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \leq (t - a) \\ \frac{[\xi - (t - a)]}{[(t - a\beta) - (t - a)]} \cdot h & \text{se } (t - a) \leq \xi \leq (t - a\beta) \\ h & \text{se } (t - a\beta) \leq \xi \leq (t + a\beta) \\ \frac{[(t + a) - \xi]}{[(t + a) - (t + a\beta)]} \cdot h & \text{se } (t + a\beta) \leq \xi \leq (t + a) \\ 0 & \text{se } \xi \geq (t + a) \end{cases} \quad (4.53)$$

Partindo da expressão,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi; a, \beta) d\xi &= \int_{-\infty}^{t-a} f(\xi; a, \beta) d\xi + \int_{t-a}^{t-a\beta} f(\xi; a, \beta) d\xi + \int_{t-a\beta}^{t+a\beta} f(\xi; a, \beta) d\xi + \\ &+ \int_{t+a\beta}^{t+a} f(\xi; a, \beta) d\xi + \int_{t+a}^{+\infty} f(\xi; a, \beta) d\xi = 1 \end{aligned} \quad (4.54)$$

determina-se o valor de  $h$  (4.55) e substituindo este valor em (4.53) resulta a expressão (4.56).

$$h = \frac{1}{a(1\beta^2)} \quad (4.55)$$

$$f(\xi; a, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \leq (t - a) \\ \frac{[\xi - (t - a)]}{a^2(1\beta^2)} & \text{se } (t - a) \leq \xi \leq (t - a\beta) \\ \frac{1}{a(1\beta^2)} & \text{se } (t - a\beta) \leq \xi \leq (t + a\beta) \\ \frac{[(t + a) - \xi]}{a^2(1\beta^2)} & \text{se } (t + a\beta) \leq \xi \leq (t + a) \\ 0 & \text{se } \xi \geq (t + a) \end{cases} \quad (4.56)$$

Usando a definição dos *momentos* para a determinação da *média* e da *variância* e fazendo  $t=0$  (caso corrente na avaliação de incertezas de medição), vem,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi; a, \beta) d\xi = 0 \quad (4.57)$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{a^2(1\beta^2)}{6} \quad (4.58)$$

Os casos particulares apontados, resultam de se considerar  $\beta = 0$  (caso da F<sub>d</sub>P triangular),

conduzindo a (4.51),  $\text{var}[X] = \frac{a^2(1+0^2)}{6} = \frac{a^2}{6}$ , e  $\beta = 1$  (caso da F<sub>d</sub>P uniforme) conduzindo à

expressão (4.38b)  $\text{var}[X] = \frac{a^2(1+1^2)}{6} = \frac{a^2}{3}$ .

Um exemplo ilustrativo pode ser obtido, tal como no caso anterior, recorrendo à variação da temperatura considerando, no entanto, que o comportamento da v.a. é aproximadamente equiprovável numa região central e menos provável nas suas regiões limítrofes.

#### 4.5.4 Distribuição de probabilidade de configuração U ou arco-seno

A utilização da *função densidade de probabilidade de configuração U* ou *arco-seno* no contexto da Metrologia, resulta de requisitos de representação da probabilidade associada a variáveis aleatórias cujo valor é máximo nos seus limites extremos e mínimo no centro da distribuição de probabilidade.

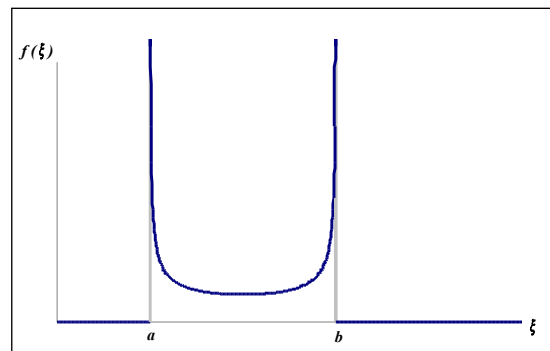


Figura 4.4: Função densidade de probabilidade de configuração U ou arco-seno

A sua expressão geral, considerando que a função varia entre  $[a,b]$ , tem a seguinte forma:

$$f(\xi; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \leq a \\ \frac{1}{\pi \sqrt{w^2 - (\xi - v)^2}} & \text{se } a < \xi < b \\ 0 & \text{se } \xi \geq b \end{cases} \quad (4.59)$$

com  $w = \frac{(b-a)}{2}$  e  $v = \frac{(b+a)}{2}$ , tal como apresentado no caso da *função densidade de probabilidade uniforme*.

A determinação da sua *média* e *variância* resulta da aplicação das expressões gerais, tal como nos casos anteriores.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \cdot f(\xi; a, b) d\xi = v \quad (4.60)$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{w^2}{2} \quad (4.61)$$

e a sua função de probabilidade cumulativa, é dada pela expressão que se segue.

$$F(\xi; a, b) = \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi; a, b) d\xi = \frac{1}{\pi} \cdot \arcsen\left(\frac{\xi - v}{w}\right) + \frac{1}{2} \quad (4.62)$$

Um exemplo ilustrativo é obtido recorrendo a variáveis aleatórias determinadas por componentes angulares (por exemplo, pendulares) onde se observa uma permanência superior nos seus limites extremos do que no seu valor médio, conduzindo a uma distribuição de probabilidade mais provável nas extremidades do intervalo do que no seu centro.

#### 4.5.5 Distribuição de probabilidade normal

A *função densidade de probabilidade normal* ou *Gaussiana* é uma das mais utilizadas funções de probabilidade, tendo sido obtida inicialmente por de Moivre (em 1733) e desenvolvida por Laplace na sua *Teoria Analítica das Probabilidades* (publicada em 1812) onde introduziu o que se designa por *Teorema de Moivre-Laplace*. Nessa obra, efectua-se a aplicação desta distribuição de probabilidade na análise dos erros experimentais, cujos desenvolvimentos subsequentes conduziram, entre outros resultados, à introdução do *método dos mínimos quadrados* por Legendre (publicada em 1805) / Gauss<sup>6</sup>.

A definição da *função distribuição de probabilidade normal* é a seguinte:

*Considerando a existência de uma variável aleatória X, esta possui uma distribuição de probabilidade normal se a função densidade de probabilidade é dada por:*

$$f_X(\xi; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(\xi - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.63)$$

*devendo os parâmetros média,  $\mu$ , e desvio-padrão,  $\sigma$ , satisfazer  $-\infty < \mu < +\infty$  e  $\sigma > 0$ .*

Pela sua frequente utilização, é comum adoptar a representação particular com base na média e na variância, expressa na forma:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Uma notação igualmente comum,

<sup>6</sup> Existiu uma disputa com Gauss nesta matéria tendo reclamado, este último, o uso do método desde 1794, após a apresentação numa exposição formal e rigorosa, na sua obra publicada em 1809 no contexto da *distribuição normal dos erros* [Stigler (1986)].

indica a função densidade de probabilidade como  $\phi_{\mu, \sigma^2}(x)$  e a função distribuição cumulativa como  $\Phi_{\mu, \sigma^2}(x)$  – de forma simplificada, estas duas funções representam-se por  $\phi(x)$  e  $\Phi(x)$ .

A adoção dos parâmetros média e variância resultam de um argumento importante, que consiste em se poder demonstrar (*vide* Mood *et al.* (1974), por exemplo) que:

$$E(X) = \mu \quad (4.64)$$

$$\text{var}[X] = \sigma^2 \quad (4.65)$$

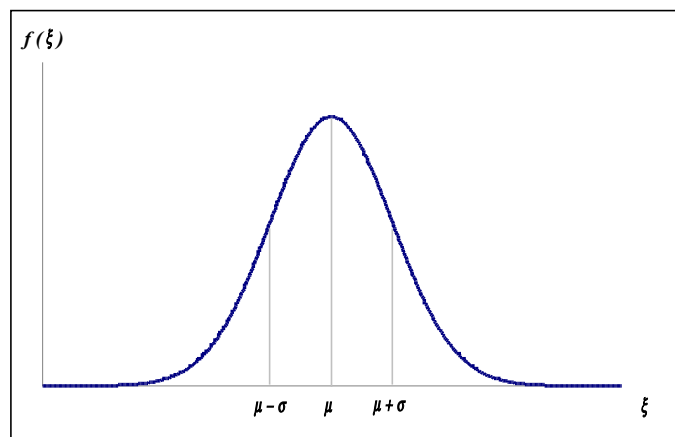


Figura 4.5: Função densidade de probabilidade normal

Uma contribuição importante para a utilização da função de probabilidade normal resultou da sua *padronização*, traduzida numa substituição de variável que permite a sua transformação numa nova variável aleatória,  $Z$ , com média igual a zero e desvio-padrão igual à unidade. A variável aleatória  $Z$  é dada por:

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma} \quad (4.66)$$

o que conduz a uma modificação da expressão (4.63), simplificando-a,

$$\phi(z) = f_z(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (4.67)$$

sendo a sua notação habitual:  $Z \sim N(0, 1)$ .

Com base nesta expressão, é possível demonstrar que,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1 \quad (4.68)$$

provando que  $A^2=1$  mediante o recurso a duas variáveis aleatórias padronizadas ( $Y$  e  $Z$ ) e fazendo a transformação das respectivas variáveis ( $y$  e  $z$ ) para outras variáveis com coordenadas polares. A função distribuição cumulativa é dada, então, por (4.69).

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(u) du \quad (4.69)$$

As representações da função densidade de probabilidade e da função distribuição cumulativa padronizadas são apresentadas a seguir.

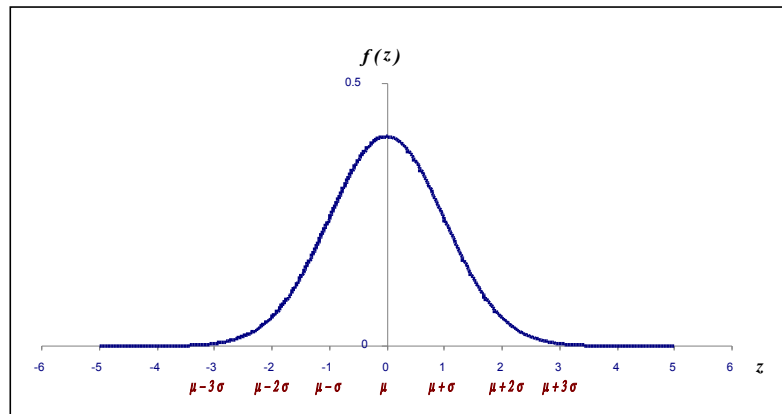


Figura 4.6: Função densidade de probabilidade normal padronizada

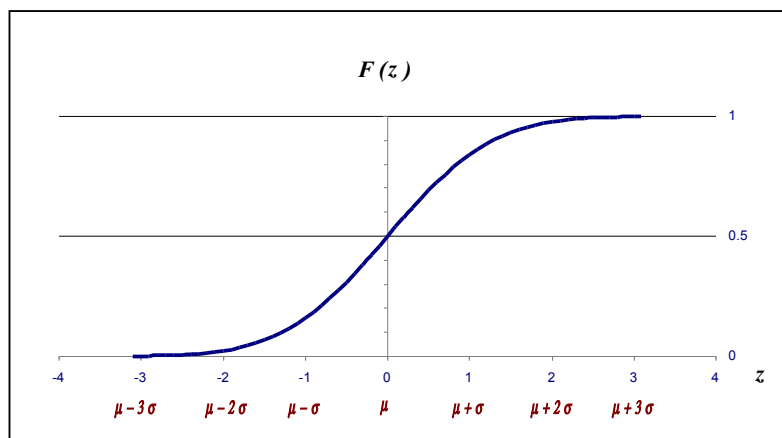


Figura 4.7: Função distribuição cumulativa normal padronizada

Uma importante vantagem decorrente da padronização da distribuição de probabilidade normal resulta de se desenvolverem tabelas que indicam valores da função distribuição cumulativa normal para distintos valores de  $z$ , sendo aplicáveis ao universo de distribuições de probabilidade normal<sup>7</sup>.

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \phi(u) du \quad (4.70)$$

<sup>7</sup> Aplicáveis a distribuições de probabilidade normal quaisquer que sejam os seus parâmetros, uma vez que, os resultados numéricos obtidos para a função *padronizada* correspondem a múltiplos do desvio padrão da função de probabilidade normal.

Este artifício revela-se bastante prático, quando se pretendem resolver questões envolvendo intervalos de confiança com a distribuição de probabilidade normal, como a exposta em (4.70). Por outro lado, uma das propriedades de grande interesse que decorre da tabela padronizada encontra-se associada à simetria da distribuição de probabilidade normal, o que possibilita o estabelecimento de relações do tipo (4.71).

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a) \quad (4.70)$$

$$\text{com } z_b = \frac{b - \mu}{\sigma} \text{ e } z_a = \frac{a - \mu}{\sigma}.$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \quad (4.71)$$

#### 4.5.6 Distribuições de probabilidade coseno e meio coseno

Algumas funções densidade de probabilidade possuem uma aplicação menos comum que as anteriores mas, ainda assim, merecedora de breve referência. É o caso da *função densidade de probabilidade coseno*, utilizada em situações onde o decréscimo de valores de probabilidade na proximidade dos seus limites é menos abrupta do que a distribuição de probabilidade normal. A expressão da sua distribuição de probabilidade (caso simétrico e centrado em 0) é a seguinte:

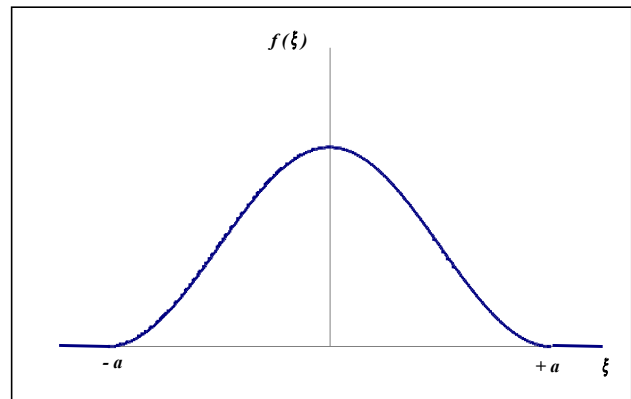


Figura 4.8: Função densidade de probabilidade coseno

$$f_X(\xi; a) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi \xi}{a}\right) \right] & -a \leq \xi \leq a \\ 0 & \xi < -a \text{ e } \xi > a \end{cases} \quad (4.72)$$

a sua média e variância são dadas por,

$$E(X) = 0 \quad (4.73)$$

$$\text{var}[X] = \frac{a^2}{3} \left( 1 - \frac{6}{\pi^2} \right) \quad (4.74)$$

o que permite obter a expressão (4.75) relativa ao seu *desvio-padrão*.

$$\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{6}{\pi^2}} \quad (4.75)$$

A função distribuição cumulativa, resulta da aplicação da definição,

$$F_X(\xi; a) = \int_{-a}^{\xi} \frac{1}{2a} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi v}{a}\right) \right] dv = \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2a} + \frac{1}{2\pi} \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi \xi}{a}\right) \right] \quad (4.76)$$

Existe uma forma genérica alternativa de representação desta função, aplicável em casos onde se observa a vantagem de representar a variável num contexto trigonométrico, a qual assume limites dados por  $\pm \pi$ ,

$$f_X(\xi; a) = \begin{cases} \frac{[1 + \cos(\frac{\xi}{a})]}{2\pi} & -\pi \leq \xi \leq +\pi \\ 0 & \xi < -\pi \text{ e } \xi > a \end{cases} \quad (4.77)$$

podendo estabelecer-se uma relação entre (4.77) e (4.72), realizando uma transformação de variável  $\xi' = \frac{a\xi}{\pi}$ , notando que  $dx'/dx = \pi/a$ .

Exemplos envolvendo esta e a distribuição de probabilidade que se segue, aplicados em variáveis aleatórias contendo componentes angulares, encontram-se em [Castrup (2000)].

#### 4.5.7 Distribuição de probabilidade quadrática

Uma outra distribuição de probabilidade cuja aplicação, em Metrologia, é equivalente à anterior é a *função densidade de probabilidade quadrática* (aplicável ao caso simétrico centrado em zero), a qual possui a expressão (4.78) e a configuração da Figura (4.9).

$$f_X(\xi; a) = \begin{cases} \frac{3}{4a} \left[ 1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] & -a \leq \xi \leq a \\ 0 & \xi < -a \text{ e } \xi > a \end{cases} \quad (4.78)$$

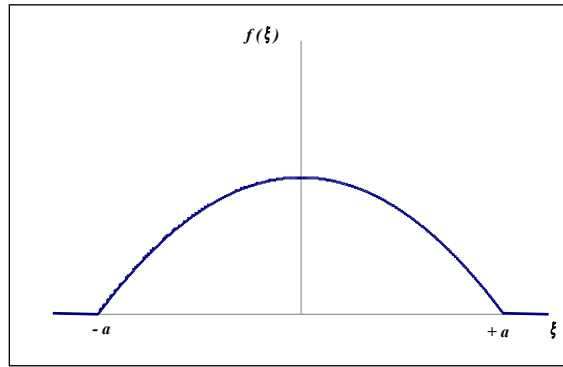


Figura 4.9: Função densidade de probabilidade quadrática

A sua função distribuição cumulativa é dada por,

$$F_X(\xi; a) = \int_{-a}^{\xi} \frac{3}{4a} \left[ 1 - \left( \frac{v}{a} \right)^2 \right] dv = \frac{1}{2} + \frac{3\xi}{4a} - \frac{1}{4} \left( \frac{\xi}{a} \right)^3 \quad (4.79)$$

e a sua média e variância correspondem a,

$$E(X) = 0 \quad (4.80)$$

$$\text{var}[X] = \frac{a^2}{5} \quad (4.81)$$

de onde se extrai a expressão do desvio-padrão.

$$\sigma_X = \frac{a}{\sqrt{5}} \quad (4.82)$$

#### 4.6 Distribuições de probabilidade multivariáveis

A análise estatística e probabilística aplicada ao caso univariável traduz uma parte das situações reais, observando-se em muitos casos que os fenómenos em estudo se traduzem em modelos com mais de uma variável. Essa análise requer a utilização de distribuições de probabilidade envolvendo  $k$  variáveis, também designadas por “ $k$ -dimensionais” ou “multinomiais”.

A exposição que se segue privilegia a natureza continua das v.a. devido a esta ser aquela que habitualmente se adopta na representação da medição de grandezas. No entanto, é possível desenvolver, de forma similar, uma exposição da mesma formulação considerando o contexto de v.a. discretas.



Considerando, então, a representação de *uma variável aleatória k-dimensional*,  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , *esta diz-se “variável aleatória contínua k-dimensional” sse existe uma função  $f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\cdot, \dots, \cdot) \geq 0$  tal que,*

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int_{-\infty}^{\xi_k} \dots \int_{-\infty}^{\xi_1} f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(v_1, \dots, v_k) dv_1 \dots dv_k \quad (4.83)$$

A função  $f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\xi_1, \dots, \xi_k)$  designa-se por *função densidade de probabilidade conjunta*, possuindo as propriedades similares à da sua equivalente para o caso univariável,

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\xi_1, \dots, \xi_k) \geq 0 \quad (4.84)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(v_1, \dots, v_k) dv_1 \dots dv_k = 1 \quad (4.85)$$

Com base na *função distribuição cumulativa conjunta*,  $F_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\xi_1, \dots, \xi_k)$ , é possível determinar as *funções densidade de probabilidade marginais*, as quais, para o caso de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  (o resultado extensível para  $k$  variáveis), associadas às variáveis numéricas  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , respectivamente, são dadas por:

$$f_X(\xi) = \frac{dF_X(\xi_1)}{d\xi_1} = \frac{d}{d\xi_1} \left[ \int_{-\infty}^{\xi_1} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(v, \eta) d\eta \right) dv \right] = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(\xi_1, \eta) d\eta \right] \quad (4.86)$$

e, de uma forma equivalente, é obtida a *função densidade de probabilidade marginal* para a variável aleatória  $Y$ .

$$f_Y(\xi_2) = \frac{dF_Y(\xi_2)}{d\xi_2} = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(v, \xi_2) dv \right] \quad (4.87)$$

A existência de duas ou mais variáveis, tal como a existência de dois ou mais eventos, permite a introdução do conceito de *independência* entre as variáveis.

Considere-se *uma variável aleatória k-dimensional contínua*,  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , com *função densidade de probabilidade conjunta*  $f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\xi_1, \dots, \xi_k)$ . *Afirma-se que  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  são variáveis estocasticamente independentes sse:*

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\xi_1, \dots, \xi_k) = \prod_{i=1}^k f_{X_i}(\xi_1, \dots, \xi_k) \quad (4.88)$$

O conceito de esperança ou de valor esperado tem, igualmente, uma expressão definida neste contexto – apresentada a seguir – cuja importância se revela nos *Teoremas* subsequentes [Mood *et al.* (1974)], onde se apresentam os resultados relativos à definição da média e da variância. A definição de *valor expectável de uma função multivariável*, é a seguinte:

*Considerando que  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  representa uma variável aleatória contínua k-dimensional, dispondo de uma função densidade de probabilidade  $f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\xi_1, \dots, \xi_k)$ , então, o valor expectável de uma função  $g(\cdot, \dots, \cdot)$  da referida variável k-dimensional, com a notação,  $E[g(X_1, \dots, X_k)]$  define-se pela expressão seguinte.*

$$E[g(X_1, \dots, X_k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi_1, \dots, \xi_k) f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(\xi_1, \dots, \xi_k) d\xi_1 \dots d\xi_k \quad (4.89)$$

De acordo, ainda, com Mood *et al.* (1974) (demonstrações – pp. 153-154),

*Teorema 2:*

*Quando se verifica, em particular,  $g(\xi_1, \dots, \xi_k) = \xi_i$  então,*

$$E[g(X_1, \dots, X_k)] = E[X_i] = \mu_{X_i}.$$

*Teorema 3:*

*Se, em particular, a função  $g(\xi_1, \dots, \xi_k) = (\xi_i - E[X_i])^2$  então, verifica-se*

$$\text{que } E[g(X_1, \dots, X_k)] = E[(X_i - E[X_i])^2] = \text{var}[X_i].$$

Uma outra perspectiva de observação do relacionamento estabelecido entre variáveis aleatórias resulta da introdução de uma métrica da *relação linear* observável entre pares de variáveis. Essa métrica, constitui, igualmente, um valor esperado e designa-se por *covariância*. A sua definição é exposta a seguir.

*Considere-se a existência de um espaço de probabilidade onde se definem duas variáveis aleatórias X e Y. A covariância de X e Y segue a notação  $\text{cov}[X, Y]$  ou  $\sigma_{X, Y}$  e define-se a partir da expressão seguinte – desde que esse valor esperado exista.*

$$\text{cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (4.90)$$

Uma forma alternativa para a expressão apresentada consiste em:

$$\text{cov}[X, Y] = E[XY] - \mu_X \mu_Y \quad (4.91)$$

Esta expressão, contudo, encontra-se dependente das magnitudes relativas dos valores das variáveis, pelo que, num processo de “normalização” se introduziu o *coeficiente de correlação*. Este *coeficiente*, cuja notação é  $\rho[X,Y]$  ou  $\rho_{X,Y}$ , define-se como,

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.92)$$

desde que os termos envolvidos existam e que  $\sigma_X > 0$  e  $\sigma_Y > 0$ .

A vantagem reconhecida na introdução do *coeficiente de correlação* resulta de se retirar o elemento de variabilidade associado à covariância, verificando-se que  $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq +1$ , ocorrendo valores que: se aproximam de  $-1$  quando a variação observada – entre as variáveis – é em sentido contrário; se aproximam de  $+1$  quando essa variação é no mesmo sentido; e se aproxima de zero nos casos em que as variáveis não se encontram correlacionadas.

Após a introdução dos conceitos de *independência* e de *valor esperado*, da sua conjugação resulta um *Teorema* que relaciona os dois conceitos.

*Teorema 4:*

*Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes e  $g_1(\cdot)$  e  $g_2(\cdot)$  são duas funções de um único argumento, então,*

$$E[g_1(X) \cdot g_2(Y)] = E[g_1(X)] \cdot E[g_2(Y)] \quad (4.93)$$

*Corolário do Teorema anterior:*

*Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes então  $\text{cov}[X,Y] = 0$ .*

Dessa forma, e constituindo um importante resultado desta análise, *duas variáveis aleatórias, X e Y, dizem-se não correlacionadas sse  $\text{cov}[X,Y] = 0$ .*

Estes conceitos de valor esperado de uma função multinomial, de independência e de covariância são particularmente importantes na aplicação da metodologia do GUM, onde constituem requisitos ou se relacionam com a formulação utilizada na sua concretização.

#### **4.7 Conceitos e funções de probabilidade associados à amostragem**

A introdução do conceito de *amostragem* necessita, em primeiro lugar, da sua diferenciação face ao conceito de *população*.

A população – por vezes designada por população alvo – é constituída pela totalidade de elementos que podem ser observados, e acerca dos quais se pretende obter informação.

Como se depreende, em muitos casos, não é possível efectuar uma análise da totalidade da população. Por isso, considera-se que é possível inferir considerações de natureza probabilística a partir de amostras (aleatórias) seleccionadas de acordo com critérios estabelecidos, designadamente, relativas à sua *densidade*. O pressuposto de que cada elemento dessa amostra (aleatória) possui uma relação numérica com o conjunto de elementos da população em análise, permitindo a avaliação da sua *densidade*.

A amostra aleatória define-se, portanto, considerando a existência de variáveis aleatórias  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  descritas por uma função densidade de probabilidade conjunta  $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\cdot, \dots, \cdot)$ , dada por:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n f(\xi_i) \quad (4.94)$$

sendo  $f(\cdot)$  a função densidade de probabilidade comum às variáveis  $(X_i)$ . Neste caso,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  define-se como uma amostra aleatória de dimensão  $n$  obtida a partir de uma população cuja função densidade de probabilidade é  $f(\cdot)$ .

Neste contexto, é importante referir que se entende que a variável aleatória  $X_i$  representa o valor numérico associado ao  $i$ ésimo elemento constituinte da amostra. As observações efectuadas pela amostragem originam, consequentemente, vectores  $n$ -dimensionais de valores observados  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , os quais, também se designam por vezes por amostra aleatória.

Nesta sequência, a definição de população da amostra é a seguinte:

*Sejam  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  as variáveis aleatórias de uma população com função densidade de probabilidade  $f(\cdot)$ . Esta população designa-se por população da amostra.*

A função que representa a distribuição de probabilidade da amostra aleatória é a função densidade de probabilidade conjunta, cf. descrição na secção anterior.

A questão estatística central consiste, portanto, em estabelecer a função densidade de probabilidade da população, designada por  $f(\cdot, \theta_p)$ , onde  $\theta_p$ , representa o parâmetro – à partida desconhecido – que, quando conhecido, permite a determinação da referida função.

Esse objectivo resulta, em geral, da adopção de um procedimento que envolve a obtenção de uma *amostra aleatória* de dimensão  $n$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , e a sua incorporação numa função  $l(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  que se admite, representa o parâmetro desconhecido  $\theta_p$ .

Existem diversas metodologias para estimar os parâmetros dessa função, nomeadamente, o *método dos momentos*, o *método da máxima verosimilhança* e o *método  $\chi^2$  mínimo* (vide Mood *et al.* (1974), por exemplo).

Dentro do objectivo formulado, emerge um conceito importante, o conceito de *estatística*, que se traduz como *uma função de variáveis aleatórias observáveis a qual, é ela própria, uma variável aleatória observável, não contendo parâmetros desconhecidos*.

A sua importância resulta do facto de se resolver o problema associado ao objectivo pretendido ao se encontrar uma *estatística* adequada – função das variáveis aleatórias – que represente o parâmetro  $\theta_p$ . Faz-se notar a importância do termo “*observável*” na definição apresentada, referindo que esse termo constitui um requisito, porque se interpreta como a possibilidade de se obterem “valores” a partir da “*observação*” das variáveis aleatórias. Dentro do que se designam por *estatísticas*, são importantes os *momentos de amostras* por produzirem as estimativas dos parâmetros que se pretende conhecer.

De forma similar ao que foi apresentado na secção dedicada a funções de uma só variável, também neste caso, podem ser definidos *momentos centrais* quer relativamente ao valor zero quer relativamente a um valor de um parâmetro particular, sendo um caso de particular interesse, o da *média*. As definições desses *momentos* são as que se seguem.

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória sujeita a uma função densidade de probabilidade  $f(\cdot)$ . Define-se como o  $r$ 'ésimo momento da amostra em torno de 0,  $M'_r$ , por:

$$M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r \quad (4.95)$$

de onde se extrai, para  $r = 1$ , a média da amostra,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (4.96)$$

e define-se como o  $r$ 'ésimo momento da amostra em torno de  $\bar{X}_n$ , cuja notação é  $M_r$ , por:

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^r \quad (4.97)$$

Atendendo ao objectivo primordial de determinação dos *momentos* da população e sabendo que a amostragem permite aceder de facto apenas, aos *momento* da amostra, compreende-se o interesse no estabelecimento de uma forma de relacionar ambos, permitindo que, através da determinação dos estimadores de parâmetros da amostra se possa inferir acerca dos parâmetros da população. Neste sentido apresenta-se o *Teorema* seguinte.

*Teorema 5:*

*Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória com função densidade de probabilidade  $f(\cdot)$ . Nesta circunstância, o valor esperado do  $r$ 'ésimo momento da amostra em torno de 0,  $M'_r$ , iguala o  $r$ 'ésimo momento da população,  $\mu'_r$ , caso este exista.*

$$E[M'_r] = \frac{1}{n} E \left[ \sum_{i=1}^n X_i^r \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i^r] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu'_r = \mu'_r \quad (4.98)$$

e, de forma similar, demonstra-se [Mood *et al.* (1974)] que,

$$\text{var}[M'_r] = \frac{1}{n} \left[ \mu'_{2r} - (\mu'_r)^2 \right] \quad (4.99)$$

A partir desta última expressão, fazendo  $r=1$ , resulta um *Corolário* do *Teorema 5*:

*Sendo  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória com função densidade de probabilidade  $f(\cdot)$  e sendo  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  a média da amostra, então,*

$$E[\bar{X}_n] = \mu \quad (4.100)$$

$$\text{var}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sigma^2 \quad (4.101)$$

constituindo  $\mu$  e  $\sigma^2$  a média e a variância de  $f(\cdot)$ , respectivamente. Esta expressão relaciona, conforme pretendido, a *variância da média da amostra* com a *variância da população*. A relação (4.101) desempenha, em particular no contexto do GUM um papel fulcral, uma vez que é considerada como a expressão apropriada para a determinação da variância associada a qualquer amostra de uma variável aleatória tomada como componente de incerteza cuja estimativa (dada pela média), seja obtida pela observação experimental.

Da análise da amostra determina-se a *variância*, cuja definição é a seguinte:

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória com função densidade de probabilidade  $f(\cdot)$ . A variância da amostra é definida pela expressão seguinte.

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.102)$$

podendo verificar-se que o valor esperado da variância da amostra iguala a variância da população,  $E[S^2] = \sigma^2$ . Então, recorrendo à expressão (4.101), é estabelecida a relação pretendida entre a *variância da média* e a *variância da amostra*.

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \text{var}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sigma^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.103)$$

Em consequência, para uma amostra aleatória  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  com uma função densidade de probabilidade  $f(\cdot)$ , com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  (finitas), verifica-se que:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad E[\bar{X}_n] = \mu_{\bar{X}_n} = \mu \quad \text{var}[\bar{X}_n] = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n} \sigma^2$$

Considerando os conceitos e os resultados apresentados poder-se-á, então, introduzir a *Lei dos Grandes Números* e o *Teorema do Limite Central*.

Dentro dos objectivos que se podem apontar na análise decorrente da amostragem de elementos de uma população, um outro objectivo que se pode apontar consiste na determinação da função densidade de probabilidade,  $f(\cdot, \theta_p)$ , a qual, depende do parâmetro  $\theta_p$  para concretizar a sua descrição completa.

A realidade permite, numa grande parte dos casos, dispor de amostras finitas – limitadas – da população alvo, cujas propriedades – da amostra – se presume que permitem a inferência para essa população.

A justificação para que se possa admitir essa representatividade da amostra resulta da demonstração da *Lei Fraca dos Grandes Números*, que se pode enunciar da seguinte forma:

*É possível determinar um número inteiro positivo  $n$  tal que, se for retirada uma amostra aleatória de dimensão  $n$  ou superior a partir de uma população com função densidade de probabilidade  $f(\cdot)$  (com  $E[X] = \mu$ ) a*

probabilidade de que a média da amostra se desvie da média da população de menos do que uma quantidade pequena arbitrariamente definida, se possa aproximar de 1 tanto quanto se queira.

ou efectuando um enunciado formal:

*Teorema 6: Lei Fraca dos Grandes Números*

Seja  $f(\cdot)$  uma função densidade de probabilidade de uma população com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  finita, e seja  $\bar{X}_n$  a média de uma amostra aleatória de dimensão  $n$  recolhida nessa população. Sejam  $\varepsilon$  e  $\delta$  quaisquer dois números especificados satisfazendo  $\varepsilon > 0$  e  $0 < \delta < 1$ . Se  $n$  for um número inteiro maior que  $\sigma^2/\varepsilon^2\delta$ , então,

$$P[-\varepsilon < \bar{X}_n - \mu < \varepsilon] \geq 1 - \delta. \quad (4.104)$$

A demonstração deste Teorema resulta da aplicação do Desigualdade de Chebyshev,

considerando que  $P[g(X) \geq k] \leq \frac{E[g(X)]}{k}$ , para  $k > 0$ , para uma v.a.  $X$  e uma função não

negativa  $g(\cdot)$ , que se pode transformar em  $P[g(X) < k] \geq 1 - \frac{E[g(X)]}{k}$ . Fazendo

$g(X) = (\bar{X}_n - \mu)^2$  e  $k = \varepsilon^2$ , resulta:

$$P[-\varepsilon < \bar{X}_n - \mu < \varepsilon] = P[|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{E[(\bar{X}_n - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{(1/n)\sigma^2}{\varepsilon^2} \geq 1 - \delta$$

para  $\delta > \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$  ou  $n > \frac{\sigma^2}{\delta\varepsilon^2}$ .

Na sequência do objectivo de se conhecer a distribuição de probabilidade de  $\bar{X}_n$  surge, finalmente, o importante <sup>8</sup> Teorema do Limite Central, no qual se encontra essa resposta.

*Teorema do Limite Central:*

Seja  $f(\cdot)$  uma função densidade de probabilidade de uma população com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  finita, e seja  $\bar{X}_n$  a média da amostra aleatória de dimensão  $n$  recolhida nessa população. Considere-se a variável aleatória  $Z_n$  definida por:

<sup>8</sup> O aspecto crucial a destacar neste Teorema resulta de não se efectuar nenhuma restrição à função de probabilidade à qual se pode aplicar – a restrição imposta consiste, apenas, em que possua uma variância finita – sendo conhecidas inúmeras demonstrações para as mais diversas distribuições de probabilidade (vide, por exemplo, [Mood et al. (1974)]).



$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{\text{var}[\bar{X}_n]}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (4.105)$$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória  $Z_n$  tende para a função de probabilidade normal padronizada quando  $n$  tende para o infinito.

Para além do conhecimento da distribuição de probabilidade da *média da amostra*, possui um certo grau de interesse o conhecimento da distribuição de probabilidade associada à sua variância,  $S^2$  (cf. expressão 4.102). A distribuição de probabilidade que permite esse conhecimento é a *função densidade de probabilidade*  $\chi^2$  cuja definição é:

Se  $X$  representa uma variável aleatória com uma função densidade de probabilidade expressa por

$$f_X(\xi) = \frac{1}{\Gamma(v/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{v/2} \xi^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\xi} I_{[0,+\infty)}(\xi) \quad (4.106)$$

então, diz-se que  $X$  possui uma função distribuição de probabilidade  $\chi^2$ , com  $v$  graus de liberdade.

Sendo  $\Omega$  qualquer espaço de pontos  $\omega$ , e  $A$  um subconjunto de  $\Omega$ , a função indicação,  $I_A(\cdot)$ , possui domínio  $\Omega$  e contradomínio igual ao conjunto constituído por dois números reais 0 e 1, definido mediante a seguinte relação:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

por exemplo, a função indicação:  $I_{[0,+\infty)}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{se } \xi < 0 \end{cases}$  determina o valor 0 para números reais negativos e 1 no restante domínio.

A função densidade de probabilidade  $\chi^2$  representa um caso particular da função densidade de probabilidade gama,

$$f_X(\xi; r, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(r)} (\lambda \xi)^{r-1} e^{-\lambda \xi} I_{[0,+\infty)}(\xi) \quad (4.107)$$

com  $r > 0$  e  $\lambda > 0$ , e com a função gama dada por:

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} \xi^{r-1} e^{-x} d\xi \quad \text{com } r > 0 \quad (4.108)$$

resultante de se fazer  $r=v/2$  e  $\lambda=1/2$ .

A função densidade de probabilidade  $\chi^2$  dispõe de uma média e variância dadas por:  
 $E[X] = \nu$  ;  $\text{var}[X] = 2\nu$  .

A partir da definição da função densidade de probabilidade  $\chi^2$ , podem-se demonstrar o Teorema 7 e o seu Corolário [Mood et al. (1974)].

*Teorema 7:*

*Se as variáveis aleatórias  $X_i$ , com  $i=1, 2, \dots, k$ , são independentes e normalmente distribuídas, possuindo médias  $\mu_i$  e variâncias  $\sigma_i^2$ , então,*

$$C = \sum_{i=1}^k \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (4.109)$$

*possui uma função densidade de probabilidade  $\chi^2$  com  $\nu = k$  graus de liberdade.*

*Corolário:*

*Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória obtida a partir de uma função densidade de probabilidade normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então, a variável,*

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \quad (4.110)$$

*possui uma função densidade de probabilidade  $\chi^2$  com  $\nu = n$  graus de liberdade.*

Entre outras aplicações, esta função densidade de probabilidade utiliza-se para a determinação de intervalos de confiança e para a realização de testes de hipóteses cujo parâmetro de referência é a variância da amostra.

Uma última distribuição de probabilidade com interesse em Metrologia que é apresentada consiste na distribuição *t-Student*. A definição da variável que suporta a descrição desta função é:

$$X = \frac{Z}{\sqrt{C/\nu}} \quad (4.111)$$

onde  $Z$  representa uma variável aleatória com função densidade de probabilidade normal padronizada e  $C$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade  $\chi^2$  com  $k$  graus de liberdade. Adicionalmente,  $Z$  e  $C$  devem ser independentes.

Na sequência da apresentação da variável aleatória  $X$ , define-se a *função densidade de probabilidade t-Student* da seguinte forma:

Seja  $X$  uma variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é dada por,

$$f_X(\xi) = \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{\Gamma(v/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \cdot \frac{1}{(1+\xi^2/v)^{(v+1)/2}} \quad (4.112)$$

essa função designa-se por *função densidade de probabilidade t-Student* com  $v$  graus de liberdade.

A dedução da expressão (4.112) é obtida ao desenvolver-se a *função densidade de probabilidade conjunta* de  $Z$  e de  $C$  [Mood et al. (1974)],

$$f_{z,c}(z,c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(v/2)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{v/2} \cdot u^{(v/2)-1} e^{-(1/2)c} e^{-(1/2)z^2} I_{[0,+\infty)}(c) \quad (4.113)$$

efectuando a transformação (4.111) e  $Y=C$ , cujo jacobiano é  $\sqrt{y/v}$ , resulta,

$$f_{x,y}(x,y) = \sqrt{\frac{y}{v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(v/2)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{v/2} \cdot y^{(v/2)-1} e^{-(1/2)y} e^{-(1/2)\cdot x^2 y/v} I_{[0,+\infty)}(y) \quad (4.114)$$

e fazendo,

$$f_X(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \quad (4.115)$$

vem, 
$$f_X(\xi_1) = \sqrt{\frac{y}{v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(v/2)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{v/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2^{(v/2)-1} e^{-(1/2)(1+\xi_1^2/v)\xi_2} d\xi_2 \quad (4.116)$$

de onde se extrai a pretendida expressão (4.112).

Desta forma, estabelece-se o *Teorema 8* e o seu *Corolário* de grande importância por se aplicar à amostragem proveniente de uma população normal.

### Teorema 8

Se  $Z$  possui uma função densidade de probabilidade normal, se  $C$  possui uma função densidade de probabilidade  $\chi^2$  com  $v$  graus de liberdade e se  $Z$  e  $C$  são independentes, então,  $Z/\left(\sqrt{C/v}\right)$  possui uma função densidade de probabilidade  $t$ -Student com  $v$  graus de liberdade.

Corolário:

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória com função densidade de probabilidade normal, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então,  $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$  possui uma função densidade de probabilidade normal e  $C = (1/n^2) \cdot \sum (X_i - \bar{X})^2$  possui uma função densidade de probabilidade  $\chi^2$  com  $(n-1)$  graus de liberdade. Se  $Z$  e  $C$  forem independentes, então, a variável

$$\frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{(1/n^2) \cdot \sum (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)}} = \frac{\sqrt{n(n-1)}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}} \quad (4.117)$$

possui uma função densidade de probabilidade  $t$ -Student.

### 4.8 Intervalos de confiança

No tratamento probabilístico de fenómenos é frequente a necessidade de obtenção de valores limite associados a intervalos de confiança.

No caso de interesse para o contexto metrológico, assumindo-se que as amostragens se reportam a populações cuja distribuição de probabilidade é normal, a questão do intervalo de confiança pode ser expressa na interrogação genérica:

$$P[a < X < b] = ? \quad (4.118)$$

Pelo facto da população ser descrita por uma distribuição de probabilidade normal, existe a conveniência de transformar a variável aleatória da qual se pretende obter o intervalo numa *variável aleatória normal padronizada*,  $Z$ , (notando-se que no denominador surge, em substituição do desvio padrão da população – cf. (4.66) – o desvio-padrão experimental da média),

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (4.119)$$

com a vantagem de se conhecer, para essa situação, os valores padronizados (4.67),

$$f_Z(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Assim, a expressão (4.118) admite uma forma de solução,

$$P[z_a < Z < z_b] = \int_{z_a}^{z_b} \phi(z) dz = \Phi(z_b) - \Phi(z_a) \quad (4.121)$$

Esta questão pode ser reformulada pela via inversa: - Definida a amplitude de um intervalo de confiança, quais os valores da função de probabilidade normal padronizada?

$$\text{Sabendo que } P[z_a < Z < z_b] = \gamma, \text{ pretende-se conhecer } z_a \text{ e } z_b \quad (4.122)$$

À partida, existem um número infinito de soluções. No entanto, existe uma solução simétrica única, representando a solução que, convencionalmente, se considera ser a que se pretende. Neste caso, a reformulação da questão traduzir-se-ia em,

$$\text{Sabendo que } P[-z_a < Z < z_a] = \gamma, \text{ pretende-se conhecer } z_a \quad (4.123)$$

A expressão anterior pode ser desenvolvida,

$$P[-z_a < Z < z_a] = \Phi(z_a) - \Phi(-z_a) = 2\Phi(z_a) - 1 = \gamma \quad (4.124)$$

A resolução deste tipo de problemas resulta, portanto, de se encontrar uma solução para,

$$\Phi(z_a) = \frac{1+\gamma}{2} \Leftrightarrow z_a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \quad (4.125)$$

a qual, se pode obter consultando as tabelas da função distribuição cumulativa normal padronizada.

A formalização das definições de *intervalo de confiança* e de *intervalo de confiança unilateral* são as seguintes:

#### *Intervalo de confiança*

*Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória com função densidade de probabilidade  $f(\cdot; \theta_p)$ . Seja  $T_1 = l_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  e  $T_2 = l_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$  duas estatísticas que satisfazem  $T_1 \leq T_2$  e para as quais,  $P_{\theta} [T_1 < \tau(\theta_p) < T_2] \equiv \gamma$ , com  $\gamma$  não dependente de  $\theta_p$ ; então, o intervalo  $(T_1, T_2)$  designa-se por “intervalo de confiança de  $100\gamma$  por cento de  $\tau(\theta_p)$ ”;  $\gamma$  designa-se por “coeficiente de confiança”;  $T_1$  e  $T_2$  designam-se por “limites inferior e superior de confiança de  $\tau(\theta_p)$ ”, respectivamente; os*

valores  $(t_1, t_2)$  do intervalo  $(T_1, T_2)$  designa-se, igualmente, por “intervalo de confiança de  $100\gamma$  por cento de  $\tau(\theta_p)$ ”.

### *Intervalo de confiança unilateral*

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória com função densidade de probabilidade  $f(\cdot; \theta_p)$ . Seja  $T_1 = l_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma estatística, para a qual  $P_\theta [T_1 < \tau(\theta_p)] \equiv \gamma$ ; então,  $T_1$  designa-se por “limite unilateral inferior de confiança de  $\tau(\theta_p)$ ”. De forma similar, sendo  $T_2 = l_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma estatística, para a qual,  $P_\theta [\tau(\theta_p) < T_2] \equiv \gamma$ , então,  $T_2$  designa-se por “limite unilateral superior de confiança de  $\tau(\theta_p)$ ”. Em ambos os casos nota-se que  $\gamma$  não depende de  $\theta_p$ .

Como nota final, realça-se que o procedimento descrito utilizando a distribuição de probabilidade normal padronizada se aplica, no contexto das amostras de populações, aos intervalos de confiança relativos à média da amostra.

A determinação de intervalos de confiança aplicáveis à variância, são descritos de acordo com um formalismo idêntico, com a diferença substancial associada ao facto da sua distribuição de probabilidade aplicável ser a função  $\chi^2$ .

Neste caso, à variável utilizada é,

$$Q = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \quad (4.129)$$

e os intervalos de confiança têm a forma seguinte.

$$P \left[ q_1 < \frac{(n-1) s^2}{\sigma^2} < q_2 \right] = P \left[ \frac{(n-1) s^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1) s^2}{q_1} \right] \quad (4.130)$$

Da mesma forma, utilizam-se as tabelas da função distribuição cumulativa  $\chi^2$  e, tal como no caso da distribuição de probabilidade normal padronizada, considerando a solução (única)

correspondente a situação que verifica a simetria, i.e.,  $P[Q < q_1] = P[Q > q_2] = \frac{(1-\gamma)}{2}$ .

A descrição dos intervalos de confiança encerra o conjunto de ferramentas estatísticas e probabilísticas consideradas mais relevantes quer para a compreensão dos capítulos (6 e 7) onde se descrevem as metodologias em estudo mas, também, para a interpretação dos exemplos concretos de avaliação de incertezas de medição apresentados nos capítulos 8 e 9, dedicados a ilustrar a aplicação prática de grande parte destes conceitos.

## 5. ESTADO DOS CONHECIMENTOS

### 5.1 Nota introdutória

A avaliação do estado dos conhecimentos num determinado domínio científico envolve, necessariamente, a observação de um conjunto de facetas sob perspectivas distintas, segundo as quais essa observação se pode concretizar.

O tema de estudo desta Tese enquadra-se na problemática geral associada à obtenção de resultados de medição (estimativa da mensuranda e sua incerteza de medição) e do grau de confiança que lhe pode ser atribuído.

Assim, numa perspectiva em que a análise parte do carácter mais geral para o mais particular, a primeira parte da exposição é dedicada à situação dos conhecimentos no contexto da Metrologia.

Esta perspectiva geral encontra suporte numa estrutura de entidades e organismos internacionais que têm desempenhado um papel de destaque no processo de disseminação do conhecimento e no próprio desenvolvimento científico e tecnológico destas matérias. Assim, a segunda parte da exposição debruça-se sobre a intervenção dos organismos internacionais na disseminação dos conceitos da Metrologia.

Em terceiro lugar, e correspondendo a uma restrição do foco de observação, o interesse é centrado nos elementos que são responsáveis pela concretização da medição e, simultaneamente, pela sua interferência causadora da inexactidão: os sistemas de medição. Essa dupla capacidade é discutida na perspectiva da análise do estado dos conhecimentos relativamente ao desempenho dos sistemas de medição e sua caracterização metrológica.

Em quarto lugar, a incorporação da actividade de medição em Sistemas de Gestão da Qualidade que contêm exigências para se estabelecer um grau de confiança nos resultados obtidos, suscita a exposição do estado dos conhecimentos relativamente à medição como elemento de sistemas de normalização e de qualidade.

Prosseguindo no sentido de discutir o tema principal que nos ocupa, faz-se a apresentação do estado dos conhecimentos no que se refere à avaliação de incertezas de medição onde se refere uma metodologia usualmente adoptada para esse efeito, o GUM, e uma metodologia alternativa, a simulação pelo método de Monte Carlo.

Finalmente, uma vez que o método de Monte Carlo se desenvolve num contexto onde a aplicação de meios computacionais de cálculo se revelam essenciais para a maximização das suas potencialidades, discute-se o *estado dos conhecimentos no que se refere à utilização de métodos computacionais de simulação.*

## **5.2 Estado dos conhecimentos em Metrologia**

A actividade de medição tem tido um enquadramento que a aproxima mais de uma aplicação de carácter técnico do que de natureza científica, possivelmente porque alguns conceitos, como o da própria medição eram vistos quase como intuitivos.

A alteração desta situação decorre, na actualidade, predominantemente de dois factores: o papel atribuído à medição no contexto global da investigação científica, e a fundamentação teórica desenvolvida a partir da segunda metade do Séc. XX.

Com efeito, os sistemas de medição, atingindo uma diversidade e níveis de exactidão consideravelmente superiores aos até então utilizados, suscitaram a necessidade de se aprofundarem as questões relacionadas com o seu desempenho, em particular de natureza metrológica, e simultaneamente, de se desenvolverem critérios e mecanismos de comparação.

Numa perspectiva clássica, o conceito de *erro de medição*, visto como métrica da “qualidade” do resultado da medição, é um dos conceitos mais relevantes. É em torno deste conceito que se centram os esforços de compreensão do processo de medição, partindo-se daí para a estruturação dos elementos de caracterização metrológica dos instrumentos de medição e, com base nestes, para a procura de contribuições para a melhoria do seu desempenho.

A pesquisa desenvolvida nesta base conduziu, à luz da visão determinística corrente na época, a uma formulação conceptual suportada no conceito de “erro de medição” entendido como *a diferença entre o valor verdadeiro da grandeza e o valor observado na medição.* Com base neste princípio, aceitando que os valores apontados não são coincidentes, surge a tendência natural de, por um lado, estudar as origens do erro e, por outro lado, procurar estabelecer as condições que permitem a sua minimização.

O estudo da problemática do “erro” experimental encontra-se, ele próprio, associado à introdução de novas abordagens científicas para a interpretação de alguns fenómenos com comportamento designado de estocástico. Por exemplo, é no contexto da análise do comportamento dos erros experimentais que é introduzido, no Séc. XIX, simultaneamente por Lagrange e por Gauss, a curva de probabilidade normal.



A designação “erro” era utilizada no contexto da medição para identificar dois conceitos profundamente distintos: a diferença, de carácter sistemático, estabelecida entre o resultado da medição e o valor da grandeza; e a variabilidade, de carácter aleatório, associada à dispersão de valores de erro obtidos em medições sucessivas. Este duplo significado de natureza complementar, resulta da presença de duas perspectivas, a determinística e a probabilística.

Um passo importante no sentido da clarificação deste problema foi dado com a introdução de dois conceitos: o conceito de “erro aleatório” e o conceito de “erro sistemático”. Esta diferenciação abriu caminho a uma nova interpretação do conteúdo informativo do resultado da medição.

Nos anos 50, surgiram as primeiras tentativas de desenvolvimento de uma base teórica e axiomática para a medição, permitindo o estabelecimento de conceitos fundamentais dos quais, um tem particular importância: *o princípio da impossibilidade de determinação do valor verdadeiro de uma grandeza.*

Este princípio, por um lado, invalida um alicerce da teoria “clássica” da medição, ao apontar a impossibilidade de se quantificar a definição do erro da medição e, por outro lado, cria um vazio na estrutura conceptual vigente, uma vez que se mantém a necessidade de dispor de um parâmetro que reflecta o grau de inexactidão do resultado da medição.

A consideração do erro nas duas interpretações apontadas (sistemática e aleatória) permitiu, durante um certo período de tempo, utilizar o alicerce clássico da medição resultante do trabalho promovido por organismos internacionais, foi introduzida, já no início dos anos 90, uma nova abordagem contendo o conceito de “incerteza de medição”.

Esta nova abordagem parte da aceitação de que o valor verdadeiro da grandeza é inatingível, define o conceito de “erro (absoluto) da medição” como a diferença entre o valor obtido pela medição e o “valor convencionalmente verdadeiro da grandeza” (este obtido pela via da rastreabilidade aos padrões fundamentais), e considera a “incerteza de medição” como o parâmetro de caracterização da dispersão de valores que poderiam (dentro de determinado intervalo de confiança) ser atribuídos à mensuranda.

Sobre os aspectos citados sublinha-se, em particular, a solução encontrada para ultrapassar o problema da definição do “erro”, a rastreabilidade das medições, envolvendo a calibração dos instrumentos de medição como forma de transmitir a exactidão desde os padrões primários das grandezas envolvidas até à posição na cadeia de rastreabilidade da medição em causa. Por outro lado, a componente de “imprevisibilidade”, de natureza

estocástica, geradora da referida *variabilidade* da grandeza, passa a ser caracterizada exclusivamente pela “incerteza de medição”.

Essa nova interpretação transposta para o GUM (1993, 1995) e para o VIM (1994) mantém, ainda, algum grau de confusão, ao fazer coexistir como elementos de referência para a definição de diversos conceitos metrológicos o “erro” e a “incerteza”. Em particular, recorre aos conceitos de “erro aleatório” e de “erro sistemático” e, em especial, identifica o primeiro como origem da incerteza.

Na abordagem actualmente aceite esta questão é clarificada, entendendo-se que o “erro” possui diferentes formas intrínsecas de manifestação, tendo efeitos de natureza sistemática e efeitos de natureza aleatória. Os efeitos de natureza sistemática constituem um factor de correcção aplicável ao resultado da medição; e os de natureza aleatória, integram as contribuições para a avaliação da “incerteza de medição”. Daqui resulta a secundarização do conceito de “erro” (que, no VIM (2005) é incorporado no anexo A dedicado aos conceitos da “abordagem clássica”) e o consequente acréscimo relativo de importância do conceito de “incerteza de medição” na expressão do resultado da medição.

Um outro aspecto desta evolução é o progressivo afastamento do conceito de *exactidão*, enraizado no conceito de “erro da medição”, substituído pelo conceito de “confiança associada ao resultado da medição”, expresso pela “incerteza de medição”.

Esta nova visão do problema, assumida em particular no VIM (2005), constitui o entendimento actual sobre a matéria, cujo reflexo fundamental se traduz no que se entende por “expressão correcta do resultado da medição”: a (melhor) estimativa da mensuranda e a respectiva incerteza de medição.

Nos anos mais recentes, a Metrologia afirmou o estatuto de ramo da ciência pela sua estruturação e fundamentação axiomática, e aumentou a sua visibilidade, em particular, pelo desenvolvimento de Sistemas de Gestão da Qualidade. O acrescido interesse de algumas comunidades científicas pela Metrologia conduziu a um desenvolvimento e assimilação de conceitos provenientes de diferentes origens científicas que não encontrou ainda na actualidade a desejável estabilidade. Esse facto é particularmente visível em duas vertentes que se pretende constituam pilares para o seu desenvolvimento: o vocabulário e a metodologia para o cálculo de incertezas. Em ambas as vertentes verificam-se orientações divergentes.

Como sinal dessa aproximação, verifica-se que a evolução do VIM de 1994 para a revisão de 2004/05 envolve, por um lado, a colocação em segundo plano de conceitos

suportados no “valor verdadeiro da grandeza” e no “erro de medição” – ainda integrados no VIM de 2004, embora num anexo do documento dedicado aos conceitos no contexto da “abordagem clássica” – e, simultaneamente, destacando o conceito de “incerteza de medição” e outros conceitos dele dependentes; e por outro lado, integrando definições e conceitos anteriormente apresentados apenas no GUM.

Por fim, deve-se realçar que a Metrologia herdou a antiga disputa entre as correntes frequencista e subjectivista – no que se refere à aplicação da Teoria das Probabilidades – reflectida no próprio GUM onde, para a quantificação de determinados tipos de componentes de incerteza, se recomenda a via frequencista e, para outros, a via subjectivista.

Por tudo isto, pode antever-se que o caminho para uma estabilização da Metrologia ainda será longo e sujeito a uma evolução complexa e, porventura, com rupturas envolvendo alguns dos seus conceitos fundamentais.

### **5.3 *Intervenção dos organismos internacionais na disseminação dos conceitos da Metrologia***

A Metrologia, pelo seu carácter transversal de intervenção numa multiplicidade de domínios científicos, leva a que um número significativo de organizações se dediquem a aspectos relacionados com a sua disseminação e normalização, sendo responsáveis pela sua difusão sobretudo na segunda metade do Séc. XX.

Esta intervenção ocorre em níveis distintos: no desenvolvimento e disseminação do SI gerado a partir da “Convenção do Metro” – onde se encontram organizações como o BIPM; na normalização – onde se encontram organizações como a ISO, a IEC; e na difusão de estruturas de rastreabilidade – onde se encontram os Laboratórios de Metrologia.

A actividade destes organismos tem permitido o desenvolvimento de normas de referência aplicadas na regulação de actividades industriais e comerciais de acordo com as regras preconizadas pelo SI, tem auxiliado na transmissão de conhecimento de níveis científicos para níveis tecnológicos e na uniformização de práticas associadas à medição, e tem permitido o estabelecimento de cadeias de rastreabilidade, transferindo a exactidão dos padrões de referência para os níveis de instrumentação e, finalmente, para a medição.

Os recursos humanos agregados nestes organismos têm permitido, igualmente, a constituição de Comissões e Grupos de estudo dedicados ao desenvolvimento de matérias da Metrologia, sendo um exemplo, a comissão para o desenvolvimento do GUM e do VIM no

seio da ISO, tendo este organismo promovido a sua integração em regulamentação normativa, nomeadamente, aplicável a Sistemas de Gestão da Qualidade.

Outras entidades têm promovido eventos internacionais vocacionados para problemáticas sectoriais da Metrologia: a IMEKO (*International Measurement Confederation*)<sup>1</sup>, na qual coexistem 21 comissões técnicas<sup>2</sup>; e a EUROLAB, cuja vocação tem sido direccionada para a actividade laboratorial e enquadrada no âmbito da acreditação de laboratórios.

De outras contribuições relevantes para o desenvolvimento observado nesta matéria, refira-se a realização de conferências como a AMCTM (*Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology*)<sup>3</sup>, realizadas desde 1993, especialmente dedicada à discussão de metodologias matemáticas e computacionais aplicados à Metrologia; a criação do SSfM (*Software Support for Metrology Group*)<sup>4</sup> na segunda metade da década de 90, no seio do qual se tem promovido o debate sobre os conceitos, metodologias, constrangimentos e critérios de Qualidade inseridos na aplicação de ferramentas computacionais no cálculo; o benefício resultante do desenvolvimento tecnológico recente – designadamente no que se refere às capacidade de cálculo computacional – potenciando novas possibilidades de exploração deste tipo de recursos como ferramenta de suporte à aplicação destes métodos com custos económicos mínimos.

---

<sup>1</sup> A IMEKO, organização fundada em 1958 e sediada em Budapeste - Hungria, sendo uma ONG com 36 organizações membros, com estatuto consultivo da UNESCO e da UNIDO e cuja actividade se encontra direccionada para o intercâmbio internacional de informação científica e técnica no âmbito da medição e da instrumentação e para a promoção da cooperação internacional entre cientistas e engenheiros, de investigação e da indústria. É, ainda, uma entidade parceira das organizações (IFAC, IFIP, IFORS e IMACS, *vide* lista de siglas).

<sup>2</sup> Education and Training in Measurement and Instrumentation (TC1), Photonics (TC2), Measurement of Force, Mass and Torque (TC3), Measurement of Electrical Quantities (TC4), Hardness Measurement (TC5), Vocabulary Committee (TC6), Measurement Science (TC8), Flow Measurement (TC9), Technical Diagnostics (TC10), Metrological Infrastructures (TC11), Temperature and Thermal Measurements (TC12), Measurements in Biology and Medicine (TC13), Measurement of Geometrical Quantities (TC14), Experimental Mechanics (TC15), Pressure and Vacuum Measurement (TC16), Measurement in Robotics (TC17), Measurement of Human Functions (TC18), Environmental Measurement (TC19), Measurement Techniques for the Construction Industry (TC20) e a comissão criada recentemente em 2004, Mathematical Tools for Measurements (TC21).

<sup>3</sup> Destas conferências destaca-se a avaliação de métodos para a determinação de incertezas de medição, a aplicação de ferramentas estatísticas e probabilísticas em Metrologia e a discussão e apresentação de métodos numéricos computacionais como via alternativa de tratamento da informação associada à medição, alguns dos quais podem ser considerados precursores neste contexto [Siebert (1999)].

<sup>4</sup> As temáticas envolvidas na actividade deste grupo são diversificadas integrando: a intervenção da componente computacional na Metrologia e as suas boas práticas [Cox *et al* (2001a)]; os algoritmos de cálculo de incertezas aplicáveis em circunstâncias específicas [Lord *et al* (2003)]; a concepção e validação de modelos matemáticos [Barker *et al* (2001)]; a concepção, desenvolvimento e validação de ferramentas computacionais [Cox *et al* (2004)]; a “fusão de dados” e a intercomparação [Boudjema *et al* (2004)], [Cox (1999)].

#### **5.4 Caracterização metrológica de sistemas de medição**

A evolução científica e tecnológica (do conhecimento, das metodologias, dos materiais e das técnicas de produção, entre outros) deu origem a uma grande diversidade de sistemas de medição e das suas aplicações. Este desenvolvimento traduziu-se no incremento substancial da complexidade dos sistemas potenciada por crescentes requisitos exigidos na sua utilização – envolvendo factores como a segurança, a robustez, a fiabilidade, etc.

Por estas razões, o conhecimento dos elementos dos sistemas e do seu desempenho tornou-se mais relevante conduzindo, em particular, a que a sua caracterização metrológica adquirisse importância acrescida.

Assim, têm-se estruturado as regras de caracterização do desempenho dos sistemas quer em regime estático ou estacionário quer em regime dinâmico, consoante o grau de exigência envolvido na sua utilização procurando, simultaneamente, efectuar uma análise detalhada dos seus elementos integrantes segundo várias perspectivas<sup>5</sup>.

A caracterização metrológica tem, também, constituído uma ferramenta para o desenvolvimento da instrumentação, uma vez que este tipo de análise permite iluminar determinadas facetas da instrumentação e concentrar esforços no aperfeiçoamento de aspectos particulares identificados como factores determinantes de inexactidão.

No que se refere a contribuições específicas para o conhecimento nesta matéria, refira-se que se encontram sobretudo nas décadas de 1970 a 1990 algumas das mais significativas. Autores como Dally, Doebelin, Asch, e Millman produziram verdadeiros compêndios de instrumentação incluindo a constituição dos estágios e a identificação dos elementos que constituem as mais comuns cadeias de medição, a descrição detalhada das propriedades mais significativas de sensores, actuadores e outros elementos funcionais dos sistemas e, em particular, constituindo a caracterização metrológica como elemento de análise dos processos de medição.

No seguimento destes trabalhos e da introdução, já na década de 90, do conceito de incerteza de medição reforçou-se a necessidade de conhecimento das características metrológicas da instrumentação, uma vez que estas constituem a base da análise da incerteza.

A importância acrescida da caracterização metrológica motivou a re-introdução da discussão relativamente à terminologia e ao significado de alguns conceitos e termos – como o da *histerese* – e à sua forma de avaliação e de quantificação.

---

<sup>5</sup> Na perspectiva funcional, na perspectiva do fluxo de informação, na perspectiva da rastreabilidade das medições e, noutras perspectivas convenientes, de acordo com uma definição de objectivos baseada no seu objectivo de aplicação.

Esse acréscimo de interesse foi, igualmente, estimulado pelo aparecimento e introdução dos “Sistemas de Gestão da Qualidade”. Com efeito, os requisitos que as entidades que adoptaram os princípios destes sistemas têm que respeitar (associadas ao cumprimento dos requisitos normativos) provocaram uma alteração na relação comercial fabricante / fornecedor – cliente tornando-se, o segundo, mais exigente e forçando os primeiros a aperfeiçoar os seus processos internos de caracterização da instrumentação comercializada. Este facto motiva a frequente participação de fabricantes de instrumentação em fóruns científicos e tecnológicos internacionais, quer divulgando estudos aplicados à caracterização metrológica de instrumentação, quer adquirindo informação relevante para a sua actividade comercial.

Entidades vocacionadas para a promoção da normalização, como é o caso da ISO, têm procurado consolidar a sua colaboração com organismos sectoriais, visando estabelecer documentos de referência internacional como é o caso do *Vocabulário Internacional de Metrologia* onde se definem alguns dos principais conceitos associados à caracterização metrológica.

## **5.5 Qualidade e normalização**

A introdução da normalização e dos Sistemas de Gestão da Qualidade constituíram reconhecidos catalizadores para a disseminação da Metrologia e, particularmente, das regras da rastreabilidade em consequência dos seus requisitos incluírem a “qualidade das medições”.

O conceito de Qualidade encontra a sua origem na actividade de inspecção, introduzida no contexto industrial do início do Século XX, a qual, promoveu o aparecimento de profissionais com conhecimentos especializados, ferramentas técnicas e de análise, procedimentos e padrões vocacionados para a concretização prática da inspecção. Na sua evolução regista-se a adaptação, nos anos 20, de elementos da análise estatística aos problemas de controlo de qualidade da produção [Montgomery (1991)]; a introdução, nos anos 40, das cartas de controlo por Shewhart e dos estudos de Juran, Deming e outros, aplicados com sucesso no Japão por Deming na década de 50; o desenvolvimento, a partir dos anos 60, de metodologias para a Gestão da Qualidade. É dessa época a organização das primeiras conferências dedicadas ao tema da Qualidade.

Neste contexto a introdução, pela ISO, da série de normas ISO 9000 subordinadas à temática da *Gestão de Sistemas da Qualidade* é um marco importante, a partir do qual se desenvolveram, já em finais do Séc. XX, a norma de regulação da actividade dos laboratórios acreditados, integrando Sistemas de Gestão da Qualidade [EN 45001 (1989)] e, mais tarde,

num esforço de uniformização, a actual norma de referência EN 17025 (2000), contendo os princípios orientadores para a acreditação de entidades. Actualmente, coexistem diferentes organismos nacionais e internacionais com funções de organização e regulação da acreditação de laboratórios e da qualificação de produtos e serviços destacando-se, nesse espectro, a EA (*European Co-operation for Accreditation of Laboratories*), resultante da junção da EAC e da EAL.

A actividade de normalização, que se desenvolve em paralelo, teve origem num conjunto de acontecimentos<sup>6</sup> ocorridos no início do Séc. XX que evidenciaram a necessidade da “normalização”. A sua origem formal encontra-se na acção desenvolvida pela IEC (*International Electrotechnical Commission*), organização pioneira constituída em 1906, e pela ISA (*International Federation of the National Standardizing Associations*, 1926-40).

O crescimento da actividade de normalização conduziu à fundação, em 23 de Fevereiro de 1947, da ISO<sup>7</sup>, a qual possui, na actualidade, um conjunto de atribuições destacando-se a sua intervenção de carácter normativo, dispondo de comissões e grupos de trabalho sectoriais destinados a promover o desenvolvimento de matérias de interesse internacional. A publicação do GUM (1ª versão publicada em 1993) e o VIM (1ª publicação em 1984) constituem dois exemplos do resultado da sua intervenção.

Acompanhando a orientação promovida pela EA a nível europeu [EA 4/07 (1995)], [EA 4/02 (1999)], no contexto nacional, é inegável a associação da disseminação da Metrologia à acreditação de laboratórios, desenvolvido a partir dos anos 90. O seu papel na difusão de novos conceitos, como o de “caracterização metrológica” e de “incerteza de medição” foi fundamental, por constituir um requisito dessa acreditação. A incorporação dos conceitos de rastreabilidade e de incerteza contribuíram, também, para alargar a perspectiva da comparabilidade de “serviços” e “produtos” para domínios técnico-científicos, sendo esta uma extensão importante no contexto abrangente da Qualidade [ISO 8402 (1986)].

Como consequência destes novos requisitos, designadamente, quanto às exigências de rastreabilidade, ganharam visibilidade as entidades responsáveis pela gestão de padrões primários e desenvolveram-se outras dedicadas ao estabelecimento de cadeias de

---

<sup>6</sup> A ocorrência de um grande incêndio em Baltimore, ajudado pela incompatibilidade entre as tomadas de ligação de água e os dispositivos utilizados pelos bombeiros, teve como efeito a destruição de cerca de 2500 edifícios. Estudos efectuados posteriormente evidenciaram a utilização de cerca de 6 centenas de junções distintas em todo o País.

<sup>7</sup> A sigla adoptada de ISO referente a “Organização Internacional para a Normalização”, resulta de haver uma diversidade de possíveis siglas consoante a língua adoptada (OIN em Português e em Francês, ISO em Inglês) tendo sido definida a sigla “ISO” por analogia com o termo grego “isos” que significa “igual”. O seu objectivo é a promoção da normalização aplicável aos diversos sectores de actividade comercial e industrial aplicável à regulação de relacionamentos entre entidades envolvidas nos processos económicos, como as administrações governamentais, os fornecedores, os consumidores e outros grupos de interesse.

rastreabilidade intermédias – os laboratórios metrológicos – incorporando-se numa hierarquia de transferência da “Qualidade” dos padrões de referência até aos resultados das medições obtidos em instalações laboratoriais, industriais e comerciais. Esta intervenção de natureza transversal da Metrologia constitui, na actualidade, um factor de desenvolvimento sócio-económico.

A evolução do papel da Metrologia no contexto da Qualidade permite antever uma progressiva tendência de integração no que se designa por “Gestão da Qualidade Total” – uma das principais ferramentas de gestão de Organizações – alargando o seu âmbito de intervenção nos Sistemas de Gestão da Qualidade.

### **5.6 Introdução de metodologias de avaliação de incertezas de medição**

A aplicação generalizada de metodologias para a avaliação de incertezas de medição é recente, podendo associar-se à introdução do GUM publicado em 1993.

A sua disseminação tem sido difícil, pela razão fundamental de constituir uma clivagem significativa entre a concepção clássica e a concepção moderna da medição, traduzida, com particular ênfase, na distinção entre os conceitos de “erro de medição” e de “incerteza de medição”. O conceito de “erro” encontra-se fortemente enraizado no contexto da medição e o termo “incerteza” suscita, frequentemente, a noção de “dúvida” nos resultados da medição, ao contrário da noção pretendida de “confiança”.

Essa reacção adversa tem sido contrariada pela difusão dos Sistemas de Gestão da Qualidade que, por via dos seus requisitos, suscitaram a necessidade de discussão e assimilação dos novos conceitos.

Importa referir ainda o nível de habilitação necessário para o cálculo do “erro de medição” (em geral, uma mera diferença algébrica), face ao necessário para aplicação no cálculo de incertezas (envolvendo modelos matemáticos, derivações parciais, correlação entre grandezas, expansão de intervalos de confiança, etc.).

Estas, constituem apenas algumas das dificuldades gerais que podem ser apontadas. Outras, resultam de situações comuns na aplicação do GUM a casos concretos como, por exemplo:

- a definição de modelos matemáticos que não cumprem determinados requisitos de aplicação, como o da linearidade;



- a possibilidade de atribuir funções de densidade de probabilidade distintas, para a mesma grandeza de influência no caso da sua incorporação por via probabilística dita de tipo B, originando resultados distintos;
- a possibilidade de introdução de aproximações, majorações e outros elementos que afectam o cálculo, introduzidos “ao gosto” de quem os desenvolve – por exemplo, na atribuição do número de graus de liberdade em grandezas de entrada cuja contabilização é concretizada como sendo do tipo B;
- a utilização sistemática do factor de expansão igual a 2 para expandir o intervalo de incerteza para 95%, quando o número de graus de liberdade efectivos associados ao resultado da medição possa requerer (usando a formulação associada à distribuição de probabilidade *t*-Student e a fórmula de Welch-Satterthwaite) um factor de expansão superior;
- a adopção arbitrária de números de graus de liberdade associados a componentes de incerteza do tipo B, utilizados na determinação posterior do número de graus de liberdade do resultado da medição (pela fórmula de Welch-Satterthwaite), sabendo que este determina o factor de expansão do intervalo de incerteza.

Estes são alguns dos factos que permitem compreender que, ainda hoje, a utilização e implementação do cálculo de incertezas usando o GUM seja limitada e esteja longe da sua expectativa original.

A aplicação do GUM pode ser diferenciada de acordo com os seguintes níveis de intervenção:

- em *laboratórios primários de Metrologia* e de *laboratórios metrológicos*, a sua aplicação é generalizada, cobrindo uma parte substancial das aplicações onde os requisitos podem ser cumpridos, sendo aceite que muitos dos casos tratados possuem um carácter simplificado (por se reportarem à medição directa de grandezas, por estas se encontrarem em regime estacionário em ambientes controlados);
- em *laboratórios secundários*, nomeadamente, *de ensaios*, a sua aplicação é parcial, dependendo da natureza dos ensaios envolvidos (é reconhecida a dificuldade de aplicação do documento nalgumas áreas relacionadas com a Química e a Biologia, por exemplo);
- em ambiente *industrial* a sua aplicação é reduzida, pela complexidade de alguns processos, pela dificuldade de controlo de factores de influência ou pelas exigências ao nível das habilitações;
- em ambiente *comercial*, tem-se observado algum progresso na sua aplicação pela inserção de entidades comerciais (tal como as industriais) nos Sistemas de Gestão da Qualidade.

Numa análise global pode concluir-se que a elevada disseminação da metodologia GUM permitiu um acréscimo significativo na compreensão do resultado da medição e na estruturação de conceitos da medição, mas também que essa difusão evidenciou muitas das limitações e incorrecções de interpretação detectadas em aplicações concretas [Ribeiro *et al.* (2004a), (2004b)], levando a questionar a capacidade de aplicação generalizada que constitui um dos principais objectivos.

Em diversos ramos da ciência subsistem dúvidas sobre a forma mais adequada de aplicar a metodologia do GUM e, até, sobre a sua capacidade para resolver algumas das dificuldades entretanto detectadas. Daí que, no momento presente, se perspetive o incremento do estudo de abordagens alternativas e/ou complementares para concretizar a caracterização metrológica e para desenvolver a capacidade de avaliação das incertezas de medição. É nesta perspectiva que se considera a simulação usando o método de Monte Carlo, como via alternativa de determinação e caracterização dos resultados da medição.

### **5.7 Utilização do método de Monte Carlo em Metrologia**

A utilização da simulação pelo método de Monte Carlo (MCS) tem demonstrado capacidade para ultrapassar dificuldades de aplicação da metodologia preconizada pelo GUM na avaliação de incertezas de medição em modelos matemáticos.

São três as preocupações preponderantes na aplicação da metodologia MCS: a qualidade do gerador de números pseudo-aleatórios; a disponibilidade de algoritmos apropriados para a inversão de funções densidade de probabilidade; e a obtenção de estimadores das grandezas envolvidas com a “qualidade” necessária, bem como de meios para garantir essa “qualidade”.

#### **Sobre os geradores de números pseudo-aleatórios**

O desenvolvimento dos recursos computacionais, tem permitido encontrar soluções alternativas para a geração de números pseudo-aleatórios, revelando aspectos positivos e negativos importantes, que se sintetizam nos pontos seguintes:

- o aumento da oferta de geradores pode considerar-se, genericamente, positivo, uma vez que facilita o acesso e a selecção apropriada para integração com outros tipos de ferramentas computacionais;
- a diversidade de soluções acessível quer em programas estruturados de elevado rigor quer em programas de natureza comercial, como são os programas incorporando folhas de cálculo, tem como efeito secundário dificultar a escolha e a apreciação da “qualidade” relativa das soluções apresentadas. Esta situação é agravada pelo facto

de algumas delas não serem adequadas a determinados tipos de aplicações (o seu comportamento revela-se frequentemente inapropriado, quando analisado no contexto das propriedades associadas à aleatoriedade desses geradores).

O incumprimento de requisitos associados à aleatoriedade (nomeadamente, a independência dos valores da sequência) conduz a que os resultados da simulação sejam enviesados sendo, esse facto, um importante elemento de risco.

O desenvolvimento dos recursos, observado sobretudo na segunda metade do Séc. XX conduziu a uma proliferação de algoritmos para a geração de sequências de números pseudo-aleatórios. Esta profusão revelou as fragilidades apontadas, o que originou o desenvolvimento de ferramentas para testar o desempenho daquelas sequências.

A aplicação sistematizada de testes a sequências produzidas por geradores comuns permitiu que, em vários casos, tenha sido possível detectar fragilidades até então desconhecidas e, conseqüentemente, rejeitar a sua utilização nesse contexto.

Deve-se notar que a diversidade de testes (empíricos, espectrais e outros) que, actualmente, existem resulta da inexistência de um teste “universal” para a avaliação da “aleatoriedade” das sequências. Contudo, isto pode ser pouco relevante face aos processos em causa uma vez que, apesar da inexistência, tem sido possível desenvolver metodologias de geração de sequências de números pseudo-aleatórios e sua aplicação a problemas de diferentes domínios científicos.

Neste contexto, no entanto, deve-se referir a introdução dos testes DIEHARD de G. Marsaglia, reconhecidos na actualidade como dos mais eficazes na avaliação das deficiências demonstradas por alguns geradores. Finalmente, refira-se que na base da análise feita na maioria dos testes, se encontram os *testes* “clássicos” do  $\chi^2$  e de *Kolmogorov-Smirnov*, cuja utilização sistemática continua a constituir um elemento de comparação entre diferentes tipos de testes e de metodologias.

### **Sobre os métodos de inversão de funções**

A aplicação do método de Monte Carlo exige ferramentas computacionais e algoritmos que possibilitem a conversão de funções densidade de probabilidade uniforme noutras funções de probabilidade representativas das grandezas consideradas nos modelos.

Ainda em meados dos anos 50, foi desenvolvido o algoritmo de Box-Muller [Box *et al* (1958)], cuja aplicação permite a conversão na distribuição de probabilidade Normal (aplicada ao caso de duas variáveis).

Actualmente, são conhecidas diferentes técnicas para a conversão de funções densidade de probabilidade. A mais comum destas técnicas é o *método de transformação inversa*, envolvendo a inversão de funções de probabilidade cumulativa. Encontram-se exemplos de aplicação associados à obtenção de funções densidade de probabilidade correntemente utilizadas, nomeadamente, as distribuições uniforme, exponencial, triangular e de configuração U (ou arco-seno).

Como exemplo de outras técnicas refiram-se o *método de composição*, [Rubinstein (1981)] criado por Butler (em 1956), que se baseia na composição de funções densidade de probabilidade como forma de construir a função densidade de probabilidade que se pretende simular, e o *método de aceitação-rejeição*, criado por von Neumann (em 1951), o qual efectua um teste de aceitação ou rejeição de valores de uma amostra com base numa função densidade de probabilidade (teórica ou empírica). Em Rubinstein (1981) encontram-se algoritmos aplicáveis aos casos univariável e multivariável, bem como à generalização deste método.

Esta matéria, em virtude do surgimento de novas configurações tipo de funções de probabilidade e da necessidade de adaptação das metodologias existentes a estas, encontra-se em franco desenvolvimento.

### **Sobre a obtenção de estimadores em resultado da simulação MCS e da sua “qualidade”**

A aplicação do método de Monte Carlo a modelos matemáticos em Metrologia destina-se, em particular, à obtenção da distribuição de probabilidade e, a partir desta, à determinação dos limites de intervalos de incerteza. Neste contexto e em termos práticos, é necessário efectuar duas operações características: a ordenação da sequência e a obtenção dos valores correspondentes aos percentis que determinam os pretendidos limites.

Este tipo de problemas é, na actualidade, de utilização generalizada em Estatística e Teoria das Probabilidades. Das soluções disponibilizadas em pacotes de bibliotecas numéricas e literatura, algumas são particularmente eficientes, como é o caso do algoritmo “*quicksort*” inventado por Hoare em 1961.

No que se refere à obtenção de percentis requeridos para a determinação dos limites de intervalos de confiança recorre-se, novamente, à Estatística e Teoria das Probabilidades.

A determinação de percentis pela via da simulação computacional incorpora, contudo, um elemento de análise adicional: a exactidão dos valores obtidos. Relativamente a esta questão, encontram-se, igualmente, respostas no desenvolvimento destes ramos da ciência, através dos quais, se estabeleceram processos para a determinação de intervalos de confiança para os

percentis, podendo estimar-se a exactidão com base na amplitude desses intervalos. Dessa forma, esta questão fundamental, cuja aplicação é necessária para a comparabilidade com a exactidão de outros métodos (como o GUM), pode ser resolvida com relativa facilidade.

### **5.8 Comentários adicionais**

O carácter inovador da utilização da metodologia baseada no método de Monte Carlo para a determinação de incertezas de medição resulta, inevitavelmente, do desenvolvimento de estudos e de ferramentas estabelecido no contexto de muitas outras áreas onde as suas potencialidades têm sido aproveitadas.

Esta sua aplicação encontra-se intrinsecamente ligada a factores essenciais para a sua disseminação, sendo importante referir as capacidades de natureza computacional, o incremento da importância da Metrologia e da avaliação de incertezas de medição no contexto dos Sistemas de Gestão da Qualidade e da difusão da rastreabilidade dos padrões no âmbito do SI, no desenvolvimento da fundamentação teórica da Metrologia, constituindo um motivo de atracção para o seu estudo e, finalmente, a percepção de que a sua intervenção pode contribuir para o desenvolvimento científico e tecnológico.



## 6. MÉTODO DE MONTE CARLO

### 6.1 Introdução

Desde a sua introdução, em meados dos anos 50, a Simulação pelo Método de Monte Carlo (MCS) tem tido uma crescente difusão e aplicação em diversos domínios para a simulação de fenómenos cujo comportamento se revela de natureza estocástica.

A importância que rapidamente adquiriu resultou da sua aplicação a problemas para os quais os métodos e técnicas convencionais são excessivamente complexos ou deparam com dificuldades como, por exemplo, o cálculo de integrais de funções com descontinuidades.

O método permite a obtenção de soluções numéricas para problemas cuja solução analítica não é viável, como seja a resolução de equações integro-diferenciais de elevada complexidade; a análise de processos estocásticos; a solução de problemas de mecânica estatística, nomeadamente, envolvendo processos e cadeias de Markov; e a solução de problemas de “*caminho aleatório*” (“*random walk*”). A este elenco pode acrescentar-se a avaliação de incertezas de medição como uma nova área de aplicação.

É importante, no entanto, não dissociar a simulação por MCS da experimentação, uma vez que, quer numa fase onde se definem condições de caracterização dos processos estocásticos, quer na realização das etapas da simulação, esta possui um grau de intervenção significativo no contexto da “estatística computacional”. De facto, a utilização desta metodologia tem visado não só criar alternativas mas, igualmente, complementar resultados obtidos por via teórica-analítica e por via experimental.

Na segunda metade do Séc. XX, foram desenvolvidas muitas ferramentas aplicáveis nas diferentes etapas que constituem a MCS. Neste contexto, assumem particular importância as utilizadas nas etapas fundamentais do método: a geração de sequências de números “aleatórios”; a “inversão” de funções de probabilidade; e o processamento de resultados.

O presente capítulo, para além de uma apresentação de raízes históricas do método, contém secções dedicadas às principais etapas que constituem o MCS, as componentes integradas directa e indirectamente na execução e análise e alguns dos requisitos e características que se encontram associadas a estes.

Particular atenção é dada à geração de números pseudo-aleatórios e à sua concretização em diferentes tipos de geradores. A selecção do gerador deve ser criteriosa necessitando, por um lado, do conhecimento das propriedades que são determinantes e, por outro lado, das características das diversas soluções conhecidas.

## **6.2 Raízes históricas e potencial do método de Monte Carlo**

Na análise contemporânea de questões de índole científica é frequente encontrar abordagens de natureza distinta para o seu tratamento: geométrica, analítica, probabilística, ou outra. A razão do desenvolvimento das diferentes vertentes de abordagem encontra-se, normalmente, associada à evolução histórica da própria ciência.

Quando é possível recorrer a diferentes tipos de tratamento de uma dada questão de índole científica, a opção por uma alternativa deve ser baseada em critérios como a sua simplicidade, a sua eficácia ou outros factores que, de um modo geral, se revelem vantajosos para a sua concretização. Enquadra-se num destes casos a adopção da MCS como abordagem alternativa para a resolução de alguns destes problemas, constatando-se que a abordagem MCS possui melhores características e potencial mais vasto que as hipóteses alternativas.

O potencial dos métodos de simulação numérica associado à Teoria das Probabilidades para a resolução de problemas de alguma complexidade, é bem ilustrado no caso da determinação do número irracional  $\pi$ . Com efeito, a sua resolução encontra uma solução curiosa: a “*Experiência da agulha de Buffon*”<sup>1</sup>. É convicção do Autor que esta experiência, exposta com algum detalhe no anexo 1, é determinante no entendimento do verdadeiro potencial da MCS.

A aplicação do potencial desta técnica de “amostragem estatística” combinada com o cálculo numérico ganha outra dimensão quando aplicada noutra classe de problemas. Em particular, quando permite a estimativa do valor de funções integrais complexas contendo descontinuidades quando a via analítica conduz a situações de elevado grau de complexidade ou, mesmo de impossibilidade prática de resolução. Um exemplo ilustrativo é, também, apresentado no anexo 1.

De facto, este tipo de metodologia tem-se revelado frequentemente de grande utilidade na resolução de problemas constituindo, nalguns deles, não uma alternativa mas a única via de solução conhecida.

---

<sup>1</sup> Apresentada em 1777 por Georges-Louis Leclerc (a designação de “*Buffon*” deriva do seu título de *Comte de Buffon*).



A primeira aplicação concreta de um método suportado na amostragem estatística como meio para a investigação de problemas em física surgiu em Roma, em meados de 1930, tendo sido introduzido por E. Fermi nos seus *estudos sobre difusão de neutrões*. No decurso dos anos 40 houve um forte incremento na utilização de métodos numéricos para cálculo, suportados no crescente desenvolvimento tecnológico, destacando-se a actividade então desenvolvida por Ulam, Metropolis e Feynman, cuja contribuição foi decisiva para a posterior consolidação e difusão da Simulação pelo Método de Monte Carlo (*vide* Metropolis *et al* (1949), por exemplo).

Beneficiando do rápido desenvolvimento das capacidades dos computadores digitais, que se verificou nessa época, obtiveram-se resultados que, de outra forma, dificilmente seriam atingíveis. Stan Ulam é apontado como o responsável pela re-invenção do método de Fermi de amostragem estatística.

Em 1949, num artigo dedicado a técnicas estatísticas para o estudo de equações integro-diferenciais, da autoria de Metropolis e von Neumann, foi utilizado, pela primeira vez, o termo "Monte Carlo" para designar o tipo de método aplicado no cálculo efectuado. Foi ainda nesse ano, que decorreu a primeira conferência sobre este assunto em Los Alamos.

Em 1953 Metropolis e outros publicam um artigo, no qual é apresentada, pela primeira vez, uma técnica de simulação pelo método de Monte Carlo que ficou conhecida como "Algoritmo de Metropolis".

### **6.3 Elementos fundamentais da simulação por MCS**

Num sistema de medição, existe necessariamente uma relação funcional que determina a(s) grandeza(s) de saída **[Y]** a partir das grandezas de entrada **[X]**, por exemplo, numa forma explícita, como  $[Y] = f [X]$  (existem outras formas de relacionamento, por exemplo, implícitas sob a forma:  $0 = f[X, Y]$ , etc.).

Admitindo que estas grandezas mensuráveis constituem variáveis aleatórias,  $X_i$ , poder-se-ão conhecer as respectivas funções densidade de probabilidade,  $g_{X_i}(\xi_i)$  e a relação funcional ou modelo matemático,  $f$ , em causa.

O acesso a esta informação em princípio deve permitir a determinação das funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias de saída,  $g_Y(v)$ , como se procura ilustrar no diagrama seguinte.

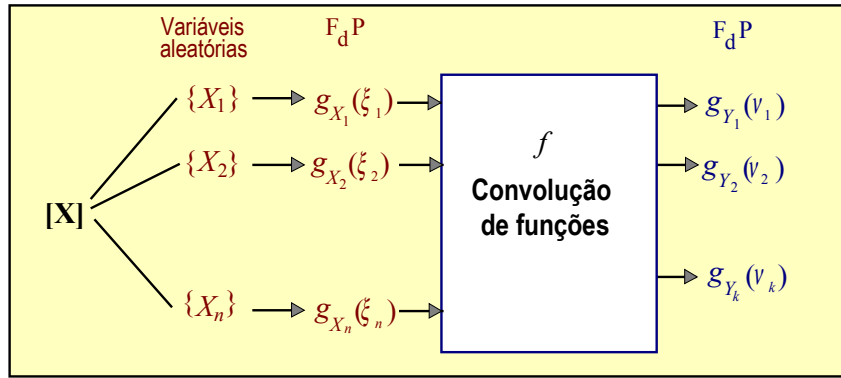


Figura 6.1: Esquema teórico de obtenção das  $F_dP$  das grandezas de saída

A realização prática de uma simulação que execute as operações que se encontram expostas no esquema anterior encontra dificuldades [Siebert *et al.* (2005)], [Steele *et al.* (2005)]. Ao esquema apresentado associam-se duas operações fundamentais, a obtenção das funções densidade de probabilidade e a convolução dessas funções, da qual, se poderão obter as pretendidas funções densidade de probabilidade das grandezas de saída.

Vejamos, agora, as formas para resolver estas dificuldades através da simulação por MCS: a simulação de valores de uma função densidade de probabilidade  $g_{X_i}(\xi_i)$ , associada a uma variável aleatória  $X_i$ , resulta de se efectuar a geração prévia de uma sequência de números “aleatórios”  $\{u_{ij}\}^1$  possuindo uma função densidade de probabilidade uniforme,  $g_{U_i}(u_i)$ , seguindo-se uma “transformação” dessa sequência noutra de números com limites e função densidade de probabilidade equivalente à  $F_dP$  original,  $g_{X_i}(\xi'_i)$ . A fundamentação desta “transformação” será, igualmente, objecto de descrição.

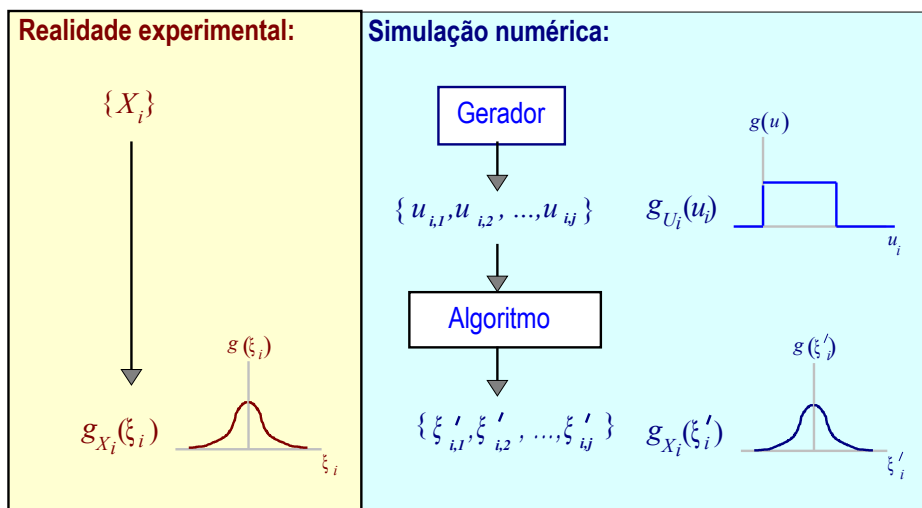


Figura 6.2: Esquema comparativo real vs. simulação

<sup>1</sup> Na verdade são números “pseudo-aleatórios”, sendo este conceito introduzido adiante, bem como, as suas propriedades fundamentais de independência e equiprobabilidade

Dispondo das sequências de valores associadas às diferentes variáveis aleatórias de entrada, o processo de convolução das funções é simulável, efectuando a aplicação da função  $f$  “ponto a ponto”, ou seja, considerando que as sequências de valores se encontram ordenadas numa sequência temporal, num instante  $t$ , o valor das grandezas de saída,  $v_{i,t}$  é dado por  $f(\xi_{1,t}, \xi_{2,t}, \dots, \xi_{n,t})$ .

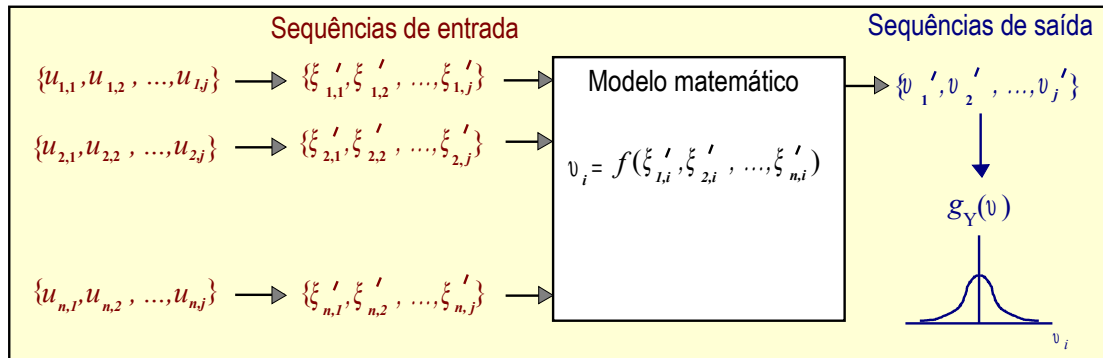


Figura 6.3: Esquema de simulação por MCS para uma grandeza de saída

Neste contexto, verifica-se que as operações fundamentais da simulação, sobre as quais recai a responsabilidade do desempenho e “qualidade” da simulação, são a operação de geração dos números “aleatórios” e a operação de “transformação” de funções densidade de probabilidade uniforme nas funções densidade de probabilidade específicas das diferentes grandezas de entrada.

### 6.3.1 Geradores de números pseudo-aleatórios

#### 6.3.1.1 Nota introdutória

A importância do recurso a sequências de números cujas características procuram reproduzir amostras de variáveis aleatórias encontra-se associada à crescente aplicação de métodos de natureza estatística, designadamente, em estudos de processos estocásticos<sup>2</sup> e no tratamento de expressões matemáticas de difícil solução analítica.

Essa importância manifesta-se na simulação pelo Método de Monte Carlo (MCS), uma vez que esse recurso, traduzido na aplicação de geradores de números pseudo-aleatórios, constitui a sua componente inicial de produção de sequências numéricas, dela dependendo a “qualidade” do seu desempenho.

<sup>2</sup> Processos (sequências naturais ou simuladas de estados associados a ocorrências/eventos de determinado fenómeno) de natureza estatística, também designado por *função aleatória*, envolvendo colecções ordenadas de variáveis aleatórias dependentes de parâmetros variáveis (sendo o mais comum o tempo, podendo, no entanto ser outro como, por exemplo, as variáveis espaciais). Assim, considerando um espaço de probabilidade  $(\Omega, F, P)$ , o processo estocástico é representado por uma colecção de variáveis aleatórias  $\{X(t) | t \in T\}$ , onde o parâmetro variável considerado é o *tempo* e  $T$  é um subconjunto de  $R$ . O *processo* classifica-se como *temporal-discreto* ou *temporal-contínuo* consoante a natureza discreta ou contínua de  $T$ . A variável  $X(t)$  designa-se por *estado* do processo no instante  $t$ .

### 6.3.1.2 Raízes históricas da geração de números pseudo-aleatórios

O conceito de *aleatoriedade* encontra-se enraizado nos estudos de Estatística e da Teoria das Probabilidades, decorrendo da existência de eventos que dependem do acaso ou de circunstâncias imprevisíveis possuindo, como característica particular, o facto da realização de experiências conduzirem a amostragens não-enviesadas, imprevisíveis e não-reprodutíveis. Os resultados que se podem obter dessas sequências designam-se, habitualmente, por “números aleatórios”, embora alguns autores, como L’Ecuyer (2001), considerem frágil essa designação, apontando *que um número, isoladamente, não é nem mais nem menos aleatório que outro, possuindo ambos a mesma probabilidade de ocorrência.*

Com efeito, afigura-se mais correcto designar determinadas sequências de números como "*sequências de números aleatórios independentes*", nas quais, cada número da referida sequência é obtido apenas pelo acaso – a independência pressupõe que todos os números do domínio em causa dispõem de igual probabilidade de ocorrência – não se encontrando relacionados com outros números da mesma sequência.

A obtenção de sequências de números deste tipo, remonta aos primeiros estudos com métodos de amostragem directa (baseados em retirar bolas de uma urna fechada, no lançamento de dados e nos jogos de cartas). No decorrer do Séc. XX, a introdução de dispositivos tecnológicos, cada vez mais sofisticados, permitiu ampliar a capacidade de geração destas sequências. São referências, a introdução de máquinas como a de Kendall e Babbington–Smith (em 1939), com capacidade para produzir sequências de "números aleatórios" da ordem de 100 000 dígitos, ou a máquina de geração de números aleatórios ERNIE utilizada durante anos para determinar os número da lotaria Inglesa (*British Premium Saving Bonds Lottery*)<sup>3</sup>.

Com o decorrer do tempo, novas exigências foram surgindo, associadas ao desenvolvimento de diversos ramos da ciência (a criptografia, a física das partículas, e estudos operacionais de transporte entre outros), originando a criação de processos não controlados de geração de sequências (baseados, por exemplo, na instabilidade da frequência de um oscilador livre ou nos intervalos de tempo de detecção de partículas obtidos no decaimento de elementos radioactivos).

---

<sup>3</sup> De certa forma, ainda hoje se encontram reflexos desta procura, com resultados distintos em “qualidade” das sequências e na sua dimensão, como representa um caso exemplar o sistema introduzido por Marsaglia (em 1995), permitindo a obtenção de 650 *megabytes* de números aleatórios, tendo sido obtido combinando a saída de ruído produzido por um circuito de díodos com uma mistura determinística de música RAP (à qual, de uma forma humorística, intitulou "White and Black Noise").

Até meados dos anos 40 desenvolveu-se a ideia de que as potencialidades dos computadores, conjugadas com a utilização de algoritmos matemáticos convenientes, constituiriam uma base adequada para a obtenção computacional de sequências aleatórias. Von Neumann surgiu como uma primeira voz dissonante. Com efeito, após num primeiro tempo se ter dedicado a construir sequências aleatórias com computadores digitais, Von Neumann acabou por se convencer que, usando as operações aritméticas de um computador digital, tal objectivo não era possível, dado que, quanto a ele, cada número é “completamente” determinado a partir do seu predecessor<sup>4</sup>.

Esta opinião teve reflexos importantes. Ao levantar essas objecções acabou por conduzir a desenvolvimentos significativos na forma de abordagem do problema da geração de números “aleatórios”, promovendo a discussão sobre factos determinantes para uma correcta utilização deste recurso (como o facto de que as sequências em causa não serem aleatórias mas aparentarem sê-lo; ou o facto de, em grande parte das aplicações, a dependência encontrada na sequência de números gerados por esta via não ter, necessariamente, um significado físico).

As questões apontadas e a sua discussão conduziram a que fosse modificada a forma de designar este tipo de sequências de números, obtidas de uma forma determinística, passando a chamar-se-lhes de *sequências de números pseudo-aleatórios* ou *sequências de números quasi-aleatórios* consoante o grau de *determinismo* que lhes está associado.

Como consequência do crescente interesse sobre este assunto, têm sido propostos diversos modelos matemáticos e algoritmos conduzindo a dificuldades quando se pretende responder à questão: *Que gerador utilizar?* – Essas dificuldades são agravadas por factores adicionais, como o facto dos geradores disponíveis se encontrarem frequentemente embebidos em “pacotes” de programação comercial, desconhecendo-se quer a sua origem quer o algoritmo em que se suporta, suscitando dúvidas que só podem ser clarificadas mediante a aplicação de testes.

A introdução de testes é, ela própria, uma nova fonte de dificuldade dada a inexistência de testes que se possam considerar “universais”. Devido a este facto, na actualidade, “apenas” é possível decidir sobre a aceitação ou rejeição de uma determinada sequência, face aos critérios de aleatoriedade escolhidos.

---

<sup>4</sup> É possível que a origem dessa reflexão de von Neumann tenha tido origem na constatação das limitações das sequências geradas pelo gerador de von Neumann, cujo desempenho de facto mostra significativas e importantes fragilidades quando sujeito a grande parte dos testes à uniformidade e à independência. O conhecimento entretanto adquirido de outras estruturas de GNPA cujos resultados demonstram um incomparável melhor desempenho face a esse tipo de testes, poderá indiciar que, para a sua aplicação a muitos casos práticos relativamente a fenómenos físicos, a imperfeição face à geração de sequências de números verdadeiramente aleatórios não impede a sua utilização com sucesso.

Acompanhando o extraordinário desenvolvimento da capacidade dos computadores digitais, as exigências associadas às aplicações têm, também elas, tido um incremento significativo <sup>5</sup>. Este facto, tem constituído um desafio que, por sua vez, tem conduzido ao desenvolvimento de novos testes e de novos geradores de números pseudo-aleatórios.

A aplicação destes geradores é muito diversificada, intervindo em várias áreas de actividade <sup>6</sup>, desempenhando um papel igualmente importante na Metrologia, ao ser associada à utilização da MCS na determinação de incertezas de medição.

### 6.3.1.3 Definição e caracterização do gerador de números pseudo-aleatórios

Encontrar uma definição apropriada para o conceito de gerador de números pseudo-aleatórios comporta o grau de dificuldade que resulta do facto de, sobre esta matéria, existirem definições em número quase tão elevado quanto o número dos seus autores. A definição genérica abaixo apresentada, cobre os aspectos essenciais do conceito em causa:

*Gerador de números pseudo-aleatórios [L'Ecuyer (1994a)]: Algoritmo determinístico de simulação concebido para gerar sequências de números, pretendendo-se que a caracterização e análise estatística das mesmas evidencie propriedades o mais aproximadas possível das relativas a sequências de números aleatórios (com destaque para a sua imprevisibilidade, o seu não enviesamento e a observação de independência entre os seus elementos constituintes).*

Nesta definição, salienta-se uma certa contradição entre o termo “aleatório” e a aplicação de um “algoritmo determinístico”, o que advém da utilização de um valor inicial de “semente” que determina os valores da sequência. Para obviar essa “incompatibilidade” nalgumas aplicações, recorre-se à geração aleatória do próprio valor de semente.

A definição formal de gerador de números pseudo-aleatórios com distribuição uniforme apresentada por L'Ecuyer (1994a) descreve este tipo de gerador como uma estrutura  $G = (\mathcal{S}, s_0, T, \mathcal{U}, G)$ , onde  $\mathcal{S}$  é um espaço com um número finito de estados,  $s_0 \in \mathcal{S}$  é o estado inicial,  $T: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  é a *função de transição*,  $\mathcal{U}$  é um conjunto finito de símbolos de saída e  $G: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{U}$  representa a *função de saída*.

A tradução da sequência de operações desenvolvidas no processo de geração de números a partir da definição segue, então, a seguinte ordem: o processo inicia-se com a definição do

---

<sup>5</sup> Por exemplo, pela utilização de processamento em paralelo, pela utilização de modelos matemáticos complexos cuja implementação informática é fortemente consumidora de tempo ou porque a aplicação se encontra sujeita a mecanismos de avaliação de resultados, rejeitando partes consideráveis de valores obtidos a partir das sequências geradas.

<sup>6</sup> Experiências estatísticas, simulação de sistemas estocásticos, desenvolvimento de algoritmos probabilísticos, jogos de computador, criptografia, máquinas de jogo, análise numérica, etc.

estado inicial,  $s_o$ , também designado por *semente*, a que se segue a primeira geração de um número pseudo-aleatório  $u_o$  (notando que  $u_o \in \mathcal{U}$  é o primeiro elemento da sequência de números) utilizando a função  $\mathbf{G}$ , ou seja,  $u_o := \mathbf{G}(s_o)$ . Em seguida, os sucessivos números da sequência de saída (sendo o índice de contagem representado por  $i := 1, 2, \dots$ ) são obtidos, pela aplicação de duas funções introduzidas na definição do gerador, a primeira das quais traduz a recorrência da série,  $s_i := \mathbf{T}(s_{i-1})$  e a segunda, determina o número de saída da sequência,  $u_i := \mathbf{G}(s_i)$ . É assumido que se encontram disponíveis procedimentos eficientes para a computação das funções  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{G}$ .

A aplicação iterativa das funções apresentadas, conduz à constituição de uma sequência de números de saída  $\{u_i\}$  que representam “observações”, sendo expectável que estas se comportem como variáveis aleatórias i.i.d. (*independentes e identicamente – uniformemente – distribuídas*) e que os valores respectivos possam ser organizados de acordo com uma distribuição de probabilidade uniforme no domínio de  $\mathcal{U}$ . Nesse sentido, entende-se que este espaço,  $\mathcal{U}$ , tem uma correspondência para um conjunto de números inteiros  $\{0, \dots, m-1\}$  ou para um conjunto de valores distribuídos entre 0 e 1, com uma F<sub>d</sub>P que se aproxima da distribuição uniforme  $\mathcal{U}(0, m-1)$  ou  $\mathcal{U}(0, 1)$ , respectivamente.

Este tipo de sequências de números geradas por estruturas como a que foi apresentada, possui um conjunto de propriedades específicas, as quais, se relacionam com a sua utilização subsequente, pelo que se revela importante fazer a sua identificação seguida de uma descrição breve do que representam:

- i) período (também designado por *dimensão do ciclo* de repetição) e transiente;
- ii) propriedades estatísticas de interesse;
- iii) velocidade;
- iv) memória;
- v) portabilidade;
- vi) repetibilidade e reprodutibilidade;
- vii) facilidade de implementação e de partição.

A primeira destas propriedades, o “período”, resulta das sequências em causa serem obtidas com a intervenção de computadores digitais, os quais possuem estados finitos e memória limitada, determinando a inevitabilidade teórica<sup>7</sup> de, numa sequência de números, existir um retorno a um estado anterior / inicial.

---

<sup>7</sup> Na prática, o número poderá ser de tal maneira elevado que o intervalo de tempo necessário para observar a sua repetição não seja razoável considerando, por exemplo, a escala de tempo da vida humana.

O conceito de período decorre, portanto, dessa limitação que constitui o facto do seu espaço  $\mathcal{S}$  ser finito, o que se traduz na manifestação de uma periodicidade dos estados (depreende-se deste argumento que essa periodicidade pode ocorrer em diversas posições de uma sequência e, no limite, repete-se quando todos os elementos do espaço forem obtidos). Deste modo, havendo  $m$  possíveis estados, a máxima sequência que pode ser obtida – sem repetição – possui necessariamente uma dimensão  $m-1$ ).

Entende-se por *período*  $\tau$  de uma sequência o menor número inteiro positivo  $\tau$  tal que, para algum número inteiro  $\rho \geq 0$  e para todos os valores  $n \geq \rho$ , se verifica que  $s_{\tau+n} = s_n$ .

O menor valor de  $\rho$  que verifica a propriedade apontada é designado por “transiente”. A tradução dos conceitos de *transiente* e de *período* para uma qualquer sequência de números pseudo-aleatórios, auxiliada pela Figura seguinte, reflecte a existência de uma sub-sequência inicial de números não repetidos com a mesma ordem na parte restante da sequência principal, seguindo-se repetições sucessivas de sub-sequências de igual dimensão  $\tau$ , equivalente ao período da sequência.

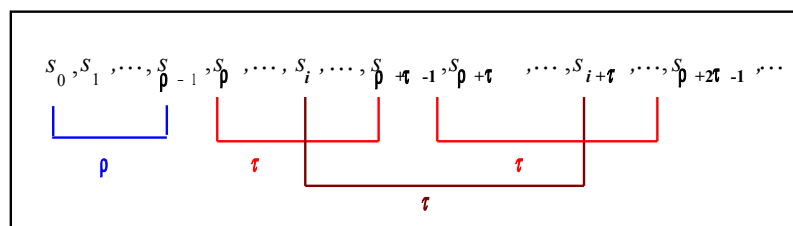


Figura 6.4: Representação esquemática de uma sequência e do seu transiente e período

Esta repetição das sub-sequências com o período referido significa que  $s_{i+\tau} = s_i$ ,  $s_{i+\tau+1} = s_{i+1}$ ,  $s_{i+\tau+2} = s_{i+2}$ , .... No caso do transiente ser nulo,  $\rho = 0$ , designa-se a sequência por “puramente periódica”.

O período  $\tau$  de uma sequência é uma das propriedades mais importantes por condicionar a adequação desta para representar valores de uma variável aleatória (ponderados factores como a exactidão requerida ou exigências relativamente à dimensão da amostragem no âmbito de uma aplicação relativa a um processo estocástico). Na prática, a exactidão com que se pretende obter os resultados da simulação determina a dimensão mínima das sequências que é necessário utilizar; sendo esta dimensão, obrigatoriamente, um minorante do período  $\tau$  da sequência gerada. Tal característica constitui um dos critérios habituais de selecção ou de



rejeição de determinado tipo de gerador (se o período  $\tau$  de uma sequência for menor que a dimensão mínima necessária, a rejeição do gerador, por inadequação, é óbvia e inevitável).

Uma das razões principais da importância atribuída ao período das sequências está relacionada com a recomendação de utilização de sub-sequências correspondendo a uma fracção reduzida do período completo. Esta recomendação deve-se a que “*para grande parte dos geradores do tipo linear a discrepância<sup>8</sup> dos vectores constituídos por valores sucessivos ao longo do período completo ser muito inferior àquela que se observa no de sequências verdadeiramente aleatórias*” [L’Ecuyer (1994a)].

A afirmação de L’Ecuyer, é suportada nos artigos de Niederreiter (1978), (1985), cujos resultados indicam as expressões gerais da “discrepância” quando se utilizam sequências “genuinamente” aleatórias. A aplicação da mesma métrica (discrepância) a sequências criadas por geradores de números pseudo-aleatórios (GNPA) mostra que a utilização do período completo nestas conduz a valores da métrica de discrepância que são menores e mais próximos de zero do que aqueles observados nas sequências “genuinamente aleatórias” (recomenda-se a consulta do anexo 2 onde se encontra informação complementar). Este resultado poderá ser uma consequência do facto dos valores obtidos numa sequência “genuinamente” aleatória corresponderem, eles próprios, a uma parcela muito reduzida do universo de possibilidades que a contém. Assim, a tentativa de simulação de sequências de valores associados a variáveis aleatórias procura reproduzir, tanto quanto possível, essa mesma limitação.

Esta argumentação criou a necessidade de estudar este problema e determinar a dimensão  $D$  máxima das sub-sequências a utilizar em simulação numérica conhecida a dimensão  $\tau$  do período da sequência. Um desses estudos [Ripley (1987)] aponta para uma solução aplicável aos geradores congruenciais lineares, indicando que o período  $\tau$  deve ser, pelo menos, uma ordem de magnitude superior ao quadrado da dimensão  $D$  da sequência pretendida, i.e.,  $\tau \geq 10.D^2$  (por exemplo, a utilização de uma sequência de 100 000 números,  $D = 10^5$ , pressupõe um gerador com período mínimo de  $10^{11}$ ). A adesão a esta recomendação impõe, naturalmente, uma forte restrição aplicável à selecção de muitos dos geradores mais comuns.

No que se refere às *propriedades estatísticas de interesse*, são consideradas três, relacionadas com a caracterização da aleatoriedade em amostragens de sequências de números: a “independência”, a “uniformidade” e a “imprevisibilidade” das observações.

---

<sup>8</sup> Entende-se por *discrepância* a diferença ou divergência da sequência relativamente ao valor expectável constituindo, no contexto da análise de sequências de números produzidos por GNPA, uma métrica teórica, descrita em diversas referências [Niederreiter (1978), (1985)]. Este conceito é desenvolvido no anexo 2.

A importância relativa de cada uma destas, é determinada pelo tipo de aplicação pretendida e, conseqüentemente, estas propriedades podem ser sujeitas a testes específicos. Atendendo à diversidade de testes e à sua importância no contexto da aceitação dos processos de geração, o tratamento deste assunto é feito numa secção autónoma, traçando-se aqui apenas alguns comentários de índole genérica.

Alguns autores questionam a validade da introdução de definições de aleatoriedade aplicáveis a sequências finitas e não-periódicas [Knuth (1998)] devendo estas ser consideradas de natureza determinística e não aleatória – de acordo com o verdadeiro sentido da palavra.

L'Ecuyer (1994a) refere que, em teoria, é sempre possível conceber um teste cujos critérios sejam tão restritivos que, admitindo a inexistência de constrangimentos temporais relativamente à sua implementação<sup>9</sup>, a sua aplicação a sequências produzidas por GNPA conduza, inevitavelmente, ao incumprimento desses critérios. Esta perspectiva, contudo, deve ser considerada com precaução, uma vez que, nalguns casos, os requisitos de tempo para se concretizar o resultado rejeição são de tal maneira elevados que se traduzem num interesse reduzido para constituir motivo de análise e, noutros casos, essa perspectiva não impede a possibilidade de se obterem resultados apropriados em aplicações cuja exigência pode conviver com esse eventual risco.

Uma forma de ultrapassar esta “inevitabilidade” (teórica) consiste em estabelecer um equilíbrio entre o tempo de duração que seja considerado “razoável” para a execução de um teste (tomando como base o tempo de processamento, por exemplo), durante o qual, a sujeição de um gerador ao teste não produz como resultado a sua rejeição. L'Ecuyer (1994a), (1994b) apresenta um procedimento que permite determinar, para diferentes famílias de geradores, um critério apropriado de validação de testes (conduzindo a uma classe de geradores ditos *PT-perfect* ou *Polynomial-Time perfect*).

Verifica-se que uma parte significativa dos geradores (*congruenciais lineares*, *multirecursivos* e do tipo FSRG – “Feedback Shift Registers Generators”) não se considera *PT-perfect* o que, no entanto, não impede que quando se utiliza uma fracção das suas sequências, as propriedades estatísticas relevantes sejam consideradas adequadas para

---

<sup>9</sup> Na prática, este constrangimento é uma das razões que determina a aceitação de geradores de números pseudo-aleatórios, uma vez que se verifica que, em muitos casos, associado à selecção dos testes a efectuar seja ponderada a sua duração. Este facto, leva a que, nalgumas circunstâncias, o resultado do teste seja a aceitação por o comportamento observado e avaliado durante um determinado intervalo de tempo ter sido concordante com os requisitos do teste, o que não impede que a sua execução em períodos de tempo mais longos pudesse eventualmente conduzir à sua rejeição.

numerosas aplicações. Em contrapartida, geradores cuja caracterização os classifica como *PT-perfect* têm exibido um desempenho demasiado lento para aplicações reais de simulação.

A “velocidade de processamento”, fortemente associada à ocupação de memória, constitui, também, um elemento a ponderar na selecção e avaliação dos GNPA. Esta propriedade tem vindo a perder protagonismo devido à diminuição da sua influência nos processos de simulação provocada pela melhoria contínua da tecnologia em sucessivas gerações de computadores. Contudo, existem aplicações que, por razões específicas (como as exigências de processamento em paralelo ou por requisitos associados à dimensão da informação), necessitam de continuar a considerar o seu efeito.

A análise desta propriedade valoriza aspectos como o tipo de operações, a simplicidade e dimensão das linhas de comando e a ocupação de memória. Estes critérios, em geral, não constituem as principais preocupações associadas às aplicações, mas são por vezes utilizadas na argumentação que efectua uma diferenciação suplementar, distinguindo algoritmos cujo desempenho aparenta ser equivalente. A conjugação destes elementos (velocidade e memória) substancia o conceito vulgarmente referido como “eficiência” de um GNPA.

O conceito de “portabilidade” representa, frequentemente, uma propriedade importante, designadamente, quando se exige determinado tipo de reprodutibilidade de resultados (por exemplo, recorrendo a computadores e a compiladores de linguagem distintos). Neste contexto, pretende-se que um algoritmo seja capaz de reproduzir as mesmas sequências em situações de operação consideradas equivalentes, embora, desenvolvidas em suportes distintos. Este requisito, traduz-se em considerar desvantajosa a utilização de geradores dependentes do tipo de linguagem adoptada como, por exemplo, da linguagem *assembly*.

Os conceitos de “repetibilidade” e de “reprodutibilidade” que caracterizam a “portabilidade”, embora envolvam uma contraposição face à componente de imprevisibilidade (é importante notar que se podem manter as características de “uniformidade” e de “independência”, essenciais para muitos processos de simulação) que caracteriza a “verdadeira” aleatoriedade produzem importantes benefícios práticos pois: garantem a capacidade de reprodução das sequências no mesmo ou em meios (computadores) distintos; permitem efectuar a revisão ou a verificação de sequências de números geradas por determinados algoritmos; e facilitam a utilização de técnicas aritméticas de redução de variância, com aplicação, por exemplo, em MCS.

Estes benefícios têm sustentado a preferência dada à utilização de computadores para produzir estas sequências *versus* alternativas baseadas nouro tipo de equipamentos especiais de geração. Em L’Ecuyer (1994a) aponta-se, por exemplo, a utilidade resultante da gravação de longas sequências aleatórias geradas por este tipo de equipamentos especiais e efectuar a sua reutilização. É evidente, contudo, que este método não dispõe da versatilidade associada à criação de sequências geradas por algoritmos suportados em reduzidas linhas de programação.

As “facilidades de implementação e de partição”, determinam a possibilidade de gerar sequências minimizando a ocupação de código e, no segundo caso, a facilidade de quebrar uma longa sequência em partições disjuntas, permitindo aceder ao valor de uma determinada posição da sequência  $s_{i+k}$ , a partir de uma posição inicial  $s_i$ , independentemente da dimensão de  $k$ . A utilidade desse mecanismo encontra-se associada a situações em que se pretende obter valores específicos sem recorrer à determinação dos valores intermédios. Por exemplo, nos geradores congruenciais lineares, a relação para este efeito é:

$$s_{i+k} = \left( a^k s_i + (a^k - 1) \cdot \frac{c}{b} \right) \bmod m$$

com  $k \geq 0$ ,  $i \geq 0$  e  $b = a-1$ .

No que se refere ao segundo caso, a “facilidade de partição”, a sua aplicação deve ter em consideração a recomendação de não utilizar as sequências com a dimensão igual ao período. Por isso, revela-se importante a capacidade de efectuar as referidas partições das sequências, sendo fundamental que essas mantenham as propriedade de “aleatoriedade” que caracterizem a sequência completa. Assim, é expectável que cada uma destas se comporte como sendo proveniente de um “gerador virtual”.

Neste conjunto de propriedades, é necessário separar as propriedades que constituem constrangimentos de utilização, das outras de mera diferenciação entre geradores equivalentes. No primeiro caso, encontram-se o período ou ciclo de repetição e as propriedades estatísticas (uniformidade e independência), no segundo estão a eficiência, a repetibilidade, a reprodutibilidade e as facilidades de implementação e de partição. Esta valoração é genérica, nada impedindo que qualquer uma das que integra o segundo tipo de propriedades, por razões que se prendam com a natureza de uma aplicação particular, sejam consideradas – nesse caso – como integrantes do primeiro tipo.

#### 6.3.1.4 Origem dos processos de geração de números “aleatórios”

A utilização de métodos aritméticos (característicos do funcionamento dos computadores) para gerar sequências de números com natureza aleatória é geralmente atribuída a John von Neumann que, em 1946, propôs um mecanismo simples de obtenção de números com essa natureza.

Tendo sido vislumbrado o potencial da via associada à utilização de métodos computacionais, assistiu-se, nas décadas seguintes, a uma proliferação de modelos de geradores baseados em métodos aritméticos apesar de von Neumann ter declarado, em 1951: “*Any one who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin*”<sup>10</sup>.

Dos geradores desenvolvidos, alguns adquiriram maior notoriedade que outros na geração de sequências numéricas “aleatórias”, posteriormente designadas por sequências “pseudo-aleatórias” ou “quasi-aleatórias”. Daí que o conhecimento das suas características principais se torna relevante sobretudo quando é necessário seleccionar um deles para aplicações concretas. Por este motivo, nas secções seguintes, são explorados os aspectos conceptuais, a evolução e a capacidade subjacente a GNPA mais comuns, mas, porque tal é necessário para a compreensão do que se irá expôr em seguida, começaremos por abordar alguns aspectos relacionados com a aritmética computacional [Alagar 1986)].

#### 6.3.1.5 Sobre a aritmética computacional

A utilização dos computadores digitais como ferramenta de desenvolvimento de sequências de números recorre a uma estrutura aritmética, que determina as aproximações a quaisquer números reais a partir de uma representação de números inteiros disponíveis. Este mecanismo origina as limitações do processo de geração.

A forma de representação dos números, considerando o modelo de referência em que se incorpora a virgula flutuante, se possui uma *base* ou *radix*  $b$  e  $p$  posições em cada “palavra” numérica, tem a forma seguinte [Gentle (2003)]:

$$\pm \left( d_1 b^{e-1} + d_2 b^{e-2} + \dots + d_p b^{e-p} \right) \quad (6.1)$$

---

<sup>10</sup> É possível que esta afirmação tenha resultado da avaliação relativa ao gerador de números pseudo-aleatórios em causa, cujo desempenho se demonstrou, *a posteriori*, não ser dos que melhor conduzem às características de aleatoriedade pretendidas. No entanto, apesar das limitações que, em geral, são apontadas a este mecanismo de geração de sequências, os resultados têm mostrado a sua aplicabilidade no estudo de inúmeros problemas contemporâneos.

nesta representação, os  $d_i$  são números inteiros não negativos inferiores a  $b$  e  $e$  representa um inteiro compreendido (inclusive) entre dois valores fixos  $e_{\min}$  e  $e_{\max}$ . Um número real (não nulo),  $x$ , pode ser representado, então, num formato de virgula flutuante normalizado:

$$x = \pm 0, d_1 d_2 \dots d_p \times b^e = \pm r \times b^e \quad (6.2)$$

No segundo termo distinguem-se três elementos que determinam o número real: o sinal positivo ou negativo; um número  $r$  designado por *mantissa normalizada* – pertencente ao intervalo  $[1/b, 1[$ ; e uma *potência* de base  $b$  e expoente  $e$ . Considerando a base 2, com interesse particular em sistemas computacionais, a *mantissa*, designada por  $q$ , corresponde a  $(0, d_1 d_2 \dots)_2$ , com  $d_i \in \{0, 1\}$ . Desta descrição resulta a criação de um sub-espço finito de valores reais,  $\mathbb{R}$ , designado por  $\mathbb{F}$ .

Nesta representação, os elementos do subconjunto de  $\mathbb{R}$  na configuração apresentada, considerando que estes são mapeados no intervalo  $]0, 1[$ , conduz a que os valores mínimo e máximo possíveis nesse intervalo sejam, respectivamente,  $b^{e_{\min} - p}$  e  $(1 - b^{-p})$ . Consequentemente, os números que são obtidos num processo computacional correspondem a uma aproximação dos números reais no intervalo considerado  $]0, 1[$ , constituindo um subconjunto finito  $\mathcal{S}$ , do sub-espço  $\mathbb{F}$ , limitado no intervalo  $[b^{e_{\min} - p}, 1 - b^{-p}]$  e, cujos elementos são representáveis por:

$$\mathcal{S} = \cup_{i=e_{\min}}^{p-1} [b^{i-p}, b^{i+1-p}] \setminus \{1\} \quad (6.3)$$

A importância particular deste resultado resulta de introduzir uma contradição entre o que é desejável – ideal – e a realidade da geração de números num computador digital. Com efeito, o que se espera de um gerador ideal de números com uma distribuição uniforme é que se verifique, que a distribuição de valores respeite os critérios de independência e de uniformidade. Em particular, possuindo um valor médio igual a  $1/2$  e uma variância igual a  $1/12$ , obtidos por se reportarem a distribuições de probabilidade uniforme.

Os elementos determinados pela expressão (6.3), produzem resultados que constituem um subconjunto de pontos não uniformemente distribuídos no intervalo considerado, o que implica, desde logo, um afastamento dos parâmetros estatísticos expectáveis: valor médio e variância dos valores teóricos da distribuição de probabilidade uniforme no intervalo  $[0, 1]$  <sup>11</sup>.

---

<sup>11</sup> Utilizando um exemplo de [Gentle, 2003], para  $e_{\min} \leq j \leq e_{\max} - 1$ , os números construídos usando a expressão (3) no intervalo  $[b^j, b^{j+1}]$  representando a aproximação computacional constituem o seguinte subconjunto discreto de elementos:  $\{ b^j, b^j + b^{j+1-p}, \dots, (b-1)b^j + (b-1)b^{j+1-p}, \dots, (b-1)b^{j+1-p}, b^{j+1} \}$ .

Nesta fase, torna-se importante relembrar o conceito de número primo, de factorização e de números primos entre si. A definição de número primo refere que este atributo se aplica a números naturais positivos cujos divisores positivos são, apenas, o próprio número e o número 1.

O divisor de um número inteiro  $n$  designa-se por factor de  $n$ , conduzindo a um conceito associado: a factorização em números primos (ou decomposição em números primos). Esta, consiste na determinação de números primos cujo produto equivale a um dado número inteiro positivo. O conceito de números primos entre si, designa números que, simultaneamente, são divisíveis apenas pela unidade, ou seja, o único factor/divisor comum é o número 1.

O desenvolvimento de técnicas computacionais para a geração de números “pseudo-aleatórios”, tem seguido duas técnicas distintas: uma, com recurso directo à utilização de métodos congruenciais; a outra, com recurso à utilização de métodos de deslocamento com “realimentação” de registos. O recurso que ambos os métodos fazem da aritmética modular, impõe a descrição de algumas das suas propriedades.

No contexto deste ramo da aritmética, procura-se determinar os pares de números equivalentes ou congruentes<sup>12</sup> modulo  $m$ , i. e., aqueles cuja diferença origina um número integralmente divisível<sup>13</sup> por  $m$ . A notação utilizada nesta operação é:

$$a \equiv b \bmod m \quad (6.4)$$

As principais propriedades desta operação são [Gentle (2003)]:

- i) simetria:  $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$ ;
- ii) reflexividade:  $a \equiv a \bmod m$  para qualquer  $a$ ;
- iii) transitividade:  $a \equiv b \bmod m$  e  $b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m$ .

Com base nesta relação, define-se uma outra operação de base, designada por *redução módulo  $m$* , cuja descrição consiste em, dado um número  $b$ , determinar um número  $a$  que verifique  $a \equiv b \bmod m$  e  $0 \leq a < m$ , sendo  $a$  designado por *resíduo de  $b$  módulo  $m$*  constituindo um elemento de uma *classe de equivalência* (ou *classe de congruência*). A notação adoptada para a *redução de  $b$  módulo  $m$* , é a seguinte:

<sup>12</sup> Por exemplo,  $a=25$  e  $b=10$ , são *congruentes modulo 5*, uma vez que a sua diferença ( $a-b$ ) corresponde a 15, sendo este valor integralmente divisível por 5 – o resultado da divisão é 3 com resto 0.

<sup>13</sup> É equivalente dizer que  $(a-b)/m$  é um número inteiro.

$$a = b - \lfloor b/m \rfloor m \quad (6.5)$$

onde a função  $\lfloor \cdot \rfloor$  determina o maior número inteiro menor ou igual ao argumento<sup>14</sup>.

Da definição da operação aritmética apresentada, pode-se concluir que os números  $a$  e  $b$  são *congruentes modulo  $m$*  sse existe um número inteiro  $k$  tal que:

$$km = b - a \quad (6.6)$$

Desta relação, podem-se demonstrar outras relações de equivalência importantes,

- i) distributividade:  $(a + b) \bmod m = a \bmod m + b \bmod m$ ;
- ii) associatividade:  $ab \bmod m = (a \bmod m)(b \bmod m)$ .

Ainda com base na operação de *redução modular*, refira-se que a selecção de um valor de  $m$  (inteiro  $\neq 0$ ) tem como consequência que os resultados de  $a$  que se podem obter usando a expressão (6.12) são compreendidos entre 0 e  $(m - 1)$ , ou seja, possuem  $|m|$  resultados distintos.

Por exemplo, a operação  $a = b \bmod 3$ , considerando as diferentes possibilidades de  $b$  conduzem, invariavelmente, a um resultado  $a \in \{0,1,2\}$ , uma vez que, tomando  $m=3$ , existem 3 subconjuntos de valores de  $b$  que originam cada um dos resultados possíveis.

$$\begin{aligned} \dots, -3 \bmod 3 = 0; 0 \bmod 3 = 0; 3 \bmod 3 = 0; 6 \bmod 3 = 0; \dots \\ \dots, -2 \bmod 3 = 1; 1 \bmod 3 = 1; 4 \bmod 3 = 1; 7 \bmod 3 = 1; \dots \\ \dots, -1 \bmod 3 = 2; 2 \bmod 3 = 2; 5 \bmod 3 = 2; 8 \bmod 3 = 2; \dots \end{aligned}$$

Neste exemplo, os subconjuntos de valores de  $b$  cujo resultado da redução modular é comum, designam-se por *classes de resíduos*, sendo as seguintes considerando o exemplo dado:  $\{\dots, -6, -3, 0, +3, +6, \dots\}$ ;  $\{\dots, -5, -2, +1, +4, +7, \dots\}$ ;  $\{\dots, -4, -1, +2, +5, +8, \dots\}$

Do agrupamento de números nestas classes, pode-se dizer que o segundo e o terceiro subconjuntos representam números que são primos relativamente ao valor 3. O facto dos números  $b$  serem primos relativamente ao valor do módulo  $m$  é utilizado na concepção de GNPA de forma a maximizar o período da sequência gerada.

Verifica-se que o número de classes de resíduos constituídas por números primos relativamente a  $m$  corresponde ao número de inteiros positivos menores que  $m$  e primos relativamente a  $m$  (por exemplo,  $m=4$  produz 4 classes de resíduos, associados aos resultados

<sup>14</sup> Alguns exemplos,  $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor 5/2 \rfloor = \lfloor 2,5 \rfloor = 2$  e  $\lfloor -5/2 \rfloor = \lfloor -2,5 \rfloor = -3$ .



0, 1, 2, 3, dos quais, apenas as que conduzem aos resíduos 1 e 3 são constituídas por números primos relativamente a 4 – uma vez que 2 é um factor/divisor de  $m=4$ ).

A função que para um certo valor de módulo de congruência  $m$  lhe atribui um número de classes de resíduos (**mod**  $m$ ) que são primos relativamente a  $m$ , designa-se por *função totiente de Euler*,  $\phi(m)$ . Nos exemplos apresentados, verifica-se que das [classes de resíduos (**mod** 3)] duas delas são constituídas por números primos relativamente a 3, i.e.,  $\phi(3)=2$  mas no caso  $m=4$ ,  $\phi(4)=2$ .

De facto, é possível estabelecer uma regra geral, que indica que a escolha para módulo de congruência de um número primo  $m$ , permite verificar que  $\phi(m)=m-1$  (ou seja, da selecção de um número primo  $m$  resulta uma maximização relativa do número de *classes de resíduos* associados, o que permite igualmente maximizar a diversidade de possibilidades para a selecção de valores de  $a$  que são primos relativos de  $m$ ). Desta importante regra resulta que, fazendo  $m = p^e$ , sendo  $p$  um número primo e  $e$  um número inteiro positivo e recorrendo à expressão  $\phi(p)=p-1$ , pode-se determinar o valor da *função totiente de Euler*, i.e., o número de classes de resíduos<sup>15</sup> (em Knuth (1998) encontra-se o detalhe da demonstração):

$$\phi(p^e) = p^{e-1}(p-1) \quad (6.7)$$

Uma outra expressão, demonstrada por Ireland *et al* (1991) mostra que, para dois números primos entre si,  $p_1$  e  $p_2$ , se obtém:

$$\phi(p_1 p_2) = \phi(p_1) \phi(p_2) \quad (6.8)$$

Estas duas expressões são determinantes quer na avaliação do período (ciclo de repetição) dos GNPA quer no processo de desenvolvimento dos algoritmos de geração estando, por isso, na origem da criação de metodologias de combinação de geradores.

Uma nota final para o campo algébrico de ordem finita onde se integra a operação de *redução modular* (*Campo de Galois*), nele se definindo a aritmética associada a este tipo de operações. Como característica refira-se o facto de possuir uma cardinalidade finita, inferior ou igual a  $m$  (sendo igual a  $m$  quando o seu valor corresponde ao de um número primo). Tal facto é, igualmente, determinante na selecção de parâmetros para os algoritmos dos geradores que serão apresentados.

---

<sup>15</sup> No caso de se aplicar esta expressão, por exemplo, a  $m = 2^3$ , existem  $\phi(2^3) = 2^2(1) = 4$  classes de resíduos de números primos relativamente a 8 ( $2^3$ ). Com efeito, os resultados de resíduos são  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , dos quais, apenas  $\{1, 3, 5, 7\}$  são primos relativamente ao valor referido.

### 6.3.1.6 Gerador de von Neumann

O mecanismo de geração de números proposto por John von Neumann é suportado num algoritmo que toma como estado de partida (*semente*) um qualquer número constituído por  $n$  dígitos, o eleva ao quadrado e extrai, do resultado obtido, o número seguinte da sequência formado pelos  $n$  dígitos centrais desse quadrado e assim sucessivamente  $s_i =$ : [4 dígitos da parte central de  $(s_{i-1})^2$ ]. A título de exemplo, considere-se o valor inicial  $s_0=5893$  (constituído por 4 dígitos),  $(s_0)^2 = 34\ 7274\ 49$  donde  $s_1 =$ : 7274,  $(s_1)^2 = 52\ 9110\ 76$ ,  $s_2 = 9110$ , etc.

Actualmente, este mecanismo de geração não tem grande aplicação, uma vez que se lhe apontam diversas deficiências, sendo a mais crítica relacionada com a dimensão do respectivo período que, frequentemente, corresponde a um número relativamente pequeno de iterações. Outra razão é a sua elevada tendência para a degenerescência, provocada pelo enviesamento da função distribuição de probabilidade dos valores da sequência de saída.

Foram propostas algumas modificações ao algoritmo, nomeadamente, por [Paul e Balmer, 1993], substituindo a operação de elevação ao quadrado pelo produto de dois números predecessores, obtendo o número seguinte da sequência através da extracção da parte central do resultado obtido. Esta modificação conduz a uma melhoria de desempenho traduzida num acréscimo do período da sequência e na redução da tendência degenerativa, contudo, persistem outras deficiências, como o enviesamento da distribuição de probabilidade e a relativamente “baixa” rapidez de execução computacional.

### 6.3.1.7 Gerador congruencial linear

A introdução deste modelo de gerador deve-se a D. H. Lehmer (publicado em 1951) que propôs um processo para criação de números aleatórios. Esse processo de geração tem como mecanismo a obtenção de cada valor de uma sequência a partir de um número predecessor, utilizando uma função linear simples seguida de uma redução modular.

Na sua forma directa, atribuem-se muitas limitações a este tipo de gerador, no entanto, tem-se revelado útil no desenvolvimento de outros geradores combinados [L’Ecuyer (1996a)] que demonstram boas capacidades e desempenho. O esquema de suporte deste tipo de geradores (função de recorrência  $T$ ), tem a seguinte forma (por vezes designada por *sequência de Lehmer*):

$$s_{i+1} = (as_i + c) \bmod m, \quad \text{com } 0 \leq s_i < m. \quad (6.9)$$

Os quatro números inteiros da relação representam,  $m$ , o *módulo* ( $m > 0$ );  $a$ , o *multiplicador* ( $0 \leq a < m$ );  $c$ , o *incremento* ( $0 \leq c < m$ ) e  $s_0$ , o valor inicial ou *semente* ( $0 \leq s_0 < m$ ). Da definição do operador “mod” decorre, evidentemente, que o resultado obtido corresponde a uma sequência de números inteiros. O caso geral encontra-se, com relativa frequência, designado por “gerador congruencial misto”, para o distinguir do caso particular em que  $c=0$ . Neste caso, a expressão de recorrência tem a forma (6.10) e a sua designação como “gerador congruencial multiplicativo”<sup>16</sup>.

$$s_{i+1} = a s_i \mathbf{mod} m, \quad \text{com } 0 < s_i < m. \quad (6.10)$$

A transposição para o intervalo  $[0,1]$ , resulta da transformação com mudança de escala (6.11) e da constituição da expressão de recorrência<sup>17</sup> (6.12).

$$u_i = \frac{s_i}{m} \quad (6.11)$$

$$u_{i+1} = a u_i \mathbf{mod} 1, \quad \text{com } 0 < u_i < 1 \quad (6.12)$$

Esta sequência permite, em particular, a possibilidade de se poder prever qualquer elemento da sequência,  $(n+k)$ , partindo de um elemento,  $n$ , usando a expressão  $s_{i+k} = (a s_i + c) \mathbf{mod} m$  com a condição<sup>18</sup>  $a \geq 2$  [Knuth (1998)], fazendo-se notar a presença de um multiplicador,  $a^k \mathbf{mod} m$  e de um incremento  $\left( (a^k - 1) \cdot \frac{c}{b} \right) \mathbf{mod} m$ .

$$s_{i+k} = \left( a^k s_i + (a^k - 1) \cdot \frac{c}{b} \right) \mathbf{mod} m, \quad \text{com } k \geq 0, i \geq 0 \text{ e } b = a-1 \quad (6.13)$$

A dimensão do majorante do período de geradores congruenciais resulta de condições específicas: no caso do *gerador congruencial misto*, apenas podem existir  $m$  valores gerados e, conseqüentemente, o comprimento do ciclo máximo deste gerador<sup>19</sup> é igual a  $m$ ; no caso do

<sup>16</sup> Uma das razões que motivou a sua introdução foi, certamente, o facto de essa alteração produzir uma redução significativa do tempo de computação (embora, na actualidade, este argumento não tenha a importância de outrora). Contudo, este benefício tem, em contrapartida, um efeito indesejável de diminuição do período máximo de repetição.

<sup>17</sup> Dividindo a expressão  $(s_{i+1} = a s_i \mathbf{mod} m)$  por  $m$  e usando a definição apresentada em (4)  $(b \mathbf{mod} m = b - \lfloor b/m \rfloor m)$  vem que  $s_{i+1}/m = \lfloor a s_i \mathbf{mod} m \rfloor / m$  ou  $u_{i+1} = \lfloor a s_i - \lfloor a s_i / m \rfloor \cdot m \rfloor / m$  equivalente a  $u_{i+1} = \lfloor (a s_i / m) - \lfloor a s_i / m \rfloor \cdot 1 \rfloor$  resultando a expressão:  $u_{i+1} = \lfloor (a u_i) - \lfloor a u_i \rfloor \cdot 1 \rfloor = a u_i \mathbf{mod} 1$ .

<sup>18</sup>  $a = 0$  conduz a um valor constante  $s_{i+1} = c \mathbf{mod} m$ , tal como  $a = 1$ , que conduz a  $s_{i+1} = s_0 \mathbf{mod} m$

<sup>19</sup> Enquanto nos mantemos no conjunto dos números inteiros esta condição é óbvia; no entanto, ao procedermos à transformação (6.17) e (6.18), para o intervalo  $[0,1]$ , já não é tão óbvia; basta no entanto pensar que a cada inteiro corresponde um e um só racional determinado pelas referidas expressões.

*gerador congruencial multiplicativo*, para além da condição anterior, existe o constrangimento adicional que impede que  $s_i = 0$  (elemento absorvente na multiplicação), pelo que apenas podem existir  $(m-1)$  valores gerados e, conseqüentemente, o comprimento do ciclo máximo deste gerador é igual a  $(m-1)$ .

O facto do valor acabado de indicar ser apenas um majorante para o período da sequência e de, na prática, se verificar uma dependência significativa do período da sequência gerada face aos parâmetros seleccionados para o gerador, obriga a uma análise mais detalhada sobre a forma como essa dependência se estabelece.

Esse detalhe envolve o conhecimento de um conjunto de Teoremas descritos em Knuth (1998) que se encontram expostos no anexo 3, mediante os quais se estabelecem as condições de maximização desses períodos envolvendo os parâmetros que suportam o algoritmo de geração (nomeadamente, o módulo e o incremento).

Da aplicação destes Teoremas (anexo 3) concluí-se que é efectivamente possível obter um período  $(m-1)$  tão grande quanto desejável (dependendo, obviamente, das limitações de natureza computacional que poderá restringir o valor de  $m$ ).

Os geradores congruenciais lineares têm servido de base a variantes, onde se efectua uma combinação da função linear com a operação de redução modular, das quais, se pode destacar desde logo uma, cuja estrutura de base tem a modificação do *multiplicador* e do termo que determina o valor da sequência em cada posição, de elementos individuais para vectores, adoptando a seguinte descrição (com  $0 \leq s_i < m$ ):

$$\begin{aligned}
 s_i &= f(s_{i-1}, \dots, s_{i-n}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{c}) \bmod m = \\
 &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{i-1} \\ \dots \\ s_{i-n} \end{bmatrix} + \mathbf{c} \right) \bmod m = \\
 &= \left[ (\mathbf{a}_1 s_{i-1} + \dots + \mathbf{a}_n s_{i-n}) + \mathbf{c} \right] \bmod m
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

onde  $\mathbf{a}$  representa um vector coluna de dimensão  $n$  constituído por  $n$  elementos constantes – o vector  $\mathbf{a}^T$  é um vector linha – e  $\mathbf{s}_{i-1}$  outro vector coluna com dimensão  $n$ , constituído pelos  $n$  valores da sequência obtidos anteriormente. Da observação da expressão, verifica-se que este tipo de geradores necessita de um vector de *semente* de dimensão  $n$ . Finalmente, constata-se que este, tal como o modelo congruencial linear simples, se pode subdividir em duas categorias consoante a existência ou não de um incremento.

Este modelo de gerador deu origem a três tipos de geradores (geradores recursivos múltiplos, geradores congruenciais matriciais e geradores AWC, MWC e SWB), cuja descrição se faz nas secções que se seguem.

### 6.3.1.8 Gerador recursivo múltiplo

Uma das categorias de geradores desenvolvidas a partir do gerador congruencial linear designa-se por *gerador recursivo múltiplo*, agrupando os casos em que os parâmetros  $n > 1$  e  $c=0$  ( $n=1$  corresponde ao *gerador congruencial linear multiplicativo*). Este tipo de geradores tem como princípio a utilização de múltiplos de  $n$  valores anteriores da sequência para gerar novos valores, sendo a sua expressão genérica, a seguinte:

$$s_i = \left( \mathbf{a}^T \mathbf{v}_{i-1} \right) \bmod m = \left( a_1 s_{i-1} + \dots + a_n s_{i-n} \right) \bmod m \quad (6.15)$$

sendo habitual, neste contexto, atribuir a designação de *ordem* do gerador ao parâmetro  $n$ .

Uma das suas vantagens decorre da sua capacidade de ampliação – comparativamente com os geradores congruenciais lineares simples - do valor do período máximo, que se pode estender para  $m^n - 1$  ( $m$  número primo). Este resultado e as condições que o permitem atingir são discutidos por Knuth (1998). Uma dessas condições refere que o objectivo é atingido *sse* forem seleccionados valores multiplicativos  $a_i$ , de forma que o polinómio,

$$f(s) = s^n - a_1 s^{n-1} - \dots - a_n \quad (6.16)$$

constitua um “*polinómio primitivo mod p*”, i.e., um polinómio cuja raiz seja um *elemento primitivo* com  $k$  elementos. Para a selecção dos parâmetros do polinómio existe um número considerável de hipóteses ( $p^n$ ), das quais, apenas  $\phi(p^n - 1) / n$  constituem soluções do vector  $\mathbf{a}$  que concretizam esse objectivo.

Uma outra nota relevante consiste em não se observar o mesmo tipo de deficiências (formação de padrões bidimensionais) observadas nos geradores congruenciais lineares simples quando o valor de  $m$  corresponde a  $2^e$ .

A estrutura apresentada apontava para um processo de recorrência onde se faz uso dos  $k$  elementos imediatamente anteriores ao elemento cujo valor se pretende gerar. Uma alternativa é a possibilidade de adoptar  $k$  elementos da sequência de entre  $n$  anteriores, originando uma estrutura modificada à qual se convencionou designar por *gerador congruencial aditivo* ou *gerador “Lagged Fibonacci”*<sup>20</sup>. Neste caso, a sua estrutura mais simples determina o valor de

<sup>20</sup> Leonardo Fibonacci (c.1175 - c.1240) - Matemático italiano (nascido em Pisa), escreveu, entre outras obras, o *Liber Abaci* (Livro de Cálculo), cuja versão original de 1202 não chegou aos nossos dias, sendo apenas conhecida a edição revista publicada em 1228. Neste livro, entre outras importantes contribuições para a teoria dos números, Fibonacci introduz a *sequência de Fibonacci* (baptizada com este

um número numa sequência a partir da adição dos seus predecessores imediatos:  $s_{i+2} = s_{i+1} + s_i$ . A aplicação do método de redução modular a este tipo de sequências evidenciou, contudo, que apesar da sua aparência aleatória, os resultados de testes exibem um comportamento considerado insatisfatório.

Essa análise determinou a evolução da estrutura do gerador para modelos onde se combinam termos não sucessivos mas afastados entre si (6.17). São os geradores que possuem este tipo de estrutura que se designam por *geradores congruenciais do tipo Fibonacci com atraso* (trad. livre de “*lagged Fibonacci*”).

$$s_i = (s_{i-j} + s_{i-k}) \bmod m \quad (6.17)$$

Esta expressão pode ser obtida a partir da expressão (6.21) considerando que o vector  $\mathbf{a}$  – de dimensão  $n$  – é constituído por elementos nulos exceptuando dois – nas posições  $j$  e  $k$  – ou seja,  $\mathbf{a} = (a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_{j-1} = 0, a_j = 1, a_{j+1} = 0, \dots, a_{k-1} = 0, a_k = 1, a_{k+1} = 0, \dots, a_{n-1} = 0, a_n = 0)$ .

Alguns autores têm sugerido variantes onde se recorre à utilização de outro tipo mais geral de operadores binários em substituição da “*soma modulo m*”:

$$s_i = (s_{i-j} \circ s_{i-k}) \quad (6.18)$$

com  $\circ$  representando uma operação binária,  $0 \leq s_i \leq m-1$ , e  $0 < j < k < i$ . De novo se realça a necessidade inerente a este tipo de algoritmos, que consiste em se fornecer *ab initio* os primeiros  $k$  elementos da sequência. Por outro lado, usando o operador “soma”, o período deste tipo de geradores (sendo  $m$  um número primo e  $k > j$ ) pode atingir valores da ordem de  $(m^k-1)$  [Gentle (2003)].

Estudos dedicados a este tipo de geradores [Green *et al* (1959)] demonstram que, para alguns dos valores de  $k$  ( $\leq 15$ ), as sequências obtidas falham quando sujeitas ao teste de avaliação de intervalos entre valores sucessivos (“*gap test*”).

Uma das primeiras variantes de geradores com este tipo de estrutura foi proposto por G. J. Mitchell e D. P. Moore em 1958, com a particularidade do algoritmo em causa conter valores precedentes com determinada distância entre posições relativas:

$$s_{i+1} = (s_{i-24} + s_{i-55}) \bmod m, \quad \text{com } s_0, \dots, s_{54} \text{ pré-definidos} \quad (6.19)$$

---

nome pelo matemático Francês Édouard Lucas em 1870). Este tipo de sequências numéricas tem como característica principal a dependência da obtenção de cada valor da sequência a partir de uma função de mais do que um dos valores que o precede.

Para além dos valores de  $j = 24$  e  $k = 55$ ,  $m$  é um número par,  $n \geq 55$  e o conjunto de valores  $s_0, \dots, s_{54}$ , são números inteiros (sendo obrigatório que nem todos sejam números par). A aplicação dos testes "DIEHARD" pelo seu autor, G. Marsaglia, permitiram concluir que apenas os geradores não-combinados que recorrem à operação multiplicativa possuem um desempenho satisfatório. Ele próprio, desenvolveu dois algoritmos populares ("COMBO" e "NCOMBO") que resultam da combinação de geradores, nos quais se efectua a combinação recorrendo à operação de subtracção. Estes geradores constituem a base do que se designa por *geradores congruenciais tipo "combined lagged Fibonacci"*.

### 6.3.1.9 Gerador congruencial matricial

Uma evolução natural da estrutura precedente resulta da generalização do contexto vectorial para o contexto matricial, onde os elementos  $\vec{s}_i$ ,  $\vec{s}_{i-1}$  e  $\vec{c}$  representam vectores de dimensão  $l$  e o elemento multiplicador  $\mathbf{A}$  uma matriz de dimensão  $l \times l$ .

$$\vec{s}_i = (\mathbf{A}\vec{s}_{i-1} + \vec{c}) \bmod m \quad (6.20)$$

Este tipo de gerador, cuja aplicação mais frequente resulta da necessidade de processar sequências de vectores de números pseudo-aleatórios em paralelo ou em situações em que é exigida a existência de estruturas correlacionadas, é constituído por vectores e matrizes com valores entre 0 e  $m-1$ , re-escalados para o intervalo  $[0,1]$  adequado à distribuição uniforme característica das principais aplicações computacionais. Tal como nos casos anteriores, é possível constituir um subgrupo, designado por *geradores matriciais múltiplos recursivos*, resultando da constituição do vector  $\vec{c}$  por elementos nulos.

No que se refere à matriz de multiplicação, existem algumas variantes, sendo uma das mais comuns a recomendada por Deng *et al* (2000), matriz da forma (6.21), concebida de forma a permitir obter uma computação de elevado desempenho, considerado equivalente à obtida com os mais rápidos geradores recursivos múltiplos [Gentle (2003)].

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & a_d \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Outras particularidades deste tipo de gerador são: a utilização de matrizes diagonais para gerar uma estrutura equivalente ao de um conjunto de geradores escalares com diferentes multiplicadores; o risco de introdução de um efeito de correlação associada à sua própria

estrutura; e como no caso dos geradores recursivos múltiplos, quando  $m$  representa um número primo e  $c$  é igual a 0, resultam períodos da ordem de  $m^l-1$ . Estudos aprofundados das suas propriedades encontram-se em Niederreiter (1995a), (1995b), (1995c).

### 6.3.1.10 Geradores AWC, MWC e SWB

Com origem em trabalhos percursos de Marsaglia *et al* (1991), foram introduzidos os conceitos de gerador AWCG (“Add-With-Carry Generator”) e SWBG (“Subtract-With-Borrow Generator”). A configuração do AWCG é apresentada em (6.22) e o SWBG em (6.23)<sup>21</sup>:

$$s_i = (s_{i-s} + s_{i-r} + c_i) \bmod m \quad (6.22)$$

$$s_i = (s_{i-s} - s_{i-r} - c_i) \bmod m \quad (6.23)$$

Neste tipo de geradores, utiliza-se uma regra de ajustamento do operador  $c$  (designado por “carry”), sendo  $c_i = 0$  e  $c_{i+1} = 0$  se  $(s_{i-s} + s_{i-r} + c_i < m)$  e  $(c_{i+1} = 1)$  caso contrário. Uma particularização do gerador AWCG introduzida por Marsaglia, constitui a classe de geradores MWCG (“Multiply-With-Carry Generators”) [Goreski *et al* (2003)], representada por:

$$s_i = (a s_{i-1} + c_i) \bmod m \quad (6.24)$$

Em estudos subsequentes de Marsaglia e Zaman, são recomendados valores de  $s$ ,  $r$  e  $m$  com os quais, os autores referem ter atingido – nalgumas das selecções de parâmetros – períodos da ordem de  $10^{43}$ . Uma das potenciais vantagens apontadas a este tipo de gerador é a sua aplicação em aritmética módulo 1 e a possibilidade de obter sequências equiparadas às obtidas com geradores congruenciais lineares dispondo de números primos de grande dimensão como módulo [Tezuka *et al* (1992)].

### 6.3.1.11 Gerador congruencial não linear

Esta variante de geradores congruenciais possui a estrutura genérica de representação (6.25) onde  $f$  representa uma função não-linear, sendo agrupável em dois tipos distintos.

$$s_i = f(s_{i-1}, \dots, s_{i-k}) \quad (6.25)$$

Um desses, constitui os “geradores congruenciais de inversão” [Eichenauer-Herrmann *et al* (1997)], cuja origem se encontra em estudos de Eichenauer-Herrmann *et al* (1986), que

<sup>21</sup> Por vezes, encontram-se as representações alternativas das expressões apresentadas em (6.28) e (6.29), respectivamente,  $(s_i = s_{i-s} \bmod m + s_{i-r} \bmod m + c_i \bmod m)$  e  $(s_i = s_{i-s} \bmod m - s_{i-r} \bmod m - c_i \bmod m)$ .



incorporam na expressão de recorrência que determina as sequências de valores, uma operação modular conjugada com uma operação de inversão.

$$s_i = (a \bar{s}_{i-1} + c) \bmod m, \quad \text{com } i > 0 \text{ e } 0 \leq s_i < m \quad (6.26)$$

Nesta expressão, o termo  $\bar{s}$  identifica o inverso multiplicativo de  $(s \bmod m)$ , sendo definido para os valores diferentes de 0 e primos relativamente a  $m$  que verificam a seguinte relação:  $1 \equiv \bar{s} s \bmod m$ . Refira-se, também, que a obtenção de valores no intervalo  $[0,1[$ , obriga à transformação  $s'_i = s_i / m$ .

Das vantagens que se lhe podem apontar, destaca-se a ausência de padrões organizados em hiper-planos na sequência da aplicação de testes matriciais – para avaliação da independência dos valores da sequência. Como desvantagem, refira-se o tempo de computação envolvido no processamento desta operação, considerado elevado quando comparado com outras operações mais simples associadas a geradores “concorrentes”, o que o desvaloriza para a utilização em algumas das potenciais aplicações. Estudos relativos a estes geradores encontram-se em Eichenauer-Herrmann (1995), (1996) e Niederreiter *et al* (1997).

O outro tipo de gerador congruencial não linear constitui o que se designa por “gerador polinomial”.

$$s_{i+1} = (a s_i^n + b s_i^{n-1} + \dots + c) \bmod m \quad (6.27)$$

Existem diversos processos de geração em que se aplica este tipo de gerador conjugado com outros tipos de geradores, sendo uma das mais conhecidas proposta por Blum *et al* (1986), cuja expressão de recorrência é:

$$s_{i+1} \equiv (s_i^2) \bmod m \quad (6.28)$$

possuindo a particularidade de apresentação da sequência de saída de acordo com os *bits*  $b_1 b_2 b_3 \dots$ , sendo  $b_0=0$  se  $s_i$  for um número par e  $b_0=1$  caso contrário. Com a condição adicional de  $m=p_1 p_2$  e desde que  $p_1$  e  $p_2$  sejam números primos distintos e congruentes com  $(3 \bmod 4)$ , então, a sequência de saída deste gerador é imprevisível – no contexto do conceito de *polynomial-time* – se não houver um conhecimento prévio de  $p_1$  e  $p_2$ . Neste facto, reside um dos principais interesses deste gerador: a sua aplicação à criptografia.

Eichenauer-Herrmann *et al.* (1988) sugerem uma outra alternativa de gerador cuja expressão de recorrência é,

$$s_{i+1} \equiv g(s_i) \bmod m \quad \text{com } 0 \leq s_i < m \quad (6.29)$$

onde  $g$  representa uma função não-linear.

Da aplicação deste tipo de geradores encontram-se apenas resultados de estudos dos seus autores, apontando para a possibilidade de utilização de um número alargado de funções que produzem bons resultados no que se refere à uniformidade da sequência.

Com base no gerador anterior, Kato *et al.* (1996a) utilizaram uma função  $g$  que incorpora a combinação de uma função linear com o gerador multiplicativo e o módulo inverso de um elemento de semente, originando a expressão de recorrência (6.30). De acordo com Niederreiter (1989) relativamente a geradores que utilizam o módulo inverso num gerador multiplicativo, também neste caso se propõe para módulo a utilização de uma potência de base 2 [Kato *et al.* (1996b)].

$$s_{i+1} \equiv (a\bar{s}_i + bs_i + c) \bmod m, \quad \text{com } 0 \leq s_i < m \quad (6.30)$$

A quarta proposta de Knuth (1998), utiliza um polinómio de 2ª ordem (6.37) na operação modular. Este autor sustenta a possibilidade de utilização de polinómios de ordem superior, embora, tal sugestão não seja acompanhada de uma análise de eventuais benefícios e/ou desvantagens inerentes a esse facto.

$$s_{i+1} \equiv (ds_i^2 + as_i + c) \bmod m, \quad \text{com } 0 \leq s_i < m \quad (6.31)$$

### 6.3.1.12 Gerador FSRG

Atribui-se geralmente a Tausworthe<sup>22</sup>, em 1965, a introdução de um processo de geração de sequências de números com base em sequências de valores de 0 e 1, cuja expressão de recorrência genérica é:

$$b_i \equiv (a_p b_{i-p} + a_{p-1} b_{i-p+1} + \dots + a_1 b_{i-1}) \bmod 2 \quad (6.32)$$

Estes geradores são designados por FSRG (de “Feedback Shift Register Generators”) [Fushimi *et al* (1983)], [L’Ecuyer (1996b)].

Na expressão (6.38) as diversas variáveis podem assumir os valores  $\{0,1\}$ , e os parâmetros  $b_i$  representam os *bits* de um número inteiro. Estes geradores aumentam a sua eficiência quando uma parte significativa das constantes  $a_i$  possui o valor zero, em virtude de se reduzir o número de operações executadas. Da associação deste gerador com um gerador polinomial (6.39) resulta, também, um incremento de eficiência, podendo atingir um período máximo equivalente a  $2^p - 1$  [Gentle (2003)].

<sup>22</sup> A origem deste tipo de gerador não se encontra perfeitamente estabelecida, sendo atribuída por alguns a Selmer e por outros a Tausworthe, sendo certo que, em ambos os casos, foi apresentada em 1965.

$$f(z) \equiv z^p - (a_1 z^{p-1} + \dots + a_{p-1} z + a_p) \quad (6.33)$$

Variantes comuns adoptam expressões de recorrência envolvendo operações aritméticas binárias (6.40) como, por exemplo, o “ou-exclusivo” (6.34a).

$$b_i \equiv (b_{i-p} + b_{i-p+q}) \bmod 2 \quad (6.34)$$

$$b_i = b_{i-p} \oplus b_{i-p+q} \quad (6.34a)$$

O processo de geração em causa, envolvendo uma operação binária, torna-se mais claro através da utilização de um exemplo simples. Assim, dispo de um valor inicial ( $b_0=178$ ) – registo de 8 bits – e pretendendo-se determinar os números seguintes de uma sequência ( $b_1, b_2, \dots$ ), pode-se usar o procedimento exposto a seguir.

- p1) *Combinação do bit colocado na posição mais à esquerda do registo com o bit encontrado na 4ª posição mais à esquerda do mesmo registo, usando a operação binária “ou-exclusivo”;*
- p2) *deslocação de todos os elementos do registo de uma posição para a esquerda;*
- p3) *colocação do resultado obtido na operação p3) na posição mais à direita do registo;*
- p4) *repetição do procedimento descrito entre p1) e p3) para obtenção, sucessiva, dos números seguintes da sequência.*

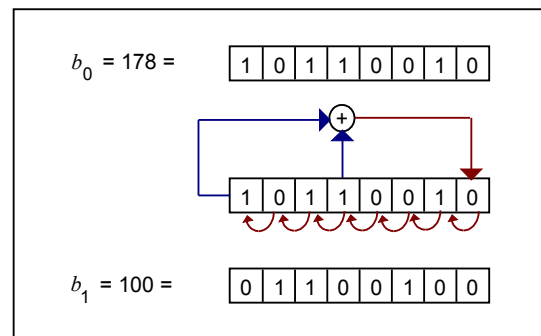


Figura 6.5: Mecanismo de geração FSRG

Alguns dos geradores com esta estrutura têm atingido sucesso como, por exemplo, o gerador de Fushimi (1990), com  $p=521$ ,  $a_{521} = a_{32} = 1$ , alcançando um período de  $2^{521} - 1$ .

Este tipo de geradores possui fragilidades no que se refere às propriedades de uniformidade e independência, razão pela qual é comum utilizar mecanismos de decimação associados à geração das sequências. As suas variantes mais conhecidas são:

- os geradores “Twisted” FSRG [Matsumoto *et al* (1992), (1994)], tomando como base a expressão de recorrência (6.40a), efectuando a operação de “twisting” (trad. Livre: “entrelaçamento”). Esta operação, resulta de se considerar o elemento da sequência ( $b_i$ ) como um vector de dimensão  $d$  (em binário) e de se efectuar uma operação de multiplicação do segundo termo por uma matriz  $A$  de dimensão  $d \times d$ ,

$$\vec{b}_i = \vec{b}_{i-p} \oplus A \vec{b}_{i-p+q} \quad (6.35)$$

- os geradores “Mersenne Twisters” FSRG [Matsumoto *et al* (1998)], utilizam, na expressão de recorrência, números primos de Mersenne<sup>23</sup>. O algoritmo proposto adota um valor de semente com 19 937 *bits* de comprimento, arquivado numa matriz de 624 elementos contendo valores de 32 *bits*. Na matriz existem 31 *bits* não utilizados que efectuam uma migração ao longo da mesma. Possuem uma estrutura, com aplicação em casos onde se pretende obter períodos de dimensão muito elevada (com a parametrização indicada pelos autores, pode atingir um período de  $2^{19937} - 1 \approx 4,3 \cdot 10^{6001}$ , o qual é um número primo de Mersenne).

### 6.3.1.13 Geradores combinados

Associado ao desenvolvimento dos estudos dos diferentes tipos de geradores, foram desenvolvidos mecanismos com melhor desempenho designados por *geradores congruenciais combinados*. Uma das principais vantagens destes consiste na sua capacidade de distender o período das sequências geradas até uma ordem superior às que são atingidas pelos geradores congruenciais quando utilizados isoladamente. Neste sentido, destaca-se a exposição formal proposta através de um Teorema por L’Ecuyer (1988) que se traduz, genericamente, em considerar que: *se os módulos  $m_y$  e  $m_z$  de um gerador combinado são números primos e se cada um dos geradores congruenciais utilizados possui o período máximo (de acordo com as condições do Teorema) então, o período do gerador combinado é  $(m_y-1)(m_z-1)/2$ .*

De acordo com este Teorema, a combinação de dois geradores, um dos quais com módulo  $2^{31}-1$  (e período máximo  $\approx 2,15 \cdot 10^9$ ) e o outro, com módulo, número primo, da ordem de  $2^{31}$  (e período máximo  $\approx 2,15 \cdot 10^9$ ), resulta um gerador com período máximo da ordem de  $2,31 \cdot 10^{18}$ . Para ilustrar a dimensão em causa refira-se que, sendo o tempo de computação do ciclo completo equivalente a um período  $(2,15 \cdot 10^9)$ , usando um gerador congruencial é, por hipótese, de 1 minuto de duração, o mesmo processo, considerando o gerador combinado com período de  $2,31 \cdot 10^{18}$  seria executado em cerca de 2300 anos.

Nesta categoria de geradores, dois têm assumido algum protagonismo, derivando as suas designações dos nomes dos seus autores: *gerador congruencial combinado de Hill-Wichmann* e *gerador congruencial combinado de L’Ecuyer*.

Adicionalmente, alguns autores como, por exemplo, Gentle (2003) ou Marshall *et al* (1979), apresentam argumentos no sentido de que este tipo de geradores produz sequências de

<sup>23</sup> Números de Mersenne são, por definição, números da forma:  $2^n-1$  (com  $n$  número inteiro). Deste subconjunto de números, aqueles que são números primos designam-se por “números primos de Mersenne”. Até ao momento, apenas 38 destes números foram determinados (1, 3, 7, 31, 63, 127, 255, ...). Os quatro números primos de Mersenne de mais elevada dimensão foram descobertos após 1996. A sua designação representa uma homenagem ao matemático Francês Marin Mersenne (1588-1648), teólogo de formação Jesuíta e matemático, estudioso dos números primos, tentando encontrar uma fórmula que representa-se os números primos, tendo dedicado particular atenção aos números do tipo  $2^p-1$ , sendo  $p$  um número primo.

números cujas propriedades se encontram mais próximas das propriedades de sequências consideradas verdadeiramente aleatórias.

Antes de se iniciar a descrição genérica destes dois tipos de geradores refere-se que, por razões que serão apontadas no capítulo 7, a opção do autor para a concretização de simulações ilustrativas da aplicação da MCS na avaliação de incertezas incidu sobre o gerador de Hill-Wichmann, com resultados que mostram a sua adequação às aplicações de Metrologia.

O *gerador de Hill–Wichmann* (designado, simplifcadamente, por *gerador H-W*), proposto por Hill e Wichmann (1982) possui uma estrutura que combina três geradores congruenciais multiplicativos cada um dos quais possuindo um diferente período de repetição. Esse mecanismo resulta de uma perspectiva subjacente onde se considera que:

- a) usando  $k$  geradores congruenciais independentes, inicializados por um vector–semente  $\vec{s}_0$  constituído por  $k$  valores  $(s_{1,0}, s_{2,0}, \dots, s_{k,0})$  e dispondo de um vector  $\vec{m}$  contendo  $k$  valores de módulos  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$  e de um vector–multiplicador  $\vec{a}$  contendo  $k$  valores  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , pode–se gerar, por recorrência, vectores  $\vec{s}_i$  de dimensão  $k$  contendo valores de variáveis pseudo-aleatórias  $(s_{1,i}, s_{2,i}, \dots, s_{k,i})$ , utilizando as expressões  $s_{1,i} = (a_1 s_{1,i-1}) \bmod m_1 \dots s_{k,i} = (a_k s_{k,i-1}) \bmod m_k$ ;
- b) conhecendo cada vector  $\vec{s}_i$ , combinando os seus valores de acordo com a expressão  $u_i = (s_{1,i} + s_{2,i} + \dots + s_{k,i}) \bmod 1$ , resulta uma sequência de saída, que se pode designar por  $u_i$  a qual é representável por uma distribuição *idealmente* uniforme em  $[0,1]$ ;
- c) a sequência de saída possui um período que é próximo do produto dos períodos das sequências originais.

No caso específico do gerador H–W, efectua-se a combinação de 3 geradores congruenciais multiplicativos, com um vector–semente  $\vec{s}_0 = (s_{1,0}, s_{2,0}, s_{3,0})$ , vectores associados ao *módulo*  $\vec{m} = (30269, 30307, 30323)$  e ao *multiplicador*  $\vec{a} = (171, 172, 170)$ . Com estes vectores estabelecem-se as 3 expressões de recorrência,

$$s_{1,i} = 171 \cdot s_{1,i-1} \bmod(30269) \quad s_{2,i} = 172 \cdot s_{2,i-1} \bmod(30307) \quad s_{3,i} = 170 \cdot s_{3,i-1} \bmod(30323)$$

e determina-se os valores da sequência de saída:  $u_i = (s_{1,i} + s_{2,i} + s_{3,i}) \bmod 1$ .

A determinação do período deste tipo de geradores, uma vez que se dispõe de 3 geradores congruenciais lineares, cada um dos quais tem como elemento associado ao módulo ( $m_i$ ) um número primo, nestas condições, resulta o período máximo ( $m_i - 1$ ) para cada gerador se utilizado de forma independente (cf. Teoremas apontados em 6.3.1.7). Quando combinados, o

período máximo é determinado recorrendo ao Teorema de L'Ecuyer, aplicado a dois geradores de módulos  $m_1$  e  $m_2$ :

$$p_2 = \frac{(m_1 - 1) \cdot (m_2 - 1)}{2} \quad (6.36)$$

A combinação de 3 geradores – caso do gerador H-W – conduz a um período máximo dado por (6.38), generalizável para combinações de  $n$  geradores congruenciais<sup>24</sup>.

$$p_3 = \frac{(m_1 - 1) \cdot (m_2 - 1) \cdot (m_3 - 1)}{4} \quad (6.37)$$

Utilizando o vector módulo apresentado,  $\vec{m}=(30269, 30307, 30323)$ , o período  $P_{HW}$  que se atinge [Hill *et al* (1982)] assume o valor expresso em (6.44) e a dimensão das sequências máximas utilizáveis,  $d_{HW}$ , aplicando o *critério da raiz quadrada do período* ou a regra de Ripley (1987) exposta na secção 6.3.1.6, é dada em 6.45a e 6.45b, respectivamente.

$$P_{HW} = \frac{(30269 - 1) \cdot (30307 - 1) \cdot (30323 - 1)}{4} \approx 5,95361 \cdot 10^{12} \quad (6.38)$$

$$d_{HW} = \sqrt{5,95361 \cdot 10^{12}} \approx 2,44 \cdot 10^6 \quad (6.39a)$$

$$d_{HW,R} = \frac{\sqrt{5,95361 \cdot 10^{12}}}{10} \approx 2,44 \cdot 10^5 \quad (6.39b)$$

Uma nota adicional, para referir que por razões históricas e tecnológicas da época, o gerador foi desenvolvido a pensar em computadores com *palavras* de 16 *bits*, verificando-se que o limite expectável máximo corresponde a  $2^{15}$  (igual a 32768), valor este próximo dos números primos adoptados para os elementos do vector de módulo; na actualidade, existem variantes seguindo o mesmo princípio, mas aplicados em computadores de 32 e 64 *bits*, permitindo atingir períodos que – no caso de 3 geradores em computadores de 32 *bits* – se aproximam de um período cuja dimensão é  $\approx (2^{31})^3 = 2^{93}$  ( $\approx 9,9 \cdot 10^{27}$ ); a popularidade deste gerador resulta de produzir sequências cujos valores se encontram no intervalo  $[0,1[$ , o que constitui um requisito determinado por muitas das aplicações computacionais.

O *gerador de L'Ecuyer* possui diferentes variantes, uma das quais se enquadra na categoria dos geradores congruenciais combinados. Duas propostas de gerador foram apresentadas, sendo uma aplicável a computadores de 16 *bits* [L'Ecuyer (1987)] e outra

<sup>24</sup> A combinação de  $n$  geradores conduz a uma expressão do período máximo dada por 
$$p_n = \frac{\prod_{i=1}^n (m_i - 1)}{2^{n-1}}$$

aplicável a computadores de 32 *bits* [L'Ecuyer (1986), (1988)] (em ambos os casos, em linguagem *Pascal*). Este gerador, tal como no caso anterior, é sustentado na possibilidade de combinação de dois ou mais geradores congruenciais lineares, distinguindo-se do anterior por possuir uma estrutura do tipo exposta a seguir,

$$z_{n+1} = \left( \sum_{i=1}^k a_i s_{n+1,i} \right) \bmod m_1 \quad (6.40)$$

distinguindo-se da estrutura proposta por Hill e Wichmann, do tipo exposto em (6.48), notando que o gerador de L'Ecuyer produz sequências de valores num intervalo  $[0,m]$ , necessitando de uma transformação de variável para aplicações que requerem os valores no intervalo  $[0,1]$ .

$$u_{n+1} = \left( \sum_{i=1}^k \frac{a_i s_{n+1,i}}{m_i} \right) \bmod 1 \quad (6.41)$$

Em [L'Ecuyer (1988)], são sugeridos valores para *multiplicadores* e para o *módulo* e são apresentados resultados da execução de testes. Algumas aplicações [L'Ecuyer *et al.* (1993)] apontam como períodos máximos que se podem obter entre  $2^{61}$  e  $2^{205}$ .

#### 6.3.1.14 Geradores com técnicas mistas

Marsaglia. Knuth e L'Ecuyer, têm defendido que é possível melhorar algumas das propriedades dos geradores, designadamente, a sua periodicidade e os resultados da aplicação de testes, quando se combinam geradores com técnicas mistas.

Destacam-se, neste contexto, o "algoritmo M" de Knuth, suportado numa estrutura do gerador de MacLaren e Marsaglia (de 1965) – com a vantagem do período associado à combinação dos dois geradores corresponder, na maioria dos casos, ao menor múltiplo comum dos períodos das duas sequências originais – o algoritmo de Carter Bays e S. Durham (de 1976) igualmente baseado na mesma estrutura original – apresentado em Knuth (1998) como Algoritmo B –; o algoritmo de Marsaglia, Zaman e Tsang [Marsaglia *et al.* (1990)] e [Marsaglia *et al.* (1991)], sendo uma combinação de uma sequência de “*Fibonacci*” (com intervalos de 97 e 33, uma operação do tipo “(subtração+1)**mod** 1”) e uma “sequência aritmética” envolvendo uma subtração. Com esta estrutura, os autores reclamam conseguir atingir uma periodicidade de  $2^{144}$  (aproximadamente  $2 \times 10^{43}$ ).

Esta classe de geradores evidencia propriedades estatísticas consideradas por diversos autores como excelentes, com elevada portabilidade mas demonstrando estruturas matriciais inconvenientes quando analisada em dimensões mais elevadas [Tezuka *et al.*, 1993]. Como

nota final, refira-se a existência de outras formas de geração de números pseudo-aleatórios em desenvolvimento na actualidade, designadamente, suportadas em técnicas de paralelização de geradores ou na utilização de geradores designados de multi-recursivos.

### **6.3.2 Testes estatísticos**

#### **6.3.2.1 Breve referência histórica**

A utilização de testes estatísticos resulta da necessidade de avaliar hipóteses de natureza probabilística relativamente a dados observáveis. No contexto da geração de números pseudo-aleatórios torna-se necessário o seu teste, de modo a avaliar as suas características – de uniformidade e independência – comparativamente com as de sequências consideradas “genuinamente” aleatórias.

As referências mais antigas apontam o "Run test", existindo formas primitivas da sua utilização por J. Bienaymé [Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 81 (1875), 417-423, citação de Knuth (1998)] e M. G. Kendall e B. Babington-Smith, [*Journal of the Royal Statistical Society* **101** (1938), 147-166] e no seu suplemento [**6** (1939), 51-61]. Nestes, é proposto o teste de números aleatórios entre 0 e 9 e, simultaneamente, são precursores ao conterem referências à utilização dos testes de *frequência*, *serial*, de *espaçamentos (gap)* e *Poker* e uma variante do *teste do coleccionador de cupões*.

Na actualidade, aproveitando a capacidade de cálculo disponibilizada pelos computadores modernos, novos mecanismos de teste têm sido desenvolvidos, havendo a assinalar como principal referência, os "*Stringent Statistical Randomness Tests*", também conhecidos pela designação de "*DIEHARD battery of Randomness Tests*" de G. Marsaglia.

A existência de uma grande variedade de testes está associada ao facto de não existirem testes universais para a avaliação da aleatoriedade, pelo que, o facto das sequências geradas conseguirem ultrapassar um número considerável de testes traduz-se, na prática, num acréscimo subjectivo na confiança que o gerador nos oferece. Por outro lado, essa diversidade reflecte-se, também, no potencial dos testes (os *teste de frequência* e o *teste de correlação serial* são conhecidos por não rejeitarem grande parte dos geradores enquanto que o *teste de colisões*, em oposição, é conhecido por evidenciar deficiências de geradores).

A diferenciação entre *testes empíricos* (obtidos como resultado da manipulação computacional de grupos de números de uma sequência e a determinação de parâmetros de natureza estatística) [Johnson (1996)]; e *testes teóricos* (resultantes da definição de características da sequência estabelecidas a partir de métodos numéricos de natureza teórica,



utilizando a regra de recorrência associada à geração da sequência como mecanismo de análise), é uma das linhas orientadoras da estrutura descritiva dos testes que se segue.

### 6.3.2.2 Testes estatísticos de $\chi^2$ , de Kolmogorov–Smirnov e de Cramer-von Mises

Este tipo de teste consiste na elaboração de uma hipótese nula, segundo a qual uma determinada função distribuição de probabilidade  $F_0(x)$  representa a função distribuição de probabilidade  $F_X(x)$ , desconhecida, de uma amostra de uma população em estudo,  $H_0 : F_X(x) = F_0(x), \forall_x$ , e como hipótese alternativa, a não verificação da condição anterior, expressa por,  $H_1 : \exists_x, F_X(x) \neq F_0(x)$ . Para tal, definem-se estimadores de teste e as funções empíricas que determinam valores extremos dos estimadores, para intervalos de confiança estabelecidos previamente.

No contexto particular dos geradores de números pseudo-aleatórios, esta necessidade decorre do requisito da F<sub>d</sub>P ser do tipo *uniforme*. São conhecidos dois métodos para este efeito: o teste  $\chi^2$  e o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S).

O teste  $\chi^2$ , suportado na distribuição de probabilidade com o mesmo nome, é um teste do tipo paramétrico (i.e., pressupõe que as amostras resultam de uma população representável por uma F<sub>d</sub>P normal/gaussiana – para a qual, se impõe o requisito da *homogeneidade da variância*). Este teste foi introduzido por Karl Pearson<sup>25</sup> através da publicação, em 1900, de *Mathematical Contribution to the Theory of Evolution*.

Este teste pressupõe que os observáveis que constituem uma amostra se distribuem por um número finito de categorias (modelo característico de variáveis discretas). Assim, designando por  $s$  uma variável representativa de uma determinada característica de uma população, da qual se extrai uma amostra de dimensão  $n$  e supondo que existe um número de categorias distintas dado por  $k$ , pode-se efectivar a seguinte análise: A distribuição de observações experimentais pelas categorias conduz a um vector equivalente a  $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$  em que  $y_i$  representa o número de observações da amostra que correspondem à categoria  $i$ .

---

<sup>25</sup> Matemático (1857-1936), é considerado como uma das pessoas que mais influenciou a Teoria Estatística. Tendo sido professor em várias universidades inglesas, leccionando disciplinas relacionadas com matemática, adquiriu interesse em problemas de natureza estatística após conhecer obras de Weldon e de Galton, tendo publicado entre 1893 e 1912 um conjunto de artigos designados por “*Mathematical contributions to the Theory of Evolution*”, nos quais se encontram algumas das suas mais importantes contribuições aplicáveis na análise de dados, designadamente, relativos à análise de regressão, ao coeficiente de correlação e ao teste do  $\chi^2$ . Como nota particular, refira-se que a introdução do teste de  $\chi^2$  enquadra-se num objectivo corrente na época, que consistia em tentar retirar protagonismo à distribuição normal, no contexto da análise de amostras.

O número expectável de observações para cada uma das categorias, considerando a dimensão da amostra  $n$ , é dada por  $\langle np_1, \dots, np_k \rangle$  ( $np_i$  associado à categoria  $i$ , representando  $p_i$  a probabilidade de ocorrência associada à mesma categoria).

Um *estimador de estatística (de teste)*,  $V$ , que seja um indicador da proximidade entre as observações obtidas por via experimental,  $y_i$ , e as observações expectáveis equivalentes,  $np_i$ , sendo conhecidas as probabilidades respectivas e a dimensão da amostra  $n$ , é:

$$V = (y_1 - np_1)^2 + \dots + (y_k - np_k)^2 \quad (6.42)$$

notando-se que a aproximação dos valores observados aos valores expectáveis faz tender o resultado do mesmo para zero.

Uma fragilidade deste estimador resulta de considerar que todas as categorias são equiprováveis, justificando a introdução, na sua expressão, de uma componente de ponderação associado à frequência das ocorrências, resultando a expressão (6.43), utilizada correntemente para definir o *estimador da estatística do teste  $\chi^2$* .

$$V = \frac{(y_1 - np_1)^2}{np_1} + \dots + \frac{(y_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{i=1}^k \frac{(y_i - np_i)^2}{np_i} \quad (6.43)$$

Usando a relação  $(y_i - np_i)^2 = y_i^2 - 2ny_i p_i + n^2 p_i^2$  e sabendo que  $y_1 + \dots + y_k = n$  e que  $p_1 + \dots + p_k = 1$ , estabelece-se uma expressão alternativa do *estimador da estatística de teste  $\chi^2$* , considerada mais adequada para aplicação computacional.

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \left( \frac{y_i^2}{p_i} \right) - n \quad (6.44)$$

A determinação do estimador da estatística de teste é efectuada recorrendo a uma tabela de probabilidade (apresentada no anexo 4, conjuntamente com um procedimento de aplicação), sendo os valores limite determinados em função do intervalo de probabilidade pretendido  $p$  e do número de graus de liberdade,  $v$ , correspondente a  $k - 1$ , onde  $k$  representa o número de categorias.

O *teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S)*, cuja designação resulta da utilização de uma função de probabilidade introduzida por A. Kolmogorov e da incorporação de elementos propostos por V. Smirnov, é um teste não-paramétrico, capaz de ser aplicado a situações em que a distribuição de probabilidade adoptada ou de que se pretende conhecer o grau de

adequação, seja distinta da F<sub>d</sub>P normal, originando o que se designa por *métodos de distribuição-livre (distribution-free methods)*.

O teste em causa, apresentado em 1933 por Kolmogorov<sup>26</sup>, introduz um estimador de teste associado a uma distribuição de probabilidade “K-S”, com a seguinte forma:

$$K_n = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| = \max(K_n^+, K_n^-) \quad (6.45)$$

V. Smirnov<sup>27</sup> (em 1939) propôs modificações, designadamente, a possibilidade de avaliação distinta por dois estimadores  $(K_n^+, K_n^-)$ , alteração que é adoptada na actualidade.

O objectivo do teste pode ser exposto da seguinte forma: Considerando que  $X$  representa uma variável aleatória com uma F<sub>p</sub>C designada por  $F(x)$  continua, então, essa função tem, necessariamente, como resultado um número real cuja distribuição é uniforme em  $[0,1]$ , sendo possível demonstrar que, sendo  $y$  um valor dessa variável tal que  $0 \leq y \leq 1$  então  $F(x) \leq y$  traduz a probabilidade do valor  $y$ . A generalização obtem-se introduzindo uma nova variável aleatória  $Y_j = nF(X_j)$  cujo índice se encontra entre  $0 \leq j \leq n$  e onde os valores observados  $x_j$  são ordenados numa sequência crescente. Estas variáveis constituem números aleatórios independentes e uniformemente distribuídos entre  $0$  e  $n$ , equivalentes à sequência obtida de uma forma não ordenada.

A expressão do *estimador da estatística de teste*, notando que a F<sub>p</sub>C uniforme e compreendida entre  $0$  e  $n$  tem a seguinte expressão  $F_n(x_j) = P(f_n(x) \leq j) = \frac{j}{n}$ , é:

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F_n(x) - F(x)) = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left( \frac{j}{n} - F(x_j) \right) \quad (6.46)$$

obtem-se a expressão equivalente (6.47) ou (6.48), no último caso, resultante de se tomar um

valor  $t$  tal que  $0 \leq t \leq n$ , sendo a probabilidade de ocorrência de  $K_n^+ \leq \frac{t}{\sqrt{n}}$  correspondente à

probabilidade<sup>28</sup> de  $Y_j \geq j - t$  para  $1 \leq j \leq n$ .

<sup>26</sup> Andrey Nikolaevich Kolmogorov, Matemático (1903–1987), foi um dos mais importantes matemáticos do século XX, com contribuições singificativas em áreas distintas: na Teoria das séries trigonométricas, na Teoria da Medição, na Teoria dos Conjuntos, na Teoria da Integração, na Topologia e na Teoria das Probabilidades e da Estatística, referindo-se, ainda, trabalhos de aplicação da matemática a problemas da mecânica, da biologia e da geologia.

<sup>27</sup> Vladimir Ivanovich Smirnov, Matemático (1887–1974), dedicou-se a estudos de análise matemática e de mecânica, tendo desempenhado funções de Direcção do Instituto de Matemática e Mecânica em Leninegrado, da Universidade e da Academia das Ciências. Alguns dos seus estudos mais importantes relacionam-se com a aplicação da matemática a problemas da Mecânica, embora, se encontrem estudos igualmente importantes no campo da matemática teórica relacionada com a Teoria das equações algébricas, com o espaço euclidiano multidimensional e com a Teoria de funções com variáveis complexas.

$$K_n^+ = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} (j - y_j) \quad (6.47)$$

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} [F_n(x) - F(x)] = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left[ \frac{j}{n} - F(x_j) \right] \quad (6.48)$$

A equivalência entre as expressões anteriores resulta de:

$$K_n^+ = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} (j - y_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} (j - nF(x_j)) = \frac{n}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} \left[ \frac{j}{n} - F(x_j) \right] = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left[ \frac{j}{n} - F(x_j) \right]$$

Da passagem para o espaço n-dimensional resulta a obtenção das expressões apresentadas por Smirnov (em 1944):

$$\begin{aligned} P\left(K_n^+ \leq \frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{t}{n^n} \sum_{0 \leq k \leq t} \binom{n}{k} (k-t)^k (t+n-k)^{n-k-1} = \\ &= 1 - \frac{t}{n^n} \sum_{t \leq k \leq n} \binom{n}{k} (k-t)^k (t+n-k)^{n-k-1} \end{aligned} \quad (6.49)$$

Esta expressão tem uma configuração característica da distribuição de probabilidade binomial com  $k-t$  termos elevado ao número de termos  $k$  e os termos restantes  $(n-(k-t))$  elevados a  $(n-k-1)$ . O termo  $n^n$  representa o volume associado ao hiper-cubo formado por todas as combinações de todos os vectores  $(y_1, \dots, y_n)$ , equivalente a  $n^n/n!$ , multiplicado por  $n!$  (associado ao número de possíveis ordenações de cada vector).

A distribuição de  $K_n^-$  é obtida de forma idêntica. Smirnov determinou, ainda, a forma assintótica da expressão, aplicável a qualquer valor fixo de  $s \geq 0$ .

$$P\left(K_n^+ \leq s\right) = 1 - e^{-2s^2} \left( 1 - \frac{2}{3} s / \sqrt{n} + O(1/n) \right) \quad (6.50)$$

A estatística de teste associada à distribuição K-S tem, portanto, dois estimadores, cujas expressões são as seguintes:

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F_n(x) - F(x)) \quad (6.51a)$$

$$K_n^- = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F(x) - F_n(x)) \quad (6.51b)$$

---

<sup>28</sup> Nota sobre a demonstração:  $P\left(K_n^+ \leq \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow P\left(\frac{j - y_j}{\sqrt{n}} \leq \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow P(j - y_j \leq t) \Rightarrow P(y_j \geq j - t)$

Ainda que, teoricamente, o teste K-S parta do pressuposto da utilização de um número infinito de pontos, na prática, a função  $F_n(x)$  associada a uma amostra percorre um número finito de pontos, possibilitando a sua aplicação computacional. Um procedimento para a sua utilização é constituído por 3 etapas:

p1) obtenção de um número de observações independentes  $x_1, \dots, x_n$ ;

p2) rearranjo da sequência através da sua ordenação crescente;

p3) determinação dos estimadores da estatística de teste recorrendo às expressões:

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left( \frac{j}{n} - F(x_j) \right) \quad (6.52a)$$

$$K_n^- = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left( F(x_j) - \frac{j-1}{n} \right) \quad (6.52b)$$

No caso de se pretender realizar um teste unilateral, então, deve-se determinar um único estimador da estatística de teste, dado por:

$$K_n = \max(K_n^+, K_n^-) \quad (6.53)$$

Aspectos complementares da sua aplicação encontram-se expostos no anexo 4.

O teste de Cramer–von Mises parte, tal como nos casos anteriores, da elaboração de uma hipótese nula,  $H_0 : F_X(x) = F_0(x), \forall x$  e de uma hipótese alternativa,  $H_1 : \exists x, F_X(x) \neq F_0(x)$ , aplicadas a uma amostra  $(x_1, \dots, x_n)$  de uma variável aleatória  $X$ .

O processo associado à concretização do teste pressupõe uma ordenação prévia da amostra visando o alinhamento crescente dos percentis numa sequência ordenada  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ , utilizando-se uma estatística de teste com a seguinte expressão:

$$I_C = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ F_0(x_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad (6.54)$$

Esta estatística de teste traduz algumas particularidades:

- esta abordagem assume que  $F_0(x_{(i)})$  possui uma ordenada dada pelo valor  $(x_{(i)})$  e o termo  $(2i-1)/2n$  corresponde ao valor médio da função<sup>29</sup> na vizinhança de  $(x_{(i)})$ . A adopção desse valor médio e não dos valores individuais torna a estatística de teste menos sensível à presença de pontos aberrantes na amostra do que o teste de Kolmogorov–Smirnov;

<sup>29</sup> De facto, o valor da função imediatamente antes de  $(x_{(i)})$  é  $(i-1)/n$  e após é equivalente a  $(i/n)$ . Logo, o valor médio é dado por  $[(i-1)/n + i/n] / 2 = (2i-1)/2n$ .

- elevando ao quadrado o termo do somatório, efectua-se a indiferenciação entre intervalos positivos e negativos, evitando o efeito de anulação mútua de factores com sinais opostos.

A aplicação desta estatística carece, ainda, da constituição de uma função que determine o critério de aceitação ou rejeição do ajustamento. Em Anderson *et al* (1952) encontra-se uma tabela com base numa função de distribuição assintótica de  $I_C$ , aplicável a diferentes níveis de confiança.

### 6.3.2.3 Testes empíricos

A aplicação de *testes empíricos* a sequências de números “aleatórios” é uma actividade cuja origem se associa ao desenvolvimento dos primeiros GNPA. Na actualidade, é conhecida uma grande variedade deste tipo de testes, pelo que se apresenta, de forma muito resumida, os princípios subjacentes à sua acção.

A sua intervenção recorre, nalguns casos, a sequências de números reais e, noutros casos, a sequências de números inteiros. No primeiro caso, em que os valores correspondem a números reais i.i.d. no intervalo  $[0,1]$ , estes são referidos como  $\langle u_n \rangle = u_0, u_1, u_2, \dots$  e, no segundo caso, envolvendo valores inteiros, a sua representação é  $\langle y_n \rangle = y_0, y_1, y_2, \dots$ , notando que a regra  $y_n = \lfloor du_n \rfloor$  permite efectuar a conversão de sequências de números reais em inteiros (onde o valor de  $d$  é estabelecido com base num critério de conveniência associado ao sistema computacional utilizado, por exemplo, num sistema decimal,  $d$  pode corresponder a 100 ou a 1000, num sistema binário, pode corresponder a  $2^6=64$  representando os 6 dígitos mais significativos da representação binária de  $u_n$ , etc.).

Refira-se, ainda, que a sequência de números inteiros – convertida usando a regra exposta – é i.i.d. no intervalo compreendido entre 0 e  $d-1$ ; o valor de  $d$  seleccionado deve ser suficientemente grande de modo a permitir que os valores da sequência obtida tenham significado mas não excessivamente grande que dificulte o teste – significando a possibilidade de efectuar distintas conversões consoante os testes aplicados.

O teste de frequência ou de equidistribuição visa avaliar o requisito primário de uma sequência desta natureza ser uniformemente distribuída no intervalo de contradomínio considerado (geralmente, entre 0 e 1). Para tal, recorre aos testes estatísticos apresentados anteriormente.

- no caso de se utilizarem as sequências de valores reais, dever-se-á aplicar o teste de *Kolmogorov–Smirnov*, testando a validade da hipótese  $F(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ;
- em alternativa, efectua-se o teste convertendo a sequência de números reais,  $u_i$  numa sequência de números inteiros  $y_i$  utilizando um valor de  $d$  apropriado e a regra apontada. Neste caso, para cada inteiro  $y$  contido em  $0 \leq y < d$ , dever-se-á contar o número de ocorrências  $y_i = y$  (com  $1 \leq i < n$ ) e aplicar o teste  $\chi^2$  com  $k=d$ , considerando uma probabilidade associada a cada categoria equivalente a  $p_i = 1/d$ .

A aplicação do *teste serial (serial test)* [Niederreiter (1989), (1991)] pretende avaliar a distribuição de pares de valores das sequências geradas, partindo do facto de existirem  $d$  valores inteiros numa sequência (compreendidos entre 0 e  $d-1$ ) que permitem a formação de  $d^2$  pares de valores de teste  $(r, s)$ . Após a contagem de ocorrências de pares da sequência que verificam  $(y_{2i}, y_{2i+1}) = (r, s)$ , com  $0 \leq i < n$  e  $0 \leq r, s < d$ , aplica-se o teste  $\chi^2$  com um número de classes  $k=d^2$  e com uma probabilidade comum das classes equivalente a  $1/d^2$ .

A aplicação deste teste recorre a uma sequência de  $2n$  valores para efectuar  $n$  testes, uma vez que a utilização de pares do tipo  $(y_0, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_i, y_{i+1}), \dots$  conduziria a uma limitação evidente do número de graus de liberdade do teste adoptado ( $\chi^2$ ).

O *teste de espaçamentos (gap test)* promove a avaliação das características das sequências pela determinação dos *espaçamentos (gaps)* observados entre ocorrências de valores  $u_i$  contidos num determinado sub-intervalo do domínio. Com efeito, considerando esta restrição como  $\alpha \leq u_i < \beta$ , com  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ , pretende-se determinar a dimensão das sub-sequências  $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+r}$ , tal que se verifica  $\alpha \leq u_i < \beta$ ,  $\alpha \leq u_{i+r} < \beta$  e que os restantes valores entre esses não verificam essa mesma condição<sup>30</sup>. Dessa forma, para uma sub-sequência de  $r$  números, identifica-se um intervalo (*gap*) igual a  $r-1$ .

O *teste de partições (poker test)* é um teste clássico, que consiste num processo que recorre a combinações de 5 números sequenciais de uma amostra e, tal como as combinações do *poker*, as categoriza em 7 classes equivalentes (independentemente da sua ordem original na sequência): *Todos os números distintos (abcde)*; *um par (aabcd)*; *dois pares (aabbc)*; *um trio (aaabc)*; *Full house (aaabb)*; *quatro iguais (aaaab)*; e *cinco iguais (aaaaa)*.

<sup>30</sup> Considerando um subconjunto de valores de uma sequência: 0,13; 0,98; 0,34; 0,67; 0,45; 0,03; 0,81; 0,17; 0,49; definindo o espaçamento de interesse como  $\alpha=0,1$  e  $\beta=0,2$ , observa-se que o primeiro número da sub-sequência (0,13) verifica  $\alpha \leq u_i < \beta$  e que o próximo número a verificar corresponde a 0,17 na 8ª posição, i.e.,  $\alpha \leq u_8 < \beta$ , logo o espaçamento (*gap*) a contabilizar corresponde a 7 (“*gap*” = 7 equivale a uma sub-sequência de  $8 = 7+1$  números).

As sequências de teste são constituídas por conjuntos de 5 elementos – de números inteiros – representados por  $(y_{5i}, y_{5i+1}, y_{5i+2}, y_{5i+3}, y_{5i+4})$  com  $0 \leq i < n$ . Por vezes, é utilizada uma variante para as categorias, por conveniência de programação, agrupando-se algumas dessas categorias: 5 valores (*todos diferentes*); 4 valores (*um par*); 3 valores (*2 pares ou um trio*); 2 valores (*Full house ou quatro iguais*); 1 valor (*cinco iguais*).

O teste  $\chi^2$  é utilizado na avaliação final, sendo aplicado efectuando-se a contagem de quintuplos em cada categoria e aplicando a expressão (6.62) que determina a probabilidade de encontrar, em  $n$  grupos de  $k$  números sucessivos,  $r$  valores distintos,

$$p_r = \frac{d(d-1)\cdots(d-r+1)}{d^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right\} \quad (6.55)$$

sendo  $\left\{ \begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right\}$  o *número de Stirling*, traduzindo o número de partições de um conjunto de  $k$  elementos em, exactamente,  $r$  partes.

O *Teste do coleccionador de cupões*<sup>31</sup> (*Coupon's Collector Test*) [Knuth (1998)], [Johnson (1996)] tem como principio básico a ideia do coleccionador de cupões supondo que existem  $N$  cupões disponíveis em *carteiras*, qual a probabilidade de, adquirindo  $m$  *carteiras* obter exactamente  $i$  *cupões*.

No caso da aplicação a uma sequência  $\langle y_n \rangle = y_0, y_1, y_2, \dots$ , a concretização do teste resulta da selecção de um número pequeno inteiro  $d$ , considerado adequado e, em seguida, determinam-se as dimensões das sub-sequências,  $y_{i+1}, \dots, y_{i+r}$  que contém uma representação completa de valores no subconjunto  $[0, d-1]$ . Por exemplo,  $d=4$ , usando um gerador é obtida a sequência 0,2,0,1,0,3, neste conjunto de 6 elementos encontram-se os quatro números inteiros do intervalo  $[0, d-1]$ , logo o “run” detectado tem a dimensão 6. Partindo da posição da sequência imediatamente a seguir repete-se o procedimento, por exemplo, 0,2,1,0,3, identificando um “run” de 5 e assim sucessivamente. A distribuição dos segmentos das diversas dimensões é comparada com a distribuição expectável.

O *teste de permutações* tem como base sequências de entrada em  $n$  grupos de  $t$  elementos cada (possuindo  $t!$  possibilidades de ordenação distintas<sup>32</sup>), da forma seguinte:

<sup>31</sup> O nome deste teste deriva da sua associação a um hipotético coleccionador de cupões de variedades distintas, cujo objectivo é obter um exemplar de cada variedade

<sup>32</sup> Por exemplo, considerando que  $t=3$  e que os valores são todos distintos, então, é possível a existência de  $3! = 6$  ordenações diferentes:  $u_{3i} < u_{3i+1} < u_{3i+2}$ ,  $u_{3i} < u_{3i+2} < u_{3i+1}$ ,  $u_{3i+1} < u_{3i} < u_{3i+2}$ ,  $u_{3i+1} < u_{3i+2} < u_{3i}$ ,  $u_{3i+2} < u_{3i} < u_{3i+1}$  e  $u_{3i+2} < u_{3i+1} < u_{3i}$



$(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+t-1})$  com  $0 \leq i < n$ .

O teste contabiliza o número de vezes que cada ordem é observada, seguida da aplicação do teste  $\chi^2$  com  $k=(t!)$  com a probabilidade associado a cada ordenação dada por  $(1/t!)$ . Um procedimento de um algoritmo aplicável é obtido com base numa sequência de elementos distintos  $(u_1, u_2, \dots, u_t)$ , determinando-se um valor inteiro  $f(u_1, u_2, \dots, u_t)$  tal que  $0 \leq f(u_1, u_2, \dots, u_t) < t!$  e  $f(u_1, u_2, \dots, u_t) = f(v_1, \dots, v_t)$  sse  $(u_1, \dots, u_t)$  e  $(v_1, \dots, v_t)$  possuem a mesma ordenação relativa.

O teste de “runs” (*run test*) visa a determinação da dimensão de segmentos da sequência original que são monotonicamente crescentes (*runs up*) ou decrescentes (*runs down*). O conceito subjacente ganha clareza quando traduzido num exemplo: partindo de uma sequência qualquer, “137283569415”, para a qual se identificam as seguintes sequências crescentes (adopta-se a técnica de marcação que consiste em colocar marcas verticais à esquerda e à direita de cada sequência identificada e entre  $u_i$  e  $u_{i+1}$  quando  $u_i > u_{i+1}$ ) obtém-se, conseqüentemente: | 1 3 7 | 2 8 | 3 5 6 9 | 4 | 1 5 |, ou seja, são identificadas uma sequência (*run up*) de dimensão 1; duas sequências (*runs up*) de dimensão 2; uma sequência (*run up*) de dimensão 3; e uma sequência (*run up*) de dimensão 4.

Com base no mesmo exemplo, a contagem de sequências decrescentes conduziria a: | 1 | 3 | 7 2 | 8 3 | 5 | 6 | 9 4 1 | 5 |, ou seja, cinco sequências (*runs down*) de dimensão 1; duas sequências (*runs down*) de dimensão 2; e uma sequência (*run down*) de dimensão 3.

O teste de espaçamentos e o teste do colecionador de cupões são, em diversos aspectos, similares a este. A utilização posterior do teste  $\chi^2$  revela-se inadequada aos contadores de “runs”, em virtude de não se poder considerar que aquelas que são adjacentes sejam independentes. Em Knuth (1998) é apresentada uma estatística de teste aplicável a um exemplo em que se determinam “runs” entre 1 e 5, e “runs” iguais ou superiores a 6 incluindo os valores que constituem os respectivos coeficientes matriciais da estatística.

O teste de máximo-de-t (*maximum-of-t test*) tem como ponto de partida a definição de valores  $v_i = \max(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+t-1})$  com  $0 \leq i < n$ , resultando na obtenção de uma nova sequência de valores  $v_0, \dots, v_{n-1}$ . A avaliação a efectuar resulta de se aplicar o teste de Kolmogorov–Smirnov, pretendendo-se verificar (hipótese nula) que a função de distribuição de probabilidade que representa a sequência é  $F(x) = x^t$  com  $0 \leq x \leq 1$ .

O teste de colisões (*collision test*) [Tsang *et al* (2000)], [Knuth (1998)], introduzido por H. Christiansen em 1975, adquire particular importância quando as condições de teste se afastam das mais apropriadas para a utilização do teste  $\chi^2$ , onde é previsível a existência de eventos nas categorias de teste, sendo considerada apropriada a sua aplicação no contexto de métodos “hashing” (envolvendo a transformação de grandes conjuntos de informação de entrada em pequenos conjuntos de informação de saída).

A situação típica ocorre quando o número de categorias é muito superior ao número de observações, por exemplo, existirem  $m=2^{20}$  (1048576) categorias e forem tomadas  $n=2^{15}$  (32768) observações. Neste caso, a probabilidade de cada categoria receber uma observação é  $1/32$  (determinada por  $2^{15}/2^{20}$ ), o que significa que no processo de amostragem uma parte significativa de categorias não obterá valores da amostragem.

O exemplo clássico consiste em admitir um dado problema onde existem  $m$  urnas vazias, nas quais se colocarão  $n$  bolas que, previsivelmente, vão ocupar urnas vazias. Quando uma das bolas (observações) atinge uma urna que já contém, pelo menos, uma bola, considera-se essa ocorrência uma “colisão”. A expressão da probabilidade associada à distribuição binomial estima a probabilidade de uma categoria  $m$  possuir exactamente  $k$  observações:

$$p_k = \binom{n}{k} m^{-k} (1 - m^{-1})^{n-k} \quad (6.56)$$

e o número expectável de “colisões” por categoria é dado por:

$$\sum_{k \geq 1} (k-1) \cdot p_k = \sum_{k \geq 1} k \cdot p_k - \sum_{k \geq 1} p_k = \frac{n}{m} - 1 + p_0 \quad (6.57)$$

atendendo a que [Knuth (1998)],

$$p_0 = (1 - m^{-1})^n = 1 - nm^{-1} + \binom{n}{2} m^{-2} - O(m^{-3}) \quad (6.58)$$

resulta que o número médio total de colisões, considerando as  $m$  urnas, é dado por  $n^2/2m$  (com os dados do exemplo anterior, é igual a  $[2^{15}]^2/[2 \cdot 2^{20}] = 512$ ). Ainda na mesma referência citada, encontra-se a expressão genérica que determina a aceitação do resultado do teste, entendendo que a probabilidade de ocorrência de  $c$  colisões corresponde à probabilidade de ocorrência de se encontrarem  $n-c$  urnas ocupadas.

Na categoria de testes para avaliação de geradores possui um lugar de destaque o conjunto de testes desenvolvidos por G. Marsaglia em 1984, conhecidos como testes “DIEHARD”. Estes testes foram aplicados a diversos geradores de uso corrente constituindo o

motivo de rejeição de alguns – um exemplo, foi a aplicação do *Birthdays spacing test* ao gerador  $x_n = (x_{n-24} + x_{n-55}) \bmod m$ . Esta bateria de testes *DIEHARD* (traduções possíveis do termo são: “*tradicionalistas*” ou “*conservadores*”) possui 18 variedades de testes de avaliação da qualidade de ajustamento obtido (*goodness of fit*) que, pela sua extensão, serão apresentados de forma mais detalhada no anexo 5 deste documento.

Uma referência final para o teste de correlação serial (*serial correlation test*) que visa avaliar o grau de correlação de quantidades constituintes de sequências. Por exemplo, numa sequência de  $n$  elementos  $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ , pode-se avaliar a dependência entre elementos  $u_j$  e  $u_{j+1}$  recorrendo a uma métrica,  $C$ , designada [Knuth (1998)] por *coeficiente de correlação serial* e cuja expressão é dada por (6.66) aplicando-se a uma única sub-sequência (o mesmo teste pode ser aplicado a sub-sequências sobrepostas do tipo  $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}; \{u_1, \dots, u_n\}; \dots$ ).

$$C = \frac{n(u_0u_1 + u_1u_2 + \dots + u_{n-2}u_{n-1} + u_{n-1}u_0) - (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})^2}{n(u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2) - (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})^2} \quad (6.59)$$

O resultado obtido, compreendido entre  $-1$  e  $+1$ , traduz o grau de correlação observado, sendo desejável que se aproxime de zero, correspondendo ao caso em que se verifica a menor correlação. Em virtude da falta de independência dos termos  $u_i, u_{i+1}$  face a  $u_{i+1}, u_{i+2}$ , a tendência é o afastamento desse valor desejável, considerando-se que o valor de  $C$  é adequado se este se encontrar no intervalo de confiança de 95% definido por  $\mu_n \pm 2\sigma_n$ , sendo estes valores determinados pelas expressões seguintes considerando que  $n > 2$ .

$$\mu_n = \frac{-1}{n-1}; \quad \sigma_n^2 = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}; \quad n > 2$$

### 6.3.3 Geração de sequências numéricas pseudo-aleatórias de variáveis aleatórias não uniformes

#### 6.3.3.1 Nota introdutória

Uma parte significativa da aplicação do método de Monte Carlo requer a utilização de sequências de números associados a v.a. com F<sub>d</sub>P distinta da função de probabilidade uniforme (adiante designadas por sequências “não-uniforme”).

Em regra, a obtenção das sequências com distribuição não uniforme resultam da geração prévia de sequências de números pseudo-aleatórios (com F<sub>d</sub>P aproximadamente uniforme) aplicando-se, em seguida, transformações adequadas aos números gerados.

São várias as abordagens para a concretização da transformação de variáveis com diferentes algoritmos que são aplicáveis à mesma função de probabilidade, conduzindo a diferentes desempenhos no que se refere a velocidade, exactidão, requisitos de espaço de arquivo e complexidade de codificação. Dentro dessa diversidade, verifica-se que a eficiência computacional é frequentemente melhorada pela introdução de aproximações, pelo que, se torna importante efectuar um balanço entre a exactidão resultante das aproximações admitidas e o ganho em eficiência. A este respeito, diversos autores como por exemplo, Gentle (2003), referem que a fonte que, usualmente, origina a perda de exactidão encontra-se no próprio GNPA, recomendando a sua avaliação prévia usando testes de ajustamento como o teste K-S. Esta recomendação foi adoptada como regra pelo autor, no que se refere à aceitação de sequências utilizadas na simulação.

Sobre as metodologias de transformação de variáveis refira-se que, no contexto deste documento, são habitualmente utilizados: o método de transformação inversa e o método de aceitação-rejeição<sup>33</sup>. Destes, no contexto da aplicação da MCS em Metrologia, o método de transformação inversa constitui uma das principais ferramentas que é aplicada, enquanto que o método de aceitação-rejeição é utilizado, sobretudo, em situações onde não é viável a aplicação do método anterior. A preferência dada ao primeiro método resulta de este ser obtido por via analítica, enquanto que o segundo resulta da adopção da via numérica, contendo aproximações que, por produzirem erros, devem ser avaliadas.

De outros métodos conhecidos mas não aplicados nos estudos desenvolvidos, alguns merecem uma breve referência, encontrando-se nesse caso o método de composição [Rubinstein (1981)]; métodos de tabeação de funções; diversas variantes do método de aceitação-rejeição; métodos mistos; método do rácio de distribuições uniformes; método da função característica; métodos “*Weighted resampling*” e “*Alias method*”; métodos baseados em cadeias de Markov – MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) –, e os métodos clássicos de *Metropolis-Hasting* e de *Gibbs*; descritos detalhadamente, por exemplo, em Gentle (2003).

### 6.3.3.2 Método de transformação inversa

O método de transformação inversa consiste num conjunto de operações que visam obter elementos de uma v.a. com determinada função densidade de probabilidade, partindo de valores gerados com função densidade de probabilidade uniforme no intervalo [0,1]. Esse processo de geração e conversão de elementos de sequências numéricas pode ser reproduzido através do esquema exposto na Figura 6.6.

<sup>33</sup> Existem outros métodos, por exemplo: métodos mistos, método da função característica, método de reamostragem ponderada (*weighted resampling*) e método do rácio-de-uniformes; cujos detalhes se podem encontrar em [Gentle (2003)].

Refira-se que, em regra, a transformação de variáveis obtém-se recorrendo ao método de inversão de funções que foi apresentado anteriormente. Contudo, existem situações onde o processo de inversão da função distribuição cumulativa possui um grau de complexidade tal, que a torna difícil de concretizar (por exemplo, por envolver integrações cujas soluções são complexas) recorrendo-se, nesses casos, a este tipo de metodologia.

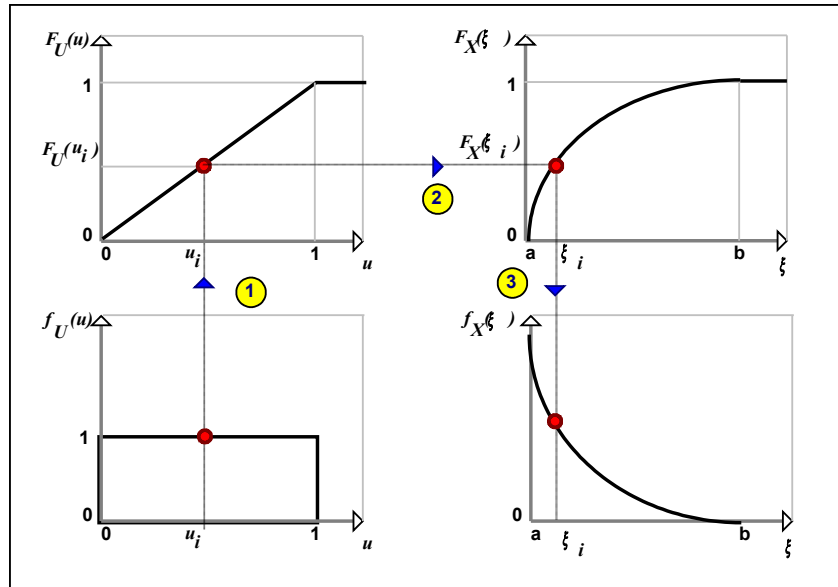


Figura 6.6: Processo de transformação inversa de valores de duas distribuições de probabilidade

Alguns aspectos são importantes para entender o processo de geração. Desde logo, o facto das funções de probabilidade cumulativa, envolvidas na transformação (2) da Figura, pela natureza da própria função, possuírem o mesmo contradomínio  $[0,1]$  e serem monotonicamente crescentes.

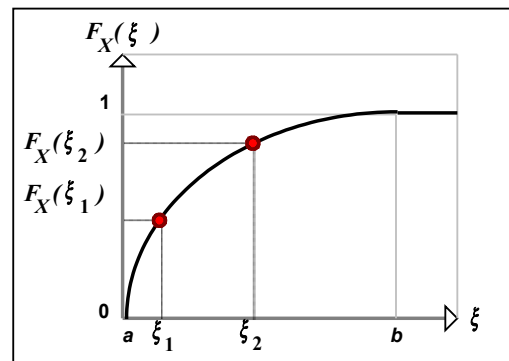


Figura 6.7: Representação de pontos numa distribuição cumulativa

$$F_X(\xi_1) \leq F_X(\xi_2) \quad \text{se} \quad \xi_1 \leq \xi_2$$

$$F_X(-\infty) = 0 \quad \text{e} \quad F_X(+\infty) = 1$$

O processo envolvido nesta metodologia consiste em, recorrendo a uma série de valores de uma v.a. cuja F<sub>d</sub>P é uniforme no intervalo  $[0,1]$  e a uma determinada transformação, obter uma outra sequência de valores dispondo de uma F<sub>d</sub>P diferente da primeira. Esse processo requer a demonstração de duas etapas: uma, onde se pretende demonstrar que  $F_X(\xi) = u$  (na Fig. 6.6 corresponde às relações 1 e 2, em sentido inverso); e uma segunda, onde se demonstre que, em determinadas condições,  $\xi = F_X^{-1}(u)$ .

Sabendo que  $F_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_X(\rho) d\rho$  e fazendo (cf. o diagrama da Fig. 6.6)  $F_X(\xi) = F_U(u)$ , igualdade que é possível porque as funções são monotonicamente crescentes, estabelecendo entre si relações unívocas, resulta a expressão (6.67) que cumpre o objectivo da primeira etapa.

$$F_X(\xi) = F_U(u) = \int_0^u f_U(\gamma) d\gamma = u \quad (6.67)$$

Recuperando os dois termos finais da expressão anterior e a sua relação de

igualdade,  $\int_0^u f_U(\gamma) d\gamma = u$ , válida para

distribuições de probabilidade uniforme

com domínio  $[0,1]$  (cf. Fig. 6.8, onde o integral corresponde ao valor,  $u$ , da variável aleatória com distribuição de probabilidade uniforme,  $U$ ), pode-se concluir que a validade da relação

$F_X(\xi) = u$  que concretiza a demonstração da primeira etapa, impõe que a distribuição uniforme utilizada possua os referidos valores limite  $(0,1)$ .

Rubinstein (1981) efectua a mesma demonstração por via alternativa, partindo da relação

$F_X(\xi) = P(X \leq \xi)$  e Fishman (1973) uma demonstração de que a variável aleatória  $U$  possui

uma FdP uniforme  $U(0,1)$ , usando a relação  $f_U(u) = |\mathbf{J}| f_X(\xi)$  com  $\mathbf{J} = \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{1}{f_X(\xi)}$  representando o jacobiano da transformação.

Verificando a condição de que as funções de probabilidade cumulativa – contínuas – são estritamente crescentes então, para cada uma delas, dever-se-á verificar que

$F_X(\xi_1) < F_X(\xi_2)$  se  $\xi_1 < \xi_2$  para todos os valores do contradomínio (compreendido entre

os valores 0 e 1) e, nesse caso, é possível demonstrar que existe uma “função inversa”

$F_X^{-1}(u)$  tal que, para  $0 < u < 1$ ,  $u = F_X(\xi)$  sse  $\xi = F_X^{-1}(u)$  – segunda etapa demonstrativa pretendida.

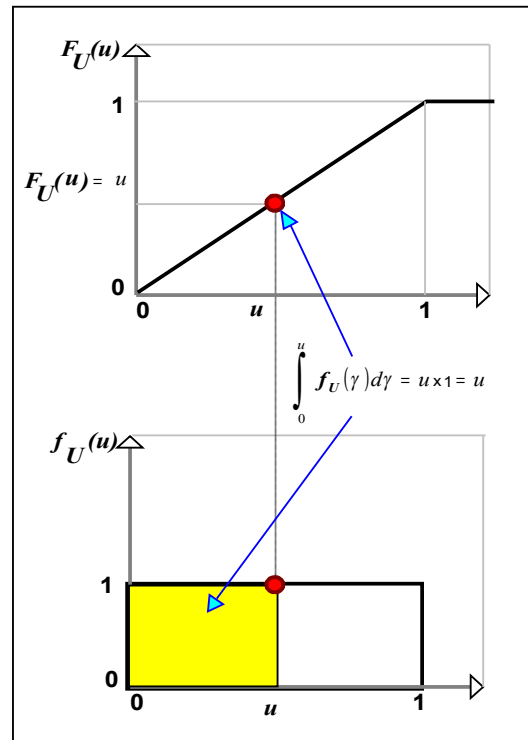


Figura 6.8: Representação da área correspondente ao integral numa distribuição de probabilidade cumulativa

O resultado que aponta para a probabilidade uniforme  $U(0,1)$  como a distribuição de origem do processo adquire particular importância, uma vez que determina a tipologia da função densidade de probabilidade e os respectivos parâmetros, os quais constituem o objectivo a concretizar pelas sequências de valores gerados a partir de geradores de números pseudo-aleatórios.

Neste tipo de distribuição os valores devem ser equiprováveis, respeitando o critério de *uniformidade*. Nota-se que esta, conjuntamente com a propriedade de *independência*, são condições essenciais para a constituição de sequências de números pseudo-aleatórios, pelo que a adopção desta solução torna-se particularmente conveniente.

### 6.3.3.3 Método de aceitação-rejeição

Este tipo de método tem uma aplicação quando se pretende obter a conversão de funções de probabilidade para as quais o método de transformação inversa, apresentado anteriormente, é inviável por razões como a complexidade das expressões em causa. Dito de outra forma, este método representa a alternativa numérica para a impossibilidade prática de utilização da via analítica.

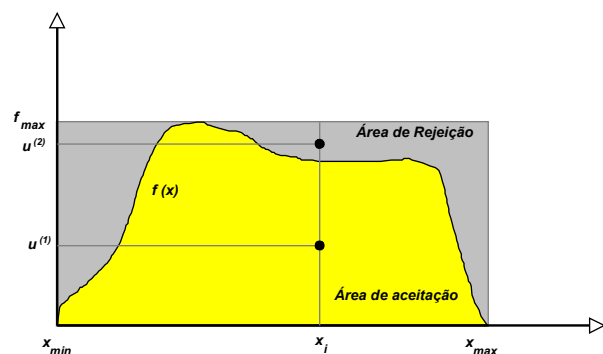


Figura 6.9: Ilustração das áreas de aceitação e de rejeição

A estrutura proposta por von Neumann, considera uma função  $f(x)$  envolvida por uma “caixa” entre  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$  e altura  $f_{\max}$ . A obtenção de uma sequência de valores da função (integrados na zona de aceitação), resultam da aplicação do algoritmo:

- p1) geração de um número,  $x_i$ , uniformemente distribuído entre  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$ ;
- p2) geração de um número,  $u$ , uniformemente distribuído entre 0 e  $f_{\max}$ ;
- p3) se  $u \leq f(x_i)$  aceita-se  $x_i$  (caso de  $u^{(1)}$  na Figura) caso contrário, rejeita-se  $x_i$  (caso de  $u^{(2)}$  na Figura) e repete-se o procedimento.

De forma equivalente, poder-se-á considerar que a função  $f_X(\cdot)$ , da qual se pretende obter sequências de valores, constitui uma função densidade de probabilidade conforme se representa na Figura 6.10. Nesta, identifica-se um conjunto:  $\mathbf{A} = \{(\xi, u), 0 \leq u \leq f_X(\xi)\}$  e representam-se os pares de valores de valores da variável aleatória bivariável  $(X,U)$  por  $(\xi, u)$ ,

possuindo uma função densidade de probabilidade uniforme em  $\mathbf{A}$ . A função densidade de probabilidade descreve-se como:  $f_{XU}(\xi, u) = \mathbf{I}_{\mathbf{A}}(\xi, u)$ .

Sendo o objectivo pretendido obter a função  $f_X(\cdot)$ , nota-se que a distribuição de probabilidade condicional de  $U$  considerando a coordenada  $\xi_i$  da v.a.  $X$  é uniforme  $U(0, f_X(\xi_i))$  e que a distribuição de probabilidade condicional de  $X$  considerando a coordenada  $u$  da v.a.  $U$ , também é uniforme com densidade [Gentle (2003)]:  $f_{X|U}(\xi | u) = \mathbf{I}_{\{t, f_X(t) \geq u\}}(\xi)$

Neste contexto, a distribuição de probabilidade marginal de  $X$  possui uma função densidade de probabilidade  $f_X(\cdot)$ . Seleccionando sucessivamente pontos em  $\mathbf{A}$ , resulta que estes possuem uma distribuição uniforme em  $\mathbf{A}$ , mas o histograma representando os valores aceites possui uma configuração correspondente à função densidade de probabilidade pretendida  $f_X(\cdot)$ . Na Figura 6.11, depreende-se a configuração do histograma pela distribuição dos “círculos” correspondentes a pares de coordenadas de valores aceites, entendendo-se o espaçamento entre estas como associado à discriminação do sistema numérico e suporte.

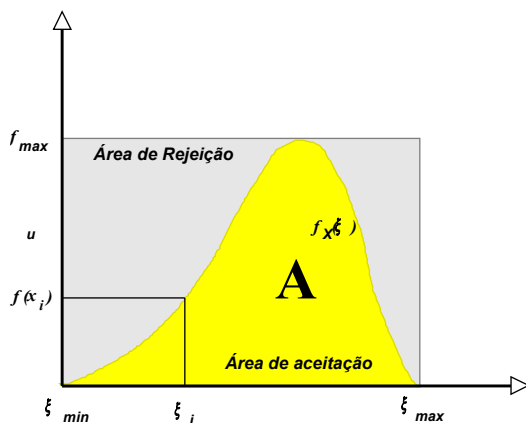


Figura 6.10: Representação de uma FdP envolvida por uma área rectangular definindo áreas de aceitação e de rejeição

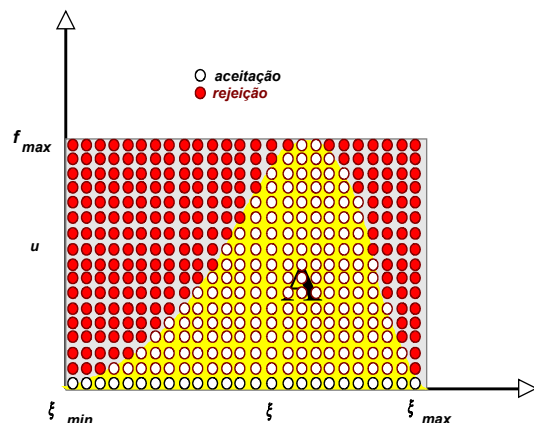


Figura 6.11: Representação de pontos aceites num processo hipotético de aceitação-rejeição

Nessa Figura (6.11) observa-se, ainda, que a área de rejeição possui uma dimensão significativa. Caso esta possa ser reduzida, o número de pontos rejeitados será necessariamente menor e, conseqüentemente, o desempenho na aceitação de pontos será mais eficiente – a condição de optimização pressupõe, portanto, a minimização da área de rejeição. Este argumento sustenta, de certa forma, o desenvolvimento do método de aceitação–rejeição.

De acordo com o objectivo de geração de seqüências de uma variável aleatória  $X$ , com FdP  $f_X(\xi)$  recorrendo a uma outra variável aleatória  $Y$ , possuidora de uma FdP  $g_Y(v)$  (cuja selecção resulta de se poder efectuar uma geração simples dos seus valores), e assumindo que



existe uma equivalência estocástica entre amostras de ambas as distribuições de probabilidade, aplica-se o método de aceitação-rejeição da forma que se expõe em seguida.

A técnica utilizada consiste em seleccionar uma v.a.  $Y$ , de modo que seja possível efectuar a geração de realizações da mesma e, simultaneamente, que seja possível escalar a sua função densidade de probabilidade,  $g_Y$ , (por aplicação de uma constante  $c$ ) tornando-a majorante de  $f_X$ , i.e.,  $c g_Y(\xi) > f_X(\xi)$  qualquer que seja o valor de  $\xi$ . A função  $g_Y$  designa-se por *função de majoração* (é, igualmente, comum referir-se como função “*envelope*” ou função “*chapéu*” - “*hat function*”).

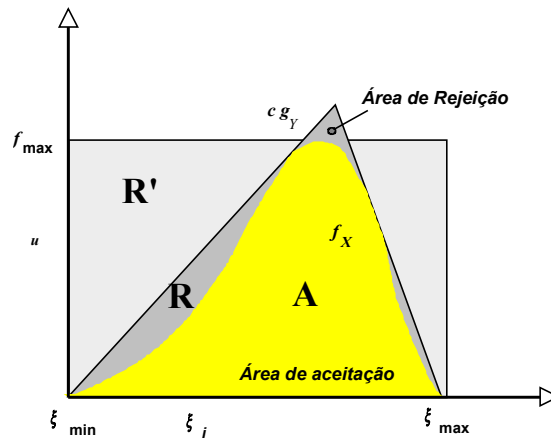


Figura 6.12: Ajustamento da função ( $c.g_Y$ ) majorante da função  $f_X(\cdot)$  e áreas de aceitação e rejeição

A área representada por  $\mathbf{A}$  é igual a 1, uma vez que,  $\mathbf{A} = \int f_X(\xi) d\xi = 1$ , pelos axiomas da Teoria de Probabilidades. Consequentemente, a área  $\mathbf{R}$  por ser superior à área  $\mathbf{A}$  tem, necessariamente, uma área superior a 1. Sendo  $\int g_Y(v) dv = 1$ , relacionando a área com o integral anterior, conclui-se que  $c > 1$  (a igualdade, embora possível, iguala a função  $g_Y$  a  $f_X$ , não representando uma solução com interesse para o contexto desta metodologia).

Supondo que a área  $\mathbf{R}$  corresponde a  $(1+r)$ , é possível definir um *parâmetro de eficiência*,  $\phi$ , sendo uma métrica da eficiência computacional, dado por:  $\phi = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{R}} = \frac{1}{1+r}$ .

Utilizando esta expressão, deduz-se também que,  $\int c g_Y(v) dv = c \int g_Y(v) dv = 1+r$  como  $\int g_Y(v) dv = 1$  resulta que  $c = 1+r$ . Por outro lado, sabendo que, no limite, a eficiência máxima se obtém quando a área de rejeição é mínima, verifica-se que essa situação ocorre quando  $r \mapsto 0$  e  $c \mapsto 1$ .

Este método é um dos mais utilizados em distintos domínios de aplicação da MCS, conhecendo-se uma grande diversidade de algoritmos e de variantes que concretizam o

princípio apresentado. Destes, destacam-se os que envolvem a utilização de variáveis i.i.d. para a função densidade de probabilidade majorante e os que recorrem a sequências não independentes, designadas por “método de Metropolis” – diversas variantes e respectivos algoritmos são descritos por Gentle (2003).

O algoritmo para a concretização deste método tem as seguintes etapas:

*p1) Geração de um valor  $\xi$  de uma função densidade de probabilidade  $g_Y$  recorrendo a métodos adequados à função seleccionada<sup>34</sup>;*

*p2) Geração de um valor  $u$  de uma função densidade de probabilidade uniforme  $U(0,1)$ ;*

*p3) se  $u \leq \frac{f_X(\xi)}{c g_Y(\xi)}$ , então:*

*p3.1) considere-se que  $\xi$  é uma realização da v.a. pretendida*

*caso contrário:*

*p3.2) Regresso a p1).*

Na Figura 6.13, considerando um valor aleatório  $\xi$ , o valor da variável aleatória uniforme  $u^{(1)}$  seria rejeitado e o valor da mesma variável aleatória uniforme  $u^{(2)}$  seria aceite como uma realização da pretendida função densidade de probabilidade.

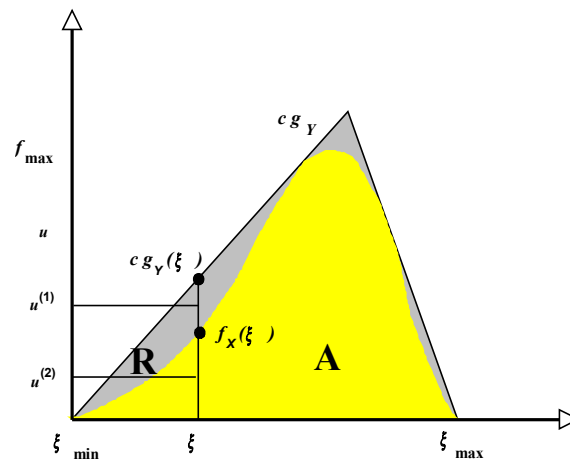


Figura 6.13 – Aceitação ou rejeição de pontos gerados a partir de uma FdP uniforme

Como nota final refira-se que a utilidade deste método, em particular, advém da sua capacidade de se adaptar a qualquer tipo de função densidade de probabilidade – de domínio limitado – permitindo complementar a disponibilidade de ferramentas necessárias à concretização do método de Monte Carlo, face à possibilidade de utilização de ferramentas de natureza analítica como o método de transformação inversa, cuja utilização depende da facilidade de obtenção de soluções analíticas para o tipo de problemas envolvidos.

<sup>34</sup> Por exemplo, no caso ilustrado, em que  $g_Y$  representa uma distribuição triangular, para a obtenção de variáveis dessa função dever-se-á utilizar o método de inversão de funções conforme procedimento descrito anteriormente.

## 7. AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO

### 7.1 Introdução

Numa perspectiva probabilística de análise do processo de medição, a determinação da dispersão dos resultados, traduzida na avaliação da incerteza de medição, está a par da estimativa da própria medição: o resultado expresso de uma medição deve indicar a incerteza que lhe está associada.

O conceito de medição encontra-se relacionado com modelos matemáticos que representam o fenómeno subjacente à medição e envolvem grandezas aleatórias cuja variabilidade determina a existência da referida incerteza. Neste sentido, a compreensão da essência da incerteza de medição encontra-se directamente relacionada com a variabilidade intrínseca de cada uma das variáveis aleatórias (cada qual assumindo valores de acordo com funções densidade de probabilidade) intervenientes no processo de medição e com a manifestação do seu efeito final na distribuição de probabilidade da variável de saída.

Assim, simplificada, o problema do cálculo de incertezas traduz-se na combinação de funções de probabilidade associadas a variáveis aleatórias de grandezas de entrada, usando um determinado modelo matemático e obtendo a função de probabilidade associada à mensuranda. A função de probabilidade da grandeza de saída contém a informação relativa à variabilidade da mensuranda.

O processo formalmente exacto de proceder a essa operação é, obviamente, a via analítica através da operação de convolução de funções.

A aplicação prática desta via – quer pela complexidade das relações funcionais que se podem constituir quer pela diversidade de variáveis que podem integrar os modelos – é, frequentemente, de difícil concretização. Por isso, procuram-se vias alternativas para concretizar o objectivo de avaliação de incertezas de medição.

A aproximação usada no Guia GUM constitui uma segunda via, contendo uma metodologia para a avaliação de incertezas suportada numa aproximação matemática – a expansão em série de Taylor. Uma terceira via é a da simulação numérica baseada na aplicação do método de Monte Carlo.

Em qualquer uma das vias, o processo prático de determinação de incertezas envolve duas fases distintas [Cox *et al.* (2001a), (2001b)]: a fase de *formulação* e a fase de *cálculo*.

Esta diferenciação permite dividir o processo entre uma primeira fase, comum às diferentes vias apontadas – a fase de formulação –, e uma segunda fase, de cálculo, com diferentes formas de abordagem consoante a via adoptada.

No presente capítulo descrevem-se as etapas envolvidas na fase de formulação e discute-se o procedimento envolvido em cada uma das vias de determinação de incerteza de medição, apresentando-se uma comparação crítica das diferentes vias.

## 7.2 Fase de formulação

Apesar da existência de uma grande diversidade de domínios onde os conceitos envolvidos na Metrologia se aplicam, é possível definir alguns princípios gerais respeitantes à representação das relações funcionais entre a mensuranda e as grandezas de entrada que a determinam.

A mensuranda pode ser obtida pela *medição directa* da grandeza em causa ou pela *medição indirecta* de outras grandezas mensuráveis. No primeiro caso, as grandezas de entrada do modelo matemático são as grandezas de influência que afectam a mensuranda (por exemplo, a variação da temperatura pode afectar a medição directa de um comprimento). No segundo caso, a estimativa da mensuranda resulta da aplicação de um modelo matemático que incorpora estimativas de outras grandezas mensuráveis (por exemplo, a medição de caudal volumétrico resulta da medição de volume e de tempo).

Em qualquer dos casos, pode-se adoptar uma representação que relaciona a grandeza de saída  $Y$  com o vector grandezas de entrada,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ , através de uma função  $f$ .

$$Y = f(\mathbf{X}) = f(X_1, \dots, X_N) \quad (7.1)$$

Nesta abordagem, sendo conhecida a relação funcional  $f$  e sendo possível recolher observações das grandezas de entrada,  $x_i$ , pode obter-se, com base nesta informação, estimativas da grandeza de saída,  $y$ .

$$y = f(x_1, \dots, x_N) \quad (7.2)$$

Esta formulação está simplificada, uma vez que os modelos podem estabelecer relações de maior complexidade que a exposta. De facto, os modelos podem representar relações que reflectem a possibilidade de  $\mathbf{Y}$  representar um escalar ou um vector, podem ser explícitos ou implícitos, e podem conter componentes exclusivamente reais ou complexas.

Na definição do modelo matemático (relação funcional) encontra-se implicitamente determinado o conjunto de variáveis aleatórias – grandezas de entrada – que o constitui.

A segunda etapa desta fase passa pela caracterização probabilística das variáveis aleatórias (de entrada), incluindo a descrição qualitativa das funções densidade de probabilidade de cada uma e a descrição quantitativa mediante a determinação dos parâmetros que definem essas funções (por exemplo, a média e o desvio padrão no caso de uma distribuição normal ou a média e a semi-amplitude, numa distribuição uniforme centrada).

Para concretizar esta caracterização, recorre-se à obtenção experimental de séries de observações sobre as quais se efectua uma análise estatística ou faz-se uso do conhecimento acumulado (histórico experimental, utilização de referências bibliográficas validadas, etc.) sobre o comportamento da variável em causa. Refira-se que o GUM classifica estas duas formas de obtenção da informação relativas às  $F_dP$  como provenientes de uma análise do *tipo A* ou do *tipo B*, respectivamente. Nesse documento, é indicado um elenco de possibilidades para a adopção de  $F_dP$  com origem em processos de análise do *tipo B*, conforme a lista que se segue, adaptáveis à mesma função no caso de aplicação dos outros métodos.

### 7.3 Fase de cálculo

A fase de cálculo corresponde ao conjunto de etapas que sucedem à fase de formulação, partindo do conhecimento do modelo matemático, respectivas grandezas de entrada e suas funções densidade de probabilidade e se utiliza essa informação para a determinação da função densidade de probabilidade da(s) grandeza(s) de saída e, através destas, da determinação de parâmetros como o valor médio e o intervalo de incerteza de medição. Este processo de cálculo é ilustrado na Figura seguinte (considerando o caso de um modelo univariável, real e explícito).

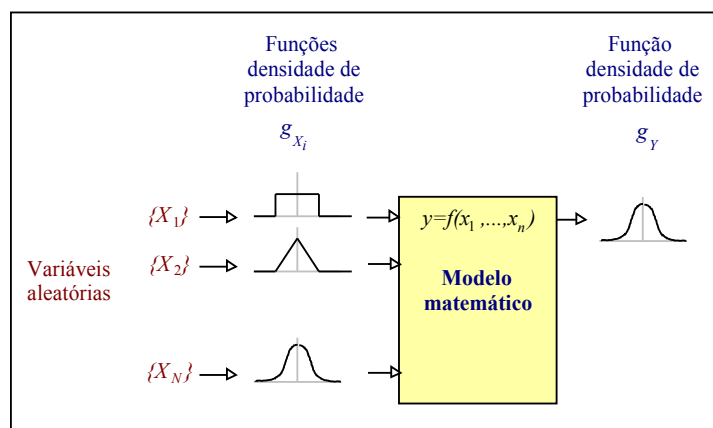


Figura 7.1: Processo de determinação da  $F_dP$  da grandeza mensurável de saída

Nesta representação é assumido, de forma implícita, que as grandezas de entrada não são correlacionadas entre si. No caso dessas variáveis possuírem algum grau de correlação, devem ser adoptadas funções densidade de probabilidade conjunta. De igual forma, quando a mensuranda é constituída por mais do que uma grandeza,  $\mathbf{Y}$ , uma vez que todas dependem da mesma informação associada às grandezas de entrada, a função de probabilidade de saída,  $g_Y$ , deverá ser uma função densidade de probabilidade conjunta.

Havendo duas vias aceites como adequadas para esse efeito (método analítico e método do GUM) e uma via proposta (MCS), as quais se diferenciam essencialmente nas etapas desta fase, apresentam-se a seguir procedimentos de aplicação para cada um dos casos, discriminando as diferentes etapas.

#### **7.4 Determinação de incertezas usando o método analítico**

A determinação da  $F_dP$  da grandeza de saída conhecendo as  $F_dP$  das grandezas de entrada, seguindo o método analítico, faz-se utilizando a expressão do integral de convolução obtido a partir do *Teorema da Convolução* (vide, por exemplo, Bracewell (1999), Wylie (1975) ou Kreysig (1993)). A convolução expressa o efeito de interacção de funções.

A inclusão desta secção no contexto desta dissertação em dois objectivos: por um lado, pretende ilustrar a complexidade inerente à aplicação desta via como processo de avaliação de incertezas de medição e por outro lado, permite aceder a informação essencial como componente de validação de métodos.

Esta segunda faceta resulta da possibilidade de se obterem resultados de referência pela via analítica relativamente à convolução de funções – distribuições de probabilidade – simples (rectangulares, triangulares, etc.), as quais são comparáveis com os resultados obtidos quer usando o GUM quer usando a MCS.

Assim, considerando duas funções,  $f$  e  $g$ , a convolução destas funções, em abstracto e constituindo objectos na álgebra das funções de Schwarz, num intervalo finito  $[0,t]$ , é:

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (7.3)$$

De forma equivalente, a convolução aplicada a um intervalo infinito origina a seguinte expressão do integral de convolução:

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (7.4)$$

São demonstráveis as propriedades de comutatividade, associatividade e transitividade associadas à operação em causa [Bracewell (1999)].

Retomando o problema inicial, a determinação da função densidade de probabilidade da grandeza de saída,  $y$  (considerando, novamente, um modelo univariável, real e explícito), em Cox *et al.* (2001a) encontra-se a expressão,

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) \delta(y - f(\mathbf{x})) dx_n \dots dx_1 \quad (7.5)$$

onde  $\delta(\cdot)$  é a *função delta de Dirac*<sup>1</sup>, a qual representa um impulso que ocorre em  $y = f(\mathbf{x})$  (a *função delta de Dirac* garante que o valor é sempre nulo excepto no caso onde ocorre o impulso).

A utilização desta via para determinar a convolução de funções adquire um grau de complexidade elevado, podendo ser ilustrado recorrendo à aplicação do Teorema da Convolução efectuado por Dietrich (1991). Com efeito, considerando duas variáveis aleatórias ( $X$  e  $Y$ ) que se combinam da seguinte forma:

$$C = aX + bY \quad (7.6)$$

e adicionalmente, designando os valores que podem ser observados para as referidas variáveis aleatórias por:  $\mu$  relativo a  $C$ ;  $\xi$  relativo a  $X$ ; e  $\nu$  relativo a  $Y$ , resulta a modificação da expressão anterior.

$$\mu = a\xi + b\nu \quad (7.7)$$

Admitindo que a variável  $X$  dispõe de uma F<sub>d</sub>P representada por  $f(\xi)$  e que  $Y$  dispõe de uma F<sub>d</sub>P representada por  $g(\nu)$ , sabendo que através da expressão anterior se consegue obter  $\nu$  como uma função de  $\xi$ ,

$$\nu = \frac{\mu - a\xi}{b} \quad (7.8)$$

é possível determinar o integral de convolução aplicado às funções  $f$  e  $g$  (expressão 7.4) de modo a obter a F<sub>d</sub>P da grandeza de saída do modelo em causa.

---

<sup>1</sup> A função *delta de Dirac* é uma “função generalizada”. A Teoria das Funções Generalizadas foi introduzida em 1936 pelo matemático russo Sergei Sobolev, tendo sido alargado o seu âmbito de aplicação em 1945, incorporando um suporte algébrico, pelo matemático francês Laurent Schwartz.

Num dos exemplos ilustrativos de cálculo apresentados por Dietrich (1991) consideram-se duas funções densidade de probabilidade ambas com domínio limitado, sendo a função  $f(\xi)$  limitada no domínio  $[\xi_i, \xi_f]$  e a função  $g(v)$  limitada no domínio  $[v_i, v_f]$  e verificando-se que  $|b \cdot (v_f - v_i)| > |a \cdot (\xi_f - \xi_i)|$ .

Considerando os limites das funções uniformes apresentados e o modelo matemático exposto em 7.6, encontram-se quatro posições de  $\mu$  que definem 3 regiões da F<sub>d</sub>P de saída.

$$\mu_3 = a\xi_i + bv_i \quad \mu_2 = a\xi_i + bv_f \quad \mu_1 = a\xi_f + bv_i \quad \mu_4 = a\xi_f + bv_f$$

escaloadas da seguinte forma<sup>2</sup>:  $\mu_3 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_4$ .

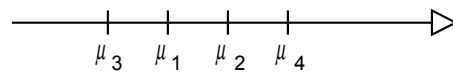


Figura 7.2: Sequência de posições dos intervalos de integração

Em cada uma das 3 regiões definidas, usando um método que passa pela discretização dos intervalos de integração para a utilização de séries seguindo-se um retorno aos integrais pelo recurso aos limites dos intervalos de discretização, Dietrich determina as expressões dos integrais considerando que  ${}_i\bar{\eta}_\mu$  expressa a contribuição para o integral de convolução relativa ao sub-intervalo  $i$ .

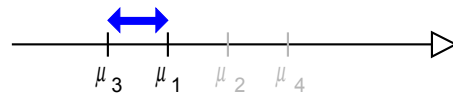


Figura 7.3a: Primeiro intervalo de integração

$$\frac{1}{a} \int_{\mu_3}^{\mu_1} {}_1\bar{\eta}_\mu d\mu = \frac{1}{b} \int_{\mu_3}^{\mu_1} d\mu \cdot \int_{\xi_i}^{\frac{\mu - bv_i}{a}} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi \quad (7.9a)$$

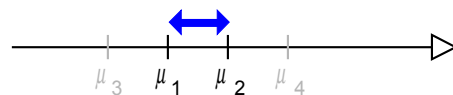


Figura 7.3b: Segundo intervalo de integração

$$\frac{1}{a} \int_{\mu_1}^{\mu_2} {}_2\bar{\eta}_\mu d\mu = \frac{1}{b} \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \cdot \int_{\xi_i}^{\xi_f} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi \quad (7.9b)$$

<sup>2</sup> Por exemplo, de  $\mu_4 > \mu_1$  implica que  $\mu_4 - \mu_2 = (a\xi_f + bv_f) - (a\xi_i + bv_f) = a\xi_f - a\xi_i = \xi_f - \xi_i > 0$ , condição verdadeira a partir da definição dos limites do intervalo da distribuição uniforme considerada.



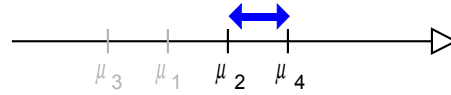


Figura 7.3c: Terceiro intervalo de integração

$$\frac{1}{a} \int_{\mu_2}^{\mu_4} \bar{\eta}_{\mu} d\mu = \frac{1}{b} \int_{\mu_2}^{\mu_4} d\mu \cdot \int_{\frac{\mu - bv_f}{a}}^{\xi_f} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi \quad (7.9c)$$

No espaço de domínio do integral de convolução, a sua expressão combina as contribuições de cada sub-intervalo,

$$\begin{aligned} \int_{\xi_i}^{\xi_f} f(\xi) d\xi \int_{v_i}^{v_f} g(v) dv &= \frac{1}{b} \int_{\mu_3}^{\mu_1} d\mu \cdot \int_{\xi_i}^{\frac{\mu - bv_i}{a}} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi + \\ &+ \frac{1}{b} \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \cdot \int_{\xi_i}^{\xi_f} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi + \\ &+ \frac{1}{b} \int_{\mu_2}^{\mu_4} d\mu \cdot \int_{\frac{\mu - bv_f}{a}}^{\xi_f} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi \end{aligned} \quad (7.10)$$

A probabilidade de  $\mu$  é, conseqüentemente, estabelecida como o somatório das contribuições nos 3 intervalos de convolução (os valores de probabilidade fora dos intervalos considerados é nulo, razão pela qual, não se encontram representados na expressão):

$$\begin{aligned} P(\mu) &= \frac{1}{a} (\bar{\eta}_{\mu} + {}_2\bar{\eta}_{\mu} + {}_3\bar{\eta}_{\mu}) = \frac{1}{b} \int_{\xi_i}^{\frac{\mu - bv_i}{a}} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi + \\ &\quad \text{(válido para } \mu_1 \geq \mu \geq \mu_3) \\ &+ \frac{1}{b} \int_{\xi_i}^{\xi_f} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi + \\ &\quad \text{(válido para } \mu_2 \geq \mu \geq \mu_1) \\ &+ \frac{1}{b} \int_{\frac{\mu - bv_f}{a}}^{\xi_f} f(\xi) \cdot g\left(\frac{\mu - a\xi}{b}\right) d\xi \\ &\quad \text{(válido para } \mu_4 \geq \mu \geq \mu_2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Em Dietrich (1991) encontram-se expressões análogas resultantes da aplicação a modelos similares (por exemplo,  $\mu = a\xi - bv$ ) e o tratamento de modelos onde a relação de magnitudes entre os limites das distribuições é  $[b \cdot (v_f - v_i)] < [a \cdot (\xi_f - \xi_i)]$ .

Com base nesta abordagem, da qual resultam as expressões gerais (7.11), é possível determinar o resultado da convolução de funções para casos concretos, sendo um dos mais simples, aquele em que se utilizam duas distribuições uniformes com as seguintes características:

- $f(\xi)$ ; função limitada entre  $[\xi_i, \xi_f]$  com  $\xi_i = -h$  e  $\xi_f = +h$ ;

- $g(v)$ ; função limitada entre  $[v_i, v_f]$  com  $v_i = -k$  e  $v_f = +k$ .

e considerando, como condições adicionais do problema, que  $\mu = a\xi + bv$  com  $a = b = 1$ ,  $[b \cdot (v_f - v_i)] > [a \cdot (\xi_f - \xi_i)] \Rightarrow 2k > 2h$ .

Nestas circunstâncias, subdividindo a expressão (7.11) nas suas três parcelas constituintes e substituindo nas expressões anteriores os termos pelas condições do problema,  $\xi_i = -h$ ,  $\xi_f = +h$ ,  $v_i = -k$ ,  $v_f = +k$ , e sabendo que  $f(\xi) = \frac{1}{2k}$  e  $f(v) = \frac{1}{2h}$  (expressão da magnitude da probabilidade associada a distribuições uniformes, igual a  $1/(b-a)$  no caso de uma FdP no intervalo  $[a,b]$ ), obtém-se:

$$P_1(\mu) = \int_{-h}^{\mu+k} \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2h} d\xi = \frac{\mu + h + k}{4hk} \quad (7.12a)$$

válida para  $-(k-h) \geq \mu \geq -(k+h)$ ;

$$P_2(\mu) = \int_{-h}^{+h} \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2h} d\xi = \frac{2h}{4hk} = \frac{1}{2k} \quad (7.12b)$$

válida para  $(k-h) \geq \mu \geq -(k-h)$ ; e

$$P_3(\mu) = \int_{\mu-k}^{+h} \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2h} d\xi = \frac{h + k - \mu}{4hk} \quad (7.12c)$$

válida para  $(k+h) \geq \mu \geq (k-h)$ .

A expressão gráfica da convolução das duas funções com densidade de probabilidade uniforme, de acordo com as condições apresentadas, é a seguinte.

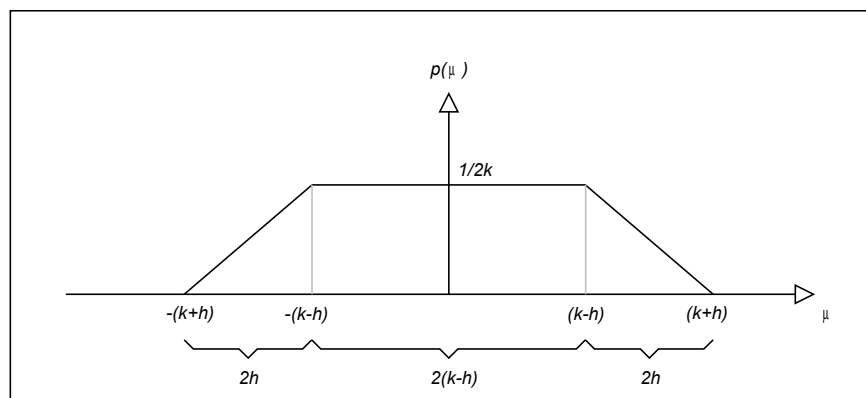


Figura 7.4: Resultado da convolução de duas funções de probabilidade uniforme

Verificando-se o cumprimento de um dos princípios da Teoria das Probabilidades,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot \frac{1}{2k} + 2 \cdot (k-h) \cdot \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot \frac{1}{2k} = 1 \quad (7.13)$$

A determinação da variância – dispersão – associada à convolução das duas funções apresentadas, considerando o conhecimento das expressões (7.12), é obtida:

$$\sigma^2(\mu) = \int_{-(k+h)}^{-(k-h)} \mu^2 P_1(\mu) d\mu + \int_{-(k-h)}^{(k-h)} \mu^2 P_2(\mu) d\mu + \int_{(k-h)}^{(k+h)} \mu^2 P_3(\mu) d\mu = \dots = \frac{(h^2 - k^2)}{3} \quad (7.14)$$

A convolução de funções densidade de probabilidade num número superior a duas resulta, segundo a metodologia apresentada, na aplicação sucessiva da sequência de operações anterior. Por exemplo, a convolução de 3 funções densidade de probabilidade uniformes,  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  e  $h(\cdot)$ , de acordo com um modelo aditivo com constantes iguais a 1, e com intervalos dados, respectivamente, por  $\pm k$ ,  $\pm h$ , e  $\pm j$ , pode ser obtida através da convolução da função  $(f * g)$  – cujo tratamento foi apresentado anteriormente – com a função  $h$ , i. e.,  $[(f * g) * h]$ . Este processo pode estender-se para qualquer número de funções densidade de probabilidade envolvidas, não necessariamente uniformes. Dietrich (1991) aponta outros exemplos de aplicação deste processo, nomeadamente, à convolução de duas F<sub>d</sub>P, uma uniforme e outra normal e de três F<sub>d</sub>P uniformes.

Destes exemplos, pode depreender-se o grau de complexidade que pode resultar da aplicação da via analítica a modelos envolvendo uma diversidade de F<sub>d</sub>P provenientes de diversas variáveis aleatórias de entrada, combinadas de acordo com modelos que podem envolver operações complexas. Contudo, o seu conhecimento revela-se particularmente útil se aplicado, em casos mais simples, em processos de validação de cálculo de incertezas de medição envolvendo quer o GUM quer o MCS. Este aspecto será evidenciado no capítulo 9 dedicado a ilustrar alguns destes aspectos apontados neste capítulo.

## **7.5 Guia para avaliação de incertezas de medição (GUM)**

### **7.5.1 Introdução**

A recente evolução da Metrologia de que aqui se destaca o entendimento de que o resultado da medição requer a concomitante apresentação da incerteza de medição associada, criou as condições para que se desenvolvesse um documento guia sobre este assunto, denominado “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” (abreviadamente designado por GUM) publicado em 1993<sup>3</sup>.

A concretização do GUM resultou da actividade dos ISO/TAG 4 (ISO Technical Advisory Group on Metrology).

Após a revisão da primeira edição do GUM, publicada em 1995, diversas entidades com responsabilidade regional adoptaram esse documento como base, desenvolvendo documentos dedicados à explicitação dos seus conceitos, foi o caso do NIST e da EA. Esta segunda, foi responsável pela edição de uma publicação europeia de referência designada por EA-4/02 (1999), visando harmonizar a avaliação da incerteza de medição no âmbito desta organização e apoiar os Organismos de Acreditação e os laboratórios acreditados neste espaço geográfico.

De forma complementar, a ISO publicou a 2ª edição do Vocabulário Internacional de Metrologia [VIM (1994)]<sup>4</sup>, contendo definições e conceitos coerentes com a interpretação dos documentos dedicados à expressão e avaliação das incertezas de medição.

### **7.5.2 Enquadramento prévio**

O GUM é um documento extenso, incluindo: i) a exposição dos principais conceitos e termos utilizados em Metrologia; ii) a introdução de parâmetros e estimadores estatísticos e probabilísticos utilizados na determinação das contribuições das grandezas de entrada na avaliação da incerteza de medição; iii) a explicitação das diferentes etapas que constituem a metodologia proposta.

As definições e conceitos referidos bem como os elementos de Estatística e de Teoria das Probabilidades foram apresentados nos capítulos anteriores, no que segue apresentam-se os aspectos essenciais do procedimento que traduz cada metodologia e notas adicionais para a sua compreensão.

---

<sup>3</sup> Documento revisto e re-editado pela ISO em 1995, com o patrocínio de 7 das principais organizações internacionais reguladoras de assuntos de Metrologia (BIPM – Bureau International des Poids et Mesures, IEC – International Electrotechnical Commission, IFCC – International Federation of Clinical Chemistry, ISO – International Organization for Standardization, IUPAC – International Union of Pure and Applied Chemistry, IUPAP - International Union of Pure and Applied Physics and OIML – International Organization of Legal Metrology).

<sup>4</sup> Existe uma tradução para Português do referido vocabulário, cuja edição é do Instituto Português da Qualidade [VIM-IPQ, 1996]

### 7.5.3 Modelo matemático, grandezas aleatórias envolvidas e sua dispersão

O ponto de partida da metodologia GUM é o modelo matemático, o qual relaciona a grandeza de saída – a mensuranda –  $Y$ , com as grandezas de entrada,  $X_i$ , através da relação funcional<sup>5</sup>:

$$Y = f(X_1, \dots, X_N) \quad (7.15)$$

De acordo com o modelo matemático apresentado, considera-se a existência de um conjunto de grandezas de entrada,  $X_i$ , cujas estimativas resultam de observações – medições – com algum grau de imperfeição. Esta circunstância provoca a existência de um erro da medição – valor não quantificável pelo desconhecimento do valor verdadeiro da mensuranda – admitindo-se que este é constituído por componentes de natureza aleatória e de natureza sistemática. A componente aleatória é aquela que impede a correcção total do valor da mensuranda (grandeza de saída) e que determina a incerteza na medição. Refira-se que cada uma das grandezas de entrada pode ser interpretada, ela própria, como uma mensuranda dependente de outras grandezas.

Na perspectiva do GUM a *componente aleatória do erro* tem origem na ocorrência de variações imprevisíveis estocásticas, em regra de natureza espacial ou temporal, associadas às grandezas de influência. Os efeitos que produzem designam-se por *efeitos aleatórios*, podendo manifestar-se através da variação das observações da mensuranda.

A *componente sistemática do erro*, resulta da perturbação da medição originada por uma grandeza de entrada, encontrando-se a designação, no GUM, de *efeito sistemático*. Admitindo que uma perturbação da medição produz um *efeito aleatório* e um *efeito sistemático*, o segundo poderá ser determinado<sup>6</sup> e corrigido, compensando a parte de natureza sistemática envolvida. Dessa forma, o GUM ao preconizar a correcção dos efeitos sistemáticos admite, explicitamente, que após essa correcção, essa componente sistemática resulta nula, sendo o remanescente conjunto de efeitos aleatórios que constitui a incerteza de medição<sup>7</sup>.

No GUM é apresentado o conceito de *incerteza do resultado da medição* “*parâmetro, associado ao resultado da medição, caracterizando a dispersão de valores que podem,*

<sup>5</sup> Embora a relação funcional apresentado se refira a um modelo explícito univariável, o GUM admite que a mensuranda possa ser representada como um vector. No entanto, esta possibilidade não é explorada no restante documento.

<sup>6</sup> Correspondendo a um valor médio de um conjunto de observações ou a um valor médio estimado. Por exemplo, a diferença entre a temperatura de ensaio,  $\theta$ , e a temperatura de referência,  $\theta_{ref}$ , na medição de um comprimento pode ser, em valor médio, igual a  $\theta - \theta_{ref} = 0,1$  °C (efeito sistemático) e o seu desvio padrão experimental de  $\pm 0,05$  °C (efeito aleatório).

<sup>7</sup> Esta interpretação é reconhecida no GUM: “... assume-se que o resultado de uma medição é corrigido de todos os efeitos sistemáticos reconhecidos, tendo sido desenvolvidos esforços para os identificar ... a calibração de instrumentos de medição e de sistemas usando padrões e materiais de referência visam eliminar o erro sistemático. No entanto, as incertezas associadas a estes padrões e materiais devem ser contabilizadas”.

*razoavelmente, ser atribuídos à mensuranda*”. Nesta definição, encontra-se reflectida a impossibilidade de conhecimento exacto do valor da mensuranda, conceito fundamental que o GUM serviu para difundir.

De forma a auxiliar a identificação das fontes de incerteza – factor preponderante para o sucesso na aplicação da metodologia – que podem contribuir para a composição do modelo matemático, é apresentada, nesse documento, uma lista desses elementos:

- definição incompleta da mensuranda;
- realização imperfeita da definição da mensuranda;
- não-representatividade da amostra;
- conhecimento inadequado ou a medição imperfeita dos efeitos das condições ambientais na determinação da mensuranda;
- derivas na leitura efectuada por operadores de instrumentos com indicadores analógicos;
- resolução ou a discriminação finita dos instrumentos de medição;
- valores inexactos de padrões e de materiais de referência;
- valores inexactos de constantes e outros parâmetros obtidos mediante o recurso a fontes externas e usados em algoritmos computacionais;
- aproximações e os valores assumidos, os quais são incorporados no método e no procedimento de medição;
- variações obtidas em observações repetidas da mensuranda em condições aparentemente idênticas (próximas das condições ideais de repetibilidade).

A etapa seguinte consiste na classificação das fontes de incerteza identificadas conjuntamente com a determinação do processo de quantificação da sua dispersão. A recomendação INC-1 (1980) introduziu, para esse efeito, uma classificação suportada no método de avaliação da dispersão adoptado, designando-as por: “*Incerteza padrão do tipo A*” e “*Incerteza padrão do tipo B*”.

Esta classificação distingue duas vias alternativas para se concretizar a determinação das componentes de incerteza, i.e., obter as estimativas das suas variâncias,  $s^2(x_i)$ .

A incerteza padrão do Tipo A é obtida, numa perspectiva frequencista, a partir da estatística da variância de uma amostra experimental de observações. A incerteza padrão do Tipo B resulta da adopção de determinadas funções densidade de probabilidade com expressões de variância conhecidas. A base dessa adopção é o conhecimento prévio existente

sobre a grandeza de entrada em causa – resultante de experimentação, informação bibliográfica, etc. – o que se associa a uma perspectiva bayesiana de análise probabilística.

A transposição do modelo matemático, conforme apresentado em 7.16, para a realidade experimental conduz à introdução de observações das variáveis aleatórias que constituem esse modelo, adoptando-se a formulação seguinte:

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N) \quad (7.16)$$

onde a estimativa da grandeza de saída,  $\hat{y}$ , (simplicadamente representada por  $y$ ), é obtida a partir das estimativas das grandezas de entrada,  $\hat{x}_i$ , (simplicadamente representadas por  $x_i$ ).

Esta expressão (7.16) incorpora estimativas de grandezas de entrada e, associadas a estas, intervalos de dispersão/variância. O GUM apresenta a forma de quantificar ambos estes elementos tratando, de forma diferenciada, aquelas cuja informação é proveniente de *métodos de avaliação do tipo A e do tipo B*.

No primeiro caso, correspondente a uma avaliação suportada num *método do Tipo A*, considera-se que, na presença de uma variável aleatória,  $Q$ , da qual se realiza um número  $n$  ( $n > 1$ ) de observações estatisticamente independentes ( $q_1, \dots, q_n$ ), sujeitas às mesmas condições de medição (leia-se, condições de repetibilidade), a estimativa,  $\hat{q}$ , do valor expectável da grandeza,  $\mu_q$ , é dada pela média aritmética,

$$\hat{q} = \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i \quad (7.17)$$

Adoptando a média aritmética da amostra experimental de dimensão  $n$  (limitada face à dimensão da população) como estimador do parâmetro da população, a estimativa da sua dispersão relaciona-se com uma população de média (de dimensão  $n$ ) determinada pela variância experimental da média,  $\sigma^2(\bar{q})$ ,

$$s^2(\bar{q}) = \frac{1}{n \cdot (n - 1)} \cdot \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 \quad (7.18)$$

a qual possui uma dimensão  $[q]^2$  distinta da dimensão da grandeza mensurável em causa  $[q]$ . Este facto, impõe que se considere como parâmetro de estimativa da dispersão<sup>8</sup> do resultado

<sup>8</sup> No GUM admite-se a possibilidade de se utilizar, em circunstâncias particulares (para parâmetros suportados em amostras com dimensão distinta, mas consideradas “bem-caracterizadas” e sujeitas a um eficaz controlo estatístico), a estimativa ponderada da variância,  $s_p^2(\bar{q})$ , caracterizando a dispersão por essa via:  $s^2(\bar{q}) = \frac{s_p^2}{n}$ .

(média aritmética) – com a mesma dimensão deste – o desvio padrão experimental da média, cuja expressão é dada por:

$$s(\bar{q}) = \sqrt{s^2(\bar{q})} \quad (7.19)$$

No segundo caso, correspondente à avaliação de incertezas de acordo com o método do Tipo B, é apontado o recurso a meios distintos da via da análise estatística com base em observações experimentais.

Para se proceder ao levantamento da informação segundo o método do tipo B, o documento aponta fontes privilegiadas para esse efeito:

- dados relativos a medições anteriores;
- experiência ou conhecimento comum relativo ao comportamento e propriedades de materiais e instrumentos de medição;
- especificações de fabricantes e documentação de carácter técnico e científico;
- dados obtidos em calibrações e certificados.

A utilização desta informação como fonte para a selecção e adopção de funções de probabilidade adequadas à variabilidade das grandezas em causa depende, segundo o ISO–GUM, da *experiência, “bom senso” e conhecimentos gerais* de quem promove este tipo de avaliação. Não surpreende que, por isso, constitua uma das mais significativas dificuldades da sua concretização.

Note-se que, ao se atribuir a uma grandeza de entrada uma F<sub>d</sub>P admite-se, implicitamente, que a sua variância resulta da aplicação da expressão associada à referida função de probabilidade e, tal como no caso anterior, o estimador apropriado à contabilização dessa dispersão é o seu desvio padrão.

#### 7.5.4 Lei de Propagação de Incertezas

O GUM adopta uma nomenclatura particular para expressar as componentes de variabilidade associadas às grandezas integrantes do modelo matemático, de acordo com a seguinte forma:

- componente de *incerteza de medição padrão* associada a uma grandeza de entrada,  $X_i$ :  $u(x_i)$ ;
- contribuição para a *incerteza de medição padrão combinada* associada a uma grandeza de entrada,  $X_i$ :  $u_i(y)$ ;



- componente de *incerteza de medição padrão combinada* associada à mensuranda/grandeza de saída,  $Y$ :  $u_c(y)$ ;
- componente de *incerteza de medição expandida* – para um intervalo de confiança de 95% – associada à mensuranda/grandeza de saída,  $Y$ :  $U_{95}(y)$ .

A determinação da estimativa da grandeza de saída, uma das componentes que é requerida para expressar o resultado da medição, resulta da aplicação das estimativas das grandezas de entrada na relação funcional.

A outra componente requerida para a expressão do resultado da medição é a incerteza de medição, cuja determinação requer o desenvolvimento, a seguir exposto, do que se designa por *Lei de Propagação de Incertezas* (LPI).

A obtenção da pretendida expressão resulta, em primeiro lugar, da recuperação da relação funcional,  $y = f(x_1, \dots, x_N)$ , onde os  $x_i$  representam estimativas de grandezas  $X_i$ , e para as quais existem valores esperados  $(\mu_1, \dots, \mu_N)$ .

A metodologia GUM envolve a aplicação do desenvolvimento em série de Taylor de 1ª ordem em torno do valor do parâmetro  $\mu_i$  (7.20) admitindo, implicitamente, que a relação funcional em causa é linear (caso esta seja não linear, é inevitável contabilizar as componentes de ordem superior do desenvolvimento em série de Taylor, traduzidas na expressão 7.20 no termo *resto de 2ª ordem*).

$$y = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - \mu_i) + r_2(x_i) \quad (7.20)$$

Nesta expressão,  $\mu_i$  e  $x_i$  representam, respectivamente, o valor esperado e a estimativa para cada grandeza de entrada,  $r_2$  representa o resto de 2ª ordem do desenvolvimento em série de Taylor e  $f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$  representa o valor esperado  $\mu_y$ , da mensuranda  $y$ .

Sendo  $\mu_y = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ , a expressão (7.23) pode ser modificada para,

$$y - \mu_y = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - \mu_i) + r_2(x_i) \quad (7.21)$$

a qual, como se pode constatar, constitui o termo utilizável na definição dos momentos centrais relativos à grandeza  $y$  – de saída – e, em particular, do momento central de segunda ordem em torno do valor expectável de  $y$ , i.e., a sua variância. Usando a expressão em causa,

e admitindo que o modelo matemático é linear ( $r_2(x_i) = 0$ ) pode-se determinar o estimador da variância ( $E$  indica o *valor esperado*):

$$\hat{\sigma}_y^2 = E\left[(y - \mu_y)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot (x_i - \mu_i)\right)^2\right] \quad (7.22)$$

e, com base neste, estabelecer o que se designa por Lei de Propagação de Incertezas (LPI) expressa no GUM.

$$s_y^2 = E\left[\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot (x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)\right)\right] \quad (7.23)$$

Atendendo às propriedades do valor expectável, resulta,

$$s_y^2 = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot E[(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)]\right) \quad (7.24)$$

O segundo termo pode ser dividido em dois tipos de componentes: a primeira associada à situação em que ambas as derivadas parciais se reportam à mesma grandeza de entrada ( $i=j$ ), ou seja, associada à variância de cada uma das grandezas de entrada; e a segunda, relativa à situação que se reporta a grandezas de entrada distintas ( $i \neq j$ ), associada à covariância entre esses pares de grandezas. A expressão (7.24) admite uma representação mais explícita do seu conteúdo (7.25) distinguindo as suas componentes da diagonal (variâncias) das restantes componentes cruzadas (covariâncias) que constituem a matriz de variância-covariância.

$$s^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot E[(x_i - \mu_i)^2] + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot E[(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)] \quad (7.25)$$

Esta expressão alternativa, substituindo a indicação de valores esperados pelas representações equivalentes de estimadores de variância,  $s_i^2$ , e de covariância,  $s_{ij}$ , resulta a expressão da LPI conforme se encontra no GUM.

$$s^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot s_{ij} \quad (7.26)$$

$s_{ij}$  representa a covariância estabelecida entre cada par de variáveis aleatórias  $(X_i, X_j)$ , sendo equivalente a  $r_{ij} \cdot s_i \cdot s_j$ , sendo  $r$  o coeficiente de correlação para as variáveis em causa. Consequentemente, a inexistência de correlação – covariância – ou quando se admite que esta é desprezável ( $r_{ij} \cong 0$ , com  $i \neq j$ ), a expressão anterior toma a forma simplificada seguinte:

$$s^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s_i^2 \quad (7.27)$$

Estas duas expressões têm sido difundidas pelo GUM usando uma nomenclatura simplificada.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j) \quad (7.28)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (7.29)$$

Nestas, o termo  $c_i$  designa-se por *coeficiente de sensibilidade* (estes coeficientes traduzem a extensão da influência, determinada pela variabilidade de cada grandeza de entrada, na estimativa da grandeza de saída) e a contribuição de cada uma das grandezas de entrada para a

incerteza da mensuranda é dada por :  $u_i^2(y) = c_i^2 \cdot u^2(x_i) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)$ .

### 7.5.5 Incerteza de medição expandida

O GUM assume (com base nas suas condições de aplicabilidade e motivada pela aplicação do Teorema do Limite Central) que a distribuição de probabilidade da grandeza de saída,  $y$ , tem uma configuração do tipo normal.

Neste contexto, a incerteza de medição padrão equivale a um desvio-padrão experimental que, de acordo com esta distribuição, representa um intervalo de confiança da ordem de 68%. Em Metrologia, este intervalo é considerado insuficiente para garantir um grau de confiança aceitável entendendo-se, por convenção, que o valor adequado para a sua expressão deve corresponder a um intervalo de confiança de 95 % (nalgumas áreas específicas de aplicação da Metrologia – como as relacionadas com a medicina – o intervalo de confiança usado é superior – 99%, por exemplo).

Para se efectuar a pretendida expansão do nível de confiança, a estratégia utilizada consiste em multiplicar a incerteza de medição padrão por um *factor de expansão*,  $k_p$ , variável consoante o nível de confiança pretendido. Dessa forma, a *incerteza expandida da medição*,  $U$ , vem dada por:

$$U_p(y) = k_p \cdot u_c(y) \quad (7.30)$$

Admitindo a adequação da representação da distribuição normal, a ampliação do intervalo de confiança de cerca de 68% para cerca de 95% corresponde a uma relação equivalente de 1 desvio-padrão para dois desvios-padrão (em rigor, essa ampliação corresponde a  $1,96\sigma$ ); o GUM admite a utilização de  $k_p = 2,00$  como *factor de expansão*.

O próprio GUM, no entanto, alerta para a necessidade do cumprimento de certos requisitos para que esta aproximação seja, efectivamente, aplicável. Nesse sentido, ele refere que: *reconhecendo a dificuldade de confirmar experimentalmente a presunção de aplicabilidade da distribuição normal aos casos reais, apontam-se circunstâncias em que esta adequação se pode assumir, designadamente, quando os casos de aplicação possuem, pelo menos, 3 componentes distintas de incerteza, com distribuições de probabilidade bem comportadas e provenientes de grandezas independentes, por exemplo, distribuições normais e distribuições uniformes, contribuindo para a estimativa da incerteza de medição padrão com quantidades comparáveis. Nessas circunstâncias (e considerando que as amostras que as suportam também o permitem), admite-se que se está no âmbito de validade do Teorema do Limite Central e, conseqüentemente, que a distribuição de probabilidade da grandeza de saída (mensuranda) é, com elevado grau de aproximação, do tipo normal. Do mesmo modo, considera-se que este critério é atingido se nenhuma das componentes de incerteza obtidas por um método do tipo A for baseada numa amostra inferior a 10 observações.*

Facilmente se depreende a dificuldade de validação genérica deste conjunto de requisitos à realidade experimental. Com efeito, existem diversas razões que, frequentemente, impedem a verificação desses requisitos, sendo a razão mais comum a realização de um número reduzido de observações (nalguns casos, envolvendo ensaios destrutivos, é possível realizar apenas uma única observação). Sendo essa situação comum, o GUM indica um procedimento alternativo que recorre à aplicação da distribuição de probabilidade *t*-Student, como forma de ponderar o factor de expansão em função do número de graus de liberdade efectivos. É esse processo que se expõe em seguida.

A introdução da distribuição de probabilidade *t*-Student origina a necessidade de se efectuar uma análise do número de graus de liberdade associados à grandeza de saída, uma vez que este parâmetro determina o factor de expansão a adoptar. Esta análise é distinta consoante se tratem componentes de incerteza obtidos mediante a aplicação do método do tipo A – suportados em análise estatística decorrente de ensaios experimentais – ou do tipo B – decorrentes de uma avaliação probabilística com base em informação fidedigna.

No caso de componentes de incerteza do tipo A, essa avaliação é directa, uma vez que, sendo a dimensão da sua amostra constituída por *n* observações, o número de graus de liberdade,  $\nu_i$ , corresponde a (*n*–1) valores independentes (esta regra torna-se impraticável no caso de se efectuar uma única observação, conduzindo a uma indeterminação na aplicação da expressão 7.33).

No caso de componentes de incerteza do tipo B esta análise revela-se mais complexa e, de certa forma arbitrária, uma vez que em circunstâncias comuns não existe informação suficiente acerca da dimensão das amostras que suportam a adopção da informação. Neste caso, encontra-se no GUM uma expressão que visa relacionar o número de graus de liberdade com o *grau de fiabilidade* da informação utilizada.

$$\nu_i = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^{-2} \quad (7.31)$$

Nesta expressão, o *grau de fiabilidade*, *R*, da informação é dado por  $R=1-[\Delta u(x_i)/u(x_i)]$ , onde  $\Delta u(x_i)$  representa a estimativa da percentagem de “incerteza” inerente ao valor limite atribuído à incerteza de medição,  $u(x_i)$ . Por exemplo, considerando que  $\Delta u(x_i)/u(x_i)$  é igual a 0,1 (i.e., 10%), o *grau de fiabilidade* da informação corresponde a 0,9 (ou seja, admite-se que os limites atribuídos definem um intervalo que incorpora 90% das possibilidades de valores observados) e, conseqüentemente,

$$\nu_i = \frac{1}{2} \cdot [0,1]^{-2} = 50 \text{ graus de liberdade} \quad (7.32)$$

A utilização da distribuição de probabilidade *t*-Student em substituição da distribuição normal requer a determinação do número de graus de liberdade efectivos associados à grandeza de saída, uma vez que o factor de expansão,  $t_p$ , para uma probabilidade *p* depende desse parâmetro:  $t_p = t_p(\nu_{ef})$ . No GUM aponta-se como forma de resolução dessa questão a utilização da fórmula empírica de Welch-Satterthwaite,

$$v_{ef} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (7.33)$$

e com base no resultado obtido, é possível determinar o pretendido factor de expansão. Existem diversas referências onde se indicam tabelas que relacionam os graus de liberdade efectivos com o factor de expansão – considerando um intervalo de confiança de 95 % (GUM (1995) e VIM (1994)), transcrevendo-se um conjunto de valores dessas tabelas. Note-se que o recurso a níveis de amostragem baixos pode conduzir a que a relação de expansão tome valores significativos extremos para o valor de 1 grau de liberdade onde a expansão resulta da aplicação de um factor de aproximadamente 14 vezes).

*Quadro 7.1: Determinação do factor de expansão (95%) com base nos graus de liberdade efectivos usando a distribuição de probabilidade t-Student*

$v_{ef}$	$k_p$	$v_{ef}$	$k_p$	$v_{ef}$	$k_p$	$v_{ef}$	$k_p$
1	13,97	8	2,37	15	2,18	30	2,09
2	4,53	9	2,32	16	2,17	35	2,07
3	3,31	10	2,28	17	2,16	40	2,06
4	2,87	11	2,25	18	2,15	45	2,06
5	2,65	12	2,23	19	2,14	50	2,05
6	2,52	13	2,21	20	2,13	> 50	2,00
7	2,43	14	2,20	25	2,11		

Finalmente, conhecido o valor do factor de expansão, é possível determinar a incerteza de medição expandida usando a expressão (7.34) atingindo o objectivo pretendido.

$$U_p(y) = t_p(v) \cdot u_c(y) \quad (7.34)$$

### 7.5.6 Procedimento sintetizado de avaliação de incertezas de medição e tabela de balanço de Incertezas

A exposição apresentada nas secções anteriores permite constituir um procedimento genérico, onde se efectua uma síntese das etapas envolvidas na avaliação das incertezas de medição expandidas, integrando as seguintes etapas:

- i) expressão, em termos matemáticos, da dependência funcional da mensuranda (grandeza de saída)  $Y$ , relativamente às grandezas de entrada,  $X_i$ ;
- ii) determinação das expressões das derivadas parciais que constituem os coeficientes de sensibilidade;
- iii) determinação das estimativas das grandezas de entrada, respectivos graus de liberdade e coeficientes de sensibilidade (para a estimativa da mensuranda em causa);

- iv) identificação e aplicação de todas as correcções significativas e determinação da estimativa da mensuranda;
- v) listagem de todas as fontes de incerteza num formato adequado à aplicação da *tabela de balanço de incertezas de medição* e identificação daquelas que seguem um método de avaliação do *Tipo A* ou do *Tipo B*;
- vi) cálculo do desvio-padrão experimental da média,  $s(\bar{q})$ , para grandezas sujeitas a medições repetidas (de acordo com os critérios definidos para componentes de incerteza obtidas pelo método do tipo A, designadamente, relativos à independência das observações);
- vii) adopção, para valores singulares, por exemplo relativos a medições obtidas anteriormente, valores de correcção ou valores de literatura, de uma incerteza de medição padrão de acordo com os critérios definidos na secção dedicada à determinação de incertezas de medição pelo método do tipo B;
- viii) determinação, para grandezas de entrada cuja distribuição de probabilidade é conhecida ou pode ser assumida, do seu valor expectável e da sua incerteza de medição padrão com base nos critérios definidos na secção dedicada à determinação de incertezas de medição pelo método do tipo B;
- ix) cálculo, para cada grandeza de entrada  $X_i$ , da sua contribuição,  $u_i(y)$ , para a incerteza de medição padrão da grandeza de saída, resultante da estimativa da grandeza de entrada,  $x_i$ , combinar as diversas componentes de acordo com a Lei de Propagação de Incertezas (tomando em atenção a possibilidade de existência de grandezas de entrada correlacionadas) para obtenção da incerteza de medição padrão combinada,  $u_c(y)$ ;
- x) determinação do factor de expansão do nível de confiança da incerteza padrão, com base no número de graus de liberdade efectivos obtidos mediante a utilização da fórmula de Welch–Satterthwaite, aplicável no caso de se considerar a aplicação da função densidade de probabilidade t–Student ou, utilizar o valor  $k_p=2,00$  para o factor de expansão, no caso de se adoptar a função densidade de probabilidade normal;
- xi) determinação da incerteza de medição expandida  $U_p(y)$  multiplicando a incerteza de medição padrão  $u_c(y)$ , pelo factor de expansão  $k_p$  adequado;
- xii) reporte do resultado da medição incorporando a estimativa  $y$  da mensuranda, a incerteza de medição expandida  $U_p(y)$  associada e o factor de expansão  $k_p$  determinado.

A tradução deste procedimento numa sequência de operações sob a forma de diagrama, apresentado na Figura 7.5, contém os mesmos elementos da síntese apresentada incluindo as etapas (aplicáveis no caso de utilização da distribuição de probabilidade *t*-Student) que

permitem atingir a pretendida incerteza de medição expandida a incluir na apresentação do resultado da medição.

De modo a facilitar a constituição, a compreensão e a comparabilidade da avaliação de incertezas de medição aplicada aos casos concretos, o GUM contém uma estrutura de tabela designada por *tabela de balanço de incertezas de medição*, exposta no Quadro 7.2, contendo a informação de suporte aos cálculos efectuados, sendo este modelo amplamente difundido na Metrologia.

Esta tabela não incorpora a informação adicional que é necessária à expansão do intervalo de confiança em condições onde se substitui a utilização da distribuição de probabilidade normal pela distribuição de probabilidade *t*-Student (admitindo a aplicabilidade da distribuição normal, o valor do factor de expansão para um intervalo de confiança de 95 % é simplesmente igual a 2,00). No caso em que, pelas razões invocadas anteriormente, se torna necessário recorrer à distribuição de probabilidade *t*-Student, consequentemente, torna-se necessário efectuar o cálculo do número de graus de liberdade efectivos, propondo-se um rearranjo alternativo da tabela anterior apresentado no Quadro 7.3.



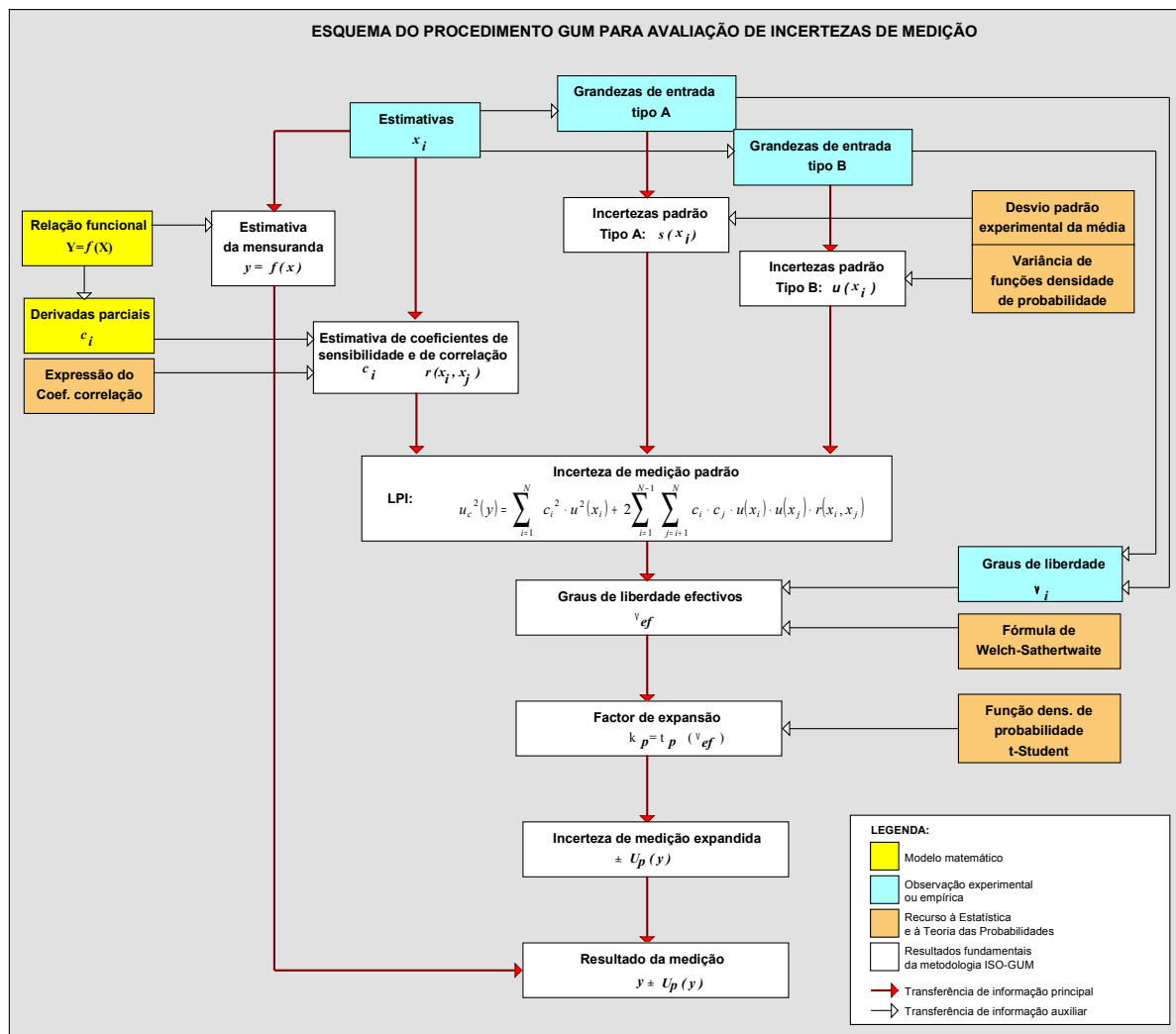


Figura 7.5: Procedimento de avaliação da incerteza de medição expandida e expressão do resultado da medição usando o GUM

Quadro 7.2: Tabela de balanço de incertezas de medição

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão da grandeza de saída: $u_i(y)$
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	
$X_1$	$x_1$	$u(x_1)$	$c_1$	$u_1(y)$
$X_2$	$x_2$	$u(x_2)$	$c_2$	$u_2(y)$
...	...	...	...	...
$X_N$	$x_N$	$u(x_N)$	$c_N$	$u_N(y)$
$Y$	$y$			$u_c(y)$

Quadro 7.3: Tabela de balanço de incertezas de medição usando a distribuição de probabilidade *t*-Student

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$X_1$	$x_1$	$u(x_1)$	$c_1$	$u_1(y)$	$\nu_1$
$X_2$	$x_2$	$u(x_2)$	$c_2$	$u_2(y)$	$\nu_2$
...	...	...	...	...	...
$X_N$	$x_N$	$u(x_N)$	$c_N$	$u_N(y)$	$\nu_N$
		Incerteza de medição padrão		$u_c(y)$	
		Graus de liberdade efectivos			$\nu_{ef}$
		Factor de expansão			$t_p(\nu_{ef})$
$Y$	$y$	Incerteza de medição expandida		$U_p(y)$	

## 7.6 Avaliação de incertezas de medição pelo método de Monte Carlo

### 7.6.1 Introdução

A aplicação da MCS à análise e determinação de incertezas de medição padrão no contexto da Metrologia, enquanto metodologia alternativa à utilização do GUM, é uma ideia recentemente desenvolvida cuja origem se encontra em finais da década de 90.

A introdução do método de Monte Carlo no contexto da avaliação de incertezas de medição resulta quer do seu potencial para a resolução de problemas de natureza metrológica não cobertos pelo GUM (por exemplo, sistemas de medição cujos modelos são não lineares) quer da sua utilidade como elemento de validação de aproximações constantes da metodologia do mesmo guia.

### 7.6.2 Etapas da simulação numérica usando MCS

A avaliação das incertezas de medição envolve 3 etapas genéricas, duas das quais (o estabelecimento da relação funcional e a identificação das distribuições de probabilidade associadas às grandezas de entrada) constituem a fase de formulação comum a ambas as metodologias e, por essas razões, a sua descrição não é repetida nesta parte.

A terceira etapa é o elemento de distinção da MCS face a outros métodos alternativos e, em particular, ao GUM. Com efeito, na abordagem MCS recorre-se à simulação numérica

como via de “combinação” da informação de entrada para a obtenção da informação de saída pretendida.

O processo de simulação envolve, genericamente, o conjunto de tarefas que é identificado nos itens que se seguem e na Figura 7.6, sendo o seu detalhe apresentado conjuntamente com a diagrama da Fig. 7.4.

- i) geração de sequências de números pseudo-aleatórios, com distribuição de probabilidade uniforme no intervalo  $[0,1]$ , para cada uma das grandezas de entrada que integram a relação funcional;
- ii) conversão de cada uma das sequências numéricas noutra cuja distribuição de probabilidade e respectivos limites representem as funções adoptadas como representativas do comportamento probabilístico das grandezas de entrada;
- iii) combinação dos valores das diferentes sequências numéricas de acordo com a relação funcional específica de representação da medição, para se obterem sequências numéricas de valores da mensuranda e, conseqüentemente, da sua distribuição de probabilidade;
- iv) ordenação da sequência de saída, estabelecendo uma relação entre os valores numéricos e os percentis da função distribuição de probabilidade empírica;
- v) determinação, com base na sequência de valores de saída, da melhor estimativa da grandeza de saída mediante a determinação da estimativa de valor médio;
- vi) determinação, com base na sequência ordenada de valores de saída, dos valores limite do intervalo de incerteza de medição (de acordo com determinado nível de confiança pretendido) e avaliação da adequação do grau de exactidão obtido face aos requisitos do problema.

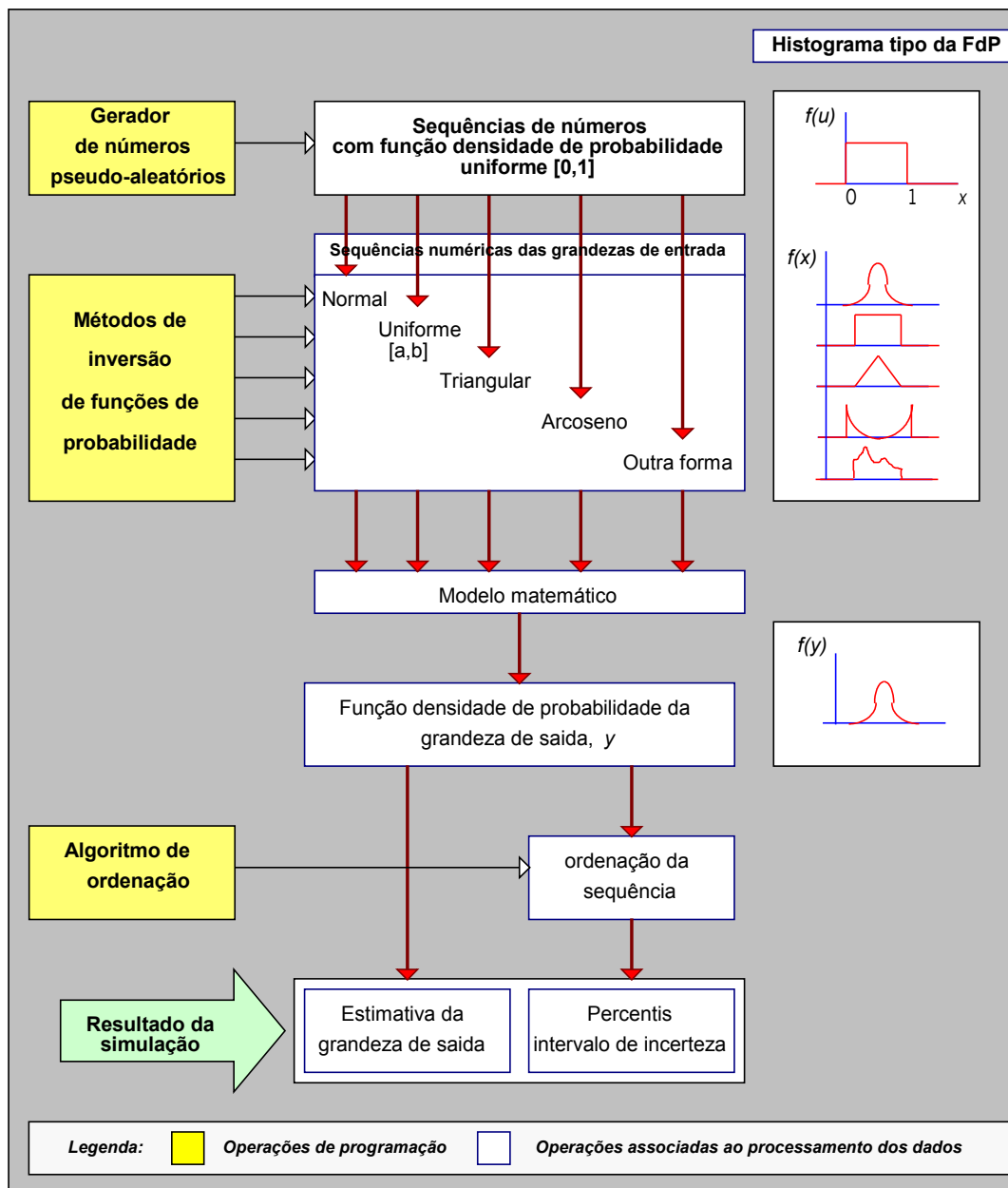


Figura 7.6: Diagrama ilustrativo da determinação da incerteza de medição usando a MCS

### 7.6.3 Factores determinantes para o sucesso da aplicação MCS

A metodologia desenvolvida no contexto da MCS evidencia 4 factores determinantes para o seu sucesso: a “qualidade” do algoritmo gerador de números pseudo-aleatórios; a adequação das funções e algoritmos que promovem a conversão de distribuições de probabilidade; a capacidade do algoritmo de ordenação das sequências; e a dimensão da sequência de saída gerada face às exigências de exactidão requerida.

Os geradores de números pseudo-aleatórios condicionam o sucesso da simulação por serem responsáveis pela criação do suporte numérico original de dados da mesma. Por isso, o

facto do gerador possuir características inadequadas (por exemplo, de enviesamento), produz, necessariamente, uma imediata perturbação que é nociva aos resultados que se pretende obter.

Dada a diversidade de possibilidades inerente à adopção de um algoritmo gerador, existe uma dificuldade concreta na sua selecção, sendo conveniente efectuar uma análise prévia dos requisitos de exactidão e das suas características previsíveis de desempenho (cf. exposto no capítulo 6).

No final deste processo de análise, dispõe-se de um algoritmo adequado para promover esta etapa da simulação, devendo, em seguida, recorrer-se a um compilador e um computador adequados para a sua concretização.

Consumada a etapa anterior, dispõe-se de um gerador capaz de produzir sequências de números “pseudo-aleatórios”, de acordo com uma distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ . A tarefa seguinte consiste em efectuar a conversão dessas sequências noutras sequências que respeitem diferentes funções densidade de probabilidade – ou a mesma distribuição uniforme mas com limites distintos.

Foram concebidos diversos algoritmos especialmente adaptados a esta tarefa, havendo, na actualidade, conhecimento de um conjunto destes que permitem a conversão para os casos mais frequentes (normal/gaussiana,  $t$  de Student, exponencial, logarítmica, triangular, trapezoidal, arcocoseno, entre outras). As metodologias conhecidas são diversificadas (método de inversão de funções, método directo de conversão, método de aceitação-rejeição, etc., cf. capítulo 6) possuindo abordagens e algoritmos distintos entre si. Revela-se importante a garantia da qualidade da metodologia utilizada, uma vez que, tal como no caso anterior, a incorrecta execução desta tarefa provocará uma influência indesejável nos resultados obtidos.

O algoritmo de ordenação da sequência de valores de saída deve ser seleccionada atendendo não só à finalidade pretendida mas, também, à sua eficiência, uma vez que a rotina adoptada pode ser determinante para o consumo de tempo de execução da simulação. Aparte desta questão, a componente de ordenação dos dados em sequências tem, no contexto da MCS, uma dupla funcionalidade: é utilizável como ferramenta na análise da adequação das sequências numéricas geradas relativamente às  $F_dP$  pretendidas, designadamente, da distribuição de probabilidade uniforme, recorrendo a testes estatísticos (por exemplo, o teste de Kolmogorov-Smirnov); e é necessária para a determinação dos percentis que determinam os limites dos intervalos de incerteza, objectivo primordial do desenvolvimento da simulação neste contexto da Metrologia.

Dada a dimensão típica das sequências utilizadas para simulação usando o método de Monte Carlo (que, neste domínio, recorre a sequências com um número total de valores que pode ir desde  $10^4$  a  $10^7$ , a selecção de uma rotina que optimize o processo de ordenação assume uma importância apreciável, mesmo considerando o desenvolvimento tecnológico dos suportes computacionais onde se desenvolve. Esta importância é acentuada pelo facto de, como foi referido, intervir em distintas fases do processo.

O critério de selecção deverá integrar os aspectos de facilidade de concretização, suportada em ferramentas computacionais disponíveis e utilizadas para o desenvolvimento de outras tarefas no processo de simulação.

O quarto elemento, consiste no processo de avaliação da exactidão dos percentis e da sua adequação face aos requisitos de exactidão do problema específico. Esta análise encontra-se directamente relacionada com a dimensão da sequência numérica (sequências de maior dimensão permitem incrementar a exactidão dos percentis) e, por isso, é determinante.

De facto, esta vertente particular pode condicionar todo o processo de simulação, dado que, por um lado, os requisitos de exactidão podem impor um aumento da dimensão das sequências numéricas mas, por outro lado (cf. apontado no cap. 6), existem majorantes para as dimensões úteis geradas por cada tipo de gerador sendo necessário, portanto, encontrar um equilíbrio entre ambas as variáveis ou, então, considerar inapropriada a utilização de determinado gerador para uma finalidade específica. Recordar-se que a exposição da formulação relativa à determinação dos intervalos de confiança dos percentis foi tratada em detalhe na secção 7.3.3.5.

#### 7.6.4 Procedimento para aplicação da metodologia MCS

A elaboração de um procedimento genérico para a utilização da MCS na avaliação de incertezas de medição, na sequência do que foi apontado nas secções anteriores, resulta do agrupamento dos elementos referenciados em etapas de acordo com a ordem que se segue (ilustrada, também, na Figura subsequente).

- i) expressão, em termos matemáticos, da dependência funcional da mensuranda (grandeza de saída)  $Y$ , das grandezas de entrada,  $X_i$ ;
- ii) identificação das distribuições de probabilidade e respectivos parâmetros associados a cada grandeza de entrada considerada,  $X_i$ ;
- iii) selecção de um gerador de números pseudo-aleatórios adequado para a MCS;

- iv) geração de sequências de números pseudo-aleatórios, com dimensão  $D$  e com distribuição de probabilidade uniforme, no intervalo  $[0,1]$ ;
- v) ordenação das sequências utilizando um algoritmo adequado;
- vi) verificação da adequação de cada sequência relativamente às características da função densidade de probabilidade pretendida (uniforme, no intervalo  $[0,1]$ ), usando ferramentas estatísticas adequadas;
- vii) selecção de metodologias de conversão de distribuições de probabilidade adequadas às características das variáveis aleatórias associadas a cada grandeza de entrada;
- viii) conversão das sequências de valores obtidos em iv) noutras sequências, com função densidade de probabilidade adequada a cada uma das grandezas de entrada;
- ix) combinação dos valores das sequências associadas às grandezas de entrada, de acordo com a relação funcional determinada, permitindo a obtenção de uma sequência de valores de saída da mensuranda;
- x) determinação do valor mais provável da mensuranda recorrendo a estimadores de natureza estatística (valor médio, mediana, ...) e à amostra de valores obtida;
- xi) ordenação da sequência de valores da mensuranda, permitindo a obtenção dos percentis adequados à determinação dos limites inferior e superior que definem o intervalo de incerteza dentro de um intervalo de confiança pretendido;
- xii) determinação do intervalo de confiança dos percentis a utilizar em xiii) como elemento de avaliação do cumprimento do critério de exactidão;
- xiii) determinação da exactidão requerida e comparação com a exactidão dos percentis resultante da simulação, verificando a concordância com o critério de aceitação. Quando o critério de exactidão não é observado, dever-se-á repetir, de forma iterativa, o procedimento descrito entre iv) e xii), incrementando a dimensão da sequência de números pseudo-aleatórios  $D$  até se cumprir o requisito do critério de exactidão;
- xiv) expressão do resultado da simulação através do estimador da mensuranda e do respectivo intervalo de incerteza expandida.

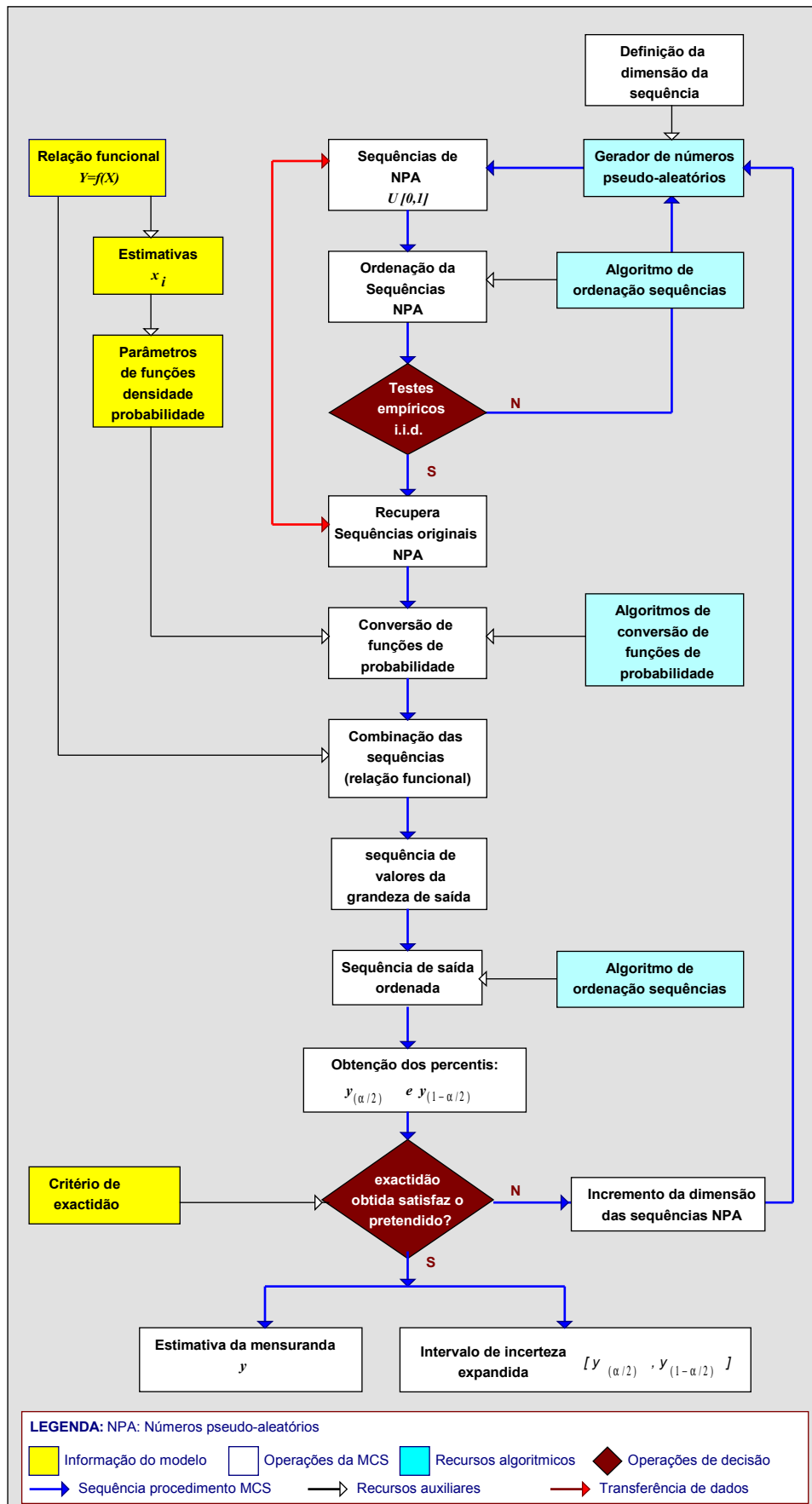


Figura 7.7: Processo MCS conducente à expressão do resultado da medição



### 7.6.5 Selecção de ferramentas para a concretização experimental da metodologia MCS

A concretização prática de simulações numéricas usando a MCS, visando a obtenção de resultados relacionados com a vertente experimental da medição, requer a selecção de ferramentas para as tarefas envolvidas no procedimento descrito anteriormente.

#### 7.6.5.1 Gerador de números pseudo-aleatórios

A selecção de um gerador para a realização de simulações de acordo com o método de Monte Carlo, atendendo à importância que esta escolha representa, foi efectuada atendendo aos requisitos particulares das aplicações envolvidas e ao estudo prévio dos diferentes tipos de geradores e das suas características. A opção tomada foi favorável à utilização do gerador de Hill–Wichmann.

O estudo sobre esta matéria descrito no capítulo 6 permitiu verificar que o recurso a alguns algoritmos mais simples (congruenciais, por exemplo) seria desaconselhado. Por outro lado, a utilização de geradores baseados em registos de deslocamentos, embora evidenciando melhor desempenho relativamente a propriedades como o período máximo, possuem um maior grau de complexidade quanto à sua concretização. Desta forma concluiu-se, numa primeira fase, que as opções consideradas mais equilibradas – ponderando as exigências inerentes aos requisitos de exactidão dos problemas de Metrologia – apontavam para a selecção de geradores congruenciais combinados do tipo Hill-Wichmann (H-W) ou de L’Ecuyer (L’E).

Com efeito, estes dois tipos de geradores, de “qualidade” intermédia, possuem algumas vantagens, nomeadamente, no que se refere aos geradores congruenciais:

- a possibilidade de incremento da dimensão do período máximo, resultante da combinação de geradores congruenciais simples;
- ser mínimo o acréscimo de complexidade resultante da combinação de geradores congruenciais simples;
- a existência de estudos evidenciando o bom desempenho destes geradores quando sujeitos a testes particularmente exigentes, como é o caso dos “testes DIEHARD” de Marsaglia.

e no que se refere aos geradores de registos de deslocamento:

- uma vantagem relativa consiste em, para os níveis de exactidão requeridos, ser possível utilizar qualquer um destes, envolvendo um menor grau de complexidade estrutural do algoritmo de programação.

A ponderação de outros aspectos revelou-se igualmente importante:

- a compatibilidade entre o desempenho do gerador nas simulações a realizar e os seus requisitos computacionais e outros (por exemplo, de ocupação de memória, tempo de execução, portabilidade do algoritmo, etc.);
- a existência de estudos de M. Cox utilizando o gerador H-W, cujos resultados se pretendeu analisar;
- a qualidade dos resultados dos testes efectuados como garantia da sua robustez e sensibilidade face à natureza dos problemas envolvidos.

Dentro desta linha de orientação, o passo seguinte da selecção consistiu em escolher um dos dois geradores (H-W e L'E) optando-se pelo primeiro por duas ordens de razões:

- a simplicidade de programação do algoritmo AS132 H-W;
- o resultado da execução do algoritmo AS132 H-W produz valores no intervalo  $[0,1]$  – correspondentes aos limites da função densidade de probabilidade uniforme pretendida – enquanto que o algoritmo de L'Ecuyer produz valores no intervalo  $[0,m]$  impondo a necessidade adicional de se efectuar a conversão para o intervalo pretendido  $[0,1]$ .

Após esta selecção, efectuou-se uma análise complementar constituída por um conjunto de estudos visando avaliar o gerador em cinco perspectivas distintas:

- a caracterização e adequação do período “útil” das sequências geradas face aos requisitos típicos de exactidão;
- a caracterização do comportamento dos parâmetros estatísticos – média e desvio padrão – em função da dimensão da sequência;
- a uniformidade e independência dos valores das sequências;
- a sensibilidade face a modificação mínima de cada um dos valores de semente;
- a comparação de desempenho com geradores comerciais constituindo potenciais alternativas válidas à utilização deste gerador.

Outras perspectivas de estudo, igualmente válidas, poderiam ter sido consideradas. No entanto, uma vez que o gerador H-W foi testado e validado por outros autores (por exemplo, Sakamoto *et al* (1995)), considerou-se apropriado este conjunto de ensaios de validação que foi concretizado.

O estudo para caracterização e adequação do período “útil” parte da regra que sugere que a dimensão útil da sequência não deve ultrapassar o valor de  $\sqrt{p}$ , onde  $p$  é o período total. Este tipo de gerador possui período máximo de  $2,44 \cdot 10^6$  (cf. exposto no cap. 6).

De acordo com a experiência do autor, reflectida em particular nos resultados apresentados no capítulo 8, os critérios de exactidão pretendidos são atingidos com sequências cuja dimensão se encontra compreendida entre 50 000 e 150 000. Assim, embora se admita que o recurso a outro tipo de geradores possibilite a utilização de sequências de maior dimensão, para efeito de aplicação neste tipo de estudos, não foi encontrado até ao momento qualquer impedimento para a utilização das dimensões típicas apontadas.

*O estudo para caracterização do comportamento dos parâmetros estatísticos em função da dimensão da sequência*, teve como suporte a realização de um conjunto de simulações, com diferentes valores de semente, para os quais se calcularam os parâmetros média aritmética e desvio-padrão, e se observou a convergência destes para os valores teóricos expectáveis.

Os valores teóricos expectáveis resultam de se considerar uma distribuição de probabilidade uniforme no intervalo  $[0,1]$ , cujo valor médio é 0,5 e cujo desvio-padrão (obtido através da determinação da variância) é, aproximadamente, 0,577. Foram obtidas sequências com dimensão compreendida entre 1 000 e 2 000 000 de valores (valor próximo da máxima dimensão útil de uma sequência gerada pelo algoritmo H-W).

Os resultados para diferentes sequências (resultantes da utilização de 20 vectores de semente distintos) evidenciam que os parâmetros média aritmética e desvio padrão convergem rapidamente para os valores teóricos, atingido na região correspondente a sequências da ordem de 100 000 valores, estabilizando esse valor para dimensões superiores. Em ambos os casos, para sequências iguais a 100 000 valores ou superiores, o grau de aproximação considera-se aceitável, encontrando-se compreendido numa banda de  $\pm 0,5\%$ .

Ainda neste contexto, foi efectuado um teste complementar que consistiu na identificação do vector de semente que produziu maiores desvios – o vector  $[28434, 25696, 27494]$  – o qual foi sujeito a três ensaios distintos, fazendo variar em cada um deles um dos elementos do vector (IX, IY, e IZ) entre 1 e 30 000 (este último corresponde, aproximadamente, ao limite máximo admitido). No primeiro caso, por exemplo, realizaram-se 30 000 sequências com vectores de semente  $[1 \text{ a } 30\ 000, 25696, 27494]$ . Com estas sequências foram determinados os parâmetros média aritmética e desvio padrão.

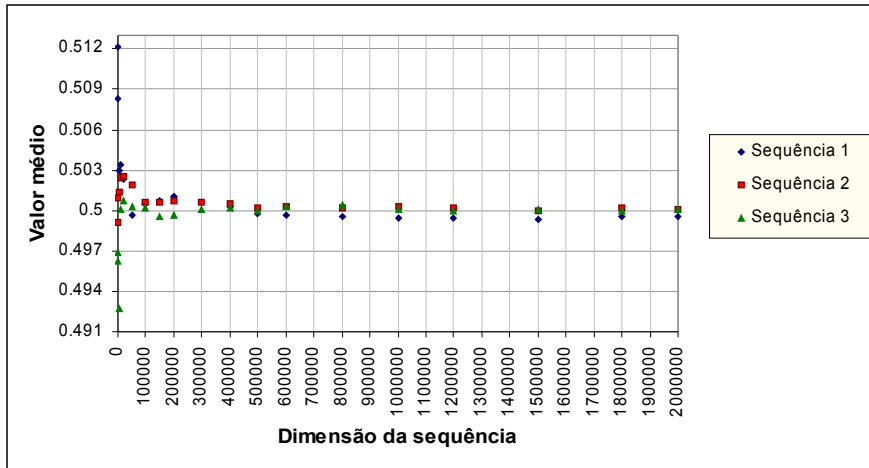


Figura 7.8: Média aritmética em função da dimensão (3 sequências distintas)

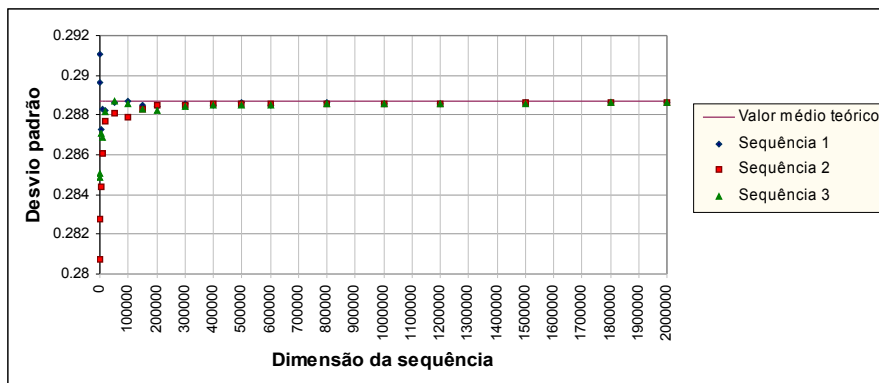


Figura 7.9: Desvio-padrão em função da dimensão da sequência (3 sequências distintas)

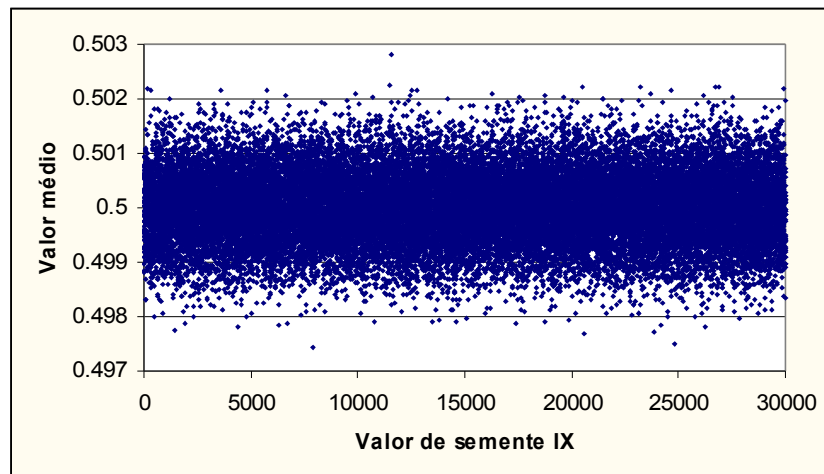


Figura 7.10: Distribuição de valores médios obtidos com variação do valor de semente IX (1 a 30 000) em sequências de 200 000 valores

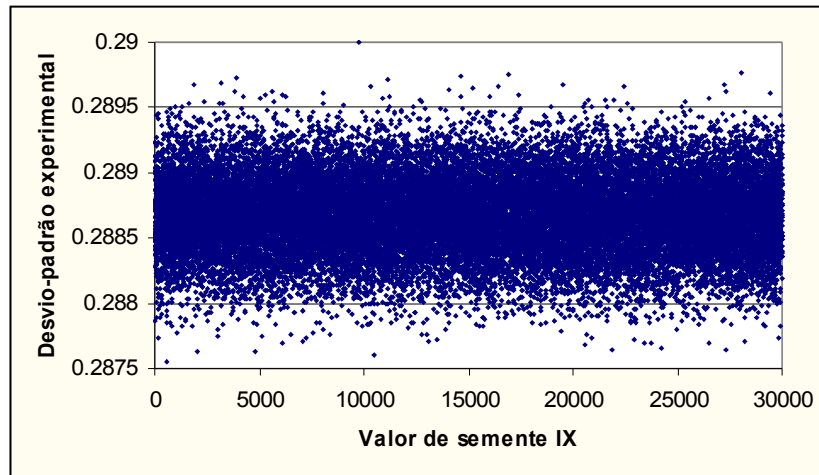


Figura 7.11: Distribuição de desvios-padrão experimentais obtidos com variação do valor de semente IX (1 a 30 000) em seqüências de 200 000 valores

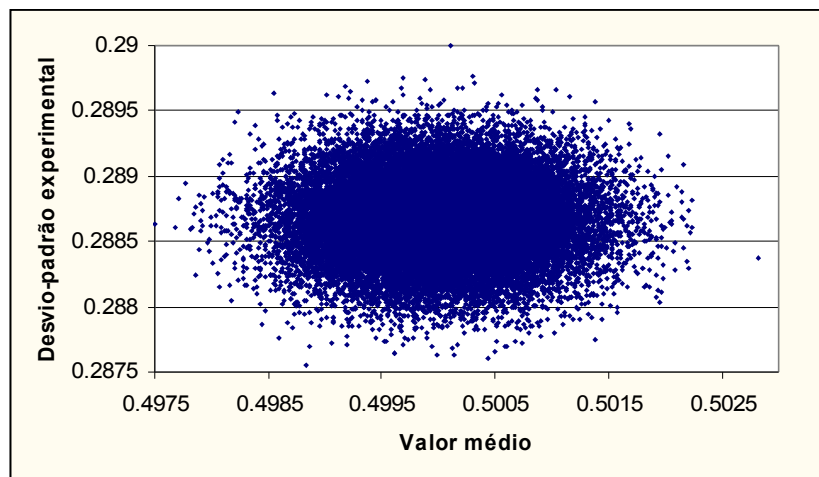


Figura 7.12: Distribuição de valores médios vs. desvios-padrão experimentais obtidos com variação do valor de semente IX (1 a 30 000) em seqüências de 200 000 valores

Os valores obtidos evidenciam os seguintes aspectos:

- a distribuição dos valores médios e dos desvios-padrão são centrados no valor teórico respectivo;
- o motivo inicial de selecção – valor médio igual a 0,5011, mais afastado do valor teórico – na distribuição de valores médios encontra-se na periferia da banda de valores médios, numa zona de rejeição da ordem dos 5%. O mesmo se conclui no caso dos desvios padrão;
- da observação da representação conjunta (XY) de valor médio e desvio padrão não se apresenta, visualmente, uma indicação de correlação entre os valores, traduzida no valor do coeficiente de correlação encontrado, igual a 0,00515;
- no caso dos valores médios, a dispersão detectada aponta para valores genericamente inferiores a 0,2%;
- no caso dos desvios-padrão, essa dispersão é tipicamente inferior a 1%;

- a distribuição de valores médios e de desvios padrão possui uma F<sub>d</sub>P cuja configuração é aproximadamente normal, como se exhibe na Figura seguinte, contendo os valores médios obtidos com a variação do valor de semente IY.

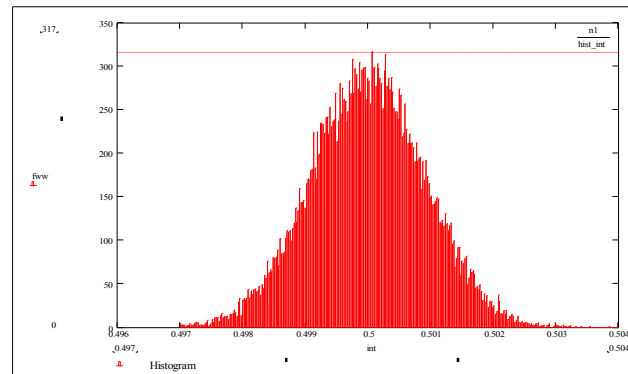


Figura 7.13: Histograma de valores médios obtidos ( valor de semente IY entre 1 e 30 000)

O estudo da uniformidade e independência das sequências observadas resultou, por um lado, da aplicação do teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) e da observação da distribuição de valores num plano bidimensional.

No primeiro caso, da aplicação do teste K-S, para sequências de 10 000 valores observou-se uma taxa de dúvida ou rejeição de 20%, para sequências de 50 000 valores uma taxa de 10% e para sequências de 100 000 valores todas obtiveram resultados considerados satisfatórios (parâmetros  $K^-$  e  $K^+$  compreendidos entre 20% e 80% - sendo a região de rejeição inferior a 10% ou superior a 90%). No entanto, apesar disso, considerou-se útil incorporar este tipo de teste, de forma sistemática, às sequências utilizadas em simulação como processo de garantia da sua qualidade. Refira-se, ainda, que, tendo sido geradas cerca de 100 sequências, aplicadas na simulação descrita nos capítulos 8 e 9, foi encontrada uma taxa de insucesso/rejeição de 2% (duas sequências rejeitadas), o que veio confirmar a conveniência da opção de execução sistemática desse teste.

*No que se refere à distribuição de valores sucessivamente gerados, a sua disposição numa representação bidimensional não evidencia a presença de padrões que possam reflectir deficiências em uniformidade. O gráfico seguinte ilustra uma dessas representações bidimensionais, obtida com 10 000 valores, e equivalente às que se obtiveram com as restantes 19 sequências. Este ensaio foi efectuado recorrendo a sequências de 10000 e de 50000 valores.*

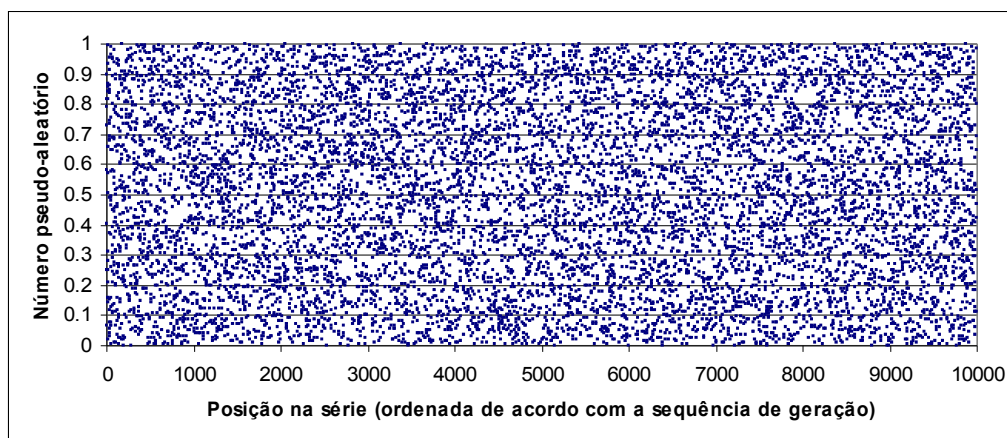


Figura 7.14: Distribuição sequencial de uma série de valores gerados

O estudo da sensibilidade do gerador face a modificação mínima de cada um dos valores de semente consistiu na introdução de modificações mínimas dos valores de semente (um de cada vez), observando-se o coeficiente de correlação entre cada par de valores das sequências resultantes. A tabela seguinte indica os coeficientes de correlação obtidos para cada par de sequências (sendo indicados os elementos dos seus vectores de semente).

Quadro 7.4: Coeficientes de correlação relativos aos pares de sequências produzidas com variação mínima num dos elementos do vector de semente

Valores de semente			Coeficiente de correlação (100 valores)	Coeficiente de correlação (1000 valores)	Coeficiente de correlação (10000 valores)
IX	IY	IZ			
127	17950	20303	$-4,189 \cdot 10^{-2}$	$-8,75 \cdot 10^{-3}$	$-6,09 \cdot 10^{-3}$
128	17950	20303			
127	17950	20303	$-1,1965 \cdot 10^{-1}$	$4,751 \cdot 10^{-2}$	$5,92 \cdot 10^{-3}$
127	17951	20303			
127	17950	20303	$2,313 \cdot 10^{-2}$	$8,04 \cdot 10^{-3}$	$5,93 \cdot 10^{-3}$
127	17950	20304			

Estes resultados mostram valores de coeficiente de correlação próximos de zero, sustentando a constatação de um bom desempenho deste tipo de gerador (H-W).

Finalmente, como última perspectiva de avaliação da selecção adoptada, foi efectuada uma comparação com geradores comerciais, quer embebidos em ferramentas de folhas de cálculo quer em linguagens estruturadas como, por exemplo, o gerador “SEED” (Rotina NAG para FORTRAN 90). Foram aplicados testes equivalentes a sequências geradas por este tipo de geradores.

No primeiro caso, usando uma função “RANDOM” o desempenho observado foi inferior (por exemplo, para sequências de 50 000 valores a taxa de rejeição observada, resultante do

teste K-S, foi da ordem de 40%) e o ensaio de sensibilidade (com incrementos mínimos no valor de semente) evidenciou valores de correlação mais elevados (cf. tabela seguinte).

*Quadro 7.5 – Coeficientes de correlação obtidos usando o gerador H-W e a função “RANDOM”*

<b>Dimensão da amostra (n)</b>		<b>Valor típico do coeficiente de correlação H-W</b>	<b>0,006</b>
<b>Valores de semente utilizados</b>		<b>Coefficiente de correlação</b>	<b>% Comparada com gerador H-W</b>
RANDOM (13)	RANDOM (14)	0,0094	+ 56 %
RANDOM (14)	RANDOM (15)	0,0275	+ 500 %
RANDOM (1142)	RANDOM (1141)	0,0209	+ 350 %

Por outro lado, deve-se salientar que as médias aritméticas e desvios-padrão observados em ambos os casos, não evidenciaram diferenças significativas em exactidão, embora, no caso da função “RANDOM”, se tenha observado um comportamento mais irregular na convergência para esses valores em função do incremento na dimensão da sequência.

No caso da função “SEED”, em particular, os resultados obtidos são mais próximos dos associados ao gerador H-W, embora, evidenciando maior taxa de insucesso quando aplicado o teste K-S (da ordem de 20 % a 30 %) e com coeficientes de correlação mais elevados (da ordem de 5% a 10%).

Este conjunto de resultados consolida os argumentos para a utilização do Algoritmo AS132 do gerador H-W como apropriado ao desenvolvimento de simulações de Monte Carlo no contexto das aplicações pretendidas.

#### **7.6.5.2 Métodos de conversão de funções**

As aplicações de natureza metrológica recorrem, em geral, a um número limitado de funções densidade de probabilidade, onde se incluem as distribuições uniforme, normal, triangular, arcocoseno e *t*-Student. Como tal, descrevem-se, em seguida, as expressões e algoritmos utilizados permitindo efectuar a sua conversão – a partir da distribuição de probabilidade uniforme de domínio [0,1] – para aplicação no procedimento MCS.

Adicionalmente, existe um conjunto de distribuições de probabilidade que nalguns casos possuem algum potencial de aplicação no contexto da Metrologia, quer na representação de determinados tipos de variáveis aleatórias (caso das distribuições exponencial, logarítmica, beta, *F* de Snedecor, e Weibull) quer por se aplicarem no processo de determinação da distribuição de probabilidade *t*-Student (caso das distribuições gama e  $\chi^2$ ). Pela sua extensão,



os procedimentos de conversão não serão detalhados neste documento, contudo, no final desta secção, são indicados elementos bibliográficos onde estes podem ser consultados.

A primeira das funções densidade de probabilidade referidas, envolve a conversão dos valores da distribuição de probabilidade uniforme  $\mathcal{U}(0,1)$  em valores de uma distribuição uniforme  $\mathcal{U}(a,b)$ , a qual é caracterizada por:

$$f_X(\xi) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \xi < a \\ \frac{1}{b-a} & \Leftarrow a \leq \xi \leq b \\ 0 & \Leftarrow \xi > b \end{cases} \quad (7.35)$$

A função de probabilidade acumulada é,

$$F_X(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b-a} d\theta = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \xi < a \\ \int_a^{\xi} \frac{1}{b-a} d\theta & \Leftarrow a \leq \xi \leq b \\ 1 & \Leftarrow \xi > b \end{cases} = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \xi < a \\ \left( \frac{\xi - a}{b-a} \right) & \Leftarrow a \leq \xi \leq b \\ 1 & \Leftarrow \xi > b \end{cases} \quad (7.36)$$

utilizando a relação decorrente da aplicação do método de inversão de funções (cf. Cap. 6),  $u = F_X(\xi)$ , resulta que,

$$u = \frac{\xi - a}{b-a} \quad (7.37)$$

e, portanto,

$$\xi = F_X^{-1}(u) = a + (b-a)u \quad (7.38)$$

O segundo caso apontado consiste na conversão dos valores da distribuição de probabilidade uniforme  $\mathcal{U}(0,1)$  em valores de uma distribuição triangular  $\mathcal{T}(a,b,c)$ . Neste caso, a distribuição  $\mathcal{T}(a,b,c)$  é caracterizada por:

$$f_X(\xi) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \xi < a \\ \frac{2(\xi-a)}{(b-a)(c-a)} & \Leftarrow a \leq \xi \leq b \\ \frac{2(c-\xi)}{(c-b)(c-a)} & \Leftarrow b \leq \xi \leq c \\ 0 & \Leftarrow \xi > c \end{cases} \quad (7.39)$$

e a sua distribuição de probabilidade acumulada é,

$$F_X(\xi) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \xi < a \\ \frac{(\xi - a)^2}{(b - a)(c - a)} & \Leftrightarrow a \leq \xi \leq b \\ 1 - \frac{(c - \xi)^2}{(c - b)(c - a)} & \Leftrightarrow b \leq \xi \leq c \\ 1 & \Leftrightarrow \xi > c \end{cases} \quad (7.40)$$

novamente, usando a relação proveniente do método de inversão de funções,  $u = F_X(\xi)$ , resulta a expressão que permite obter a relação que para cada valor  $u$  obtido da sequência uniforme  $\mathcal{U}(0,1)$  nos permite determinar o correspondente valor  $x$  da sequência com distribuição de probabilidade triangular  $\mathcal{T}(a,b,c)$ .

$$\xi = \begin{cases} a + \sqrt{(b - a)(c - a)u} & \Leftrightarrow 0 \leq u \leq \frac{(b - a)}{(c - a)} \\ c - \sqrt{(c - b)(c - a)(1 - u)} & \Leftrightarrow \frac{(b - a)}{(c - a)} \leq u \leq 1 \end{cases} \quad (7.41)$$

A utilização da metodologia aplicada aos casos anteriores, para a conversão de distribuições de probabilidade uniformes em distribuições de probabilidade normais não é facilmente concretizável pela natureza da expressão que determina a função densidade de probabilidade normal,

$$F_X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^2/2} dt$$

Por essa razão, utiliza-se como alternativa a esse método a metodologia e o algoritmo propostos por Box *et al* (1958), desenvolvido para um espaço 2-dimensional, i.e., envolvendo simultaneamente duas variáveis com distribuição de probabilidade normal.

Esta metodologia tem como ponto de partida a existência de duas variáveis aleatórias,  $U_1$  e  $U_2$ , com distribuição de probabilidade uniforme e domínio no espaço  $[0,1]$ . Nesse método, estas são sujeitas a uma primeira transformação visando a obtenção de outras duas distribuições  $V_1$  e  $V_2$ , igualmente com distribuição de probabilidade uniforme mas centradas e com domínio compreendido entre  $-1$  e  $1$ :  $\mathcal{V}_1(-1,1)$  e  $\mathcal{V}_2(-1,1)$ , que é vantajosa por ser simétrica e se centrar em zero – de forma equivalente ao que acontece com a distribuição de probabilidade gaussiana normalizada.

Com base nestas novas distribuições e recorrendo ao *método de Box–Muller*, podem ser obtidas duas outras distribuições de probabilidade,  $\mathcal{N}_1(0,1)$  e  $\mathcal{N}_2(0,1)$ , associadas a

variáveis aleatórias independentes e normais,  $X_1$  e  $X_2$  respectivamente (as quais, possuem valor médio igual a zero e variância igual a 1). A transformação proposta tem como base as seguintes relações:

$$X_1 = (-2 \ln V_1)^{1/2} \cos(2\pi V_2) \quad (7.42a)$$

$$X_2 = (-2 \ln V_1)^{1/2} \text{sen}(2\pi V_2) \quad (7.42b)$$

estabelecendo-se uma relação de transformação em que:

$$f(x_1, x_2) = |J| f(v_1, v_2) \quad (7.43)$$

e onde o jacobiano é dado por,

$$|J| = \begin{vmatrix} -x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2} & -x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2} \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix} \frac{1}{2\pi (x_1^2 + x_2^2)} \quad (7.44)$$

resulta a expressão da função distribuição de probabilidade conjunta possuindo a estrutura de uma distribuição de probabilidade normal bivariada, em que cada uma das duas distribuições de probabilidade em causa são normais e possuem os parâmetros de distribuições gaussianas normalizadas.

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2} \quad (7.45)$$

A obtenção de valores de variáveis aleatórias normais  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  a partir de dois termos  $v_j$  e  $v_{j+1}$  resulta, conseqüentemente, de:

$$x_j = \mu + (-2\sigma^2 \ln v_j)^{1/2} \cos(2\pi v_{j+1}) \quad (7.46a)$$

$$x_{j+1} = \mu + (-2\sigma^2 \ln v_j)^{1/2} \text{sen}(2\pi v_{j+1}) \quad (7.46b)$$

com  $j = 1, 3, 5, \dots$

A dificuldade associada à computação das variáveis trigonométricas terá sido um dos argumentos que levaram a que tenha sido proposta a sua modificação, visando a sua simplificação e adaptação ao cálculo computacional, originando uma variante correntemente designada por “*Método polar*”.

A principal vantagem decorrente da adopção desta variante consiste em obter uma simplificação da aplicação computacional, conseguida mediante a transformação das

expressões (7.42a) e (7.42b) em expressões equivalentes mas sem a presença das funções trigonométricas. O algoritmo dedicado a promover esta transformação é apresentado por vários autores como, por exemplo, Knuth (1998), no seu "*Algoritmo P*":

- p1) geração de duas variáveis aleatórias uniformes e independentes,  $U_1$  e  $U_2$ , no intervalo  $[0,1]$ ;*
- p2) transformação destas variáveis em novas variáveis uniformes,  $V_1$  e  $V_2$ , no intervalo  $[-1,1]$ , recorrendo às expressões<sup>8</sup>:  $V_1 := (2U_1 - 1)$  e  $V_2 := (2U_2 - 1)$ ;*
- p3) determinação de uma nova variável  $S$ , obtida através da expressão:  $S := V_1^2 + V_2^2$ ;*
- p4) se  $S > 1$  retorna à posição p1).*
- p5) se  $S = 0$ , faz  $x_1 := x_2 := 0$ ;*
- p6) caso  $0 < S \leq 1$ , então:*

$$X_1 := V_1 \sqrt{\frac{-2 \ln S}{S}} \quad (7.47a)$$

$$X_2 := V_2 \sqrt{\frac{-2 \ln S}{S}} \quad (7.47b)$$

- p7) repetição do procedimento descrito entre p1) e p6) o número de vezes considerado adequado à obtenção da quantidade pretendida de pares associados às variáveis aleatórias normais.*

Existem outras aproximações à solução do problema, designadamente, uma proposta por Bailey (1994) recorrendo à distribuição de probabilidade *t*-Student.

A conversão de valores provenientes de uma distribuição uniforme  $\mathcal{U}(0,1)$  em valores de uma distribuição de configuração-U ou arco-seno com domínio  $[a, b]$  resulta, novamente, da aplicação do método de inversão de funções. Neste caso, partindo da expressão da função densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(\xi) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \xi < a \\ \frac{1}{\pi \sqrt{w^2 - (\xi - h)^2}} & \Leftrightarrow a \leq \xi \leq b \\ 0 & \Leftrightarrow \xi > b \end{cases} \quad (7.52)$$

em que  $w = \frac{(b - a)}{2}$  e  $v = \frac{(b + a)}{2}$ .

A função distribuição acumulada vem dada pela expressão seguinte,

<sup>8</sup> Segundo nota do autor original, é recomendado que estas variáveis sejam definidas como pertencentes ao tipo "floating point".

$$\begin{aligned}
F_X(\xi) &= \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \xi < a \\ \frac{1}{\pi} \left[ \arcsen\left(\frac{\xi - h}{w}\right) + \frac{\pi}{2} \right] & \Leftrightarrow a \leq \xi \leq b \\ 1 & \Leftrightarrow \xi > b \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \xi < a \\ \frac{1}{\pi} \cdot \arcsen\left(\frac{\xi - h}{w}\right) + \frac{1}{2} & \Leftrightarrow a \leq \xi \leq b \\ 1 & \Leftrightarrow \xi > b \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.53}$$

e aplicando a esta o método de inversão, resulta a pretendida relação.

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\pi} \cdot \arcsen\left(\frac{\xi - h}{w}\right) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsen\left(\frac{\xi - h}{w}\right) = \pi \left(u - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\xi - h}{w}\right) = \text{sen}\left[\pi \left(u - \frac{1}{2}\right)\right] \Leftrightarrow \xi = h + w \cdot \text{sen}\left[\pi \left(u - \frac{1}{2}\right)\right] \\
&\xi = h + w \cdot \text{sen}\left[\pi \left(u - \frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Outro caso de interesse consiste na possibilidade de obtenção de valores de uma variável aleatória com distribuição de probabilidade *t*-Student, de acordo com a função densidade de probabilidade dada por:

$$g(\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\nu \pi}} \left(1 + \frac{\xi^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu + 1}{2}} \tag{7.55}$$

onde  $\Gamma$  representa a distribuição de probabilidade gama e  $\nu$  o número de graus de liberdade.

Esta distribuição (gama), pode ser gerada usando o “algoritmo A” de Knuth (1998), recorrendo à utilização da função trigonométrica tangente aplicada num função que inclui valores de uma distribuição uniforme. A obtenção de valores de uma v.a. com distribuição gama é particularmente importante porque permite obter, *a posteriori*, valores de v.a. com distribuição  $\chi^2$ , *F* de Snedecor e *t*-Student, uma vez que todas elas possuem expressões que se suportam em valores da distribuição de probabilidade gama (*vide* Knuth (1998) e Gentle (2003), por exemplo).

A obtenção de valores relativos a uma v.a. com distribuição de probabilidade *t*-Student com  $\nu$  graus de liberdade pode ser efectuada por diferentes vias. Uma delas resulta de se

poder obter a variável aleatória relativa à distribuição de probabilidade  $t$ -Student pela divisão de uma variável aleatória normal pela raiz quadrada de uma variável aleatória com distribuição de probabilidade  $\chi^2$  com  $\nu$  graus de liberdade, utilizando a geração de valores destas duas distribuições para determinar valores da distribuição pretendida.

Outra via consiste em utilizar a relação com a função F, sabendo que a variável aleatória  $t$ -Student corresponde à raiz quadrada de uma variável aleatória com distribuição F com 1 grau de liberdade. A metodologia utilizada em ambos os casos encontra-se em Kinderman *et al* (1980). Em Marsaglia (1980), (1984a), (1984b) são propostas outras alternativas de algoritmos e particularmente em Marsaglia (1984a), um algoritmo que Gentle (2003) aponta como o mais eficiente (sendo baseado numa metodologia do tipo aceitação–rejeição).

Mais recentemente, encontra-se em Bailey (1994) um algoritmo que, à semelhança da abordagem utilizada para a obtenção de valores variáveis aleatórias normais, recorre a um método polar, sendo o algoritmo descrito na referência citada e em Gentle (2003):

*p1) geração de duas variáveis aleatórias uniformes e independentes,  $v_1$  e  $v_2$ , a partir de uma distribuição uniforme  $U[-1,+1]$ , e efectuar  $r^2 := v_1^2 + v_2^2$  ;*

*p2) se  $r^2 \geq 1$ :*

*Retornar a p1);*

*caso contrário:*

$$\xi := v_1 \sqrt{\frac{v \cdot (r^{-4/v} - 1)}{r^2}}$$

Aponta-se como nota importante o facto da “qualidade” deste gerador se encontrar fortemente dependente da “qualidade” do gerador de números pseudo-aleatórios que concretiza a etapa t1. do procedimento.

A conversão de distribuição a partir de distribuições do tipo uniforme, no caso das distribuições exponencial, logarítmica, beta e Weibull, pode ser obtidas usando o método de inversão de funções apresentado (*vide* Knuth (1998) e Gentle (2003), por exemplo).

Nos casos particulares das distribuições meio coseno e quadrática, menos habituais mas, ainda assim, com alguma aplicação (por exemplo, na simulação de v.a. no domínio da óptica), refira-se que nestes casos a tentativa de aplicação do método de inversão de funções conduz a expressões cujo tratamento pela via analítica é complexo. Nestes casos, revela-se de maior sucesso aplicar o *método de aceitação – rejeição* exposto no capítulo 6 ou a via prática

equivalente – embora de convergência mais lenta e menor eficiência – no que vulgarmente se designa por *método de tabelação*<sup>9</sup> [Gentle (2003)].

### 7.6.5.3 Algoritmo de ordenação de sequências

A ordenação de sequências é uma tarefa necessária no processo de simulação MCS, uma vez que duas das tarefas associadas dependem da sua execução prévia. Com efeito, quer a aplicação do teste de Kolmogorov-Smirnov quer a determinação dos percentis a partir da sequência de resultados de saída recorrem à ordenação da sequência como elemento de localização e extracção de informação.

A realização do teste de Kolmogorov-Smirnov resulta de uma análise em que, genericamente, se efectua uma comparação através das diferenças entre os valores de uma função de probabilidade acumulada obtida experimentalmente e os valores equivalentes de uma função de probabilidade acumulada empírica, e se determina o valor máximo obtido (conforme exposto no capítulo 6).

No caso da determinação dos percentis, é através da ordenação da sequência que se identificam as posições associadas aos percentis, tomando-se os seus valores respectivos, sendo esta tarefa fundamental no processo, uma vez que dela depende a definição dos valores que determinam a estimativa do intervalo de incerteza, resultado final pretendido pela aplicação do método.

Pelo facto de se utilizarem sequências numéricas com dimensão entre  $10^5$  e  $10^6$ , torna-se importante a selecção de um algoritmo de ordenação que, do ponto de vista do seu desempenho, seja o mais eficiente.

Com base nesse critério, da diversidade de soluções possíveis, recorreu-se ao algoritmo designado por "QuickSort" [Press *et al.* (1986)], cuja descrição da sequência de operações se apresenta em seguida.

- p1) selecção de um número da sequência principal, de forma aleatória, constituindo este o primeiro elemento "pivot" e registá-lo nesta categoria;*
- p2) comparação dos restantes valores com o elemento "pivot" e agrupamento dos valores em dois conjuntos, um dos quais deve conter os valores que são inferiores ou iguais ao elemento "pivot" e o outro, deve conter os valores superiores ao elemento "pivot";*

---

<sup>9</sup> Este método, em particular, consiste em estabelecer uma tabela de conversão (por exemplo, com 100 pontos do intervalo de integração) que estabeleça um relação entre os valores da função distribuição acumulada  $F_X(\xi)$  (meio coseno ou quadrática, no caso) e respectivos valores da variável  $\xi$  que os originam. Cada vez que um valor proveniente da distribuição uniforme  $[0,1]$  é gerado ou conhecido, esse é enquadrado num dos intervalos de  $F_X(\xi)$ , e é contabilizada uma entrada na sequência de saída igual ao valor respectivo de  $(\xi)$ . Evidentemente, esta aplicação depende, entre outros factores, do número de pontos considerado na constituição da referida tabela.

- p3) concatenação dos dois conjuntos intercalando, na transição destes, o elemento "pivot";
- p4) identificação, na sequência principal modificada, do primeiro elemento que ainda não foi tomado como elemento "pivot" atribuindo-lhe essa designação;
- p5) constituição de uma sub-sequência de valores, começando no elemento "pivot" e incluindo os elementos que lhe seguem sequencialmente na sequência principal modificada, terminando no elemento da sequência principal imediatamente anterior ao primeiro elemento encontrado com registo de "pivot";
- p6) concretização das tarefas descritas em p2) e p3) ordenando esta sub-sequência\*;
- p7) reposição dos elementos ordenados da sub-sequência na sequência principal, sendo que estes devem ocupar as posições libertadas no processo de constituição da sub-sequência;
- p8) repetição do procedimento descrito entre p4) e p7) até se concluir da inexistência de valores da sequência não tomados como elemento "pivot", correspondendo esta situação à ordenação completa da sequência principal.

\* Esta tarefa não se efectua se a sub-sequência é constituída por um elemento ("pivot"), sendo imediatamente registado como tal e passando à pesquisa seguinte.

Como nota adicional, pode-se referir que a necessidade de se seleccionar aleatoriamente um elemento da sequência principal como primeiro elemento "pivot", não é estritamente necessária para séries de números pseudo-aleatórios, uma vez que qualquer destes, por definição, possui uma natureza "aleatória". Este problema pode-se colocar, contudo, quando se pretende ordenar uma sequência de números que se encontra, ela própria ordenada, conduzindo a uma situação em que ocorre o número máximo de iterações.

Em Blahut (1985) encontra-se uma descrição relativa ao parâmetro associado à complexidade de ordenação, incluindo uma expressão recursiva para este parâmetro, bem como, uma comparação com outro algoritmo de ordenação igualmente comum, designado por "MergeSort".

#### **7.6.5.4 Critério de avaliação da dimensão das sequências face à exactidão requerida**

A aplicação da MCS na avaliação de incertezas de medição envolve, necessariamente, o cumprimento de requisitos de exactidão, uma vez que qualquer medição dispõe de um determinado grau de exactidão expressa na sua estimativa (em geral, dependente da exactidão dos sistemas de medição utilizados). Assim, é essencial garantir que a exactidão obtida por esta via (numérica / computacional), com as suas limitações intrínsecas, seja compatível com as exigências determinadas pela prática.



Por outro lado, o mesmo tipo de exigências são colocadas quando se pretende efectuar a comparação de dois métodos alternativos (neste caso, o GUM e a MCS), sendo essa comparabilidade possível, apenas, no pressuposto de equivalência dos níveis de exactidão.

Estas duas razões, não sendo únicas, justificam por si só, a importância dedicada a esta questão. A sua resolução envolve o estudo segundo dois planos de acção:

- a perspectiva da exactidão do sistema de medição;
- a perspectiva da exactidão dos resultados de simulação numérica.

Naturalmente que o cumprimento de um requisito desta natureza traduz-se na elaboração de um critério de validação ou de aceitação, que impõe que a exactidão obtida pela simulação numérica não possua uma magnitude superior à da exactidão determinada pelo sistema. A tarefa de construir um critério resulta, portanto, da identificação das duas parcelas utilizadas como parâmetros de comparação.

Do ponto de vista da exactidão determinada pelo sistema de medição  $e$ , em particular, pela sua estimativa, pode-se identificar o parâmetro *exactidão requerida*,  $e_r$ , e explicitar o seu valor simplesmente a partir do *número de dígitos decimais*,  $d$ , que se pretende conhecer com exactidão. A forma de relacionar ambos é:

$$e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d} \quad (7.56)$$

ou seja, uma exactidão requerida à casa decimal  $d$  pressupõe a discriminação de valores de, pelo menos  $0,5q$ . Um exemplo, se o número de dígitos decimais pretendido é  $d=5$  (resolução prática de  $0,000\ 01$ ), a exactidão requerida é dada por:

$$e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = 0,000\ 005 \quad (7.57)$$

constituindo-se, dessa forma, a primeira parcela do critério pretendido.

No outro plano de acção, pretende-se constituir a segunda parcela associada à exactidão da simulação numérica. Para esse efeito, é útil recordar que o resultado da simulação é um intervalo de incerteza e que os valores que o determinam são os dois percentis localizados simetricamente em relação à posição do valor médio.

Então, essa parcela pode ser estabelecida com base na incerteza (com determinado grau de confiança) associada aos valores desses percentis. A determinação dessa incerteza resulta da adopção de um procedimento de natureza probabilística descrito em seguida.

Admitindo que, no contexto da simulação numérica se pretende determinar o intervalo de incerteza com probabilidade  $(1-\alpha)$ , considerando que a distribuição é simétrica, esse intervalo é limitado pelos percentis  $y_L$  e  $y_H$ , cuja posição na sequência ordenada de saída é, respectivamente,  $L$  e  $H$ , sendo – nessas condições de simetria – a F<sub>D</sub>C para cada um dos percentis:  $F_Y(y_L) = \alpha/2$  e  $F_Y(y_H) = (1-\alpha)/2$ .

Designando por  $N$  a dimensão da sequência, a determinação das posições  $L$  e  $H$  na sequência ordenada resulta de<sup>10</sup>,

$$L = N \cdot p_L \quad (7.58)$$

$$H = N \cdot p_H \quad (7.59)$$

onde, relembra-se, os valores de probabilidade em causa são  $p_L = \alpha / 2$  e  $p_H = 1 - \alpha / 2$ .

Conhecidas essas posições, os valores associados aos percentis pretendidos são os que se encontram a ocupar as mesmas,  $y_L$  e  $y_H$ .

A estimativa do intervalo de incerteza de cada um destes percentis é um resultado que se encontra em estudos da Teoria das Probabilidades. Esses estudos apontam para um resultado que, para uma sequência de dimensão  $N$ , determina as posições da sequência que limitam o pretendido intervalo de confiança do percentil,  $(100p)\%$ , como,

$$N p \pm 2\sqrt{N p(1-p)} \quad (7.60)$$

de cuja aplicação resultam as posições de limites dos intervalos de confiança, na sequência ordenada, dos percentis  $(100p_L)\%$  e  $(100p_H)\%$ .

$$L- = N p_L - 2\sqrt{N p_L(1-p_L)} \quad (7.61a)$$

$$L+ = N p_L + 2\sqrt{N p_L(1-p_L)} \quad (7.61b)$$

$$H- = N p_H - 2\sqrt{N p_H(1-p_H)} \quad (7.61c)$$

$$H+ = N p_H + 2\sqrt{N p_H(1-p_H)} \quad (7.61d)$$

No caso mais comum, considera-se adequado o nível de confiança de 95% ( $p_L = 0,025$  e  $p_H = 0,975$ ) e, conseqüentemente,

$$L- = 0,025N - 0,312N^{1/2} \quad (7.62a)$$

<sup>10</sup> Por exemplo, numa sequência de 10 000 números ordenados, o percentil de  $p = 5\%$  encontra-se na posição 500, i.e.,  $10\,000 \times 0,05$ . Com base nessa posição, identifica-se o valor do percentil correspondente, pois este é dado pelo valor que ocupa a posição  $k$  na sequência ordenada, i.e.,  $y_k$ . (no exemplo dado, o valor seria igual a  $y_{500}$ ).

$$L_+ = 0,025N + 0,312N^{1/2} \quad (7.62b)$$

$$H_- = 0,975N - 0,312N^{1/2} \quad (7.62c)$$

$$H_+ = 0,975N + 0,312N^{1/2} \quad (7.62d).$$

Os valores que resultam destas expressões, após ser efectuado o arredondamento à unidade (constituindo números inteiros que se traduzem em posições da sequência) identificam as posições da sequência de onde se podem extrair os valores que limitam os intervalos de confiança dos percentis<sup>11</sup>:  $y_{L_-} \leq y_L \leq y_{L_+}$  e  $y_{H_-} \leq y_H \leq y_{H_+}$ .

Estes intervalos correspondem a estimativas da exactidão da simulação numérica (para o intervalo de confiança adoptado), permitindo a constituição de indicadores métricos,

$$\delta y_L = |y_{L_+} - y_{L_-}| \quad (7.63a)$$

$$\delta y_H = |y_{H_+} - y_{H_-}| \quad (7.63b)$$

que fornecem os elementos de quantificação para a segunda parcela do critério pretendido. Na posse desta informação, relativa a ambas as parcelas, o critério adoptado consiste em comparar as expressões (7.63a e 7.63b) com a expressão (7.56), como forma de confirmação da satisfação (validação) dos requisitos de exactidão previamente estipulados.

$$\delta y_L = |y_{L_+} - y_{L_-}| \leq e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d} \quad (7.64a)$$

$$\delta y_H = |y_{H_+} - y_{H_-}| \leq e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d} \quad (7.64b)$$

É importante realçar alguns aspectos associados a este tipo de análise.

O incremento da dimensão da sequência,  $N$ , produz a redução destes parâmetros  $\delta$ , aumentando a exactidão – como seria expectável – sendo essa convergência um reflexo da convergência do percentil da amostra para o percentil da população.

Por outro lado, não é possível estabelecer, de forma genérica, uma relação no sentido inverso, i. e., determinar a dimensão da sequência  $N$  a partir da exactidão requerida, o que constituiria uma ferramenta de grande utilidade (possíveis razões para este facto encontram-se, certamente, na diversidade significativa da distribuição de valores num determinado

<sup>11</sup> Por exemplo, para uma sequência ordenada de 1000 elementos ( $N$ ), de acordo com as equações (7.58) a (7.62), verifica-se que  $L = 25$ ,  $L_- \approx 15$ ,  $L_+ \approx 35$ ,  $H = 975$ ,  $H_- \approx 965$ ,  $H_+ \approx 985$ . Com esta informação, pode-se inferir que o percentil de 2,5% é dado pelo elemento da sequência  $y_{25}$  com um intervalo de confiança de 95 % definido por  $[y_{15}, y_{35}]$  e o percentil de 97,5% é dado pelo elemento da sequência  $y_{975}$  com um intervalo de confiança de 95 % definido por  $[y_{965}, y_{985}]$ .

domínio das diferentes funções de probabilidade). Por essa razão, o processo de obtenção de determinado grau de exactidão neste tipo de simulação numérica requer a utilização de processos iterativos, como o exposto na Figura seguinte.

Esse processo iterativo parte da definição de uma dimensão de sequência inicial, efectuando uma avaliação da exactidão. Caso o critério não seja cumprido, é efectuado um incremento nessa dimensão e uma nova avaliação, sucessivamente, até se atingir a satisfação do critério em causa – saindo do processo iterativo, adoptando-se o valor da dimensão obtida e dando continuidade à execução da rotina – ou, interrompendo a execução da rotina, caso seja atingido o limite máximo possível para o valor da dimensão – equivalente ao período útil do gerador.

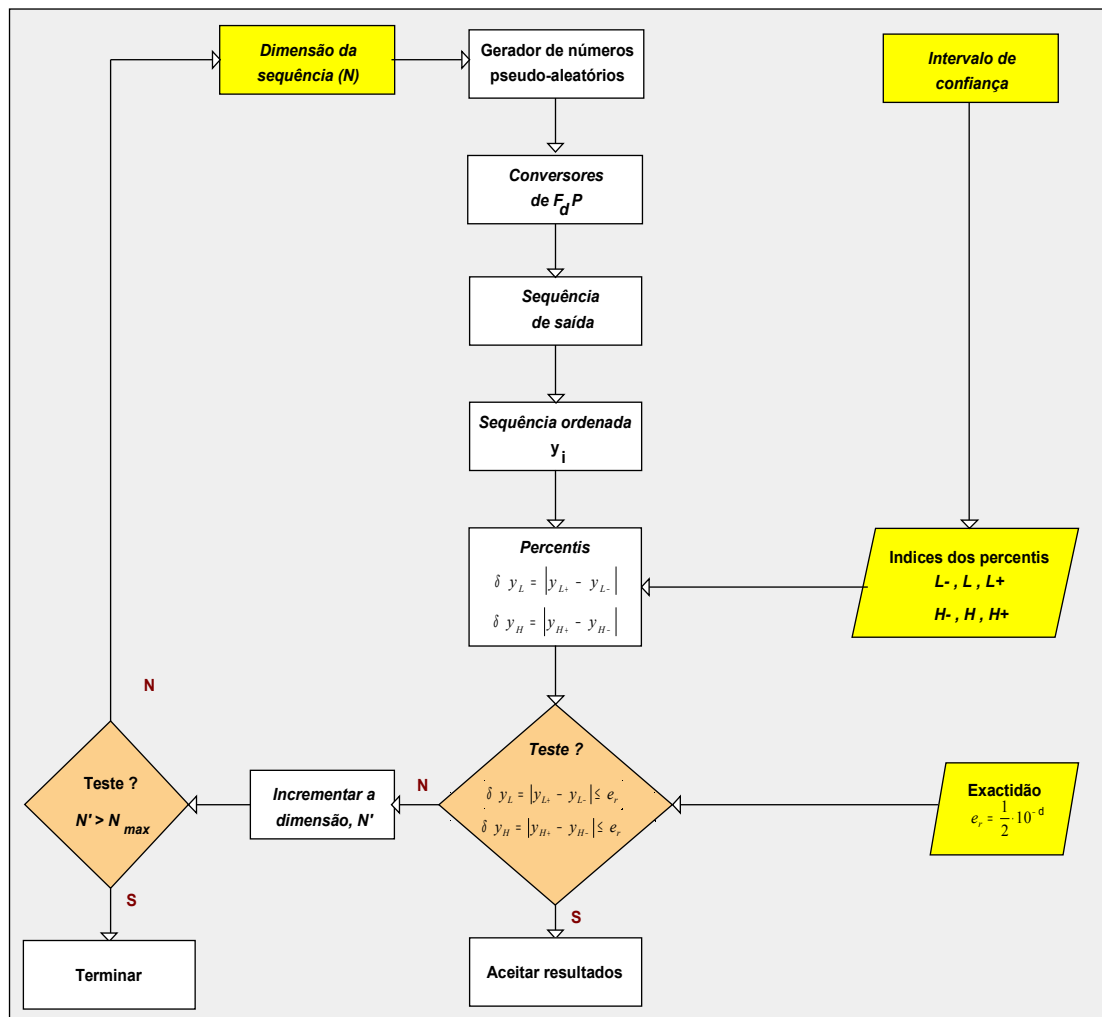


Figura 7.15 – Procedimento iterativo de avaliação do cumprimento do requisito de exactidão

Estudos de Cox *et al.* (2001a), (2001b) aplicados ao caso particular da calibração de um multímetro, envolvendo a utilização de sequências entre 5 000 e 60 000 valores, com incrementos de 5 000 valores, revelaram uma relação, segundo a qual, a multiplicação da

dimensão da sequência por 4 produz uma redução nos desvios  $\delta y_L$  e  $\delta y_H$  para cerca de metade. Esta será, portanto, uma forma empírica, aproximada, de relacionar a dimensão requerida da amostra com a exactidão pretendida – válida, apenas, para o exemplo em causa.

Na prática, este procedimento iterativo não foi adoptado nos estudos desenvolvidos nesta Tese, uma vez que se constatou que a utilização de sequências com dimensão da ordem de 100 000 a 150 000 valores permitia a obtenção de exactidão superior aos requisitos nos diferentes estudos e, simultaneamente, o tempo de execução das rotinas – da ordem dos 60 s – foi considerado não significativo, não justificando o seu acréscimo pela incorporação de rotinas de iteração.

Uma terceira observação, considerada bastante importante, consiste em fazer notar que, em casos onde a exactidão pretendida possa requerer uma dimensão de sequências demasiado elevada face ao período útil de um gerador, essa circunstância constitui um argumento de rejeição do próprio gerador como elemento integrante do processo de simulação. No limite, considerando a inexistência de um gerador com essas características, essa impossibilidade constitui uma das potenciais limitações da aplicação da MCS.

## **7.7 Análise comparativa das metodologias apresentadas**

A apresentação de 3 metodologias distintas para a mesma finalidade – a avaliação das incertezas de medição – suscita, naturalmente, a conveniência de uma exposição sobre os benefícios e limitações inerentes à aplicação dos diferentes métodos. Esse será o conteúdo da presente secção.

Começando pela abordagem analítica, encontra-se desde logo um benefício fundamental que consiste na inexistência de aproximações às funções de saída que são determinadas – ao contrário do que acontece nas restantes abordagens – sendo a sua principal restrição a dificuldade prática de concretização (*vide* o que sucede quando se procura aplicar ao problema comum da regressão linear [Ribeiro *et al.* (2003), (2006)], por exemplo). Relativamente a este inconveniente, observa-se no exemplo apresentado, a complexidade inerente às operações simples como a convolução de 2 e de 3 funções densidade de probabilidade uniformes. Poder-se-á imaginar a complexidade da aplicação a casos práticos onde, por vezes, coexistem dezenas de variáveis e, conseqüentemente, dezenas de funções densidade de probabilidade, com configurações distintas – uniforme, triangular, arcocoseno, normal, *t*-student e outras – as quais devem ser convolucionadas para se obter a função de saída.

A abordagem do GUM, tem desde logo o mérito de simplificar a avaliação das incertezas de medição face à metodologia analítica incomportável para grande parte das aplicações práticas. De facto, esta metodologia aplica-se, com sucesso, a diversos problemas de medição em diferentes domínios científicos. Este é, certamente, um dos seus maiores benefícios e potenciais que, possivelmente explica a rápida disseminação que esta abordagem teve nos meios científicos e industriais.

Igualmente importante, tem sido a sua intervenção no sentido da uniformização / normalização da metodologia de cálculo e da apresentação de resultados de medição, tarefa essencial para permitir a sua comparação e a sua avaliação entre laboratórios, face a métodos e procedimentos distintos, e entre sistemas de medição diversos.

A metodologia GUM possui, no entanto, fortes limitações em parte decorrentes de protagonizar uma tentativa unificadora de solução para um problema que pode assumir muitas facetas distintas: a avaliação de incertezas de medição<sup>12</sup>. Assim, uma análise mais detalhada do documento permite transmitir algumas reflexões e observações:

Em termos globais, uma crítica que se pode fazer consiste na utilização de critérios de natureza frequencista para tratar alguns dos aspectos do problema enquanto que outros se tratam de modo subjectivista – bayesiana. Exemplos do que foi apontado, consistem em observar que a determinação de contribuições para a incerteza pelo método do tipo A são efectuados pela via frequencista enquanto que a determinação de contribuições para a incerteza pelo método do tipo B são efectuadas pela via bayesiana; a determinação dos intervalos de confiança segue novamente a via frequencista enquanto que a adopção dos graus de liberdade de componentes utilizadas na avaliação da incerteza são, frequentemente atribuídas numa perspectiva subjectivista.

Outro aspecto a notar consiste na abordagem do modelo matemático – relação funcional – que suporta a descrição envolvida, o qual, embora se admita em nota de rodapé a utilização de modelos matemáticos mais elaborados envolvendo, por exemplo, vectores, de facto representa apenas o modelo explícito e univariável.

A indicação associada à definição, por parte de quem pretenda aplicar o GUM, de critérios subjectivos como “...a experiência, o bom senso e os conhecimentos gerais de quem promove este tipo de avaliação...”, aplicados a etapas da metodologia das quais depende o sucesso da mesma, traduz-se em dificuldades de natureza prática decorrentes quer da falta de

---

<sup>12</sup> Este facto encontra-se a ser corrigido através da futura publicação, pela ISO, de um conjunto de anexos ao GUM, abordando alternativas para as restrições impostas pela metodologia utilizada, entre os quais, se admite a utilização de métodos numéricos computacionais.

experiência ou de bom senso quer pelo facto de, em muitas situações, existirem diferentes alternativas (por exemplo, na selecção de funções densidade de probabilidade a aplicar a componentes de incerteza determinados através do método tipo B).

A arbitrariedade com que é possível definir parâmetros que influenciam os resultados da medição (por exemplo, o tipo de função de probabilidade adoptado, os seus limites, os seus graus de liberdade), admitida pelo GUM é, provavelmente, uma das suas maiores deficiências.

A aplicação do GUM pressupõe que o resultado de saída é uma distribuição de probabilidade normal obtida nas condições de aplicabilidade do Teorema do Limite Central. No entanto, a prática da medição pode demonstrar a existência de situações em que as condições do Teorema não são cumpridas, por exemplo, quando existe uma contribuição dominante para a incerteza de medição suportada numa amostra muito reduzida ou cuja configuração da função de probabilidade não é normal.

De certa forma, o reconhecimento da fragilidade dessa orientação é assumido ao ser indicada a via de expansão de intervalos de confiança e recomendada a distribuição *t*-Student e a aplicação da fórmula de Welch-Satterthwaite<sup>13</sup> (exposta, em anexo, no GUM). Contudo essa alternativa não é particularmente explícita, sendo frequente encontrarem-se resultados de medição, em documentos emitidos por entidades menos preparadas, cuja incerteza expandida declarada é indevidamente obtida com um factor de expansão igual a 2.

O aspecto anterior é agravado pelo facto de, no caso de componentes de incerteza cuja avaliação se concretiza por métodos do tipo B, a adopção do número de graus de liberdade não ser suportada em critérios específicos (dependendo da opinião de quem aplica a metodologia). De facto, é apontada uma expressão que determina o número de graus de liberdade a partir do “nível de confiança” associado à  $F_dP$  adoptada, no entanto, esta depende da interpretação do utilizador (por exemplo, considerando uma distribuição uniforme, para um “nível de confiança” de 50% ou de 90% o número de graus de liberdade calculado é, respectivamente, 2 ou 5000, no entanto, ao considerar-se a distribuição uniforme admite-se implicitamente que todos os resultados de amostragem se encontram no intervalo considerado, por isso, alguns laboratórios admitem um número de graus de liberdade  $\infty$ , há ainda quem considere que, por analogia com a convergência da distribuição *t*-Student para a distribuição normal, um número de graus de liberdade igual a 50 é apropriado).

---

<sup>13</sup> Refira-se que alguns autores [Balico (2000)], [Hall *et al* (2001)] discutem a adequação da utilização da fórmula empírica de Welch-Satterthwaite em determinados contextos.

Algumas limitações são particularmente significativas e conduzem, frequentemente, a incompreensão por parte dos leitores conduzindo a aplicações inadequadas:

1. A aplicação da metodologia descrita a relações funcionais do tipo linear. A aplicação a relações não-lineares deve recorrer a expressões mais complexas, como a que se encontra num anexo do GUM (1995):

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] \cdot u^2(x_i) \cdot u^2(x_j)$$

que incorpora os termos mais importantes, imediatamente seguintes aos que constituem a expressão geral da LPI (baseada no desenvolvimento em série de Taylor de 1ª ordem). O evidente aumento do grau de dificuldade resultante da existência de não-linearidade retira, em muitos casos, a relativa atractividade da aplicação da LPI. Nota-se, que a inclusão deste termo aumenta o grau de aproximação, embora, nalguns casos, possa ser necessário adicionar mais termos de ordem superior a este.

2. No GUM chama-se a atenção para a importância da representatividade da amostra sugerindo que, mesmo nos casos em que esta seja inferior a 10, a fiabilidade de uma estimativa da incerteza de medição padrão baseada num método tipo A possa ser questionada, pelo que se deva avaliar a possibilidade de aumento da amostra ou da realização da estimativa suportada noutra forma de análise (designadamente, o recurso a estimativas do tipo B);
3. Na avaliação do tipo B de incertezas padrão, o GUM refere que “*a aplicação desta informação na adopção de funções de probabilidade adequadas à variabilidade das grandezas depende da experiência, bom senso e conhecimentos gerais de quem promove este tipo de avaliação*”. No entanto, nem sempre é evidente a realização da mesma, seja por falta de experiência ou de bom senso, como pelo facto de, em muitas situações, a adopção de outras distribuições de probabilidade serem igualmente aceitáveis (por exemplo, a temperatura pode ter uma distribuição de probabilidade uniforme, Beta, triangular ou trapezoidal consoante o tipo de controlo aplicado). Existe um problema concreto de falta de critérios objectivos/quantificáveis para concretizar as soluções;
4. Em relação à nomenclatura dos métodos do tipo A e do tipo B, esta presta-se a alguma confusão, originando frequentes interpretações incorrectas, ao se associar às componentes respectivas os conceitos de “*aleatório*” e de “*sistemático*”. Na verdade, independentemente da metodologia para contabilizar a sua contribuição, a sua origem pode ser devida a vertentes aleatórias, sistemáticas ou mistas do erro de medição.
5. Relativamente à recomendação efectuada no GUM de uso da distribuição uniforme, esta situação traduz-se numa aparente vantagem do ponto de vista de segurança, uma vez que a sua variância produz um valor que é majorante de grande parte das variâncias obtidas quando se recorre a outras funções de distribuição de probabilidade contínuas. De facto, essa variância não é majorante quando a alternativa é a distribuição de probabilidade de configuração-U conduzindo a uma subavaliação da incerteza;



6. Os documentos guia consideram que este critério de fiabilidade é atingido se nenhuma das componentes de incerteza obtidas por um método do tipo A for baseada numa amostra inferior a 10 observações. Esta afirmação pressupõe que os graus de liberdade das componentes de incerteza obtidas por um método do tipo B têm um grau razoavelmente elevado de fiabilidade traduzível num elevado número de graus de liberdade. Nem sempre esta informação poderá ter esse elevado grau de liberdade. Por outro lado, quem realiza o cálculo é encarregue de garantir, dentro do “bom-senso” a fiabilidade desta informação;
7. A questão de assumir que a distribuição da grandeza de saída é normal pode ser questionável se, nas condições de aplicação, não for possível assegurar quer a adequada representatividade das amostras de grandezas de entrada quer a sua configuração simétrica e centrada em zero – dois pressupostos da aplicação da metodologia;
8. uma dificuldade importante surge quando se observam grandezas de entrada correlacionadas. Com efeito, a aplicação prática do GUM pressupõe frequentemente a inexistência de correlação entre as grandezas, o que simplifica significativamente a expressão da LPI. No entanto, essa correlação por vezes existe, sendo difícil efectuar a sua estimativa, sobretudo se alguma das grandezas em causa foi contabilizada como sendo obtida pelo método do tipo B;
9. assume-se que o resultado de uma medição é “*corrigido de todos os efeitos sistemáticos reconhecidos, tendo sido desenvolvidos esforços para os identificar*” constituindo, este aspecto uma outra dificuldade de aplicação da metodologia GUM a casos particulares onde nem sempre é possível discriminar todas as componentes sistemáticas de erro;
10. a aplicação do GUM pressupõe a simetria das funções densidade de probabilidade de entrada e, sobretudo, a simetria da distribuição normal de saída. Contudo, existem exemplos de aplicações para as quais as funções densidade de probabilidade das grandezas de entrada não são simétricas e, pelo efeito de funções particulares que descrevem alguns modelos (por exemplo, a função logarítmica), algumas das possíveis funções densidade de probabilidade de saída são, de facto, assimétricas;

Após se apontarem alguns dos principais problemas da aplicação do GUM, apresentam-se os aspectos equivalentes da MCS.

Começando pelos aspectos relacionados com dificuldades encontradas na aplicação da MCS, destacam-se aquelas dificuldades associadas à constituição da estrutura de simulação, i.e., a selecção de uma linguagem de programação apropriada, de um gerador de números pseudo-aleatórios, de rotinas de conversão de funções, de concretização de critérios de adequação face à exactidão, de ordenação de sequências, etc. Destas, refira-se que não representam dificuldades especiais, por duas razões principais:

- o desenvolvimento destas ferramentas, após ser estabelecido, constitui a base de qualquer simulação MCS;

- os constrangimentos adicionais, designadamente, relacionados com o tempo de operação, face às tecnologias actuais é, em geral, considerado não significativo.

Em relação a esta última nota refira-se, contudo, que existem ainda problemas de elevado grau de complexidade que obrigam á utilização de mecanismos de computação paralela de modo a contrariar dificuldades associadas à ocupação do tempo de computação, no entanto, esta situação aplica-se a casos bastante especiais.

Embora não tenha sido constatado nenhum caso na experiência do autor, admite-se que, determinados tipos de problemas cuja exactidão requerida seja significativamente elevada, esse facto possa constituir um constrangimento à aplicação da MCS, uma vez que se observou, no caso do gerador utilizado – de Hill e Wichmann – uma convergência da exactidão para valores estabilizados.

Outro constrangimento associado aos geradores em particular, consiste na limitação da dimensão de amostras que cada um admite, embora, na actualidade existem inúmeros geradores de números pseudo-aleatórios que admitem períodos de elevada ordem de grandeza, aplicáveis a casos mais exigentes.

As vantagens da MCS devem ser estabelecidas comparativamente com a aplicação do GUM, dado que a aplicação do método analítico possui uma aplicação prática consideravelmente limitada. Assim, essa comparação é efectuada face às limitações apontadas ao GUM.

Uma das primeiras vantagens da MCS consiste no facto da metodologia não possuir qualquer constrangimento face à natureza do modelo matemático em causa, uma vez que o aplica directamente. Este facto é particularmente importante pois permite que a sua aplicação não possua os constrangimentos de não linearidade subjacentes à aplicação do GUM nem necessite de efectuar aproximações que podem afectar a exactidão dos resultados. Deste facto resulta outra vantagem associada à inexistência de se considerar como elemento de influência dos resultados a possível correlação entre grandezas de entrada, uma vez que se efectua uma contabilização directa destas no modelo matemático.

Relativamente às distribuições de probabilidade, a MCS não possui qualquer constrangimento face à aplicação de distribuições de entrada não-simétricas, reflectindo esses efeitos na distribuição de probabilidade da grandeza de saída.

A aplicação da MCS não necessita de efectuar cálculos intermédios como, por exemplo, a determinação de derivadas parciais que, em determinadas situações podem produzir um forte aumento da complexidade da solução.

Uma outra vantagem considerada importante resulta do processo produzir uma sequência de valores susceptível de ser interpretada como uma função densidade de probabilidade (da aplicação do GUM resultam apenas valores que limitam o intervalo de incerteza). Esse resultado possui uma riqueza de informação superior, uma vez que se acede não só aos limites do intervalo de incerteza pretendido, como se acede à configuração da função densidade de probabilidade. Este facto adquire maior importância quando o modelo introduz distorções nessa distribuição, permitindo avaliar situações onde se observam assimetrias da função de saída ou, até, situações mais complexas decorrentes da existência de, por exemplo, mais do que um valor máximo (*vide* Fig. 9.1 do capítulo 9).

No que se refere à estimativa da grandeza, pelo facto de se conhecer a distribuição de probabilidade de saída, é possível utilizar outros estimadores que não o valor médio (a mediana ou a moda, por exemplo) para determinar essa estimativa, o que pode representar uma mais valia na análise dos problemas de natureza metrológica. A expansão do intervalo de incerteza não é dependente do tratamento de números de graus de liberdade, os quais, no GUM são frequentemente definidos de modo arbitrário.

No que concerne a potenciais limitações do método, apontam-se algumas embora seja discutível que elas possam constituir verdadeiras limitações. Uma delas é a possível complexidade da aplicação do método relativamente a sistemas envolvendo um número elevado de variáveis aleatórias. Neste caso, contudo, o grau de complexidade não é certamente superior ao relacionado com a utilização do GUM.

Outro facto apontado relativamente à aplicação da MCS consiste em, no seu procedimento, não se efectuar uma avaliação dos coeficientes de sensibilidade. Com efeito, tal não é necessário para a sua aplicação, contudo, seria possível efectuar essa determinação utilizando uma técnica simples de pequenos incrementos das variáveis de entrada, não constituindo, portanto, uma verdadeira limitação.

A necessidade de ocupação de tempo na execução das operações de cálculo na MCS não constitui um constrangimento, uma vez que a concretização da metodologia possui uma parte importante comum a qualquer tipo de aplicação – rotinas de geração de números pseudo-aleatórios, rotinas de conversão de funções, rotinas de ordenação e de obtenção de percentis –

e, em particular, no que se refere à utilização de sequências de números pseudo-aleatórios, uma prática de otimização consiste em possuir um conjunto de sequências pré-obtidas e validadas, utilizáveis nas diferentes aplicações.

Reconhece-se a existência de alguns tipos de aplicações mais complexas – não aplicáveis ao GUM - que necessitam de um tempo de computação mais elevado. Contudo, nesses casos, encontram-se em desenvolvimento técnicas de computação em paralelo que reduzem a importância deste factor.

Duas limitações particulares podem assumir alguma importância embora, da experiência do autor, não se tenham manifestado. Uma delas é a dependência do método face à qualidade do gerador de números pseudo-aleatórios que é utilizado, podendo ocorrer distorções de resultados provenientes da utilização de geradores menos apropriados. Outra circunstância poderá ser a incompatibilidade entre o valor de exactidão para o qual convergem as sequências geradas (aumentando a dimensão dessas sequências) face à exactidão requerida.

## 8. ESTUDO COMPARATIVO DE AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS USANDO O GUM E A MCS

### 8.1 Introdução

O estudo comparativo de avaliação das incertezas de medição recorrendo à metodologia preconizada no GUM e à metodologia proposta usando MCS, quando aplicado a processos de medição particulares, possibilita a realização de uma análise crítica que evidencie algumas das suas particularidades, limitações e potencialidades.

Neste contexto, o presente capítulo apresenta três casos integrados em duas perspectivas distintas: uma, visando a análise de casos expostos no GUM e num guia EA; e outra, onde se trata um caso específico associado a uma instalação laboratorial, envolvendo algum grau de complexidade. De forma mais detalhada:

- o primeiro caso trata a utilização de balanças manométricas de massas suspensas (padrão de referência no domínio da grandeza pressão) de acordo com o documento EA 10/18 (2005), no qual se encontra uma descrição do processo de avaliação de incertezas de medição baseado no GUM;
- o segundo caso resulta de elementos obtidos no anexo H do GUM (1995), relativo à comparação dimensional directa – calibração de um bloco-padrão;
- o terceiro caso visa a quantificação da incerteza de medição associada a um sistema primário de medição de caudal – utilizando o método gravimétrico – aplicável na calibração de caudalímetros e suportado numa instalação laboratorial.

O segundo caso reflecte uma situação comum – com grande aplicação – envolvendo a medição directa da grandeza comprimento.

O terceiro caso tem o interesse acrescido de evidenciar a potencialidade da MCS quando aplicada na modelação de processos complexos e de particular exigência metrológica. Neste caso particular, a instalação<sup>1</sup> a que se reporta o estudo é única na Península Ibérica e com um número reduzido de instalações similares no mundo, presta serviços de calibração e ensaio metrológico com um nível de exactidão que a qualifica como instalação primária, da grandeza caudal, no território nacional.

Em cada um dos estudos existe uma primeira parte onde se desenvolve o modelo matemático que suporta a respectiva avaliação de incertezas. Em seguida, apresenta-se a solução desenvolvida com base na metodologia GUM incluindo, nessa descrição, a eventual

---

<sup>1</sup> LEHid, Laboratório de Ensaios Hidráulicos do Departamento de Hidráulica e Ambiente do LNEC

adaptação dos modelos matemáticos ao procedimento adoptado para este efeito. Nesta parte, dedicada à solução GUM, encontra-se uma outra componente de informação que, tal como o modelo matemático, é partilhada com a MCS (e, por isso, não repetida nestas segundas partes), dedicada à caracterização das variáveis aleatórias que determinam as componentes de incerteza (incluindo a configuração da distribuição de probabilidade e seus parâmetros). A razão para a inclusão desta descrição na parte GUM resulta de surgir na sequência do texto em primeiro lugar e, também, por o procedimento GUM necessitar de um conjunto adicional de informações que são relevantes apenas para este procedimento (caso da definição ou atribuição do número de graus de liberdade das componentes de incerteza e da determinação das derivadas parciais necessárias à aplicação da Lei de Propagação de Incertezas).

O relativo detalhe com que algumas das componentes de incerteza são descritas deve-se ao facto de se considerar que esta explicitação favorece quer a compreensão da interpretação quer a evidenciação das particularidades, limitações e potencialidades observadas em resultado destes estudos.

A fim de garantir um elevado grau de confiança no resultados obtidos nos diversos estudos, apresentados neste capítulo e no seguinte, envolvendo simulação computacional, foram adoptados procedimentos de validação de *software* cuja descrição se encontra exposta no anexo 6.

A apresentação dos diversos estudos é sistematicamente concluída com a indicação dos resultados obtidos nos testes de sensibilidade, constituindo estes um elemento da metodologia de simulação (cf. descrito na parte 7.6.5.1) visando obter a influência associada ao gerador de números pseudo-aleatórios nos resultados. Estes testes consistem na utilização de um conjunto de sequências de números pseudo-aleatórios totalmente distinto dos que conduziram aos resultados de simulação apresentados e observar as diferenças nos parâmetros estatísticos obtidos pelas duas vias.

## **8.2 *Estudo comparativo da avaliação da incerteza de medição associada à medição da pressão com balanças manométricas de massas–suspensas***

### **8.2.1 Modelo matemático**

As *balanças manométricas de massas suspensas* são instrumentos de medição de referência com ampla utilização quer em meios laboratoriais quer industriais, e cuja utilização mais comum se destina à calibração (*cruzada*) de outras balanças manométricas e à calibração ou simples avaliação da condição metrológica de manómetros e transdutores de pressão.

Este tipo de equipamentos é constituído por um conjunto *pistão-cilindro* (ou uma *esfera flutuante*) sobre o qual se colocam as *massas suspensas* exercendo este uma pressão num fluido através de uma superfície de contacto designada por *área efectiva*. Nessa interface da base do *pistão*, a força gravitacional correspondente à soma dos pesos do *pistão* e das *massas suspensas* (Figura 8.4) é contrariada por uma força vertical ascendente resultante da pressão aplicada.

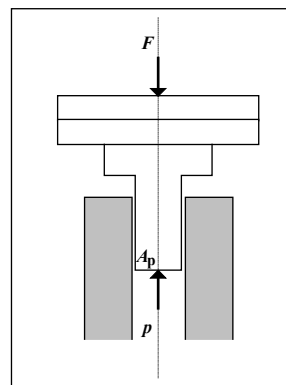


Figura 8.1: Representação em corte do conjunto *pistão-cilindro*

Essa pressão é transmitida ao instrumento a calibrar (princípio dos vasos comunicantes) através de um fluido, podendo este ser gás (em geral, azoto) ou líquido (habitualmente óleo). Finalmente, efectua-se uma comparação entre a pressão indicada no equipamento em ensaio e a pressão gerada.

Na Figura (8.1)  $p$  representa a pressão exercida pelo fluido actuando na base do *pistão*,  $F$  é a força gravitacional actuante sobre o conjunto de *massas suspensas* e *pistão* ( $F=mg$ ), e  $A_p$  é a *área efectiva* do conjunto *pistão-cilindro*.

O guia EA 10/03 (1997) dedicado à calibração de balanças manométricas de massas suspensas, contem a descrição do modelo matemático a adoptar nessa tarefa e um procedimento específico de avaliação de incertezas de medição suportado no GUM.

O modelo matemático utilizado no que se segue diz respeito à medição de pressão em modo relativo de acordo com o “método tipo B”<sup>2</sup> cf. EA 10/03 (1997).

Admitindo que o conjunto de *massas suspensas*,  $m_k$  (massa do *pistão* e das *massas suspensas*), origina um valor de pressão,  $p_k$ , sobre uma *área efectiva*,  $A_p$ , num local com uma aceleração da gravidade  $g$ , tem-se:

$$p_k = \frac{m_k g}{A_p} \quad (8.1)$$

Refinando este modelo e considerando, adicionalmente, os factores de influência da medição, resulta um modelo matemático (para balanças manométricas operadas em modo relativo e com líquido):

<sup>2</sup> Método baseado na determinação da massa do pistão e das *massas suspensas* e na estimativa da *área efectiva* do conjunto *pistão-cilindro* em condições apropriadas (Rotação do conjunto *massas suspensas* e *pistão* minimizando o atrito entre o *pistão* e o *cilindro*, e a centragem destes elementos entre si; e estabilização da temperatura ambiente, da humidade relativa e dos fluxos de ar).

$$p_e = \frac{\sum_i m_k g (1 - \rho_a / \rho_{mk}) + \sigma_f c}{A_p [1 + (\alpha_p + \alpha_c)(\theta - \theta_r)]} \quad (8.2)$$

onde  $p_e$  é a pressão medida na base do pistão;  $m_k$  é o peso de cada *massa suspensa* aplicada ao pistão, e de cada um dos restantes elementos flutuantes;  $g$  é a aceleração da gravidade no local do ensaio;  $\rho_a$  é a massa volúmica do ar [Davis (1991)];  $\rho_{mk}$  é a massa volúmica dos elementos flutuantes;  $A_p$  é a área efectiva do conjunto *pistão–cilindro* suposto à temperatura de referência  $\theta_r$  (20 °C);  $\alpha_p$  é o coeficiente linear de expansão térmica do pistão;  $\alpha_c$  é o coeficiente linear de expansão térmica do cilindro;  $\theta$  é a temperatura do conjunto *pistão–cilindro* observada durante o ensaio,  $\sigma_f$  é a tensão superficial do fluido; e  $c_p$  é o perímetro da secção transversal do pistão, no nível emergente do óleo.

A área efectiva pode ser determinada por calibração, resultando dessa operação a determinação de um valor constante ou a elaboração de uma curva de correcção incorporando coeficientes de distorção de 1ª ordem ou de 2ª ordem. No exemplo em estudo, considera-se a hipótese de uma curva que incorpora a área efectiva a pressão nula  $A_0$  e o coeficiente de distorção de primeira ordem,  $\lambda$ , de acordo com a seguinte expressão:  $A_p = A_0(1 + \lambda p)$ , sendo  $p$  um valor estimado da pressão medida  $p_e$ .

Uma situação habitual na utilização deste tipo de balanças consiste na colocação do instrumento em ensaio a uma cota distinta daquela onde se aplica a pressão (área efectiva do pistão). Quando tal acontece torna-se necessário introduzir, adicionalmente, uma correcção no modelo matemático, envolvendo uma parcela que é igual a  $p_m = p_e + (\rho_f - \rho_a)g\Delta h$ , onde  $\rho_f$  é a massa volúmica do fluido,  $\rho_a$  é a massa volúmica do ar envolvente e  $\Delta h$  a diferença entre a cota  $h_1$  do nível de referência da balança manométrica e a cota  $h_2$  do ponto onde a pressão é medida pelo equipamento a ensaiar,  $\Delta h = h_1 - h_2$ .

Com esta contribuição, o modelo matemático adquire uma expressão final que suporta a aplicação quer do GUM quer da MCS (na prática, esta expressão é simplificada, por se verificar que o termo  $\sigma_f c_p$  é, habitualmente, desprezável face aos restantes componentes).

$$p_e = \frac{\sum_i m_k g (1 - \rho_a / \rho_{mk})}{A_p [1 + (\alpha_p + \alpha_c)(\theta - \theta_r)]} + \rho_f g \Delta h \quad (8.3)$$



Dando sequência ao procedimento GUM, conhecendo-se o modelo matemático (8.3) e as respectivas variáveis de entrada, as etapas seguintes (*vide* procedimento exposto no capítulo 6) envolvem a determinação da respectiva contribuição para a avaliação da incerteza de medição e a identificação das funções densidade de probabilidade e dos seus parâmetros.

## 8.2.2 Solução GUM

### 8.2.2.1 Condições iniciais do problema e formulação das componentes de incerteza

A aplicação da metodologia GUM envolve algumas aproximações, a primeira das quais, resulta do modelo matemático (8.3) ser de natureza implícita, uma vez que a grandeza *área efectiva* depende do valor da pressão  $p$ . De acordo com o Guia EA que suporta este estudo, em virtude de  $\lambda p \ll 1$  assume-se a aproximação  $A_p = A_0 (1 + \lambda p)$ .

Outra particularidade resulta de se considerar que, dos dois métodos propostos no mesmo Guia, se adopta o método B, segundo o qual se deve contabilizar como componente de incerteza a repetibilidade experimental.

A aplicação da LPI requer a determinação das componentes de incerteza,  $u_i(p)$ , o que, origina as expressões que se seguem. Relembra-se que estas resultam do produto das derivadas parciais  $(\partial p / \partial x_i)$  pela incerteza associada à grandeza de entrada em causa,  $u(x_i)$ .

A *incerteza de medição associada à repetibilidade*,  $u_{\text{rep}}(p)$ , é dada pelo valor do maior dos desvios-padrão experimentais observados nos patamares de ensaio (situação mais comum) ou por uma expressão linear do tipo:  $u_{\text{rep}}(p) = a + b \cdot p$ , onde  $a$  e  $b$  são duas constantes que resultam de um ajustamento por regressão linear aos diversos desvios-padrão calculados (situação apontada no guia EA mas menos habitual na prática).

A massa total,  $m$ , aplicada ao pistão, é determinada pelo somatório de todas as massas suspensas e elementos flutuantes utilizadas em cada patamar de ensaio. Sendo  $u(m)$  a incerteza de medição padrão associada ao conjunto indicado de massas, a componente de *incerteza de medição padrão associada à massa dos elementos flutuantes*,  $u_m(p)$ , é

determinada pela expressão:  $u_m(p) = \frac{p}{m} \cdot u(m)$ .

A incerteza de medição padrão associada à área efectiva, designada por  $u_{ae}(p)$ , baseia-se na incerteza de medição da área efectiva,  $u(A)$ , expressa em certificado de calibração,

obtendo-se a componente de incerteza por:  $u_{ae}(p) = \frac{p}{A} \cdot u(A)$ .

A incerteza de medição padrão associada ao coeficiente de distorção,  $u_\lambda(p)$ , é determinada por duas componentes, uma associada à determinação do coeficiente de distorção estimada através de um método do tipo A e outra, do tipo B, associada ao método de interpolação linear adoptado e/ou a especificações dos materiais. Considerando que  $A_p = A_0 (1 + \lambda p)$ , e  $\lambda p \ll 1$ , pode utilizar-se um valor aproximado de  $p_e$  para indicar a pressão medida (por exemplo: o valor nominal  $p$ , ou o valor dado por  $p = \sum_k m_k g / A_0$ ).

Admitindo que a incerteza de medição padrão associada à determinação do coeficiente de distorção é  $u(\lambda)$ , a componente de incerteza associada à variação do coeficiente de distorção é determinada pela expressão:  $u_\lambda(p) = p^2 \cdot u(\lambda)$ .

A incerteza de medição padrão associada à aceleração da gravidade no local  $u_g(p)$  é determinada pela expressão:  $u_g(p) = \frac{p}{g} \cdot u(g)$ , considerando que  $u(g)$  representa a incerteza de medição padrão relativa à determinação do valor da aceleração da gravidade no local.

Admitindo que se realiza o ensaio num ambiente condicionado com uma amplitude de variação da temperatura,  $\Delta\theta$ , com distribuição de probabilidade de configuração U, a incerteza de medição padrão associada à temperatura do conjunto pistão-cilindro,  $u_{\Delta\theta}(p)$ , é

expressa por:  $u_{\Delta\theta}(p) = p \cdot (\alpha_p + \alpha_c) \cdot \frac{\Delta\theta}{\sqrt{2}}$ .

A incerteza de medição padrão associada ao coeficiente linear de expansão térmica do conjunto pistão-cilindro,  $u_\alpha(p)$ , resulta das incertezas associadas aos coeficientes lineares de expansão térmica pistão  $u(\alpha_p)$  e do cilindro  $u(\alpha_c)$ , e da variação de temperatura  $\Delta\theta$  (diferença entre a temperatura observada durante o ensaio e a temperatura de referência), sendo

determinada pela expressão:  $u_\alpha(p) = \left[ p \cdot \Delta\theta \cdot \frac{u(\alpha_p + \alpha_c)}{2} \right]$ .

A incerteza de medição padrão associada à diferença de cota resulta, essencialmente, de três parâmetros:  $\rho_f$ ,  $g$  e  $\Delta h$ . No entanto, considera-se como grandeza variável e, portanto, contributiva apenas a grandeza  $\Delta h$  originando a parcela,  $u_{\Delta h}(p)$ . A sua quantificação resulta da determinação estatística do valor de  $\Delta h$  e da sua incerteza,  $u(\Delta h)$ . A componente de incerteza  $u_{\Delta h}(p)$  é determinada, então, pela expressão:  $u_{\Delta h}(p) = \rho_f \cdot g \cdot u(\Delta h)$ .

A incerteza de medição padrão associada ao desvio de perpendicularidade do pistão, admitindo que o ângulo entre o eixo do pistão e a vertical é o ângulo de inclinação,  $\varphi$ , resulta da componente de força dada por:  $F' = F \times \cos(\varphi)$ . Habitualmente, esta componente de incerteza considera-se desprezável, uma vez que se procura minimizar o seu efeito usando procedimentos estabelecidos, por exemplo, usando niveladores apropriados aplicados na base da balança manométrica e no topo do pistão. Caso esta componente de incerteza,  $u_{inc}(p)$ , deva ser contabilizada, então, a sua expressão é dada por:  $u_{inc}(p) = p \times \sin(\varphi) \times \frac{u(\varphi)}{\sqrt{3}}$ .

A incerteza de medição padrão associada ao efeito de impulsão do ar nas massas suspensas envolve a determinação da massa volúmica do ar e a determinação da massa volúmica das massas suspensas. Considera-se que a contabilização da segunda componente, contudo, já está incorporada na incerteza de calibração dessas massas.

Assim, restando a primeira componente, é necessário determinar a amplitude de variação da massa volúmica do ar no laboratório,  $\Delta(\rho_a)$ , em função das condições ambientais (pressão, temperatura e humidade relativa). Considerando que a sua distribuição é representada pela distribuição normal, a incerteza de medição padrão associada é determinada através da

expressão: 
$$u_{imp}(p) = \frac{p}{(\rho_m - \rho_a)} \cdot \Delta(\rho_a).$$

A incerteza associada à taxa de rotação e ao sentido de rotação é considerada desprezável assumindo que o instrumento em causa dispõe de um conjunto pistão-cilindro com baixo atrito e de motorização para realizar a rotação das massas suspensas durante o ensaio – acessório recomendado para a sua utilização. A pressão nominal de ensaio considerada,  $p_e$ , corresponde a 4 MPa.

A incorporação destas diferentes parcelas numa tabela de balanço de incertezas, aplicada a um patamar de pressão específico (no caso,  $4 \cdot 10^6$  Pa), permite efectuar uma estimativa da incerteza de medição padrão de acordo com o disposto no Quadro (8.1).

Quadro 8.1: Tabela de balanço de incertezas relativo ao 1º estudo – balanças manométricas de massas suspensas

Grandeza de entrada (Xi)	Símbolo	Estimativa (xi)	Limites de variação	FaP* Divisor	u(xi)	Derivada Ci	Valor de Ci	u(y)
massas suspensas	$m_k$	32,07682 Kg	$\pm 3,2 \cdot 10^{-5}$ kg	N 1	$\pm 3,2 \cdot 10^{-5}$ kg			
Massa do pistão	$m_p$	0,82322 kg	$\pm 3,6 \cdot 10^{-4}$ kg	N 1	$\pm 3,6 \cdot 10^{-4}$ kg	$\rho_e/m$	$1,21580 \cdot 10^5$ Pa/kg	$\pm 4,8 \cdot 10^1$ Pa
Área efectiva a pressão nula	$A_0$	$8,0661 \cdot 10^{-5}$ m <sup>2</sup>	$\pm 3,2 \cdot 10^{-8}$ m <sup>2</sup>	N 1	$\pm 3,2 \cdot 10^{-8}$ m <sup>2</sup>	$\rho_e/A_0$	$4,9590 \cdot 10^{10}$ Pa/m <sup>2</sup>	$\pm 1,6 \cdot 10^3$ Pa
Coefficiente de Distorção 1ª ordem	$\lambda$	$3,3 \cdot 10^{-11}$ Pa <sup>-1</sup>	$\pm 7,0 \cdot 10^{-13}$ Pa <sup>-1</sup>	N 1	$\pm 7,0 \cdot 10^{-13}$ Pa <sup>-1</sup>	$P_e^2$	$1,6 \cdot 10^{13}$ Pa <sup>2</sup>	$\pm 1,1 \cdot 10^1$ Pa
Aceleração da gravidade (local)	$g$	9,80070 m·s <sup>-2</sup>	$\pm 1,0 \cdot 10^{-5}$ m·s <sup>-2</sup>	N 1	$\pm 1,0 \cdot 10^{-5}$ m·s <sup>-2</sup>	$\rho/g$	$4,0813 \cdot 10^5$ Pa/m·s <sup>-2</sup>	$\pm 4,2$ Pa
Coefficiente linear de expansão térmica	$2\alpha = (\alpha_s + \alpha_p)$	$4,6 \cdot 10^{-5}$ °C <sup>-1</sup>	$\pm 4,2 \cdot 10^{-6}$ °C <sup>-1</sup>	T $\sqrt{6}$	$\pm 1,7 \cdot 10^{-6}$ °C <sup>-1</sup>	$\rho_e \cdot \Delta\theta$	$4,0 \cdot 10^7$ Pa·°C	$\pm 6,9 \cdot 10^1$ Pa
Massa volúmica do ar	$\rho_a$	1,2 kg·m <sup>-3</sup>	$\pm 2,0 \cdot 10^{-2}$ kg·m <sup>-3</sup>	T $\sqrt{6}$	$\pm 8,2 \cdot 10^{-3}$ kg·m <sup>-3</sup>	$\rho_e(\rho_m - \rho_a)$	$5,1 \cdot 10^2$ Pa/kg·m <sup>3</sup>	$\pm 4,2$ Pa
Massa volúmica do fluido	$\rho_f$	871 kg·m <sup>-3</sup>	$\pm 5,0 \cdot 10^{-1}$ kg·m <sup>-3</sup>	T $\sqrt{6}$	$\pm 2,0 \cdot 10^{-1}$ kg·m <sup>-3</sup>	$g \cdot \Delta h$	$9,8 \cdot 10^{-2}$ m <sup>2</sup> ·s <sup>-2</sup>	$\pm 2,0 \cdot 10^2$ Pa
Massa volúmica dos pesos padrão	$\rho_m$	7850 kg·m <sup>-3</sup>	$\pm 5,0 \cdot 10^{-1}$ kg·m <sup>-3</sup>	T $\sqrt{6}$	$\pm 2,0 \cdot 10^{-1}$ kg·m <sup>-3</sup>	0	0	0 Pa
Temperatura de ensaio	$\theta$	30,0 °C	$\pm 1,0$ °C	R $\sqrt{3}$	$\pm 5,8 \cdot 10^{-1}$ °C	$\rho_e \cdot (\alpha_s + \alpha_p)$	$1,84 \cdot 10^2$ Pa/°C	$\pm 1,1 \cdot 10^2$ Pa
Diferença de cota	$\Delta h$	0,010 m	$\pm 1,0 \cdot 10^{-3}$ m	R $\sqrt{3}$	$\pm 5,8 \cdot 10^{-4}$ m	$\rho_f \cdot g$	$8,54 \cdot 10^3$ Pa/m	$\pm 4,9$ Pa
Inclinação do pistão	$F \cdot \cos(\varphi)$	0 rad	$\pm 5,8 \cdot 10^{-4}$ rad	R $\sqrt{3}$	$\pm 3,3 \cdot 10^{-4}$ rad	$\rho_e \cdot \sin(\varphi)$	$2,32 \cdot 10^4$ Pa/rad	$\pm 7,8 \cdot 10^1$ Pa

\* N – Normal, T – Triangular, R – Rectangular ou uniforme

Neste Quadro, os valores das estimativas são baseados em informação de certificados de calibração, tal como as incertezas apontadas na quarta coluna. A exceção a essa regra, verifica-se com os valores associados às massas volúmicas, onde se utilizaram valores de referência normalizados – para as estimativas – e se estimou a sua dispersão com base em metodologias e expressões do BIPM internacionalmente aceites [EA 10/18 (2005)].

Os divisores indicados correspondem aos denominadores das expressões de determinação dos desvios-padrão (associados a cada uma das funções densidade de probabilidade).

Relativamente aos resultados obtidos, o valor da estimativa da pressão, usando os valores das estimativas das diversas componentes que se encontram no Quadro e a expressão do modelo matemático (8.3), conduz a um resultado global de,

$$p_e = 3,9946 \text{ MPa}$$

A incerteza de medição obtida usando os resultados expostos na tabela de balanço de incerteza (8.3) e a LPI (valor arredondado para 2 algarismos significativos), resultou,

$$u(p_e) = \pm 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ MPa} \quad (8.4)$$

e a subsequente determinação de intervalos de confiança para  $\pm 1\sigma$ ,  $\pm 1,96\sigma$ , e  $\pm 2,68\sigma$  permitiu a obtenção dos valores apresentados no Quadro seguinte.

*Quadro 8.2: Intervalos de incerteza obtidos usando o GUM*

Probabilidade associada	Intervalo de incerteza	Limite inferior	Limite superior
68 %	$P_e \pm u(p_e)$	3,9930 MPa	3,9962 MPa
95 %	$p_e \pm 1,96 \cdot u(p_e)$	3,9915 MPa	3,9977 MPa
99 %	$p_e \pm 2,68 \cdot u(p_e)$	3,9903 MPa	3,9989 MPa

Refira-se que os resultados apresentados possuem um número de algarismos significativos correspondente às casas decimais com significado na expressão da incerteza de medição padrão,  $u(p_e)$ , que foi obtida.

### 8.2.3 Solução MCS

A aplicação obtida pela MCS relativa ao problema anterior recorre ao modelo matemático previamente apresentado em (8.3),

$$p_e = \frac{\sum_i m_i g (1 - \rho_a / \rho_{mi})}{A_p [1 + (\alpha_p + \alpha_c)(t - t_r)]} + \rho_f g \Delta h$$

e à parametrização das variáveis de entrada de acordo com os valores apontados no Quadro (8.1), sendo transcritos para o Quadro 8.3 os elementos relevantes para a simulação.

É com base nos valores indicados neste Quadro que se desenvolveu o processo de simulação (MCS), considerando como dimensão apropriada das sequências 150 000 valores (obtido mediante ensaio prévio comparativo face ao critério de exactidão = de  $5 \cdot 10^{-5}$  MPa (definido com base na exactidão obtida utilizando o GUM, veja-se expressão 8.5).

Quadro 8.3: Parâmetros das funções densidade de probabilidade usados na MCS

Grandeza de entrada (X <sub>i</sub> )	Símbolo	Estimativa	Limites de variação	F <sub>d</sub> P*
massas suspensas	$m_k$	32,07682 kg	$\pm 3,2 \cdot 10^{-5}$ kg	N
Massa do pistão	$m_p$	0,82322 kg	$\pm 3,6 \cdot 10^{-4}$ kg	N
Área efectiva a pressão nula	$A_0$	$8,0661 \cdot 10^{-5}$ m <sup>2</sup>	$\pm 3,2 \cdot 10^{-8}$ m <sup>2</sup>	N
Coef. Distorção de 1ª ordem	$\lambda$	$3,3 \cdot 10^{-11}$ Pa <sup>-1</sup>	$\pm 7,0 \cdot 10^{-13}$ Pa <sup>-1</sup>	N
Aceleração da gravidade (local)	$g$	9,8007 m·s <sup>-2</sup>	$\pm 1,0 \cdot 10^{-5}$ m·s <sup>-2</sup>	N
Coeficiente linear de expansão térmica	$2\alpha = (\alpha_c + \alpha_p)$	$4,6 \cdot 10^{-5}$ °C <sup>-1</sup>	$\pm 4,2 \cdot 10^{-6}$ °C <sup>-1</sup>	T
Massa volúmica do ar	$\rho_a$	1,2 kg·m <sup>-3</sup>	$\pm 2,0 \cdot 10^{-2}$ kg·m <sup>-3</sup>	T
Massa volúmica do fluido	$\rho_f$	871 kg·m <sup>-3</sup>	$\pm 5,0 \cdot 10^{-1}$ kg·m <sup>-3</sup>	T
Massa volúmica dos pesos	$\rho_m$	7850 kg·m <sup>-3</sup>	$\pm 5,0 \cdot 10^{-1}$ kg·m <sup>-3</sup>	T
Temperatura de ensaio	$T$	30 °C	$\pm 1,0$ °C	R
Diferença de cota	$\Delta h$	0,01 m	$\pm 1,0 \cdot 10^{-3}$ m	R
Inclinação do pistão	$\varphi$	0 rad	$\pm 1 \cdot 10^{-3}$ rad	R

\* N – Normal, T – Triangular, R – Rectangular ou uniforme

No que se refere ao gerador de números pseudo-aleatórios utilizado, conforme referido anteriormente, desenvolveu-se uma rotina em Fortran 90 com o algoritmo AS132 do gerador combinado H-W, para criação das sequências da simulação.

As Figuras (8.2a) e (8.2b) ilustram histogramas das sequências de valores geradas para representar a variável “conjunto de massas suspensas”, cujo valor médio é 32,07682 kg e o desvio-padrão  $3,2 \cdot 10^{-5}$  kg (admitindo-se que a sua representação é a de uma distribuição de probabilidade normal) e, para representar a probabilidade associada à massa volúmica do ar, cujo valor médio é  $1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  e a distribuição de probabilidade adoptada é triangular com limites dados por  $(1,2 \pm 2 \cdot 10^{-2}) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

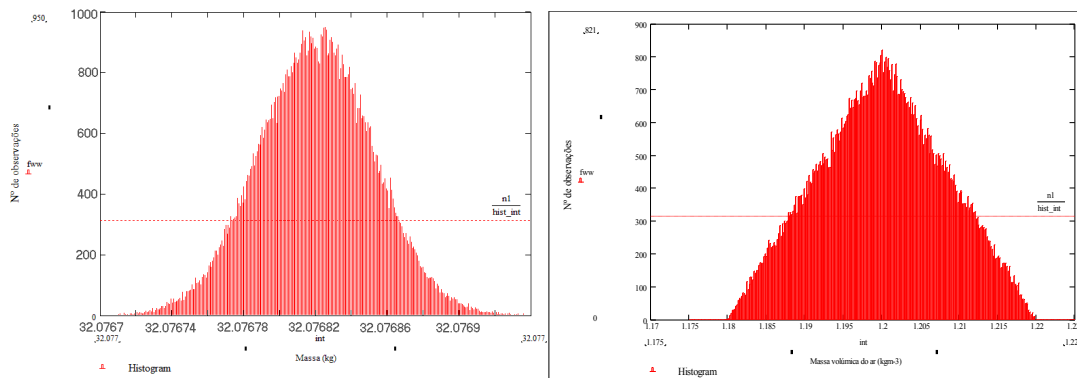


Figura 8.2a e 8.2b – Histogramas relativos aos valores da massa suspensa e da massa volúmica do ar obtidos por simulação

Da simulação efectuada resultaram os valores que se encontram no Quadro (8.4) e a distribuição de probabilidade normal, conforme se apresenta na Figura (8.3).

Quadro 8.4: Resultados obtidos utilizando a MCS (1º estudo)

<b>Valor médio MCS: 3, 994 628 MPa</b>		
<b>Intervalo de confiança de 68 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	3,993 05 MPa	3,996 21 MPa
Incerteza de medição $u_{68}(I)$ :	$\pm 0,003 2$ MPa ( $\pm 3,2$ kPa)	
<b>Intervalo de confiança de 95 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	3,991 50 MPa	3,997 74 MPa
Incerteza de medição $u_{95}(I)$ :	$\pm 0,006 2$ MPa ( $\pm 6,2$ kPa)	
<b>Intervalo de confiança de 95 % do percentil <math>y_L</math> (obtido para 95 %)</b>		
Percentis limite:	3,991 48 MPa	3,991 52 MPa
Incerteza do percentil L, $\delta y_L =  y_{L+} - y_{L-} $ :	0,000 04 MPa (40 Pa)	
<b>Intervalo de confiança de 95 % do percentil <math>y_H</math> (obtido para 95 %)</b>		
Percentis limite:	3,997 72 MPa	3,997 76 MPa
Incerteza do percentil H, $\delta y_H =  y_{H+} - y_{H-} $ :	0,000 04 MPa (40 Pa)	
<b>Intervalo de confiança de 99 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	3,990 52 MPa	3,998 72 MPa
Incerteza de medição $u_{99}(I)$ :	$\pm 0,008 2$ MPa ( $\pm 8,2$ kPa)	

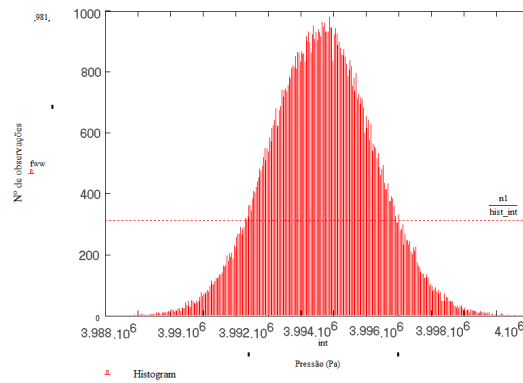


Figura 8.3: Histograma relativo à sequência de valores da grandeza de saída – pressão – relativa ao 1º estudo

A avaliação do requisito de exactidão depende da definição prévia de  $e_r$ , considerando-se que este deve possuir um número de dígitos decimais significativos,  $d$ , equivalente a 4 (cf. exactidão dos resultados obtidos usando o GUM), de que resulta a equação,

$$e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \text{ MPa} = 50 \text{ Pa} \quad (8.5)$$

Este valor é comparável com os intervalos de confiança dos percentis mediante a aplicação dos critérios de aceitação (cf. 7.6.5.4).

$$\delta y_L = |y_{L+} - y_{L-}| \approx 40 \text{ Pa} \leq e_r = 50 \text{ Pa}$$

$$\delta y_H = |y_{H+} - y_{H-}| \approx 40 \text{ Pa} \leq e_r = 50 \text{ Pa}$$

O teste de sensibilidade, efectuado neste estudo, conduziu a uma diferença percentual do valor médio de 0,01 % e do intervalo de confiança expandido (95%) de 0,2 %.

#### 8.2.4 Comparação de resultados

A comparação entre a aplicação do GUM e da MCS no 1º estudo pode ser efectuada partindo do Quadro de resultados (8.5), evidenciando uma concordância genérica entre os resultados obtidos usando a metodologia GUM e a MCS, embora, para o intervalo de confiança de 99 % se comece a detectar (cf. se pode ver na Fig. 8.4) uma pequena diferença.



Quadro 8.5: Comparação de resultados do 1º estudo

Intervalo de confiança	68%	95%	99 %
	$p_e \pm u(p_e)$	$p_e \pm 1,96 \cdot u(p_e)$	$p_e \pm 2,68 \cdot u(p_e)$
GUM	3,9930 MPa	3,9915 MPa	3,9903 MPa
	3,9962 MPa	3,9977 MPa	3,9989 MPa
$\Delta u_{GUM}$	0,0032 MPa	0,0062 MPa	0,0086 MPa
MCS	3,9930 MPa	3,9915 MPa	3,9905 MPa
	3,9962 MPa	3,9977 MPa	3,9987 MPa
$\Delta u_{MCS}$	0,0032 MPa	0,0062 MPa	0,0082 MPa
$\left( \frac{\Delta u_{GUM} - \Delta u_{MCS}}{\Delta u_{GUM}} \cdot 100 \right) \%$	0 %	0 %	+ 5 %

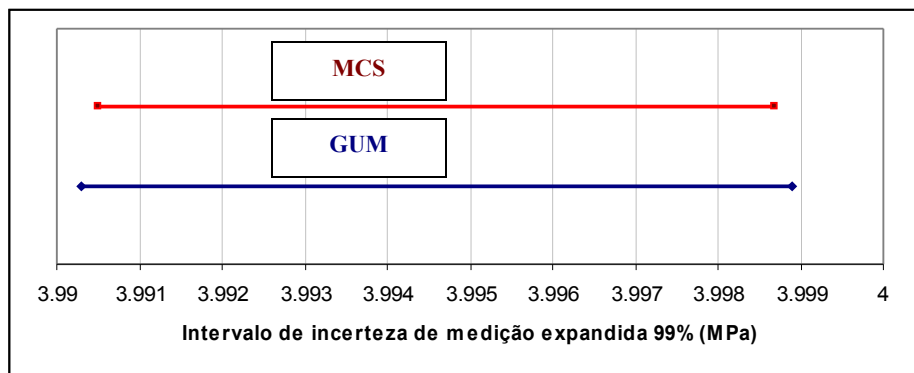


Figura 8.4: Intervalos de Incerteza de medição expandida (99%)

Este primeiro exemplo mostra que, estando disponíveis as ferramentas de base MCS (de geração de números aleatórios, de conversão de distribuições e de ordenação de sequências) o processo (de MCS) de avaliação de incertezas torna-se mais eficaz que o GUM, uma vez que uma parte significativa das tarefas requeridas por este último deixam de ser necessárias.

### 8.3 Estudo comparativo da avaliação da incerteza associada à medição de comprimento por comparação directa

#### 8.3.1 Modelo matemático

Uma das aplicações mais comuns de medição envolve a comparação directa da grandeza comprimento entre instrumentos de medição e a materialização por padrões de referência. Este processo ocorre, por exemplo, na calibração de instrumentos de medição de comprimento, sendo apresentado como exemplo de avaliação de incertezas de medição no anexo H do GUM.

Neste exemplo, considera-se a medição (calibração) do comprimento de um bloco-padrão cujo valor nominal é 50 mm, sujeito a uma comparação com um bloco-padrão de referência (calibrado), dispondo de igual valor nominal de comprimento.

Considera-se, por convenção, que os valores de medição devem ser apresentados de acordo com as condições de referência específicas aplicáveis, as quais, para a medição de comprimento, devem respeitar a temperatura de referência de 20 °C (cf. definição da ISO).

O resultado da comparação entre os dois blocos-padrão é a diferença de comprimento  $d$ :

$$d = l(1 + \alpha \cdot \theta) - l_s(1 + \alpha_s \cdot \theta_s) \quad (8.6)$$

onde  $l$  e  $l_s$  representam o valor dimensional do bloco-padrão a calibrar e do bloco-padrão de referência, respectivamente,  $\alpha$  e  $\alpha_s$  são os coeficientes lineares de expansão térmica, respectivamente, do bloco-padrão a calibrar e do bloco-padrão de referência;  $\theta$  e  $\theta_s$  representam os desvios em temperatura relativamente à temperatura de referência de 20 °C, respectivamente, da temperatura do bloco-padrão a calibrar e do bloco-padrão de referência.

Na equação (8.7) coloca-se em evidência o valor da mensuranda,  $l$ :

$$l = \frac{l_s(1 + \alpha_s \cdot \theta_s) + d}{(1 + \alpha \cdot \theta)} \quad (8.7)$$

## 8.3.2 Solução GUM

### 8.3.2.1 Estabelecimento do modelo matemático simplificado

A descrição no GUM envolve uma modificação do modelo matemático que se descreve em seguida. Partindo do modelo (8.7) aplicando-lhe, em primeiro lugar, a separação de factores cf. o exposto em (8.8), resulta a equação aproximada<sup>3</sup> (8.9).

$$l = \frac{l_s(1 + \alpha_s \cdot \theta_s) + d}{(1 + \alpha \cdot \theta)} = [l_s(1 + \alpha_s \cdot \theta_s) + d] \cdot \left[ \frac{1}{(1 + \alpha \cdot \theta)} \right] \quad (8.8)$$

$$l = l_s + d + l_s(\alpha_s \cdot \theta_s - \alpha \cdot \theta) + \dots \quad (8.9)$$

<sup>3</sup> Atendendo a que o desenvolvimento em série de Taylor para a expressão:  $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \dots$  então,  $(1 + \alpha \theta)^{-1} = 1 - \alpha \theta + \dots$  e substituindo esta última expressão em (8.8) resulta:  $l = [l_s(1 + \alpha_s \theta_s) + d] \cdot [(1 - \alpha \theta) + \dots]$ . Efectuando, a seguir, o cálculo dos produtos, resulta:  $l = (l_s + d - l_s \alpha \theta + l_s \alpha_s \theta_s) - l_s \alpha_s \theta_s \alpha \theta - d \alpha \theta + \dots$

A obtenção do resultado apresentado em (8.9) carece, ainda, de duas outras aproximações:  $l_s \alpha_s \theta_s \alpha \theta \ll l_s \alpha \theta$ , resultantes de se admitir que os coeficientes  $\alpha$  e  $\alpha_s$  possuem uma dimensão (da ordem de  $1,15 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , valor comum para o aço – liga que constitui uma parte significativa dos equipamentos de medição); e  $d \alpha \theta \ll d$  pela mesma razão da dimensão de  $\alpha$ , então a expressão em causa toma, finalmente, a forma aproximada que se apresentou em (8.9).

Esta equação não é, ainda, o modelo matemático utilizado no exemplo do GUM. Com efeito, existe uma modificação suplementar, resultante da combinação de variáveis:  $\delta \theta = (\theta - \theta_s)$  e  $\delta \alpha = (\alpha - \alpha_s)$  representando, respectivamente, a diferença de temperatura entre o bloco-padrão a calibrar e o bloco-padrão de referência e a diferença entre os coeficientes lineares de expansão térmica dos mesmos. Usando estas transformações de variáveis resulta, então, a equação pretendida.

$$l = l_s + d - l_s(\delta \alpha \cdot \theta + \alpha_s \cdot \delta \theta) \quad (8.10)$$

Esta alteração, aparentemente de menor importância é, de facto, fundamental na perspectiva de simplificação do problema (na óptica do GUM), uma vez que ela permite modificar um modelo matemático onde existem dois pares de variáveis correlacionadas,  $(\alpha_s, \alpha)$  e  $(\theta_s, \theta)$ , noutro modelo onde as variáveis  $(\delta \alpha, \alpha_s, \theta$  e  $\delta \theta)$  não são correlacionadas (uma vez que as novas grandezas  $\delta \alpha$  e  $\delta \theta$  representam diferenças entre grandezas e não grandezas similares a  $\alpha_s$  e  $\theta$ , como acontecia no modelo original) evitando a necessidade de contabilizar, na LPI, as componentes de correlação resultantes.

### 8.3.2.2 Incerteza associada à calibração do equipamento de referência

A incerteza associada à calibração do equipamento de referência,  $u(l_s)$ , determina-se admitindo que o certificado de calibração fornece uma incerteza de medição expandida de  $U_{99\%}(l_s) = \pm 75 \text{ nm}$  (implicitamente, admite-se que a distribuição de probabilidade correspondente é normal), com um coeficiente de expansão igual a 3,00, resultando uma contribuição dada por:

$$u(l_s) = \frac{(\pm 75 \text{ nm})}{3} = \pm 25 \text{ nm} \quad (8.11)$$

### 8.3.2.3 Incerteza associada à medição da diferença em comprimento

A incerteza associada à medição da diferença em comprimento observada,  $u(d)$ , é constituída por 3 subcomponentes: a média de diferenças observadas em 6 replicações – independentes –  $\bar{d}$ ; os efeitos aleatórios – designados no anexo H por *erros aleatórios* –,  $d_1$ , associados ao comparador utilizado na calibração; os efeitos sistemáticos – designados no anexo H por *erros sistemáticos* –,  $d_2$ , associados ao mesmo comparador.

A diferença observada – desvio de calibração – resulta da determinação do desvio-padrão experimental ponderado (25 observações experimentais obtidas com 2 blocos-padrão de referência), cujo valor corresponde a 13 nm. O valor de  $d$ , resultante de 6 replicações,

determina uma estimativa da componente de incerteza dada pelo desvio-padrão experimental da média,

$$u(\bar{d}) = \frac{(13 \text{ nm})}{\sqrt{5}} = \pm 5,8 \text{ nm} \quad (8.12)$$

De acordo com o certificado de calibração do comparador (que efectua a comparação entre os valores de  $l$  e de  $l_s$ ), os efeitos aleatórios,  $d_1$ , (admitindo a utilização de uma F<sub>d</sub>P t-Student e um intervalo de confiança de 95 %) possuem uma variação de  $\pm 0,01 \mu\text{m}$  (resultado obtido com 6 replicações e, conseqüentemente, 5 graus de liberdade e  $t_{95}(5)=2,57$ ). Assim, a sua contribuição para a avaliação da incerteza é dada pela equação seguinte:

$$u(d_1) = \frac{(0,01 \mu\text{ m})}{2,57} \approx \pm 3,9 \text{ nm} \quad (8.13)$$

e de forma equivalente, os efeitos sistemáticos do comparador possuem uma componente de variabilidade de  $\pm 0,02 \mu\text{m}$  (com F<sub>d</sub>P normal onde o factor de expansão é igual a 3,00), resultando a seguinte contribuição:

$$u(d_2) = \frac{(0,02 \mu\text{ m})}{3} \approx \pm 6,7 \text{ nm} \quad (8.14)$$

A combinação das três contribuições de acordo com a LPI determina a contribuição associada à medição da diferença observada em comprimento, conforme pretendido.

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93 \text{ nm}^2 \quad (8.15a)$$

$$u(d) \approx \pm 9,7 \text{ nm} \quad (8.15b)$$

#### 8.3.2.4 Incerteza associada à diferença entre coeficientes lineares de expansão térmica

A incerteza associada à diferença entre coeficientes lineares de expansão térmica,  $u(\delta\alpha)$ , é determinada considerando que a sua variabilidade tem uma F<sub>d</sub>P uniforme, com limites:  $\pm (1 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})$ . A expressão da variância, determina a componente de incerteza.

$$u(\delta\alpha) = \frac{(1 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})}{\sqrt{3}} \approx \pm (5,8 \cdot 10^{-7}) \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad (8.16)$$

#### 8.3.2.5 Incerteza associada à diferença de temperatura observada

A determinação da incerteza associada à diferença de temperatura observada,  $u(\theta)$ , de forma equivalente à situação no caso da diferença entre comprimentos (8.3.2.2), é composta

pela componente associada à determinação de uma temperatura média e pela componente associada à sua variação cíclica centrada nessa temperatura.

De acordo com os dados do problema (exemplo H do GUM), a temperatura do banco de ensaio é  $(19,9 \pm 0,5) \text{ }^\circ\text{C}$  e o desvio (*offset*) máximo observado tem uma variação cíclica de semi-amplitude  $\Delta\theta = 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ . Estas condições determinam uma diferença da temperatura média face à temperatura de referência – efeito sistemático – de  $\bar{\theta} = 19,9 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C} = -0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

A incerteza associada ao valor médio de temperatura observado – do banco de ensaio – é  $u(\bar{\theta}) = 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$  (F<sub>d</sub>P normal, sendo o valor indicado relativo a 1 desvio padrão).

Admite-se que, da variação cíclica, resultam valores distribuídos de acordo com uma função de probabilidade de configuração U, sendo a respectiva componente de incerteza determinada pela expressão da variância dessa função de probabilidade.

$$u(\Delta\theta) = \frac{(0,5 \text{ }^\circ\text{C})}{\sqrt{2}} = \pm 0,35 \text{ }^\circ\text{C} \quad (8.17)$$

Da combinação das duas subcomponentes anteriores resulta a contribuição para a avaliação da incerteza de medição<sup>4</sup> associada à diferença de temperatura observada.

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta\theta) = 0,165 \text{ }^\circ\text{C}^2 \quad (8.18a)$$

$$u(\theta) = \pm 0,41 \text{ }^\circ\text{C} \quad (8.18b)$$

### 8.3.2.6 Incerteza associada ao coeficiente linear de expansão térmica

O coeficiente linear de expansão térmica tem um valor típico (para o aço) de  $\alpha_s = 11,5 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Admite-se que a sua variabilidade se comporta de acordo com a distribuição de probabilidade uniforme, centrada no valor apontado e cujos limites são  $\pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Nestas circunstâncias, a *incerteza associada ao coeficiente linear de expansão térmica*,  $u(\alpha_s)$ , é determinada pelo desvio padrão associado à referida função de probabilidade (8.16).

$$u(\alpha_s) = \frac{(2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})}{\sqrt{3}} \approx \pm 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad (8.19)$$

<sup>4</sup> Os valores expostos nas equações 8.18 são os indicados no GUM, embora se verifique que o valor correcto para a equação 8.18a é  $0,1625 \text{ }^\circ\text{C}^2$ , de onde se obtém como resultado em 8.18b o valor aproximado de  $0,403 \text{ }^\circ\text{C}$  que, arredondado, origina  $0,40 \text{ }^\circ\text{C}$  (sobre a solução GUM, refira-se que a raiz quadrada de  $0,165 \text{ }^\circ\text{C}^2$  corresponde, de facto, a  $0,406 \text{ }^\circ\text{C}$  e, arredondado, para  $0,41 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

### 8.3.2.7 Incerteza associada à diferença de temperatura entre equipamentos

A incerteza associada à diferença de temperatura entre equipamentos,  $u(\delta\theta)$ , que idealmente seria nula, resulta de se admitir que no ensaio essa diferença se situa no intervalo com limites  $\pm(0,05^\circ\text{C})$ , distribuída de acordo com uma FdP uniforme, sendo a sua componente de incerteza determinada a partir da expressão da variância:

$$u(\delta\theta) = \frac{(0,05^\circ\text{C})}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,029^\circ\text{C} \quad (8.20)$$

### 8.3.2.8 Coeficientes de sensibilidade

A aplicação da LPI necessita, adicionalmente, da determinação dos coeficientes de sensibilidade determinados pelas derivadas parciais associadas ao modelo matemático em causa,  $c_i$ . Destas operações aplicadas à equação (8.10) resultam as seguintes equações (no exemplo GUM, admite-se que  $\delta\alpha = 0$  e  $\delta\theta = 0$ ):

$$\begin{aligned} c_{l_s} &= \frac{\partial l}{\partial l_s} = 1 - (\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_s \cdot \delta\theta) = 1 & c_d &= \frac{\partial l}{\partial d} = 1 \\ c_{\alpha_s} &= \frac{\partial l}{\partial \alpha_s} = -l_s \delta\theta = 0 & c_\theta &= \frac{\partial l}{\partial \theta} = -l_s \delta\alpha = 0 \\ c_{\delta\alpha} &= \frac{\partial l}{\partial (\delta\alpha)} = -l_s \theta & c_{\delta\theta} &= \frac{\partial l}{\partial (\delta\theta)} = -l_s \alpha_s \end{aligned} \quad (8.21\text{a-f})$$

### 8.3.2.9 Incerteza de medição padrão

A incerteza de medição padrão, admitindo como válida a hipótese de inexistência de correlação entre grandezas de entrada resulta, da aplicação da LPI,

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y)$$

e substituindo os termos pelos resultados apresentados anteriormente, essa expressão adquire a forma seguinte,

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= c_{l_s}^2 \cdot u^2(l_s) + c_d^2 \cdot u^2(d) + c_{\alpha_s}^2 \cdot u^2(\alpha_s) + \\ & c_\theta^2 \cdot u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 \cdot u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 \cdot u^2(\delta\theta) \end{aligned} \quad (8.22)$$

substituindo em (8.22) as equações dadas em (8.21), resulta (8.23), que determina a incerteza de medição padrão associada à medição de comprimento,  $u_c(l)$  no caso em estudo.

$$u_c^2(l) = \cdot u^2(l_s) + \cdot u^2(d) + l_s^2 \theta^2 \cdot u^2(\delta\alpha) + l_s^2 \alpha_s^2 \cdot u^2(\delta\theta) \quad (8.23)$$

Finalmente, efectua-se a substituição de termos desta expressão pelos valores particulares,

$$u_c^2(l) \approx (25 \text{ nm})^2 + (9,7 \text{ nm})^2 + (5 \cdot 10^7 \text{ nm})^2 \times (-0,1^\circ \text{C})^2 \times (0,58 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ \text{C}^{-1})^2 + (5 \cdot 10^7 \text{ nm})^2 \times (11,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ \text{C}^{-1})^2 \times (0,029^\circ \text{C})^2 \quad (8.23a)$$

e, usando a aproximação descrita no anexo H do GUM (1995), resulta <sup>5</sup>:

$$u_c^2(l) \approx (25 \text{ nm})^2 + (9,7 \text{ nm})^2 + (2,9 \text{ nm})^2 + (16,6 \text{ nm})^2 = 1002 \text{ nm}^2 \quad (8.23b)$$

permitindo a obtenção do valor da incerteza de medição padrão.

$$u_c(l) \approx \pm 32 \text{ nm} \quad (8.23c)$$

### 8.3.2.10 Incerteza de medição expandida

A determinação da incerteza de medição expandida, aplicando a distribuição de probabilidade *t*-Student (devido à existência de componentes com reduzidos graus de liberdade), requer a determinação prévia do número de graus de liberdade efectivos, i.e., a

fórmula de Welch–Satterthwaite (7.33):

$$v_{ef} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}$$

A primeira etapa para tal consiste em atribuir às diferentes parcelas um número de graus de liberdade (mais uma vez, cf. anexo H do GUM).

A componente,  $u(l_s)$ , possui  $v_{ef}(l_s) = 18$ , de acordo com o certificado de calibração.

A componente,  $u(d)$ , possui um número de graus de liberdade determinado pelos graus de liberdade das suas subcomponentes aplicados na fórmula de Welch–Satterthwaite (7.33),

$$v_{ef}(d) = \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{v(\bar{d})} + \frac{u^4(d_1)}{v(d_1)} + \frac{u^4(d_2)}{v(d_2)}} \quad (8.24)$$

onde a diferença média de comprimento,  $\bar{d}$ , determinada por 25 observações tem  $v(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$ , os efeitos aleatórios no comparador, resultantes de 6 replicações da

<sup>5</sup> O resultado indicado no GUM (1002 nm<sup>2</sup>) é transcrito para este documento, embora o resultado correcto desta equação seja, 1003,06 nm<sup>2</sup>, se se considerar a aproximação adoptada no GUM. Refira-se no entanto que, em rigor, o resultado obtido usando os termos expostos em (8.23a) conduzem ao resultado de  $\approx 1005,6 \text{ nm}^2$ . Este facto deve-se a se efectuar, no GUM, um incorrecto arredondamento da última parcela de  $(16,675 \text{ nm})^2$  para o valor considerado de  $(16,6 \text{ nm})^2$ . Nota-se, adicionalmente, que esta incorrecção não afecta o valor aproximado da incerteza de medição padrão exposta em (8.23c) e utilizada subsequentemente.

medição, tem  $v(d_1) = 6 - 1 = 5$  e os efeitos sistemáticos no comparador, componente do tipo B – ao contrário das anteriores que são do tipo A – tem um número de graus de liberdade dependente da fiabilidade da informação envolvida, considerando-se que essa fiabilidade é de 10%, usando 7.32, resulta que  $v(d_2) = 8$ . Assim, resulta que  $v_{ef}(d) = 25,6$ .

À componente  $u(\delta\alpha)$ , é atribuído  $v_{ef}(\delta\alpha) = 50$ , usando a expressão (7.32) e considerando que os limites adoptados possuem um grau de fiabilidade de 10%. De forma idêntica, é atribuído à componente,  $u(\delta\theta)$ , um número de graus de liberdade  $v_{ef}(\delta\theta) = 2$ , usando (7.32) e considerando que os seus limites têm um grau de fiabilidade de 50%.

Os números de graus de liberdade relativos a  $u(\alpha_s)$  e  $u(\theta)$  não são explicitados, uma vez que, como foi referido anteriormente, as suas contribuições para a avaliação são nulas.

Usando os valores descritos, determina-se o número de graus de liberdade efectivos do comprimento resultante da medição,  $l$ , recorrendo à fórmula de Welch–Satterthwaite (7.33)<sup>6</sup>.

$$v_{ef}(l) = \frac{u^4(l)}{\frac{u^4(l_s)}{v(l_s)} + \frac{u^4(d)}{v(d)} + \frac{u^4(\delta\alpha)}{v(\delta\alpha)} + \frac{u^4(\theta)}{v(\theta)}} = \frac{(32 \text{ nm})^4}{\frac{(25 \text{ nm})^4}{18} + \frac{(9,7 \text{ nm})^4}{25,6} + \frac{(2,9 \text{ nm})^4}{50} + \frac{(16,6 \text{ nm})^4}{2}} = 16,7 \quad (8.25)$$

O valor encontrado, por convenção, é arredondado para o menor número inteiro mais próximo (condição de majoração do factor de expansão),  $v_{ef}(l) = 16$ , determinando-se o factor de expansão – associado à distribuição de probabilidade de  $t$ -Student,  $t_{99}(16) = 2,92$ . A incerteza de medição expandida para um intervalo de confiança de 99% é, portanto:

$$U_{99}(l) = t_{99}(16) \cdot u_c(l) = 2,92 \cdot (32 \text{ nm}) \approx 93 \text{ nm} \quad (8.26)$$

e o resultado final apresenta o *valor convencionalmente verdadeiro* que, considerando os dados do problema, se traduz em:  $l = l_s + \bar{d} = 50,000623 \text{ mm} + 215 \text{ nm} = 50,000838 \text{ mm}$ ,

<sup>6</sup> Tal como se observou no que se refere ao cálculo efectuado em (8.23b), também neste cálculo se observa que o valor indicado (16,7) no GUM é incorrecto. O cálculo da expressão tem como resultado 17,47. Por outro lado, a utilização das contribuições de incertezas sem o arredondamento incorrectamente incorporado no GUM, usando-se o valor de (16,675) em vez de (16,6) determina um resultado do número de graus de liberdade efectivos de 17,27. Ao contrário da incorrecção anterior, esta introduz uma perturbação a considerar, uma vez que a regra de arredondamento de números de graus de liberdade efectivos (G.L.) é adoptar o número inteiro imediatamente anterior, o que significa que 16,6 implica a adopção de 16 G.L. e 17,27 (ou 17,47) implicam a utilização de 17 G.L. Este número influencia o factor de expansão que é alterado de 2,17 para 2,16 (de acordo com o Quadro 7.1), afectando o resultado obtido.



acrescido da indicação da incerteza de medição expandida relativa a um intervalo de confiança de 99%.

$$l = (50,000838 \pm 0,000093) \text{ mm}$$

No GUM, refere-se ainda que a contribuição de segunda ordem – da expansão de Taylor – relativa à combinação dos termos  $(\delta\alpha)$  e  $(\theta)$  não é nula nem desprezável. A sua inclusão aumenta o resultado final da incerteza de medição padrão de 32 nm para 34 nm e, conseqüentemente, da incerteza de medição expandida (para 99%) de 93 nm para 99 nm.

### 8.3.3 Solução MCS

A metodologia MCS, aplicada ao exemplo anterior, parte da equação original (8.7),

$$l = \frac{l_s (1 + \alpha_s \cdot \theta_s) + d}{(1 + \alpha \cdot \theta)}$$

na qual se encontram as seis grandezas de entrada originais.

Para se concretizar a comparação dos resultados, torna-se necessário introduzir um conjunto de parcelas que representam as grandezas de entrada, designadamente, as duas parcelas que compõem a temperatura do equipamento de referência e do equipamento a calibrar (cf. secção 8.2.2.5) – sendo uma associada à temperatura média e outra associada à variação cíclica em torno dessa temperatura; e as parcelas da composição do desvio de calibração, determinado pela soma do seu valor médio com duas componentes adicionais, uma relativa aos efeitos de natureza sistemática e outra, aos efeitos de natureza aleatória.

$$l = \frac{l_s [1 + \alpha_s \cdot (\bar{\theta}_s + \Delta\theta_s - 20^\circ\text{C})] + [\bar{d} + d_1 + d_2]}{[1 + \alpha \cdot (\bar{\theta} + \Delta\theta - 20^\circ\text{C})]} \quad (8.27)$$

Nesta configuração existem 10 grandezas de entrada a incluir no processo de simulação, existindo dois pares de grandezas que são, inevitavelmente, correlacionados:  $(\bar{\theta}_s, \theta_s)$  e  $(\Delta\theta_s, \Delta\theta)$ . Com efeito, é expectável que a variação de temperatura ambiente exerça uma influência simultânea no equipamento envolvido, sendo necessário reflectir essa circunstância na simulação. O modelo de simulação utiliza, portanto, uma base de oito variáveis independentes.

$$l = \frac{l_s [1 + \alpha_s \cdot (\bar{\theta}_s + \Delta\theta_s - 20^\circ\text{C})] + [\bar{d} + d_1 + d_2]}{[1 + \alpha \cdot (\bar{\theta} + \Delta\theta - 20^\circ\text{C})]} \quad (8.28a)$$

A etapa seguinte consiste na identificação dos parâmetros associados às funções de probabilidade das grandezas de entrada equivalentes aos utilizados no procedimento GUM, encontrando-se no Quadro 8.6 o seu resumo.

Com base nos valores apresentados nesse Quadro e recorrendo às metodologias de conversão de F<sub>d</sub>P (cf. capítulo 7 – método de inversão aplicado nos casos de funções uniforme e de configuração U e método de Box-Muller no caso da distribuição normal), foram obtidas as sequências pretendidas. Apresentam-se dois histogramas relativos a duas das grandezas de entrada do modelo matemático (Figuras 8.5 e 8.6).

Quadro 8.6: Parâmetros probabilísticos aplicáveis no 2º estudo

Grandeza	Símbolo	Composição	Valor médio	F <sub>d</sub> P	Limites
Comprimento de referência.	$l_s$	—	$\pm 50,000\,623$ mm	normal	$\pm 25$ nm
Coefficiente linear de expansão térm. do equip. de ref.	$\alpha_s$	—	$11,5 \cdot 10^{-6}$ °C <sup>-1</sup>	uniforme.	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$ °C <sup>-1</sup>
Diferença de temperatura do equip. de referência para a temperatura de ref.	$\theta_s^*$	$\theta_s = \bar{\theta}_s + \Delta\theta_s - 20$ °C	$\bar{\theta}_s = 19,9$ °C $\Delta\theta_s = 0$ °C	normal U	$\pm 0,2$ °C $\pm 0,5$ °C
Desvio experimental	$d$	$d = \bar{d} + d_1 + d_2$	$\bar{d} = 0,000\,215$ mm $d_1 = 0$ mm $d_2 = 0$ mm	normal normal normal	$\pm 5,8 \cdot 10^{-6}$ mm $\pm 3,9 \cdot 10^{-6}$ mm $\pm 6,7 \cdot 10^{-6}$ mm
Coefficiente linear de expansão térm. do equip. a calibrar	$\alpha$	—	$11,5 \cdot 10^{-6}$ °C <sup>-1</sup>	uniforme	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$ °C <sup>-1</sup>
Diferença de temperatura do equip. a calibrar para a temperatura de ref.	$\theta^*$	$\theta = \bar{\theta} + \Delta\theta - 20$ °C	$\bar{\theta} = 19,9$ °C $\Delta\theta = 0$ °C	normal U	$\pm 0,2$ °C $\pm 0,5$ °C

\* conforme referido, utilizou-se uma única sequência para a simulação de  $\bar{\theta}_s$  e de  $\bar{\theta}$ , bem como, para  $\Delta\theta_s$  e  $\Delta\theta$ .

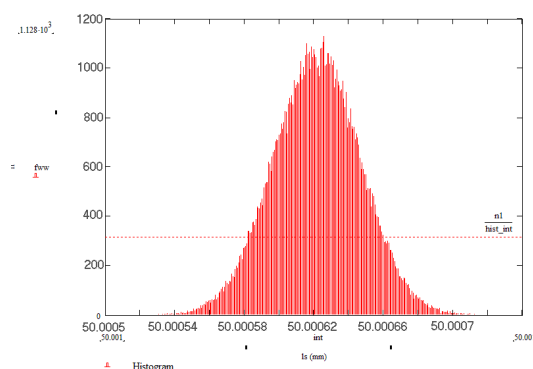


Figura 8.5: Histograma relativo à sequência MCS de valores de  $l_s$

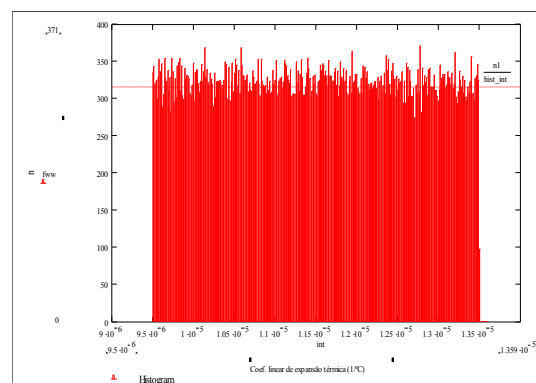


Figura 8.6: Histograma relativo à sequência MCS de valores de  $\alpha_s$

A combinação dos valores provenientes das diferentes sequências, de acordo com a equação (8.28a), permite obter a sequência de valores da grandeza de saída,  $l$ , apresentada na Figura 8.6. Os resultados determinados com base nessa sequência de saída encontram-se expostos no Quadro 8.7. Em particular, nota-se que os valores de percentis e suas incertezas foram determinados cf. a secção 7.6.5.4.

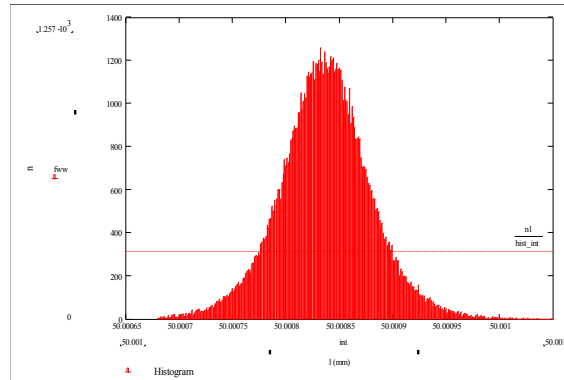


Figura 8.7: Histograma relativo à sequência MCS da grandeza de saída  $l$

A incerteza associada aos percentis, de cerca de  $\pm 1,8$  nm, é utilizada como parâmetro para a análise do critério de exactidão (expressão 7.42),  $e_r$ , sendo dependente do número de dígitos decimais significativos adoptado para definir a exactidão requerida,  $d$ .

$$e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$$

Quadro 8.7: Resultados obtidos utilizando a MCS e o modelo matemático original (2º estudo)

<b>Valor médio MCS: 50,000 836 8 mm</b>		
<b>Intervalo de confiança de 68 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	50,000 799 9 mm	50,000 873 5 mm
Incerteza de medição $u_{68}(l)$ :	$\pm 0,000 037$ mm (37 nm)	
<b>Intervalo de confiança de 95 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	50,000 755 1 mm	50,000 917 0 mm
Incerteza de medição $u_{95}(l)$ :	$\pm 0,000 081$ mm (81 nm)	
<b>Intervalo de confiança de 95 % do percentil <math>y_L</math> (obtido para 95 %)</b>		
Percentis (limites inferior e superior):	50,000 754 1 mm	50,000 756 0 mm
Incerteza do percentil L, $\delta y_L =  y_{L+} - y_{L-} $ :	0,000 001 9 mm (1,9 nm)	
<b>Intervalo de confiança de 95 % do percentil <math>y_H</math> (obtido para 95 %)</b>		
Percentis (limites inferior e superior):	50,000 916 1 mm	50,000 918 0 mm
Incerteza do percentil H, $\delta y_H =  y_{H+} - y_{H-} $ :	0,000 001 9 mm (1,9 nm)	
<b>Intervalo de confiança de 99 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	50,000 721 mm	50,000 953 mm
Incerteza de medição $u_{99}(l)$ :	$\pm 0,000 12$ mm (120 nm)	

No caso de instrumentos de medição com indicação da grandeza mensurável, esse valor ( $q$ ) determina-se pela resolução do instrumento em calibração. Neste caso, reportando-se a um padrão que materializa a grandeza – comprimento – toma-se como referência a exactidão do seu *valor convencionalmente verdadeiro*, da ordem de  $1 \cdot 10^{-5}$  mm (10 nm), resultando que,

$$e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \text{ mm} = 5 \text{ nm}$$

sendo este valor comparável com os valores associados aos intervalos de confiança dos percentis, verificando-se o cumprimento dos critérios de aceitação (cf. 7.6.5.4).

$$\delta y_L = |y_{L+} - y_{L-}| \approx 1,8 \text{ nm} < e_r = 5 \text{ nm}$$

$$\delta y_H = |y_{H+} - y_{H-}| \approx 1,8 \text{ nm} < e_r = 5 \text{ nm}$$

Finalmente, o teste de sensibilidade relativo à diferença entre valores médios (o valor médio determinado na 2ª simulação foi:  $\approx 50,000\ 836$  mm) conduziu a uma diferença de 1 nm e os valores relativos aos intervalos de confiança de 95 % foram equivalentes (tendo sido obtido, na 2ª simulação, o intervalo de confiança de:  $\approx \pm 0,000\ 081$  mm).

### 8.3.4 Comparação de resultados

A comparação dos resultados obtidos usando o GUM e a MCS permite constatações quer relativamente ao processo quer relativamente às diferenças de valores encontradas.

No que se refere ao processo de concretização observa-se que, na aplicação do GUM, há necessidade de introduzir um conjunto de aproximações para se ultrapassarem dificuldades inerentes à obtenção das derivadas parciais com maior grau de complexidade e à presença de grandezas correlacionadas. Este recurso às aproximações não é adoptado quando se utiliza a MCS, que segue o modelo matemático original de forma directa.

Quanto à comparação dos resultados obtidos, cujo interesse é substancial, refira-se, em primeiro lugar, a concordância que se verifica com o GUM relativamente à admissão por este de uma grandeza de saída com  $F_dP$  de configuração normal (cf. resultado exposto na Fig. 8.3).

Quadro 8.8: Incertezas de medição obtidas usando o GUM e MCS com dois modelos matemáticos distintos (2º estudo)

<b>Incertezas de medição</b>			
	GUM (A1 e A2)		MCS
	Aproximação da série de Taylor de 1ª ordem	Aproximação da série de Taylor de 2ª ordem	(modelo matemático original)
Valor médio	50,000 838 mm	50,000 838 mm	50,000 837 mm
incerteza de medição padrão	± 32 nm	± 34 nm	± 37 nm

Os valores médios obtidos (quer nas séries comparadas quer nas relativas ao ensaio de sensibilidade) mostram uma diferença que se pode considerar desprezável (valor determinado usando o GUM: 50,000 838 mm; valores obtidos usando a MCS: 50,000 837 mm e 50,000 836 mm).

Quanto ao valor de incerteza expandida (com 95% e 99% de confiança), o GUM produz resultados substancialmente distintos daqueles que resultam da aplicação da MCS. Esse facto torna-se mais crítico ao se admitir que os valores correctos são aqueles obtidos usando a MCS, uma vez que neste caso, a aplicação do GUM produz um resultado subavaliado da incerteza de medição.

Este resultado, algo surpreendente pelo facto de ter sido obtido recorrendo a um exemplo particular do próprio GUM, merece uma reflexão mais aprofundada sobre as causas que o determinam.

São quatro as razões que, possivelmente, explicam o resultado: o efeito da não linearidade do modelo matemático original; a aproximação utilizada na MCS de correlação máxima entre as grandezas envolvendo o efeito da temperatura ambiente sobre os equipamentos; a simplificação GUM em duas contribuições para a incerteza que são consideradas nulas; e a modificação do modelo matemático efectuada na aplicação do GUM.

Relativamente à primeira hipótese, apontada no próprio GUM como uma aproximação que se pode melhorar, a utilização de termos de ordem superior a 1 da expansão de Taylor, desenvolvida no mesmo GUM, aponta para uma correcção de 32 nm para 34 nm, cf indicado na secção 8.3.2, não sendo significativa relativamente às diferenças observadas.

No que se refere à segunda hipótese, refira-se que a adopção da correlação máxima produz um efeito de minimização do intervalo de incerteza obtido usando a MCS, pelo que a adopção de sequências cujos valores a façam afastar dessa situação provocam, inevitavelmente, uma ampliação da diferença face aos resultados obtidos usando o GUM.

Relativamente à terceira hipótese esta não constitui, de facto, razão para a diferença observada, dado que a assunção, na aplicação do GUM, de inexistência de diferenças entre os valores de temperatura e dos coeficientes de expansão térmica entre os equipamentos de referência e a calibrar, tem exacta correspondência na MCS, porque em cada um destes pares se utiliza a mesma sequência de valores, conduzindo a uma diferença sistematicamente nula.

No entanto, é importante notar a sensibilidade do modelo face às duas parcelas consideradas nulas. Os termos envolvidos são:  $\delta\alpha = 0$  e  $\delta\theta = 0$ , conduzindo a que

$c_{\alpha_s} = \frac{\partial l}{\partial \alpha_s} = -l_s \delta\theta = 0$  e  $c_{\theta} = \frac{\partial l}{\partial \theta} = -l_s \delta\alpha = 0$ . Faz-se notar que esta anulação se refere apenas ao seu valor médio, pois a sua variabilidade encontra-se definida no exemplo (expressões 8.16 e 8.20), tendo sido adoptadas como parâmetros de simulação.

A análise de sensibilidade, no que se refere a  $\delta\theta \neq 0$  mostrou uma modificação dos resultados significativa. Por exemplo, se  $\delta\theta = 0,5^\circ\text{C}$  esse facto provoca uma alteração da incerteza de medição padrão de 31,7 nm para 43,6 nm (um acréscimo de variação da ordem de 30%). No que se refere ao segundo caso,  $\delta\alpha \neq 0$ , resultam modificações do valor igualmente significativas. Por exemplo, uma diferença de  $\delta\alpha = 1 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  (este valor é aceitável dado que o valor de referência para o aço é de  $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ) produz uma alteração da incerteza de medição padrão de 31,7 nm para 37,7 nm (um acréscimo de variação da ordem de 20%). Estes resultados indiciam um elevado grau de instabilidade do modelo matemático simplificado.

Relativamente à última hipótese, associada ao facto do GUM utilizar um modelo matemático simplificado (8.10) que é distinto do original (8.7) – equação adaptada aos dados do problema – ao contrário da MCS que utiliza o modelo original, procurou-se estabelecer um processo de avaliação do efeito associado a esta circunstância particular.

A forma encontrada consistiu na realização de ensaios adicionais aplicando a MCS ao modelo matemático simplificado utilizado pelo GUM. A concretização da simulação envolveu a geração de duas novas sequências (relativas às variáveis do modelo simplificado,  $\delta\alpha$  e  $\delta\theta$ , não existentes, porque não necessárias, no modelo original) sendo utilizadas, para as restantes grandezas de entrada, as mesmas sequências utilizadas na simulação com o modelo matemático original. Desta forma, procurou-se minimizar a introdução de modificações adicionais que pudessem adulterar os resultados pretendidos. O Quadro seguinte sintetiza os resultados mais relevantes para esta análise e a Figura 8.8 ilustra as diferenças de amplitude

das incertezas de medição expandidas observadas para o intervalo de confiança de 95 % (a expansão do intervalo de confiança para 99 % tem uma relação de proporcionalidade similar).

Quadro 8.9: Incertezas de medição obtidas usando o GUM e MCS aplicado aos dois modelos matemáticos (original e simplificado na aplicação do GUM)

Incertezas de medição			
Intervalo de confiança	Modelo matemático simplificado		Modelo matemático original
	GUM	MCS 1	MCS 2
95%	± 69 nm	± 53 nm	± 81 nm
99%	± 93 nm	± 70 nm	± 116 nm

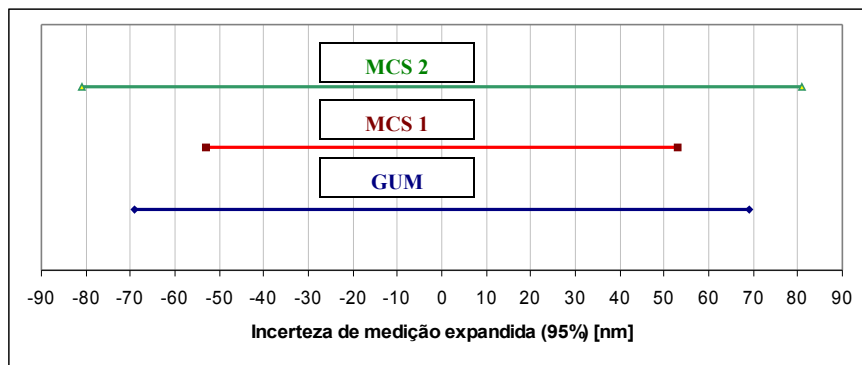


Figura 8.8: Incertezas de medição expandida (95%) obtidas (2º estudo)

A análise destes resultados permite evidenciar os seguintes aspectos:

- a comparação entre a MCS (modelo original) e o GUM apresenta diferenças entre 20% e 30%, verificando-se uma **subavaliação** do intervalo de incerteza por parte do GUM. A comparação com resultados obtidos para o teste de sensibilidade indica diferenças equivalentes;
- a comparação entre a MCS (modelo simplificado) e o GUM apresenta valores que diferem entre si entre 20 % e 30 %. Desta vez, porém, observa-se uma **sobre-avaliação** por parte do GUM, Esta tendência de majoração tem sido evidenciada em análises similares quando se comparam resultados provenientes da aplicação do GUM e da MCS suportados no mesmo modelo matemático;
- a comparação entre os pares de resultados obtidos utilizando a MCS (usando as duas relações funcionais) mostra uma diferença substancial (valores entre 60% e 80%), evidenciando o efeito potencialmente crítico associado à simplificação do modelo matemático associado à medição.

Refira-se que qualquer dos resultados observados constitui um elemento indesejável e desvantajoso para o GUM, não tanto pelo seu procedimento mas, sobretudo, por resultar de modificações e aproximações que facilitam a sua aplicação. Estas, embora aparentemente

inócuas podem produzir a alteração de resultados quer pela sobre-avaliação das incertezas quer pela sua subavaliação, em ambos os casos, prejudiciais aos objectivos da medição.

Como forma de avaliação da qualidade dos resultados obtidos usando a MCS, as simulações obtidas foram repetidas utilizando um conjunto completamente distinto de sequências de números pseudo-aleatórios e foram determinadas incertezas de medição. Os resultados obtidos com essas novas séries são concordantes com os que constam no Quadro anterior, evidenciando uma particular robustez na aplicação MCS.

*Quadro 8.10: Resultados do estudo de sensibilidade aplicado à simulação por MCS*

<b>Incertezas de medição</b>				
Intervalo de confiança	Modelo matemático original		Modelo matemático simplificado	
	MCS – Grupo de séries 1	MCS – Grupo de séries 2	MCS – Grupo de séries 3	MCS – Grupo de séries 4
95%	± 53 nm	± 53 nm	± 81 nm	± 82 nm
99%	± 70 nm	± 70 nm	± 116 nm	± 117 nm

## **8.4 Avaliação da incerteza de medição de caudal pelo método gravimétrico**

### **8.4.1 Descrição da instalação laboratorial e do modelo matemático**

A avaliação de incertezas de medição tem particular relevância em processos laboratoriais de calibração, designadamente, quando consubstanciam métodos primários.

Da instrumentação que se encontra no topo das cadeias hierárquicas de rastreabilidade relativas a determinadas grandezas e, em particular, da sua incerteza de medição, depende a classe de exactidão adquirida pela instrumentação que ocupa os níveis subsequentes dessa cadeia. Esta razão determina, naturalmente, um cuidado particular na sua avaliação e, ainda mais, a prossecução do objectivo da sua minimização.

A medição da grandeza caudal pode obter a sua rastreabilidade pela aplicação do “método de pesagem estacionário” ou “gravimétrico”, especificado na norma ISO 4185 (1990). No Laboratório Nacional de Engenharia Civil existe uma instalação laboratorial recente (Laboratório de Ensaios Hidráulicos – LEHid) onde se encontram dois sistemas de medição que constituem padrões primários e, como tal, têm interesse para a análise do desempenho das duas metodologias de avaliação de incertezas (GUM e MCS) em situação experimental.



O modelo matemático que determina o caudal mássico, usando o método gravimétrico, tem a seguinte equação:

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_f - m_0}{t_f - t_0} = \frac{m_{Cf} - m_{C0}}{t_f - t_0} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)} \quad (8.29)$$

na qual,  $m$  representa a *massa verdadeira* e  $m_C$  representa a *massa convencional* [EA 10/18 (2005), OIML (1979)] de líquido sujeito a pesagem,  $t$  representa o tempo,  $\rho_p$  a massa volúmica do corpo de referência,  $\rho_a$  a massa volúmica do ar,  $\rho$  a massa volúmica do líquido e os índices “0” e “f” indicam que a grandeza em causa se reporta ao início e ao fim do ensaio, respectivamente. Na mesma referência bibliográfica indica-se uma simplificação (8.30) da equação anterior, de utilização prática, que resulta da substituição  $\Delta t = t_f - t_0 = t_f - 0$  (considera-se que o instante de tempo inicial é igual a zero, sendo o intervalo de tempo  $\Delta t$  igual a  $t_f$ ) e da junção dos termos da equação associados ao efeito da impulsão:

$C_{imp} = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right) \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{-1}$ . A equação simplificada é:

$$Q_m = \frac{\Delta m_C}{t_f} \cdot C_{imp} \quad (8.30)$$

O sistema de medição (com controlo) desenvolvido no LEHid é constituído por um conjunto de elementos expostos na fotografia da Fig. 8.9 e no diagrama da Fig. 8.10, fazendo-se uma breve identificação e descrição das suas principais funções:

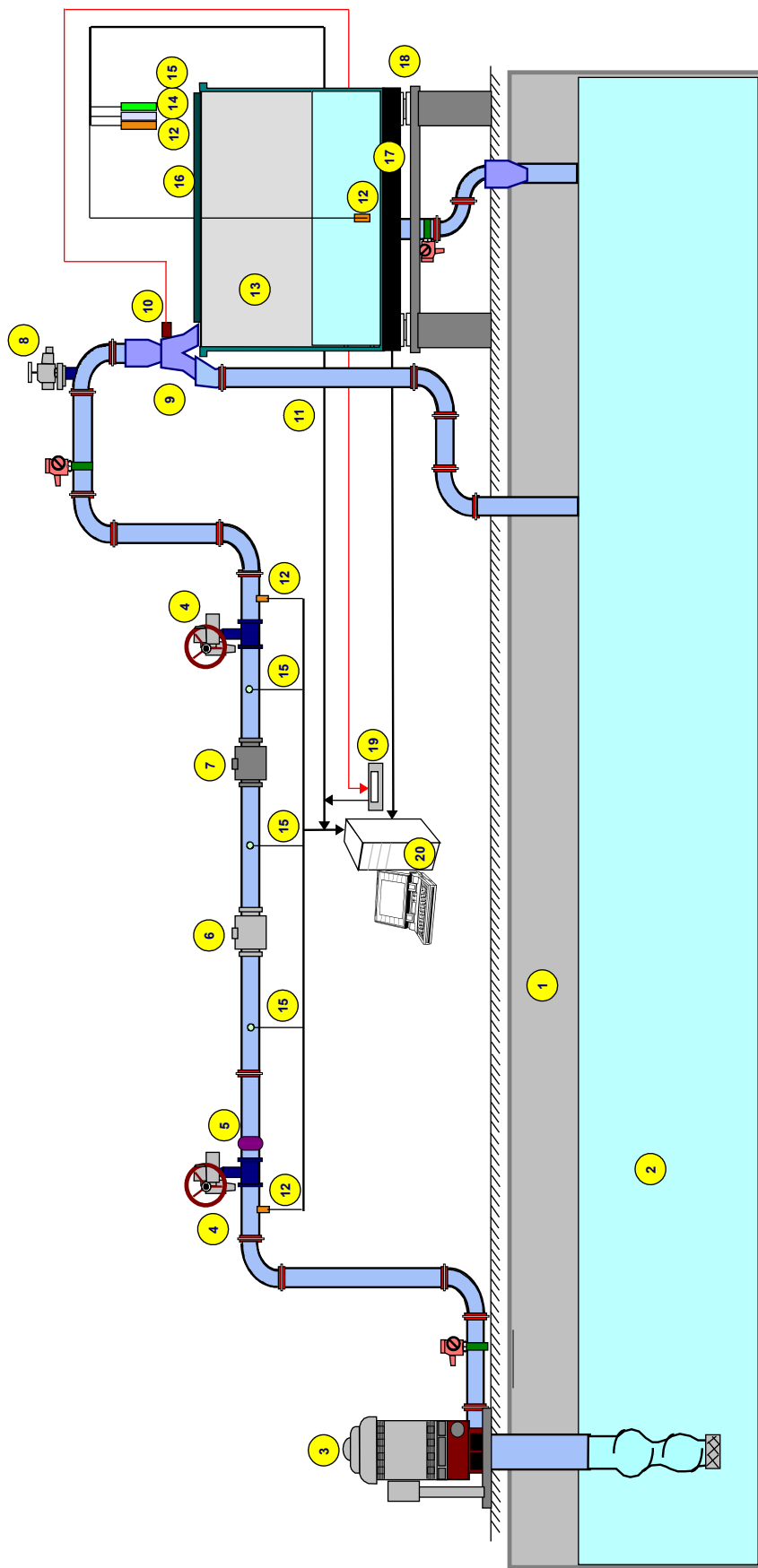
- *reservatório subterrâneo* – reservatório para manutenção de um volume de líquido adequado para garantir condições de estabilidade (térmica, por exemplo) e de funcionamento dinâmico do sistema (nomeadamente, de manutenção de um nível adequado durante a bombagem de líquido pelos grupos electrobomba para as condutas);
- *grupo electrobomba* – em funcionamento isolado ou em paralelo com um outro grupo similar, permite a geração controlada de diferentes caudais em condições de estacionariedade apropriadas a quatro linhas (ou condutas) de ensaio distintas;
- *válvula de seccionamento* – utilizada na abertura e fechamento de cada linha de ensaio;
- *condicionador de escoamento* – elemento utilizado na extremidade de montante de cada linha de ensaio destinado a promover uma estabilização do escoamento apropriada à medição da grandeza;

- *caudalímetro – padrão de trabalho*, instrumento de medição a calibrar;
- *caudalímetro electromagnético – padrão de transferência*, instrumento de medição de caudal utilizado como padrão secundário ou de transferência para calibração de caudalímetros de trabalho;
- *válvula de regulação de caudal e de pressão* – válvula de condicionamento da abertura na conduta onde está instalada visando a regulação da pressão do líquido em escoamento;
- *deflector (de escoamento)* – elemento do sistema que permite a orientação do escoamento do líquido para a conduta de derivação ou para o tanque de pesagem;
- *sensor de posição associado ao contador padrão de tempo* – detector de posição responsável pelo sinal de início e fim da contagem de tempo de enchimento do tanque de pesagem instalado sobre o instrumento de pesagem;
- *conduta de derivação* – conduta através da qual o líquido é dirigido para o reservatório subterrâneo durante o processo prévio de estabilização do caudal e após o final do ensaio;
- *sensores de temperatura, de humidade relativa e de pressão atmosféricas* – sensores utilizados para transdução das grandezas apontadas em circunstâncias onde estas constituem grandezas de influência contabilizáveis na incerteza de medição;
- *instrumento de pesagem* – padrão de referência utilizado na medição da grandeza massa que constitui uma das grandezas de entrada do modelo matemático que determina o caudal;
- *resguardo para recuperação de partículas de líquido projectadas* – cobertura colocada no topo do tanque de pesagem destinada a recolher partículas de líquido projectadas no processo de enchimento do tanque de pesagem;
- *niveladores do instrumento de pesagem* – dispositivos de nivelamento do receptor de carga (tanque de pesagem) utilizados para minimização de componentes de incerteza como, por exemplo, associados ao desvio de excentricidade;
- *contador padrão de tempo* – padrão de referência utilizado na medição da grandeza tempo, a qual constitui uma das grandezas de entrada do modelo matemático que determina o caudal;
- *sistema informático* – utilizado para parametrização, aquisição, monitorização e controlo do processo de medição de caudal.

A instalação laboratorial dispõe de 3 grupos electrobomba com accionamento de velocidade regulável e, por isso, com capacidade para a geração de escoamentos com diferentes valores de caudal; 2 instrumentos de pesagem com alcances de 3 000 kg e 30 000 kg; e 4 linhas (troços de condutas seccionadas) de calibração, de diâmetros nominais compreendidos entre DN 100 e DN 300, cuja configuração individualizada se representa na Fig. (8.10). Em cada uma das linhas de calibração (de ensaio) encontram-se, ainda, caudalímetros de transferência de diâmetro nominal apropriado a cada tipo de condutas.



*Figura 8.9: Fotografia de parte da instalação laboratorial de ensaios hidráulicos do LNEC*



Legenda

1	Reservatório subterrâneo	5	Condicionador de escoamento	9	Deflector	13	Instrumento de pesagem (padrão de referência)	17	Plataforma do instrumento de pesagem
2	Líquido: água	6	Caudalímetro (padrão de trabalho)	10	Sensor de posição associado ao contador universal de tempo	14	Sensor de humidade relativa atmosférica	18	Niveladores do instrumento de pesagem
3	Grupo electrobomba	7	Caudalímetro (padrão de transerência)	11	Conduita de derivação	15	Sensor de pressão atmosférica	19	Contador padrão de tempo
4	Válvula de sectionamento	8	Válvula de regulação de caudal e de pressão	12	Sensor de temperatura atmosférica	16	Resguardo para recuperação de partículas de líquido projectadas	20	Sistema informático de parametrização, aquisição, monitorização e controlo.

Figura 8.10: Diagrama ilustrativo dos elementos que compõem um sistema de calibração de caudalímetros pelo método gravimétrico do LNEC

A realização de calibrações de caudalímetros (designadamente, electromagnéticos, cf. caracterização em ISO 6817 (1992)) pelo método gravimétrico requer o cumprimento de um conjunto de condições de referência (Quadro 8.11), as quais incluem limites de variação de grandezas estipulados na norma ISO 9104 (1991) e no procedimento de calibração do LEHid para esse efeito.

*Quadro 8.11: Condições de referência para calibração de caudalímetros*

<b>Grandeza</b>	<b>Limites / tolerância</b>
Temperatura da água	4 °C a 35 °C
Humidade relativa (atmosférica)	35 % a 75 %
Pressão atmosférica	8,6·10 <sup>2</sup> Pa a 1,060·10 <sup>3</sup> Pa
Tensão eléctrica (relativa)	± 1 %
Distorção harmónica (ref.)	< 5 % (a.c.)
Factor de tremor (ref.)	< 0,1 % (d.c.)

Adicionalmente, existem requisitos para minimizar potenciais fontes de incerteza resultantes de condições relacionadas com instalação, montagem e operação, notando-se que na instalação laboratorial em causa se adoptaram regras e procedimentos estritos adequados ao cumprimento desses requisitos. Não sendo praticável, no presente contexto, descrever exaustivamente as diferentes precauções tomadas nesse processo, são apenas citadas algumas: cumprimento de regras de existência de extensões adequadas de escoamento não perturbado a montante e a jusante do caudalímetro padrão de transferência e do caudalímetro de trabalho; cumprimento de requisitos dimensionais relativamente à relação entre os diâmetros interiores das condutas e dos caudalímetros de transferência; nivelamento de condutas e de instrumentos de pesagem; equipotencialização e ligações à terra de troços de condutas e juntas de ligação; colocação de cones de transição apropriados de forma hidrodinâmica, etc.

No que se refere à rastreabilidade dos padrões, efectuaram-se calibrações dos padrões primários do sistema de medição. Em particular, a calibração dos instrumentos de pesagem [EN 45501 (1992)], [certificados DRE-LVT n.º 201.23.03 de 2003-02-20 e n.º 201.03.23/94 de 2003-03-16], dos contadores padrão de tempo [certificados TAP n.ºs 1719/04, 1726/04 e 1813/04, todos de 2004-07-23] e dos sistemas de monitorização das grandezas de influência. Na Fig. 8.11 encontra-se o esquema genérico das cadeias de rastreabilidade associadas às grandezas de base de massa e de tempo.

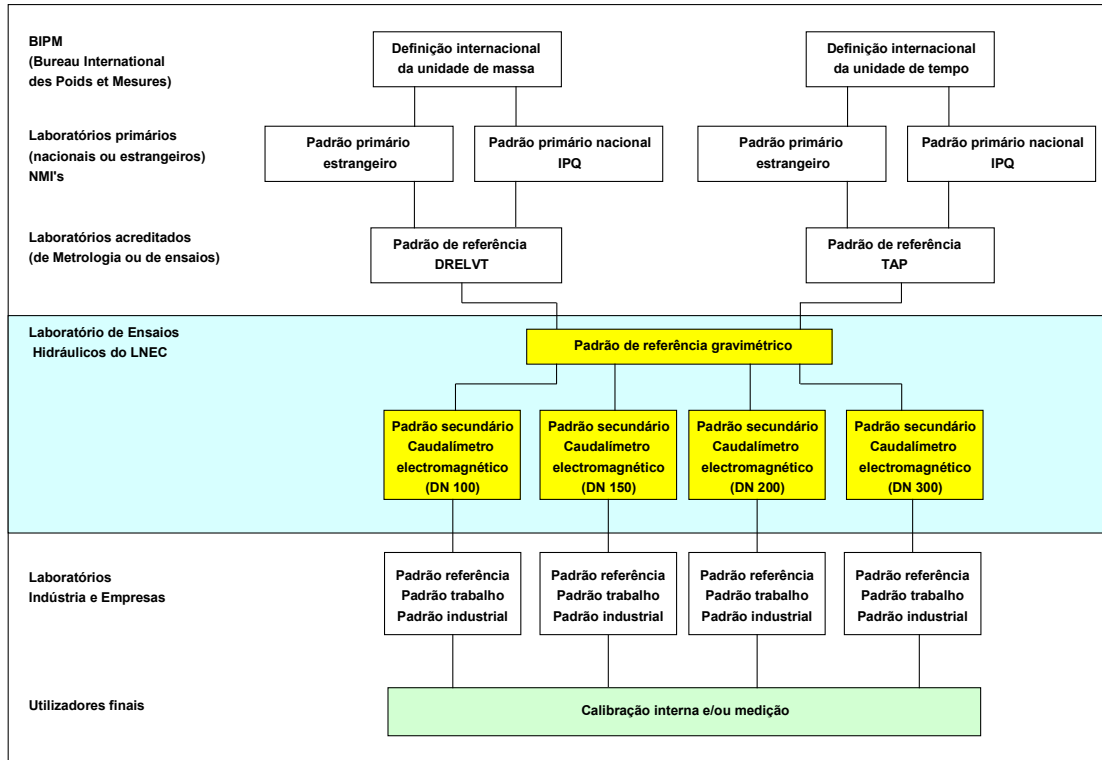


Figura 8.11: Cadeia de rastreabilidade associada à calibração de caudalímetros no LNEC

Deve-se destacar que, neste contexto, o padrão de referência de caudal se realiza no próprio laboratório e que é o padrão com mais elevado grau de exactidão em laboratórios nacionais o que o configura como padrão primário.

#### 8.4.2 Solução GUM

A aplicação da LPI a este modelo, admitindo que as diferentes grandezas observadas são independentes, conduz à expressão seguinte.

$$u^2(Q_m) = \left[ \frac{\partial(Q_m)}{\partial(\Delta m_C)} \right]^2 u^2(\Delta m_C) + \left[ \frac{\partial(Q_m)}{\partial(t)} \right]^2 u^2(t) + \left[ \frac{\partial(Q_m)}{\partial(C_{imp})} \right]^2 u^2(C_{imp}) \quad (8.31)$$

A determinação das derivadas parciais envolvidas conduz a

$$u^2(Q_m) = \left[ \frac{C_{imp}}{t} \right]^2 u^2(\Delta m_C) + \left[ -\frac{\Delta m_C}{t^2} \cdot C_{imp} \right]^2 u^2(t) + \left[ \frac{\Delta m_C}{t} \right]^2 u^2(C_{imp}) \quad (8.32)$$

A expressão anterior admite uma formulação mais simplificada ao modificar-se a análise de incertezas para a sua forma relativa, dividindo ambos os membros da expressão pelo valor do quadrado do caudal,  $(Q_m)^2$ :

$$w^2(Q_m) = \frac{u^2(\Delta m_C)}{\Delta m_C^2} + \frac{u^2(t)}{t^2} + \frac{u^2(C_{imp})}{C_{imp}^2} \quad (8.33)$$

Esta expressão evidencia a dependência da incerteza de medição em causa de grandezas (mensuráveis) de entrada: a *massa*, o *tempo* e o *coeficiente de impulsão* (agrupando as variáveis de *massa volúmica*).

Na expressão anterior, encontram-se termos que resultam de diferenças entre observações iniciais e finais de grandezas (da massa e do tempo). Esta circunstância determina que as variáveis  $\Delta m_C$  e  $\Delta t$  resultem de expressões do tipo  $\Delta Q = Q_f - Q_0$  e que, por isso, seja necessário efectuar uma avaliação da sua incerteza combinada.

No caso da variável tempo, conforme referido anteriormente, admitindo que a operação de reinicialização que reinicia a contagem a partir do zero não contém variações residuais, a avaliação parcelar da incerteza a considerar pode ser simplificada de acordo com:

$$u^2(\Delta t) = u^2(t_f) \quad (8.34)$$

onde  $\Delta t$  representa o intervalo de tempo do ensaio.

No caso da variável massa, a reinicialização pode ser realizada mesmo quando existe uma massa residual no tanque de pesagem. Admitindo como razoável aproximação (com base nos respectivos certificados de calibração) que as incertezas de medição associadas a ambas as situações são iguais, considera-se válida a seguinte avaliação parcelar da incerteza de medição,

$$u^2(\Delta m_C) = u^2(m_{Cf}) + u^2(m_{C0}) = 2u^2(m_C) \quad (8.35)$$

onde,  $m_{C0}$ , representa a massa inicial (massa – convencional – residual de líquido) e  $m_{Cf}$ , a massa quando o tanque contém a carga final.

A aproximação anterior justifica-se porque, embora o valor inicial da massa possa ser nulo, este valor resulta de um processo de tara inicial visando a anulação da massa residual de líquido que possa existir no tanque de pesagem.

Assim, a expressão (8.33) é simplificada integrando os resultados anteriormente obtidos,

$$w^2(Q_m) = \frac{2 \cdot u^2(m_C)}{m_C^2} + \frac{u^2(t_f)}{t_f^2} + \frac{u^2(C_{imp})}{C_{imp}^2} \quad (8.36)$$

A medição de cada uma das quantidades em causa envolve, genericamente, três tipos de contribuições provenientes: da instrumentação ( $q_{inst}$ ); do método ( $q_{metod}$ ); e da intervenção humana ( $q_{human}$ ). Neste caso particular, observa-se que a última não tem significado no

processo de medição e, portanto, não contribui para o balanço de incertezas. A equação geral do modelo matemático aplicável a cada grandeza,  $q$ , tem a seguinte representação (onde  $\delta q_{cal}$  é a componente de erro proveniente da calibração):

$$q_{vc} = q_{lido} + \delta q_{cal} + \delta q_{inst} + \delta q_{metod} + \delta q_{human} \quad (8.37)$$

servindo de base para a elaboração das tabelas parcelares de balanço de incertezas de medição que se apresentam a seguir.

#### 8.4.2.1 Determinação da incerteza associada à medição da grandeza massa

O procedimento de calibração utilizado pelo LEHid admite como limite de capacidade útil de pesagem cerca de 57 % do alcance máximo; no caso da plataforma de pesagem de maior alcance, o alcance máximo é 30 000 kg e o limite útil 17 000 kg, e na de menor alcance, o alcance máximo é 3 000 kg e o valor limite útil 1 700 kg.

Aplicando a equação genérica (8.37) verifica-se a presença de quatro componentes que contribuem para a incerteza de medição desta grandeza:

$$m_{C,vc} = m_C + \delta m_{C,cal} + \delta m_{C,inst} + \delta m_{C,metod} \quad (8.38)$$

Nesta expressão, o valor de  $m$  representa a estimativa da mensuranda resultante do conjunto de observações experimentais, dependendo a sua variação de grandezas suplementares que a influenciam,

$$m_C = m_{C,lido} + \delta m_{C,res} + \delta m_{C,L} + \delta m_{C,rep} + \delta m_{C,exc} + \delta m_{C,0} \quad (8.39)$$

onde  $m_{C,lido}$  é o valor obtido pela indicação do instrumento de pesagem (I.P.),  $\delta m_{C,res}$  representa o desvio determinado pela resolução finita,  $\delta m_{C,L}$  o desvio associado ao comportamento não linear da escala,  $\delta m_{C,rep}$  o desvio de repetibilidade,  $\delta m_{C,exc}$  o desvio de excentricidade e  $\delta m_{C,0}$  o desvio de retorno a zero.

O desvio de calibração,  $\delta m_{C,cal}$ , possui uma incerteza de medição padrão que é declarada nos respectivos certificados de calibração.

O desvio de instrumentação,  $\delta m_{C,inst}$ , resulta de contribuições específicas de acordo com:

$$\begin{aligned} \delta m_{C,inst} = & \delta m_{C,inst_T} + \delta m_{C,inst_d} + \delta m_{C,inst_mob} + \delta m_{C,inst_mag} + \\ & + \delta m_{C,inst_e} + \delta m_{C,inst_rev} + \delta m_{C,inst_L} + \delta m_{C,inst_a} \end{aligned} \quad (8.40)$$



onde  $\delta m_{C,inst_T}$  é o desvio associado à variação da temperatura (incluindo a diferença face à temperatura de referência de 20 °C),  $\delta m_{C,inst_d}$  o desvio de depreciação de longo prazo (das condições de ajustamento em calibração),  $\delta m_{C,ins_{mob}}$  o desvio associado à diferença entre a mobilidade efectiva e a resolução,  $\delta m_{C,inst_{mag}}$  o desvio associado à presença e influência de campos magnéticos exógenos,  $\delta m_{C,inst_e}$  o desvio por ocorrência de fenómenos de electrostática,  $\delta m_{C,inst_{rev}}$  o desvio de reversibilidade,  $\delta m_{C,inst_L}$  o desvio de não-linearidade e  $\delta m_{C,inst_a}$  o desvio provocado pela variação da massa volúmica do ar.

Finalmente, a contribuição para a avaliação da incerteza proveniente do desvio associado ao método,  $\delta m_{C,metod}$  resulta das seguintes contribuições específicas:

$$\delta m_{C,metod} = \delta m_{C,metod_e} + \delta m_{C,metod_{\Delta m}} + \delta m_{C,metod_n} + \delta m_{C,metod_{def}} + \delta m_{C,metod_{pc}} \quad (8.41)$$

onde  $\delta m_{C,metod_e}$  é o desvio associado à não-estacionaridade do líquido durante a pesagem,  $\delta m_{C,metod_{\Delta m}}$  o desvio observado no balanço de ganhos e perdas de líquido no processo de enchimento (condensação e evaporação, dispersão e difusão de gotículas de líquido, etc.),  $\delta m_{C,metod_n}$  o desvio provocado pelo não-nivelamento ideal da plataforma de pesagem,  $\delta m_{C,metod_{def}}$  o desvio associado à duração da manobra do deflector de escoamento (intervalo de tempo entre o início e a interrupção do enchimento do tanque de pesagem),  $\delta m_{C,metod_{pc}}$  o desvio associado à aquisição e ao processamento computacional dos dados.

É com base neste conjunto de contribuições de grandezas de entrada que se estabelece a tabela de balanço de incertezas relativa à medição de caudal pelo método gravimétrico no LEHid. Esta tabela reporta-se à utilização do I.P. de 3 000 kg e a um valor nominal de medição equivalente em todos os ensaios realizados com recurso a este meio, correspondente a 1 700 kg. A resolução, para este I.P. é de 50 g. Na tabela,  $Q_m$  representa o valor do caudal nominal do ensaio.

Quadro 8.12: Tabela de balanço de incertezas relativo à medição da grandeza massa (de 1700 kg)

Grandeza de entrada: $x_i$	Descrição da grandeza de entrada	F <sub>i</sub> P*	Dispersão da grandeza de entrada: $u(x_i)$	$C_i$	Componente de incerteza $u_i(m_C)$	Graus de liberdade $\nu_i$
$m_C$	Valor da medição	N		1	$1,65 \cdot 10^{-2}$ kg	50
$\delta m_{C, res}$	Indicação (resolução)	R	$\left(\frac{0,025}{\sqrt{3}}\right)$ kg	1	$1,44 \cdot 10^{-2}$ kg	50
$\delta m_{C, L}$	desvio de linearidade	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, rep}$	Repetibilidade do ensaio	N	0	1	0	-
$\delta m_{C, exc}$	Efeito de excentricidade	R	$\left(\frac{0,01}{\sqrt{3}}\right)$ kg	1	$5,77 \cdot 10^{-3}$ kg	50
$\delta m_{C, 0}$	Erro de retorno a zero	R	$\left(\frac{0,01}{\sqrt{3}}\right)$ kg	1	$5,77 \cdot 10^{-3}$ kg	50
$\delta m_{C, cal}$	Desvio de calibração (incerteza de calibração & erros residuais)	N	$3,9 \cdot 10^{-2}$ kg	1	$3,9 \cdot 10^{-2}$ kg	50
$\delta m_{C, inst}$	Desvio associada à instrumentação	N		1	$3,1 \cdot 10^{-2}$ kg	50
$\delta m_{C, inst, T}$	Desvio associado à temperatura	T	Ver texto relativo à expressão (8.42)	1	$9,8 \cdot 10^{-3}$ kg	50
$\delta m_{C, inst, d}$	Desvio associado à depreciação	R	$\left(\frac{0,05}{\sqrt{3}}\right)$ kg	1	$2,89 \cdot 10^{-2}$ kg	50
$\delta m_{C, inst, mob}$	Desvio associado à diferença entre a mobilidade e a resolução	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, inst, mag}$	Desvio associado a influências exógenas de natureza magnética	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, inst, e}$	Desvio associado a influências de natureza electrostática	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, inst, rev}$	Desvio associado a efeitos de reversibilidade	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, inst, L}$	Desvio associado à não-linearidade da escala de medição	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, inst, a}$	Desvio associado à massa volúmica do ar	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, metod}$	Desvio associada ao método	N		1	0,35 kg ( $Q_m=50$ kg/s) 0,05 kg ( $Q_m=10$ kg/s)	50
$\delta m_{C, metod, e}$	Desvio associado à estabilidade curto prazo	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, metod, n}$	Nivelamento da plataforma de pesagem	R	0	1	0	-
$\delta m_{C, metod, \Delta m}$	Desvio associado a ganhos e perdas de líquido	U	$\left(\frac{0,005}{\sqrt{2}}\right)$ kg	1	$3,53 \cdot 10^{-3}$ kg	50
$\delta m_{C, metod, def}$	Desvio associado a duração da manobra do deflector de escoamento	U	$\frac{(Q_m \cdot \Delta t_{def})}{\sqrt{2}}$ kg	1	$(3,5 \cdot 10^{-3} \cdot Q_m)$ kg	50
$\delta m_{C, metod, pc}$	Desvio associado ao processamento computacional	R	$\left(\frac{0,05}{\sqrt{3}}\right)$ kg	1	$2,89 \cdot 10^{-2}$ kg	50

• R – rectangular ou uniforme centrada, T – triangular centrada, N – Normal, U – de configuração U ou arco seno.

Quadro 8.12 (cont.): Tabela de balanço de incertezas relativo à medição da grandeza massa

<b>Com <math>Q_m = 10 \text{ kg/s}</math></b>	
Incerteza de medição padrão, $u_c(m_C)$ :	$\pm (0,072) \text{ kg}$
Graus de liberdade efectivos, $\nu_{ef}$ :	50
Factor de expansão, $t_{95}$ :	2,00
Incerteza de medição expandida, $U_{95}(m_C)$ :	$\pm (0,14) \text{ kg}$
<b>Com <math>Q_m = 50 \text{ kg/s}</math></b>	
Incerteza de medição padrão, $u_c(m_C)$ :	$\pm (0,18) \text{ kg}$
Graus de liberdade efectivos, $\nu_{ef}$ :	50
Factor de expansão, $t_{95}$ :	2,00
Incerteza de medição expandida, $U_{95}(m_C)$ :	$\pm (0,36) \text{ kg}$

A determinação da componente de incerteza associada à variação de temperatura tem como referência a informação do fabricante apontando um coeficiente de variação de 1 ppm

por °C, permitindo estimar um valor de  $C_T = \frac{\partial m}{\partial T} = (1 \cdot 10^{-6} \cdot m) \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Considerando que durante o ensaio se observa uma variação de temperatura de  $\pm 1^\circ\text{C}$  e uma variação combinada cuja diferença da temperatura de referência pode ser de  $\pm 10^\circ\text{C}$ , a componente a considerar é:

$$\delta m_{C,inst_T} = C_T \cdot \Delta T = \sqrt{(1 \cdot 10^{-6} \cdot 1700)^2 \cdot \frac{10^2}{3}} \approx 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad (8.42)$$

De acordo com a recomendação EA 10/18 (2005), admite-se que a parcela associada à variação da impulsão devida à variação na massa volúmica do ar,  $\delta m_{C,inst_a}$  é contabilizada na influência exercida sobre os pesos de referência e, simultaneamente, existe uma parcela autónoma de contribuição para a incerteza que consiste na correcção do valor de impulsão do ar, pelo que não se deverá contabilizar novamente esta grandeza de influência. Em relação à componente de incerteza associada aos tempos de manobra do deflector de escoamento, esta resulta da realização de um processo electromecânico que, na situação ideal corresponde à representação gráfica da Figura seguinte.

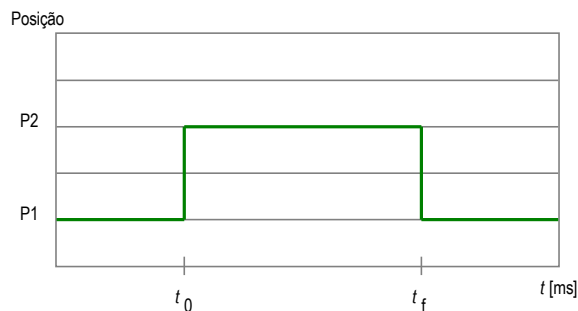
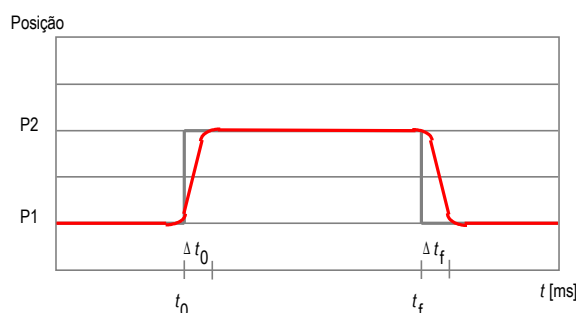


Figura 8.12: Configuração ideal do registo temporal associado à execução das duas manobras do deflector de escoamento

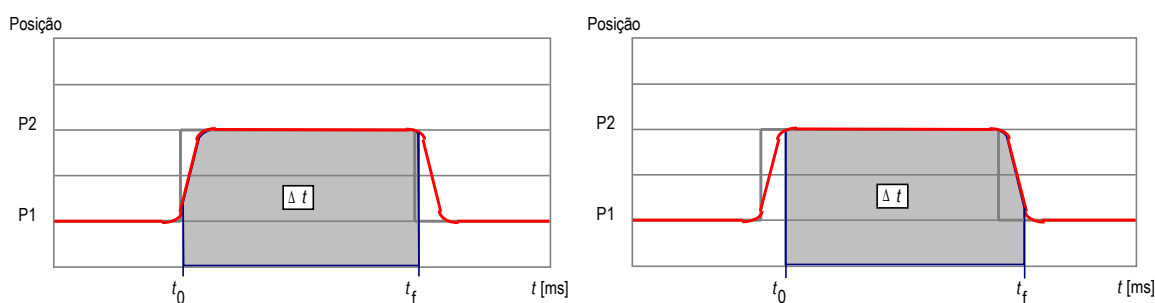
Nesta representação, a colocação do deflector na posição P1 orienta o escoamento para a conduta de derivação e na posição P2 orienta o escoamento para o tanque de pesagem. No instante  $t_0$  (igual a 0) realiza-se a manobra inicial e no instante  $t_f$  a manobra final de retorno. Nesse intervalo de tempo ( $\Delta t = t_f$ ) decorre o enchimento do tanque de pesagem. Na situação ideal, a duração de cada uma das manobras é nula.

Na realização experimental essa duração não é nula, decorrendo durante intervalos de tempo,  $\Delta t_0$  e  $\Delta t_f$ , conforme se representa na Fig. seguinte.



*Figura 8.13: Comportamento real do registo temporal associado à execução das duas manobras do deflector de escoamento*

Esta situação efectiva é apontada em documentos normativos [ISO 4185 (1990)], propondo-se que a medição do tempo seja efectuada tomando como referência dois instantes de tempo que permitam um balanço nulo, i.e., que o período de tempo de enchimento considerado na manobra inicial do deflector corresponda a um período de tempo equivalente de deflexão para a conduta de derivação na manobra final de interrupção do enchimento. Duas situações possíveis são apresentadas a seguir.



*Figuras 8.14a e 8.14b: Dois posicionamentos possíveis dos instantes inicial e final para medição do tempo de ensaio (conforme requisitos normativos aplicáveis)*

Estas situações, pressupondo a equivalência na duração do tempo das duas manobras ( $\Delta t_0 = \Delta t_f$ ) é, ainda, ideal, não se confirmando nos ensaios experimentais dedicados ao estudo desta componente no LEHid. Observa-se, antes, uma diferença (de comportamento aleatório)

na medição de tempo, sendo as diferenças compreendidas entre 0 e 5 ms. Por esta razão, esta componente constitui uma fonte de incerteza a considerar.

Neste caso, a componente de incerteza traduz-se numa diferença de massa de água que flui nesse intervalo de tempo, sendo em primeira aproximação proporcional ao caudal do ensaio,  $(Q_m \cdot \Delta t_{\text{def}})$ , e cuja função densidade de probabilidade adoptada se admite ser de configuração-U (por se observar que a diferença,  $\Delta t_{\text{def}} = 5 \text{ ms}$ , ocorre mais frequentemente que o valor central da distribuição, i.e., a diferença nula)<sup>7</sup>.

#### 8.4.2.2 Determinação da incerteza associada à medição da grandeza tempo

A incerteza na medição do tempo (associado ao enchimento do tanque de pesagem), distingue-se essencialmente da incerteza na medição da grandeza massa porque, ao contrário desta, cujo valor é considerado independente do caudal (1 700 kg ou 17 000 kg, consoante o I.P. utilizado), tem uma duração que é determinada pelo valor máximo (constante) de massa convencional e do valor do caudal mássico de calibração (ensaio). A expressão que a suporta é,

$$\Delta t \approx \frac{\Delta m_C}{Q_m} \quad (8.43)$$

onde  $Q_m$  representa o caudal nominal a que se realiza a calibração (o ensaio). Por exemplo, se o caudal tiver o valor de 50 kg/s, o tempo previsível de duração do ensaio correspondente será de 34 s.

Contudo a incerteza de medição da grandeza tempo é estimada de forma análoga à exposta na secção anterior, usando a expressão genérica (8.37). Assim, inicia-se a sua análise com a identificação das quatro componentes que contribuem para esta incerteza de medição.

$$\Delta t_{\text{vc}} = t_f + \delta t_{\text{cal}} + \delta t_{\text{inst}} + \delta t_{\text{metod}} \quad (8.44)$$

Nesta expressão,  $t_f$  representa a mensuranda tempo resultante do conjunto de observações, e a sua variação é determinada pelas grandezas de entrada seguintes,

$$t_f = t_{\text{lido}} + \delta t_{\text{res}} + \delta t_{\text{rep}} \quad (8.45)$$

<sup>7</sup> Refira-se que a modelação mais ajustada deveria considerar uma distribuição de probabilidade cujos limites se encontram compreendidos entre 0 e  $(Q_m \cdot \Delta t_{\text{def}})$ . É possível implementar esta solução usando o GUM, desde que se possa efectuar uma correcção da sua componente sistemática (valor médio da distribuição) que a desvia de 0, recentrando-a nesse valor, se a distribuição em causa for simétrica (por exemplo, uma distribuição uniforme com os limites apontados). Neste caso, tratando-se de uma distribuição de probabilidade U, o troço da função compreendido na sua parte positiva não é simétrico, inviabilizando o caso desta solução de recurso no procedimento preconizado pelo GUM.

onde  $t_{\text{lido}}$  é o valor obtido pela leitura do instrumento de medição do tempo no final da calibração (ensaio),  $\delta t_{\text{res}}$  representa a resolução finita associada à leitura obtida com o contador padrão de tempo e  $\delta t_{\text{rep}}$  a repetibilidade da indicação observada.

A componente de desvio de calibração,  $\delta t_{\text{cal}}$ , é declarada no certificado de calibração.

A componente de desvio de instrumentação,  $\delta t_{\text{inst}}$ , resulta de contribuições específicas de acordo com:

$$\delta t_{\text{inst}} = \delta t_{\text{inst,disp}} + \delta t_{\text{inst,e}} + \delta t_{\text{inst,T}} + \delta t_{\text{inst,d}} \quad (8.46)$$

onde  $\delta t_{\text{inst,disp}}$  representa o desvio associado à duração finita dos sinais de disparo inicial e final,  $\delta t_{\text{inst,e}}$  representa o desvio de não-estabilidade de curto prazo do sinal,  $\delta t_{\text{inst,T}}$  representa o desvios associado à variação da temperatura (incluindo a diferença relativa à temperatura de referência de 20 °C),  $\delta t_{\text{inst,d}}$  o desvio da depreciação de longo prazo das condições de ajustamento em calibração e  $\delta t_{\text{inst,a}}$  o desvio associado à variação da massa volúmica do ar.

A contribuição para a avaliação da incerteza de medição proveniente do método,  $\delta m_{\text{metod}}$ , resulta das seguintes contribuições:

$$\delta t_{\text{metod}} = \delta t_{\text{metod,A/D}} + \delta t_{\text{metod,R}} + \delta t_{\text{metod,\Delta U}} + \delta t_{\text{metod,pc}} \quad (8.47)$$

onde  $\delta t_{\text{metod,A/D}}$  é o desvio associado à resolução da interface analógica-digital,  $\delta t_{\text{metod,R}}$  o desvio associado a interferências exógenas ao sinal–ruído,  $\delta t_{\text{metod,\Delta U}}$  o desvio associado à variação de tensão nas diferentes linhas (canais de comunicação) e sua influência mútua e,  $\delta t_{\text{metod,pc}}$  o desvio associado à aquisição e ao processamento computacional de dados.

É com base neste conjunto de grandezas de entrada que se estabelece a segunda tabela de balanço de incertezas aplicável a este problema. Por conveniência face à natureza de uma parte significativa da informação disponível, os valores são apresentados de acordo com a sua forma relativa.

Para a constituição da presente tabela foram consideradas como relevantes as informações do fabricante do contador padrão de tempo [Hewlett-Packard], nomeadamente, denotando que a variação da temperatura dentro dos valores admissíveis produz uma variação

de  $\pm 4$  ppm do valor da frequência (admitindo que existe uma compensação interna de temperatura, cf. nota do fabricante) e uma depreciação inferior a  $\pm 3$  ppm (mensal).

A informação contida nos certificados de calibração [TAP n.ºs 1719/04, 1726/04 e 1813/04] permite obter a incerteza de medição expandida aplicável de  $\pm 5 \cdot 10^{-6}$  %.

Quadro 8.13: Tabela de balanço de incertezas relativo à medição do tempo

Grandeza de entrada: $x_i$	Descrição da grandeza de entrada	F <sub>d</sub> P*	Dispersão da grandeza de entrada $u(x_i)$	$C_i$	Componente de incerteza $u_i(m_c)$	Graus de liberdade $\nu_i$	
$t_f$	Valor da medição	N		1	0,015 %	50	
$t$	Resolução (12 dígitos) ou (1 / 4096)	R	1	1	0,0144 %	50	
	$\delta t_{rep}$	Repetibilidade do I.P.	N	$\left( \frac{0,005\%}{\sqrt{3}} \right)$	1	0,0029 %	50
$\delta t_{cal}$	Desvio de calibração (incerteza de calibração & erros residuais)	N	$1 \cdot 10^{-5}$ %	1	$1 \cdot 10^{-5}$ %	50	
$\delta t_{inst}$	Componente de desvio associada à instrumentação	N		1	0,0085 %	50	
$\delta t_{inst,R}$	Conversão A/D	R	$\left( \frac{0,01\%}{\sqrt{3}} \right)$	1	0,0058 %	50	
	$\delta t_{inst,disp}$	Desvio associado à realização do disparo inicial e final	R	$\left( \frac{0,001\%}{\sqrt{3}} \right)$	1	0,0058 %	50
	$\delta t_{inst,e}$	Desvio associado à estabilidade do sinal	R	$\left( \frac{0,01\%}{\sqrt{3}} \right)$	1	0,0058 %	50
	$\delta t_{inst,T}$	Desvio associado à influência da variação de temperatura	R	$\left( \frac{4 \cdot 10^{-4}\%}{\sqrt{3}} \right)$	1	$2,3 \cdot 10^{-4}$ %	50
	$\delta t_{inst,d}$	Desvio associado à depreciação temporal do padrão	R	$\left( \frac{3,6 \cdot 10^{-3}\%}{\sqrt{3}} \right)$	1	0,0021 %	50
$\delta t_{metod}$	Componente de desvio associada ao método	N		1	0,0058 %	50	
$\delta t_{metod,R}$	Desvio associado a interferências exógenas (sinal-ruído)	R	$\left( \frac{1 \cdot 10^{-5}\%}{\sqrt{3}} \right)$	1	$5,8 \cdot 10^{-6}$ %	50	
	$\delta t_{metod,\Delta U}$	Desvio associado à variação de tensão e influência mútua nas linhas - canais	R	0	0	-	
	$\delta t_{metod,pc}$	Desvio associado ao processamento computacional	R	$\left( \frac{0,01\%}{\sqrt{3}} \right)$	1	0,0058 %	50
Incerteza de medição padrão, $u_c(\Delta t)$ : $\pm 0,018$ %							
Graus de liberdade efectivos, $\nu_{ef}$ : 50							
Factor de expansão, $t_{95}$ : 2,00							
Incerteza de medição expandida, $U_{95}(\Delta t)$ : $\pm 0,036$ %							

\* R – rectangular ou uniforme centrada, T – triangular centrada, N – Normal, U – de configuração U ou arcoseno.

No que se refere à execução da operação de disparo, a sua estimativa de variabilidade tem como base estudos prévios de avaliação do comportamento do sistema nos instantes que determinam o início e o fim da medição do tempo de ensaio. Para a sua quantificação consideraram-se os limites de variação de  $\pm 1$  ms e uma duração mínima de ensaios de 34 s (correspondente a um caudal de 50 kg/s utilizando o sistema de pesagem de menor capacidade) determinando-se a relação de 0,0058 % considerada na tabela.

#### 8.4.2.3 Determinação da incerteza associada à medição do coeficiente de impulsão

A terceira componente do modelo matemático (8.29) que contribui para a incerteza de medição é o coeficiente associado ao efeito de impulsão,

$$C_{\text{imp}} = \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)} \quad (8.48)$$

onde  $\rho_p$  é a massa volúmica dos pesos-padrão (de referência),  $\rho_a$  a massa volúmica do ar e  $\rho$  a massa volúmica do líquido utilizado no ensaio.

Admite-se que a massa volúmica dos pesos de referência corresponde ao valor de referência, tendo a sua componente de incerteza sido contabilizada previamente nos processos de ajustamento e de calibração. Assim, na expressão anterior subsistem duas variáveis contributivas para a avaliação da incerteza: a massa volúmica do ar e a massa volúmica do líquido. Aplicando a LPI à equação anterior, resulta:

$$u^2(C_{\text{imp}}) = \left(\frac{\partial C_{\text{imp}}}{\partial \rho_a}\right)^2 \cdot u^2(\rho_a) + \left(\frac{\partial C_{\text{imp}}}{\partial \rho}\right)^2 \cdot u^2(\rho) + \left(\frac{\partial C_{\text{imp}}}{\partial \rho_a}\right)\left(\frac{\partial C_{\text{imp}}}{\partial \rho}\right)u(\rho_a) \cdot u(\rho) \quad (8.49)$$

e as derivadas parciais são determinadas com base no modelo matemático (8.48),

$$\left(\frac{\partial C_{\text{imp}}}{\partial \rho_a}\right) = \frac{-\frac{1}{\rho_p}\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right)\left(-\frac{1}{\rho}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_p}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^2} \quad (8.50a)$$



$$\left( \frac{\partial C_{\text{imp}}}{\partial \rho} \right) = \frac{- \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_p} \right) \left( \frac{\rho_a}{\rho^2} \right)}{\left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right)^2} \quad (8.50b)$$

A quantificação destas derivadas requer o conhecimento dos valores particulares das diferentes massas volúmicas: a massa volúmica do ar,  $\rho_a$ , (que para a situação de ensaio corresponde a 1,193 kg/m<sup>3</sup>, cf. procedimento de avaliação exposto na nota 6); a massa volúmica dos pesos de referência,  $\rho_p$ , com o valor convencional de referência de 8000 kg/m<sup>3</sup>; e a massa volúmica do líquido (água),  $\rho$ , o valor convencional de referência (a 20 °C e pressão atmosférica de referência) igual a 1000 kg/m<sup>3</sup>. A determinação das incertezas associadas às estimativas – valores – de massa volúmica adoptados constitui os restantes elementos requeridos pelo cálculo.

No que se refere à incerteza do valor da massa volúmica de líquido, esta encontra-se associada à temperatura, podendo determinar-se a partir de tabelas que relacionam as duas grandezas para o líquido em causa. Em particular, usando a tabela da norma ISO 4185 (1990) e admitindo uma variação anual da temperatura da instalação compreendida entre 10 °C e 30 °C determina-se uma variação da ordem de 4,05 kg/m<sup>3</sup>. Adoptando uma distribuição de probabilidade uniforme centrada com limites dados por  $\pm 2$  kg/m<sup>3</sup>, resulta uma componente de incerteza a contabilizar que é dada por:

$$u(\rho) = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ kg/m}^3 \quad (8.51)$$

Considera-se que, nesta variação, se encontra incorporada a variação da massa volúmica da água devido à variação da temperatura, observando-se que esta varia menos que  $\pm 1^\circ\text{C}$ , conduzindo a uma incerteza em  $\rho$  que é da ordem de 0,21 kg/m<sup>3</sup> [Jones *et al* (2002)].

Quanto à determinação da massa volúmica do ar no local onde se encontra a instalação laboratorial (LEHid) utiliza-se, para esse efeito, a expressão exponencial simplificada da fórmula do BIPM [EA 10/18 (2005)]<sup>8</sup>:

<sup>8</sup> Esta forma de avaliação pode envolver alguma dificuldade por requerer a medição da temperatura e da pressão atmosférica com algum grau de exactidão. Uma alternativa comum consiste na determinação da densidade média do ar com base na altitude acima do nível do mar no local,  $h$  (*vide* EA 10/18 (2005) ), sendo esta uma forma simplificada agregada a uma determinada posição geográfica (no caso particular da localização do LEHid, a cota acima do nível do mar é da ordem de 100 m, resultando uma estimativa da massa volúmica média do ar de 1,193 kg·m<sup>-3</sup>):

$$\rho_a = \rho_0 \exp \left[ - \left( \frac{\rho_a}{P_0} \cdot g h \right) \right]$$

$$\rho_a = \frac{0,34848 \cdot p - 0,009024 \cdot hr \cdot e^{0,0612 \cdot \theta}}{273,15 + t} \quad (8.52)$$

onde  $p$  representa a pressão atmosférica em hPa,  $hr$  a humidade relativa do ar em percentagem e  $\theta$  a temperatura em grau Celsius.

A aplicação da LPI à expressão anterior determina a componente de incerteza associada à estimativa da massa volúmica do ar.

$$u^2(\rho_a) = C_p^2 u^2(\Delta p) + C_\theta^2 u^2(\Delta \theta) + C_{hr}^2 u^2(\Delta hr) \quad (8.53)$$

Os valores das derivadas parciais encontram-se expostos em EA 10/18 (2005),

$$C_p = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ hPa (para a pressão atmosférica } p \text{ ou } \Delta p). \quad (8.54a)$$

$$C_\theta = -4,5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}; \quad (8.54b)$$

$$C_{hr} = -10,5 \cdot 10^{-3} \text{ humidade relativa como fracção decimal.} \quad (8.54c)$$

A quantificação das componentes associadas às grandezas de influência ambiental resulta de uma avaliação de informação relevante que se encontra em EA 10/18 (2005) e do recurso a registos de monitorização dessas grandezas disponíveis no LEHid.

A pressão atmosférica, em particular, incorpora uma estimativa relativamente à sua variação baseada na monitorização da grandeza e na informação específica da recomendação EA 10/18 (2005), apontando para uma variação<sup>9</sup> da ordem de  $\pm 20$  hPa (com 95% de confiança):

$$U_{95}(\Delta p) = \pm 20 \text{ hPa} \quad (8.55)$$

A temperatura ambiente possui uma variação característica de espaços condicionados de maiores dimensões (espaços semi-abertos, espaços do tipo nave industrial, etc.) em localizações geográficas de clima mediterrânico, confirmadas pela sua monitorização, considerando-se uma variação compreendida entre  $+10$  °C e  $+30$  °C. A função densidade de probabilidade, considerada apropriada para a sua representação, é do tipo uniforme dentro dos limites apontados e o seu desvio-padrão determina a componente de incerteza respectiva.

---

onde  $p_0$  corresponde à pressão de referência igual a 1013,25 hPa,  $\rho_0$  à massa volúmica de referência igual a 1,200 kg·m<sup>3</sup>,  $g$  é a aceleração da gravidade igual a 9,81 m/s<sup>2</sup> e  $h$  corresponde à cota acima do nível do mar (expressa em m).

De notar que a pressão atmosférica média,  $p_a$ , pode ser determinada conhecendo a cota  $h$  e considerando que a pressão no nível do mar  $p_{sl}$  corresponde ao valor de 1013,12 hPa.

<sup>9</sup> De acordo com estudos referidos em [EA 10/18 (2005)] para qualquer localização geográfica, a diferença entre a máxima e a mínima pressão atmosférica observada é de  $\Delta p = \pm 40$  hPa, obtida em períodos de tempo da ordem de 20 anos. Contudo, os valores extremos são mais raros, apontando para a utilização de uma distribuição triangular como adequada. Com base neste documento, adicionalmente, considera-se razoável a adopção de  $\Delta p = \pm 40$  hPa com um nível de confiança de 95 %.

$$u(\Delta \theta) = \pm \frac{20}{\sqrt{12}} \text{ } ^\circ\text{C} \quad (8.56)$$

A humidade relativa envolve uma variação (para o mesmo tipo de espaços condicionados de maiores dimensões e de localização de clima mediterrânico), compreendida entre 30 % e 80 %. A representação de probabilidade adoptada é uniforme no intervalo apontado, e a estimativa da respectiva componente de incerteza coincide com a expressão do desvio padrão.

$$u(\Delta hr) = \pm \frac{50}{\sqrt{12}} \% \quad (8.57)$$

Considerando os valores expostos, e a utilização da expressão (8.53) resulta uma incerteza padrão associada à estimativa da massa volúmica do ar, dada por:

$$u(\rho_a) \cong \pm 0,032 \text{ kg/m}^3 \quad (8.58)$$

Admitindo a inexistência de correlação entre as duas variáveis de massa volúmica, então,

$$u^2(C_{\text{imp}}) = \left( \frac{\partial C_{\text{imp}}}{\partial \rho_a} \right)^2 \cdot u^2(\rho_a) + \left( \frac{\partial C_{\text{imp}}}{\partial \rho} \right)^2 \cdot u^2(\rho)$$

e introduzindo os valores específicos das estimativas resulta a pretendida componente de incerteza de medição (8.59) e o seu valor relativo (8.60).

$$u(C_{\text{imp}}) = \sqrt{u^2(C_{\text{imp}})} = \sqrt{7,9 \cdot 10^{-10}} = 2,8 \cdot 10^{-5} \quad (8.59)$$

$$w(C_{\text{imp}}) = \frac{u(C_{\text{imp}})}{C_{\text{imp}}} \approx 0,003\% \quad (8.60)$$

#### 8.4.2.4 Determinação da incerteza de medição do caudal

A determinação da incerteza de medição padrão relativa do caudal resulta da aplicação da expressão geral obtida em (8.29) e da utilização dos valores associados aos ensaios específicos, designadamente, o valor da massa, do caudal nominal e do intervalo de tempo de duração do ensaio.

Assim, dois exemplos de avaliação são propostos: o primeiro, onde se admite a existência de um caudal nominal de 10 kg/s, uma massa de 1700 kg e, conseqüentemente, uma duração temporal do ensaio de 170 s; e o segundo, para a mesma massa, para um caudal de 50 kg/s, originando um intervalo de tempo de ensaio de 34 s. Os resultados obtidos usando (8.61) encontram-se, respectivamente, em (8.62b) e (8.63b).

$$w^2(Q_m) = \frac{2 \cdot u^2(m_c)}{\Delta m_c^2} + \frac{u^2(\Delta t)}{\Delta t^2} + \frac{u^2(C_{imp})}{C_{imp}^2} \quad (8.61)$$

$$w^2(Q_m = 10 \text{ kg/s}) = 2 \cdot \frac{(0,07)^2}{1700^2} - \frac{(3,5 \cdot 10^{-3} \cdot Q_m)^2}{1700^2} + \quad (8.62a)$$

$$+ (1,8 \cdot 10^{-4})^2 + (3 \cdot 10^{-5})^2 = 3,62671 \cdot 10^{-8}$$

$$w(Q_m = 10 \text{ kg/s}) \approx 0,019 \% \quad (8.62b)$$

$$w^2(Q_m = 50 \text{ kg/s}) = 2 \cdot \frac{(0,18)^2}{1700^2} - \frac{(3,5 \cdot 10^{-3} \cdot Q_m)^2}{1700^2} + \quad (8.63a)$$

$$+ (1,8 \cdot 10^{-4})^2 + (3 \cdot 10^{-5})^2 = 4,51253 \cdot 10^{-8}$$

$$w(Q_m = 50 \text{ kg/s}) \approx 0,021 \% \quad (8.63b)$$

Nestes modelos, observa-se a presença de um termo de redução da incerteza, determinado pela parcela relativa a  $\delta m_{C,metod\_def}$  (segundo termo do segundo membro nas duas equações anteriores). A sua incorporação resulta de se considerar que este é contabilizado duas vezes na equação (8.33) quando, de facto, a sua influência é única, representando uma quantidade excedentária de massa resultante da diferença de tempo na realização das manobras do deflector (nota-se que a sua duplicação não é desprezável aumentando o resultado em (8.63b) para 0,039 %, enquanto o termo (8.62b) se mantém dentro da aproximação considerada).

### 8.4.3 Solução MCS

A utilização da MCS na avaliação de incertezas parte do modelo matemático utilizado pelo GUM considerando as mesmas variáveis e, em geral, as funções densidade de probabilidade e respectivas parametrizações excepto em duas delas, cuja distinção se descreve adiante. O Quadro seguinte resume as variáveis, suas distribuições de probabilidade e parâmetros aplicados no modelo matemático (8.64) que serve de base à simulação. Relembrando que essa relação matemática é dada por (8.29),

$$Q_m = \frac{m_{cf} - m_{c0}}{t_f - t_0} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}$$

e que as equações parcelares associadas à medição das grandezas massa e tempo respeitam as equações particulares (8.37) e (8.44) que se seguem:

$$m_{C,vc} = m_C + \delta m_{C,cal} + \delta m_{C,inst} + \delta m_{C,metod}$$

$$\Delta t_{vc} = t_f + \delta t_{cal} + \delta t_{inst} + \delta t_{metod}$$

as quais, retirando as contribuições consideradas nulas e introduzindo as suas contribuições específicas determinam as equações (8.64a e b) aplicáveis, respectivamente, a cada parcela de contribuição para a medição da grandeza massa e da grandeza tempo.

$$\begin{aligned} m_{C,vc} = & m_{C,lido} + \left( \delta m_{C,res} + \delta m_{C,exc} + \delta m_{C,0} \right) + \delta m_{C,cal} + \\ & + \left( \delta m_{C,inst,T} + \delta m_{C,inst,d} \right) + \\ & + \left( \delta m_{C,metod,\Delta m} + \delta m_{C,metod,def} + \delta m_{C,metod,pc} \right) \end{aligned} \quad (8.64a)$$

$$\begin{aligned} \Delta t_{vc} = & t_{lido} + \left( \delta t_{res} + \delta t_{rep} \right) + \delta t_{cal} + \\ & + \left( \delta t_{inst,Trigger} + \delta t_{inst,e} + \delta t_{inst,T} + \delta t_{inst,d} \right) + \\ & + \left( \delta t_{metod,R} + \delta t_{metod,pc} \right) \end{aligned} \quad (8.64b)$$

Recuperando, ainda, os valores utilizados na aplicação do GUM no que se refere às variáveis de massa volúmica integradas no modelo matemático, constitui-se o Quadro seguinte onde se resume a informação requerida para a concretização da simulação MCS.

Duas notas adicionais são particularmente importantes para a compreensão dos valores introduzidos neste Quadro:

- a inclusão de valores médios de massa e de tempo para a realização de uma estimativa usando MCS traduz a mesma situação observada na aplicação no estudo usando o GUM, i.e., uma massa de 1 700 kg e um intervalo de tempo de 170 s (para a condição de um patamar de caudal de 10 kg/s) e de 34 s (para a condição de um patamar de caudal de 50 kg/s).
- a inclusão de duas distribuições de probabilidade designadas por “meio-arcoseno” ou “meio-U” (ver o anexo 6 para os detalhes desta distribuição de probabilidade) com valores compreendidos entre o valor 0 e um dos limites, aplicadas às variáveis  $\delta m_{metod,\Delta m}$  e  $\delta m_{metod,def}$ , resulta de se considerar que esta representação se encontra mais próxima da realidade física da qual se pretende efectuar a simulação<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> O ganho de líquido (por exemplo, por condensação), pode-se considerar desprezável face às perdas de líquido no processo de enchimento e, no que se refere à diferença de tempo observada nas manobras do deflector, executadas mecanicamente sempre no mesmo sentido, essa diferença origina um acréscimo de massa no enchimento e traduz-se numa variável que se deve deduzir ao resultado e, consequentemente, encontra-se compreendida entre um limite inferior e 0).

Quadro 8.14: Grandezas, distribuições de probabilidade e parametrização utilizadas na MCS

Grandeza	F <sub>a</sub> P	Parâmetros	Grandeza	F <sub>a</sub> P	Parâmetros
$m_{Cf} = 1\,700\text{ kg}$			$m_{C0} = 0\text{ kg}$		
$\delta m_{C, \text{res}}$	R	$(0 \pm 2,5 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$	$\delta m_{C0, \text{res}}$	R	$(0 \pm 2,5 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$
$\delta m_{C, \text{exc}}$	R	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$	$\delta m_{C0, \text{exc}}$	R	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$
$\delta m_{C, 0}$	R	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$	$\delta m_{C0, 0}$	R	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$
$\delta m_{C, \text{cal}}$	N	$(0 \pm 3,9 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$	$\delta m_{C0, \text{cal}}$	N	$(0 \pm 3,9 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$
$\delta m_{C, \text{inst}_T}$	T	$(0 \pm 1,7 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$	$\delta m_{C0, \text{inst}_T}$	T	$(0 \pm 1,7 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$
$\delta m_{C, \text{inst}_d}$	R	$(0 \pm 5 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$	$\delta m_{C0, \text{inst}_d}$	R	$(0 \pm 5 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$
$\delta m_{C, \text{metod}_pc}$	R	$(0 \pm 5 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$	$\delta m_{C0, \text{metod}_pc}$	R	$(0 \pm 5 \cdot 10^{-2})\text{ kg}$
$\delta m_{C, \text{metod}_\Delta m}$	M-U	$[0; 5 \cdot 10^{-3}]\text{ kg}$			
$\delta m_{C, \text{metod}_\text{def}}$	M-U	$[-Q_m \cdot \Delta t_{\text{def}}; 0]\text{ kg}$			
$t = 34\text{ s}$ (aplicável ao caudal de 50 kg/s) / $t = 170\text{ s}$ (aplicável ao caudal de 10 kg/s)					
$\delta t_{\text{res}}$	R	$(0 \pm 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot t)\text{ s}$	$\delta t_{\text{inst}_T}$	R	$(0 \pm 4 \cdot 10^{-4} \cdot t)\text{ s}$
$\delta t_{\text{rep}}$	N	$(0 \pm 5 \cdot 10^{-5} \cdot t)\text{ s}$	$\delta t_{\text{inst}_d}$	R	$(0 \pm 3,6 \cdot 10^{-5} \cdot t)\text{ s}$
$\delta t_{\text{cal}}$	N	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-7} \cdot t)\text{ s}$	$\delta t_{\text{metod}_R}$	R	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-7} \cdot t)\text{ s}$
$\delta t_{\text{inst}_\text{disp}}$	R	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-5} \cdot t)\text{ s}$	$\delta t_{\text{metod}_pc}$	R	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-4} \cdot t)\text{ s}$
$\delta t_{\text{inst}_e}$	R	$(0 \pm 1 \cdot 10^{-4} \cdot t)\text{ s}$			
$\rho$	R	$(1000 \pm 2)\text{ kg/m}^3$	$\rho_a$	N	$(1,193 \pm 0,032)\text{ kg} \cdot \text{m}^3$

\* R – rectangular ou uniforme centrada, T – triangular centrada, N – Normal, U – de configuração U ou arco seno, M-U – meio-U ou meio arco seno.

No Quadro anterior, os parâmetros relativos a distribuições uniformes e triangulares revelam o valor médio e os seus limites de variação, as distribuições meio-U o valor extremo de variação e as distribuições normais a média e o desvio-padrão.

As distribuições de probabilidade meio-U, cuja expressão é (anexo 7):

$$f(\xi; a) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < 0 \\ \frac{2}{\pi \sqrt{a^2 - \xi^2}} & \text{se } 0 \leq \xi < a \\ 0 & \text{se } \xi \geq a \end{cases} \quad (8.65)$$

onde  $a$  representa o valor extremo da distribuição, procuram traduzir as probabilidades associadas a variáveis aleatórias cuja expressão possui significado físico apenas em metade do intervalo simétrico da distribuição de configuração U. Por exemplo, no caso da grandeza de entrada  $\delta m_{\text{metod}_\text{def}}$ , onde é aplicada, observa-se a existência de um excedente no intervalo de tempo das manobras do deflector, a que corresponde um acréscimo de massa de líquido

inserida para pesagem, compreendida entre 0 kg e  $[Q_m \cdot \Delta t_{\text{def}}]$  kg, e cuja distribuição de probabilidade tem a configuração apresentada na Figura 8.13.

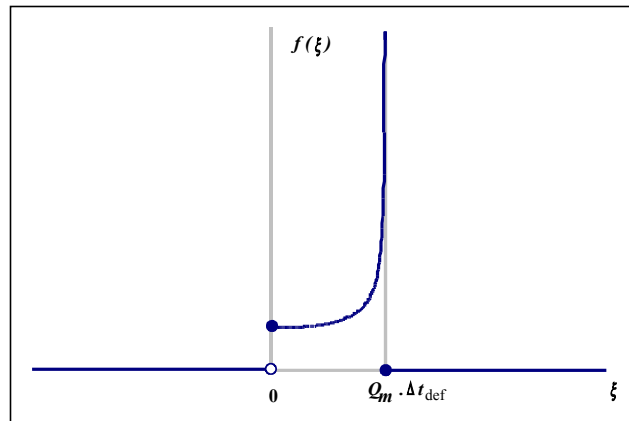


Figura 8.15: Função densidade de probabilidade da grandeza diferença de massa provocada pela diferença de intervalos de tempo observada nas manobras do deflector

Esta grandeza, representando um excedente dos valores obtidos, deve ser deduzida à estimativa da mensuranda, i.e., na realidade a distribuição de probabilidade da variável encontra-se compreendida no intervalo  $[-Q_m \cdot \Delta t_{\text{def}}; 0]$  kg. Contudo, esta situação (simétrica da exposta graficamente) facilmente se reflecte no cálculo efectuando, no modelo de simulação (8.66), a sua subtracção.

Situação equivalente ocorre no tratamento da variável  $\delta m_{C,\text{metod\_}\Delta m}$  relativa ao balanço de ganhos e perdas de líquido no processo de enchimento do tanque de pesagem, onde o efeito preponderante é a dispersão de gotículas de líquido que são projectadas para o seu exterior, traduzindo-se num balanço que varia entre o valor nulo e um valor máximo limite de perdas observadas. Neste caso, contudo, representando uma perda potencial, o seu valor deve ser adicionado no modelo matemático.

$$m_{C,vc} = m_{C,lido} + (\delta m_{C,res} + \delta m_{C,exc} + \delta m_{C>0}) + \delta m_{C,cal} + (\delta m_{C,inst_T} + \delta m_{C,inst_d}) + (\delta m_{C,\text{metod\_pc}} + \delta m_{C,\text{metod\_}\Delta m} - \delta m_{C,\text{metod\_def}}) \quad (8.66)$$

A simulação MCS, utilizando os parâmetros e distribuições apontadas no Quadro 8.14, realizada para os caudais de 10 kg/s e 50 kg/s, conduz aos seguintes resultados.

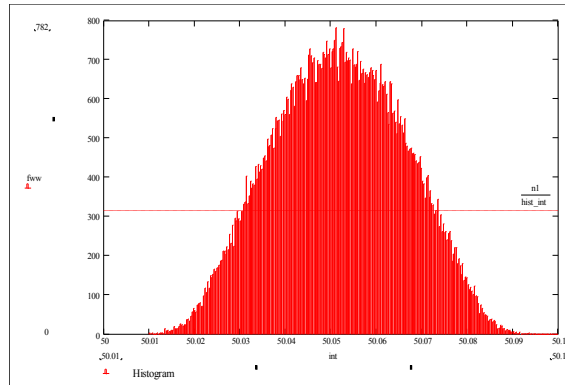


Figura 8.16: Histograma MCS do Caudal (simulação para 50 kg/s)

Quadro 8.15: Resultados obtidos utilizando a MCS (LEHid – Caudal nominal de 50 kg/s)

<b>Valor médio MCS: 50,051 87 kg/s</b>		
<b>Intervalo de confiança de 68 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	50,036 7 kg/s	50,067 0 kg/s
Incerteza de medição $u_{68}(I)$ :	$\pm 1,5 \cdot 10^{-2}$ kg/s ( $\pm 3,0 \cdot 10^{-2}$ %)	
<b>Intervalo de confiança de 95 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	50,025 0 kg/s	50,078 7 kg/s
Incerteza de medição $u_{95}(I)$ :	$\pm 2,7 \cdot 10^{-2}$ kg/s ( $\pm 5,4 \cdot 10^{-2}$ %)	
<b>Intervalo de confiança de 95 % do percentil <math>y_L</math> (obtido para 95 %)</b>		
Percentis limite:	50,024 8 kg/s	50,025 2 kg/s
Incerteza do percentil L, $\delta y_L =  y_{L+} - y_{L-} $ :	$4 \cdot 10^{-4}$ kg/s ( $4 \cdot 10^{-3}$ %)	
<b>Intervalo de confiança de 95 % do percentil <math>y_H</math> (obtido para 95 %)</b>		
Percentis limite:	50,078 5 kg/s	50,078 8 kg/s
Incerteza do percentil H, $\delta y_H =  y_{H+} - y_{H-} $ :	$3 \cdot 10^{-4}$ kg/s ( $3 \cdot 10^{-3}$ %)	

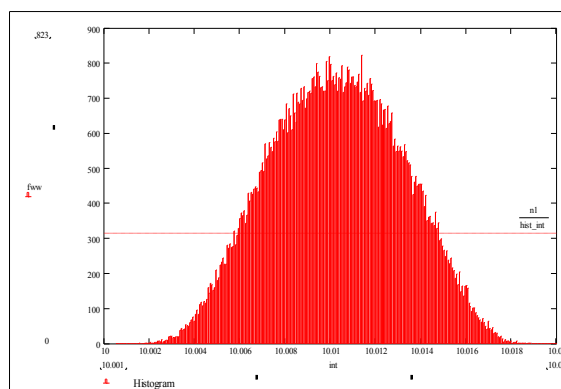


Figura 8.17: Histograma MCS do Caudal (simulação para 10 kg/s)



Quadro 8.16: Resultados obtidos utilizando a MCS (LEHid – Caudal nominal de 10 kg/s)

<b>Valor médio MCS: 10,010 297 kg/s</b>		
<b>Intervalo de confiança de 68 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	10,007 24 kg/s	10,013 36 kg/s
Incerteza de medição $u_{68}(I)$ :	$\pm 3,06 \cdot 10^{-3}$ kg/s ( $\pm 3,06 \cdot 10^{-2}$ %)	
<b>Intervalo de confiança de 95 %</b>		
Limites da incerteza de medição ( $y_L$ e $y_H$ ):	10,004 846 kg/s	10,015 735 kg/s
Incerteza de medição $u_{95}(I)$ :	$\pm 5,44 \cdot 10^{-3}$ kg/s ( $\pm 5,44 \cdot 10^{-2}$ %)	
<b>Intervalo de confiança de 95 % do percentil <math>y_L</math> (obtido para 95 %)</b>		
Percentis limite:	10,004 81 kg/s	10,004 88 kg/s
Incerteza do percentil L, $\delta y_L =  y_{L+} - y_{L-} $ :	$7 \cdot 10^{-5}$ kg/s	
<b>Intervalo de confiança de 95 % do percentil <math>y_H</math> (obtido para 95 %)</b>		
Percentis limite:	10,015 71 kg/s	10,015 77 kg/s
Incerteza do percentil H, $\delta y_H =  y_{H+} - y_{H-} $ :	$6 \cdot 10^{-5}$ kg/s	

#### 8.4.4 Comparação de resultados

A análise comparativa dos resultados obtidos neste exemplo de aplicação é particularmente rica por permitir a observação segundo duas perspectivas distintas. Uma delas consiste em avaliar a relação entre as incertezas obtidas usando os dois métodos para os dois patamares de caudal observados, cujos resultados se apresentam nos Quadros seguintes.

Quadros 8.17a: Resultados obtidos pela MCS no exemplo de aplicação ao LEHid (usando distribuições de probabilidade de configuração U)

<b>Intervalo de confiança: 68 %</b>		
Caudal mássico :	$u(Q_m = 10 \text{ kg/s})$	$u(Q_m = 50 \text{ kg/s})$
<b>GUM (U)*</b>	$\pm 0,019$ %	$\pm 0,021$ %
<b>MCS (U)*</b>	$\pm 0,031$ %	$\pm 0,030$ %
% da diferença	- 39 %	- 30 %
(GUM-MCS) / 100xMCS		

\* Função densidade de probabilidade de configuração U aplicada na simulação relativa à variável  $\delta m_{C, \text{metod\_def}}$ .

Quadros 8.17b: Resultados obtidos pela MCS no exemplo de aplicação ao LEHid (usando distribuições de probabilidade de configuração meio-U)

<b>Intervalo de confiança: 68 %</b>		
Caudal mássico :	$u(Q_m = 10 \text{ kg/s})$	$u(Q_m = 50 \text{ kg/s})$
<b>GUM (U)*</b>	$\pm 0,019$ %	$\pm 0,021$ %
<b>MCS (M-U)**</b>	$\pm 0,031$ %	$\pm 0,030$ %
% da diferença	- 39 %	- 30 %
(GUM-MCS) / 100xMCS		

\*\* Função densidade de probabilidade de configuração Meio-U aplicada na simulação relativa à variável  $\delta m_{C, \text{metod\_def}}$ .

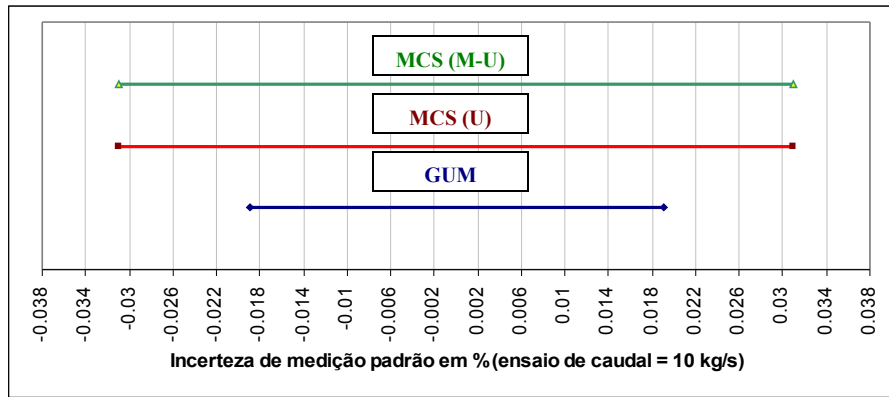


Figura 8.18: Incertezas de medição padrão em percentagem (para caudal mássico de 10 kg/s)

As razões possíveis da diferença observada são: a utilização, por parte do GUM, da variável  $(\Delta m_C)$  e a aplicação da LPI a esta (expressão 8.35 reproduzida a seguir) para estimar a incerteza combinada; o pressuposto adicional de que as duas componentes de incerteza possuem idêntico valor.

$$u^2(\Delta m_C) = u^2(m_{Cf}) + u^2(m_{C0}) = 2u^2(m_C)$$

A MCS, por seu lado, utiliza as duas variáveis originais,  $m_{Cf}$  e  $m_{C0}$ , e a sua diferença no modelo computacional, conforme a expressão dada em (8.48).

$$Q_m = \frac{m_{Cf} - m_{C0}}{\Delta t} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}$$

Estes resultados mostram que a relação estabelecida difere consoante o caudal nominal de ensaio, sendo significativamente subavaliada em qualquer dos casos. Neste sentido, os resultados obtidos usando a MCS são mais consistentes na gama característica de funcionamento e demonstram uma menor robustez observada usando o GUM.

A adequação dos resultados obtidos e utilizados nos cálculos do Quadro anterior é garantida porque a exactidão destes se encontra dentro dos níveis de exactidão dos percentis indicados nos Quadros (8.15) e (8.16). Por outro lado, a análise de sensibilidade efectuada (usando séries distintas de números pseudo-aleatórios) conduziu a resultados similares (com diferenças máximas da ordem de 0,000 2 %).

Uma outra perspectiva interessante e inovadora, resulta da comparação dos valores médios obtidos usando o GUM e a MCS.

Quadros 8.18: Valores médios obtidos usando o GUM e MCS no exemplo de aplicação ao LEHid

Caudal mássico :	Valores médios	
	GUM	MCS
$Q_m = 10 \text{ kg/s}$	10,010 45 kg/s	10,010 297 kg/s
$Q_m = 50 \text{ kg/s}$	50,052 26 kg/s	50,051 87 kg/s

No caso do GUM, de acordo com os dados do problema, a estimativa do caudal nominal de 50 kg/s, aplicando a expressão que contabiliza o efeito da impulsão, corresponde a 50,052 26 kg/s e para o caudal nominal de 10 kg/s corresponde a 10,010 45 kg/s. Os resultados obtidos pela MCS determinam valores médios da distribuição de probabilidade respectivamente iguais a 50,051 87 kg/s e a 10,010 297 kg/s.

A possibilidade de introduzir distribuições de probabilidade não centradas e assimétricas (caso das duas distribuições meio-U introduzidas para representar as grandezas de entrada  $\delta m_{C,\text{metod}_{\Delta m}}$  e  $\delta m_{C,\text{metod}_{\text{def}}}$ ) produz, necessariamente, um desvio na estimativa, de que resultam as diferenças observadas na Figura seguinte. A aplicação de factores de correcção relativos à componente assimétrica de  $\delta m_{C,\text{metod}_{\Delta m}}$  e  $\delta m_{C,\text{metod}_{\text{def}}}$  nos valores médios obtidos pelo GUM permite que estes sejam corrigidos, coincidindo com os valores médios dados pela MCS.

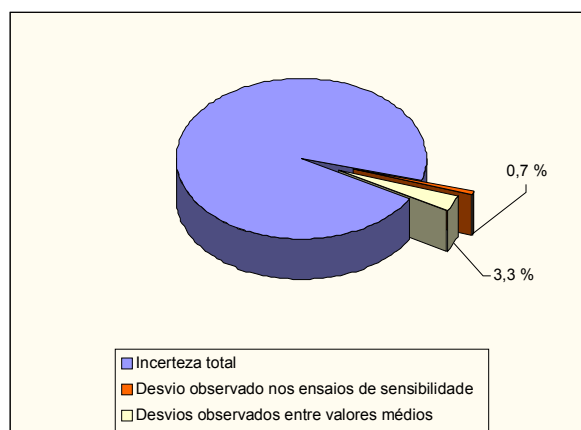


Figura 8.19: Relação entre os desvios observados na simulação e a incerteza de medição

Outra consequência observada, consiste em notar que os limites do intervalo de incerteza à esquerda e à direita do valor médio determinado possuem dimensão distinta, não sendo correcto, portanto, caracterizar a incerteza como  $\pm u_c(Q_m)$  mas antes como um intervalo do tipo  $[u^-(Q_m), u^+(Q_m)]$ .

Neste sentido, a simulação MCS revela-se uma metodologia mais adaptável ao processo físico envolvido e, simultaneamente, revela uma enorme potencialidade que consiste em fornecer a distribuição de probabilidade da grandeza de saída (o que não acontece com o GUM, que simplesmente assume que é uma distribuição normal) possibilitando não só a percepção da sua configuração, mas também a avaliação dos parâmetros valor médio e intervalo de incerteza a partir da informação que estabelece essa mesma configuração.

## **9. ESTUDOS COMPLEMENTARES DE AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS EVIDENCIANDO O POTENCIAL DA MCS**

### **9.1 Introdução**

A diversidade de aplicações envolvendo a medição de grandezas permite encontrar tipologias de problemas de natureza metrológica, para as quais se pretende conhecer a incerteza, envolvendo condições que determinam a possível aplicação quer do GUM quer de outros métodos com a mesma finalidade, entre os quais, se destaca a metodologia baseada na matriz variância-covariância que, de certa forma, é uma generalização precursora da Lei de Propagação de Incertezas.

Estas metodologias possuem uma configuração equivalente diferindo apenas na via de dedução (num caso, analítica e no outro, a série de Taylor), envolvendo o produto do operador diferencial pelo operador de variância-covariância e permitindo atingir o objectivo de avaliação das incertezas de medição em muitos dos problemas metrológicos cujas condições são regulares (modelos lineares, diferenciáveis, e cuja análise se encontra concentrada na vizinhança do ponto que quantifica a mensuranda).

No entanto, nem sempre essas condições são atingidas nos problemas concretos e, nesses casos, importa avaliar por um lado, a capacidade destas metodologias para responder a esses desafios e, por outro lado, observar a capacidade de outras metodologias alternativas nesse mesmo contexto. Refira-se que o próprio GUM aponta o tipo de problemas para os quais não é capaz de efectuar uma avaliação consistente de incertezas de medição e a análise usando a matriz variância-covariância é equivalente, na formulação, à metodologia proposta no GUM e, como tal, possui limitações similares.

A procura de exemplos de aplicação para este capítulo, teve em consideração que existem contextos metrológicos onde os problemas têm características de acordo com um conjunto de condições de regularidade, para as quais os métodos analíticos possuem as vantagens do seu lado. Existem outros problemas metrológicos que, ao contrário, têm condições que criam dificuldades de aplicação a estes métodos, por vezes inultrapassáveis, sendo particularmente apropriados para a utilização da MCS, permitindo a observação do seu desempenho e a evidência do seu potencial. Os três estudos seleccionados encontram-se neste âmbito descrevendo-se, a seguir e de forma sucinta, cada um dos processos metrológicos envolvidos:

- o primeiro exemplo visa a avaliação da incerteza de medição associada a um modelo não-linear simples (função quadrática) usando condições particulares de parametrização e a discussão da sua distribuição de probabilidade face a pressupostos habitualmente adoptados pelo GUM;
- o segundo exemplo trata o problema da avaliação de incertezas de medição no contexto da transformação de coordenadas considerando, em particular, a transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas esféricas e sua aplicação em modelos matemáticos de grandezas geométricas. Um interesse adicional reside em observar a possibilidade de alargamento a quaisquer modelos matemáticos que incorporem funções trigonométricas no contexto em que a variável independente é espacial – distintos dos restantes exemplos, onde a variável independente é temporal;
- o terceiro exemplo refere-se à avaliação da incerteza associada à determinação de coeficientes de uma curva de calibração obtida mediante a aplicação do método de eliminação gaussiana a uma matriz de dados experimentais, traduzindo uma classe de problemas que, também eles, podem encontrar uma solução simples na aplicação da metodologia MCS.

Os casos em estudo têm como característica comum, uma vertente de aplicação a problemas práticos da Metrologia, respondendo a necessidades objectivas de avaliação de incertezas de medição em processos experimentais de grande interesse.

Realça-se que, tal como no capítulo anterior, foram adoptados procedimentos de validação das ferramentas computacionais desenvolvidas para a concretização das simulações computacionais, encontrando-se a sua descrição sumária no anexo 6.

## **9.2 Avaliação da incerteza de medição associada a uma função quadrática**

A avaliação de incertezas de medição aplicada a problemas cujo modelo matemático é não-linear constitui uma das restrições habituais determinadas pelos requisitos do GUM. No entanto, admite-se a possibilidade deste poder ser aplicado a modelos não-lineares, desde que se cumpra um requisito, implicitamente aceite, de se efectuar uma análise na vizinhança do ponto onde se pretende estimar a incerteza e se garanta que o comportamento do modelo matemático nessa vizinhança é aproximadamente linear.

Esta condição é particularmente importante, havendo quem a traduza numa condição adicional de aplicação do GUM, exigindo que as dimensões das incertezas das grandezas de

entrada sejam significativamente inferiores aos valores assumidos pelas mesmas grandezas (garantindo, dessa forma, a restrição do cálculo à vizinhança do ponto da mensuranda).

Outro motivo de interesse para o presente exemplo encontra-se no facto de o GUM determinar uma concepção enquadrada pelo Teorema do Limite Central, o que pressupõe a natureza centrada e simétrica das distribuições associadas às grandezas de entrada e admite que o resultado é, necessariamente, uma distribuição normal (com as suas características de simetria e com um valor máximo). Esta concepção introduz uma orientação que pode não corresponder à realidade, como este exemplo irá ilustrar.

Existe, pois, um risco inerente ao facto de se efectuar uma aplicação generalizada do GUM a modelos que não cumpram determinados requisitos (alguns deles estipulados de forma implícita nesse documento), designadamente, a sua natureza não-linear ou a configuração das suas distribuições de probabilidade (não simétricas e, eventualmente, com mais do que um máximo<sup>1</sup>).

Este tipo de situações justifica o interesse em se procurar alternativas para se aceder à configuração da distribuição de probabilidade da grandeza de saída e para recolher desta, a informação desejada. É neste contexto que se propõe a aplicação da MCS ao exemplo que se segue.

Este exemplo, originalmente proposto por Cox (2001c), é particularmente ilustrativo e, simultaneamente simples, envolvendo uma função não-linear quadrática cujo modelo matemático se exprime de acordo com a relação,

$$Y = X^2 \quad (9.1)$$

admitindo-se que a variável aleatória  $X$  possui uma distribuição de probabilidade normal com média igual a 1,2 e desvio-padrão igual a 0,6. Pretende-se obter a distribuição de probabilidade da grandeza de saída  $Y$  (note-se que o intervalo de incerteza  $[0,6+0,6]$  tem uma dimensão equiparada à do valor da mensuranda e, portanto, corresponde a uma das situações de risco para a aplicação do GUM referidas anteriormente).

A aplicação da MCS a este caso inicia-se com a geração de uma sequência de números pseudo-aleatórios com distribuição  $\mathcal{N}(1,2 ; 0,6)$  recorrendo ao gerador H-W e à rotina de

---

<sup>1</sup> Veja-se o exemplo de Cox ( ), em que as distribuições de probabilidade de resistências eléctricas dentro de limites de tolerância de classe, determinam que a sua configuração de probabilidade possua dois máximos, um em cada sub-intervalo de tolerância e, em torno de cada um destes, uma sub-distribuição de configuração gaussiana. Nesse exemplo, a associação de duas resistências eléctricas (em série) traduz-se numa distribuição de probabilidade com 4 regiões e 4 máximos locais, a associação de três resistências eléctricas (em série) traduz-se numa distribuição de probabilidade com 6 regiões e 6 máximos locais e assim sucessivamente.

execução do algoritmo de conversão Box-Muller. O resultado que se apresenta na Figura seguinte, foi obtido utilizando uma sequência de 100 000 valores.

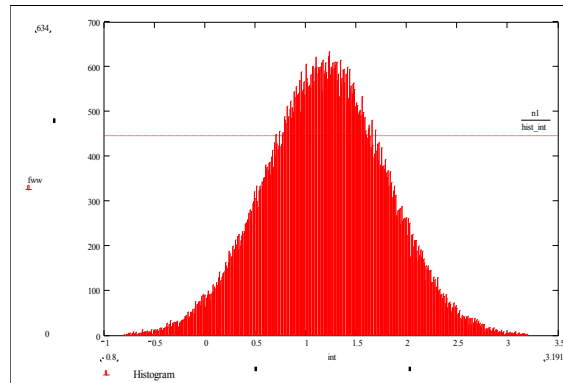


Figura 9.1: Distribuição de probabilidade relativa à grandeza  $X$

A utilização do modelo matemático (9.1), respectivamente, para 50 000, 100 000 e 200 000 valores, traduz-se na obtenção de histogramas da distribuição de probabilidade de  $Y$  dos quais se apresenta um relativo à sequência de 100 000 valores.

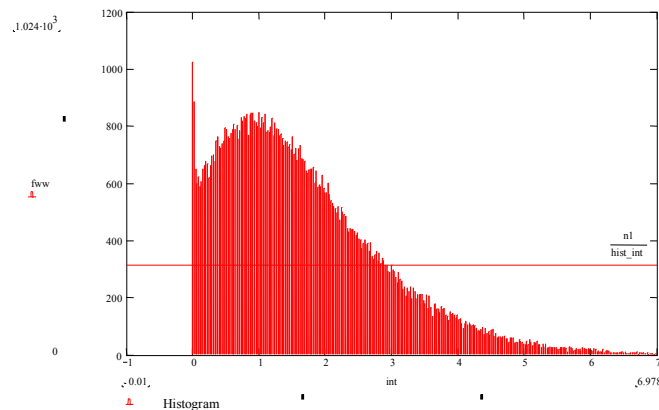


Figura 9.2: Distribuição de probabilidade de  $Y$  com amostra de 100 000 valores

A simulação numérica (MCS) aplicada a este exemplo – Figura (9.3) – considerando uma sequência de 100 000 valores, permite obter uma distribuição de probabilidade da grandeza de saída,  $y$ , cuja configuração não é normal evidenciando uma assimetria significativa e a existência de dois máximos (um local – próximo de 1 – e outro absoluto – próximo de 0), ambos distintos de qualquer um dos parâmetros habitualmente utilizados na determinação da estimativa (a média aritmética ou até a mediana).



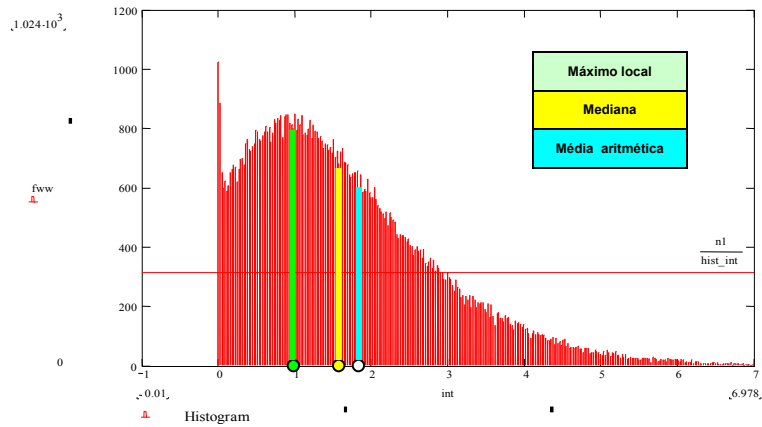


Figura 9.3: Distribuição de probabilidade de  $Y$  (100 000 valores) e parâmetros de localização

O histograma torna evidente, também, uma configuração distinta daquela que seria expectável no contexto do GUM. Com efeito, essa expectativa envolve uma distribuição de saída de configuração normal centrada no valor médio da grandeza de saída,  $y$ , determinado pelo quadrado do valor médio da grandeza de entrada,  $x$  (neste caso: 1,44). A sobreposição das duas distribuições de probabilidade (Figura 9.4) permite constatar essa diferença mostrando um efeito de translação entre as duas curvas das distribuições, mostrando que existe uma coincidência entre a mediana obtida pela via MCS e a média aritmética obtida pelo via GUM, esta última afastada da média aritmética determinada pela MCS. A análise desta característica relevante das distribuições assimétricas será retomada adiante.

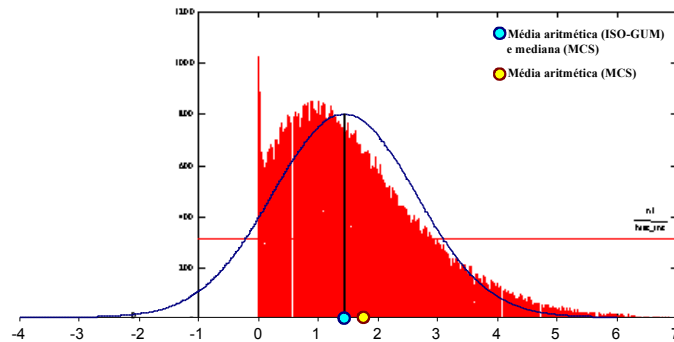


Figura 9.4: Posições das médias aritméticas e mediana

Os resultados obtidos usando a metodologia MCS, estimadores de parâmetros da distribuição de probabilidade de saída, são expostos no Quadro seguinte.

Quadro 9.1: Resultados obtidos pela simulação numérica (MCS)

Parâmetros	Resultados
Média aritmética	1,687 202
Mediana	1,440 745
Máximo local	0,81
Intervalo de incerteza (68%)	[ 0,494 ; 2,875 ]
Intervalo de incerteza (95%)	[ 0,054 ; 4,716 ]
Intervalo de incerteza (99%)	[ 0,003 ; 6,141 ]
Intervalo de incerteza de 95 % do percentil $L^-$	0,007
Intervalo de incerteza de 95 % do percentil $L^+$	0,07

A sua observação realça a distinção que existe entre 3 parâmetros, todos eles potencialmente indicadores da estimativa da grandeza: a *média aritmética*, a *mediana* e o *máximo local*. Como se fez notar anteriormente, a mediana é o estimador cujo valor (1,44) coincide com o quadrado do valor central da distribuição de  $X$ .

Este resultado permite uma discussão interessante acerca dos objectivos e dos recursos inerentes à aplicação das metodologias GUM e MCS.

Relembra-se que a aplicação da metodologia GUM parte de um contexto específico onde se assume que as componentes sistemáticas dos erros são corrigidas e que as componentes aleatórias são aquelas que originam componentes contributivas para a incerteza de medição. Assume-se, implicitamente, que estas possuem distribuições de probabilidade centradas (expurgadas dos elementos de natureza sistemática) e, como o âmbito de aplicação do modelo matemático é – condição de aplicação – linear (ou aproximadamente linear na vizinhança do ponto em observação), qualquer combinação conduz a distribuições de probabilidade de saída igualmente centradas e de configuração normal (de acordo com o disposto no Teorema do Limite Central).

Estas circunstâncias justificam que o GUM apresente unicamente o estimador *média aritmética* como aquele que é apropriado para representar o resultado da medição, por dois tipos de razões: porque, nestas condições, coincide com a *mediana* e com a *moda*, sendo mais simples de obter; e porque é considerado o estimador não-enviesado mais eficiente, possuindo uma menor dispersão (atendendo à definição de desvio-padrão experimental da média que determina um decréscimo proporcional à raiz quadrada da dimensão da amostra).

Estes argumentos perdem o seu significado a partir do momento em que se observe a assimetria de uma distribuição de probabilidade, constatando-se que, para alguns tipos de

distribuições de probabilidade (por exemplo, de Cauchy) a *mediana* é o estimador mais apropriado [Steele *et al.* [2005]]. Outra situação de preferência habitual deste estimador (*mediana*), ocorre quando se pretende um parâmetro mais robusto que a média aritmética em processos onde a amostra contém valores espúrios.

Se por qualquer razão (como é o caso deste exemplo) a função distribuição de probabilidade de saída se afasta da configuração expectável, a relação estabelecida entre a média aritmética da grandeza de entrada e da grandeza de saída pode deixar de ter o significado que, em regra, se atribui ao próprio estimador, introduzindo um efeito de enviesamento que é indesejável.

Ao contrário, a MCS ao disponibilizar a configuração da distribuição de probabilidade da grandeza de saída permite ao utilizador, não só constatar a manifestação da verdadeira natureza (probabilística) dessa grandeza como, simultaneamente, permite-lhe avaliar e utilizar o estimador que, para o seu caso particular, é mais adequado. No exemplo apresentado, qualquer dos 3 estimadores pode ser o mais conveniente: o *máximo local* entendido como o valor da ocorrência mais provável; a *mediana*, como valor da ocorrência correspondente ao percentil de 50%, dividindo a amostra em dois intervalos cada qual com 50% de ocorrências; e a *média aritmética*, como valor médio da amostra ponderado pela distribuição de probabilidade. Neste sentido, surge com alguma relevância o facto de alguns autores como, por exemplo [Steele *et al.* (2006)] discutirem, noutros contextos, a utilidade de se adoptarem estimadores como a mediana, considerados menos enviesados para determinadas finalidades.

Numa outra perspectiva, a observação dos estimadores e dos intervalos de incerteza, permite concluir que, em nenhum dos casos, o intervalo é centrado nesses estimadores. Quanto à exactidão (95% de intervalo de confiança) dos dois percentis que determinam o intervalo de incerteza verifica-se, de forma equivalente, que ela é distinta (com uma diferença da ordem de 1 para 10), revelando um efeito adicional da assimetria da distribuição que resulta da concentração de valores de  $y$  situados na proximidade de zero.

A comparação destes resultados com os resultados obtidos a partir de uma eventual aplicação do GUM a um problema deste género, aparentemente simples, permite constatar diferenças significativas. Pelo GUM a estimativa da média seria igual a 1,44 e a aplicação da LPI produziria uma semi-amplitude de incerteza de 1,20 (correspondente ao desvio-padrão de 0,6), originando o intervalo de incerteza de medição padrão (de 68%) [0,24 ; 2,64]. A MCS determina para a média aritmética o valor de 1,68 e o intervalo de incerteza de medição

padrão assimétrica (de 68%) [0,494 ; 2,875]. As diferenças encontradas são ilustradas na Figura seguinte.

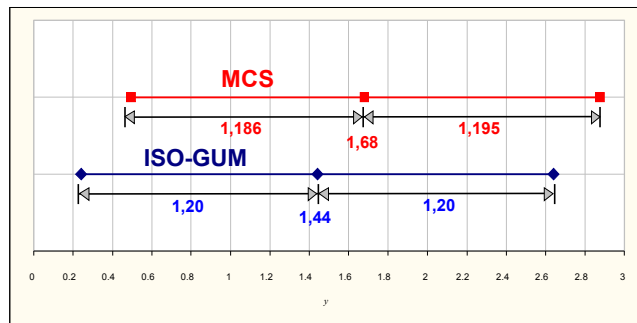


Figura 9.5: Diferença entre médias aritméticas e intervalos de incerteza obtidos usando o GUM e a MCS

No caso de utilização da mediana como estimador preferencial (na via MCS), coincidente com o estimador da média aritmética determinado pelo GUM, observa-se um acréscimo da assimetria no intervalo de incerteza obtido por MCS, cf. se apresenta na Figura seguinte.

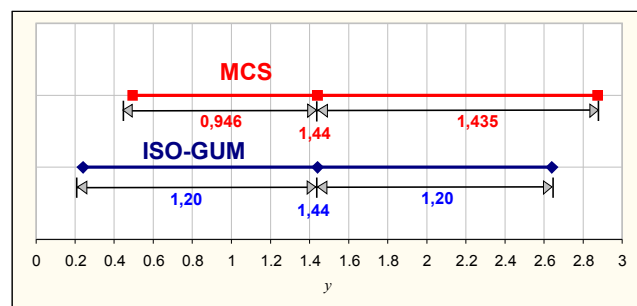


Figura 9.6: Intervalos de incerteza centrados na média aritmética (GUM) e na mediana (MCS)

Este estudo comparativo revela a vantagem da aplicação da metodologia MCS, dado fornecer a configuração da função densidade de probabilidade da saída. A utilização do GUM depende de condições que, ao não serem respeitadas, envolvem um risco elevado e conduzem a resultados cujo significado é discutível ou incorrecto.

Neste exemplo, verificam-se algumas fragilidades do GUM, determinadas pelas suas condições de aplicabilidade e, sobretudo, pelos pressupostos que estas implicam, nomeadamente: a configuração da distribuição de probabilidade da grandeza de saída como configuração simétrica normal; e a adopção inquestionável do estimador média aritmética. A sua aplicação, sem a devida ponderação face às condições requeridas pode, assim, conduzir a erros grosseiros. Ao contrário, a análise baseada na MCS mostra-se particularmente robusta, evidenciando uma notável capacidade de adaptação aos condicionalismos de cada problema físico.

Finalmente, refira-se a existência de outros casos similares a este onde se observam situações de assimetria quer em distribuições de probabilidade de grandezas de entrada quer nas de saída, como é o caso de modelos matemáticos incorporando funções logarítmicas aplicadas a variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade uniforme e triangular, cuja aplicação é frequente em domínios científicos relevantes como o da acústica e das grandezas eléctricas.

### **9.3 Avaliação da incerteza de medição associada a transformação de coordenadas**

A transformação de coordenadas tem ampla aplicação em diversos domínios. Essa transformação visa, geralmente, a obtenção de coordenadas polares/esféricas e cilíndricas a partir de coordenadas cartesianas e *vice-versa*, sendo frequente em problemas onde se pretendem determinar valores de grandezas geométricas e respectivas incertezas de medição.

Nas relações de transformação que se estabelecem, encontram-se funções trigonométricas que, em determinadas circunstâncias (de elevado grau de não linearidade), geralmente impedem a aplicação do GUM como metodologia de avaliação de incertezas de medição. No entanto, nos casos onde é possível admitir que o intervalo de incerteza associado a cada uma das coordenadas originais é suficientemente pequeno para que a aproximação linear em torno do ponto em causa seja válida, aplicam-se metodologias equivalentes suportadas na Lei de propagação de variâncias.

Este tipo de transformações tem um interesse particular para os laboratórios metrológicos, pela sua aplicação específica em domínios de calibração e de medição das áreas dimensional, óptica e das grandezas geométricas (cf. se observa na Figura 9.7).

A aplicação da MCS que se segue aborda apenas o caso simplificado da conversão directa de coordenadas cartesianas em coordenadas polares, fazendo-se notar que o mesmo processo se pode aplicar a qualquer outro modelo matemático similar que contenha este tipo de funções trigonométricas e de relações de transformação.

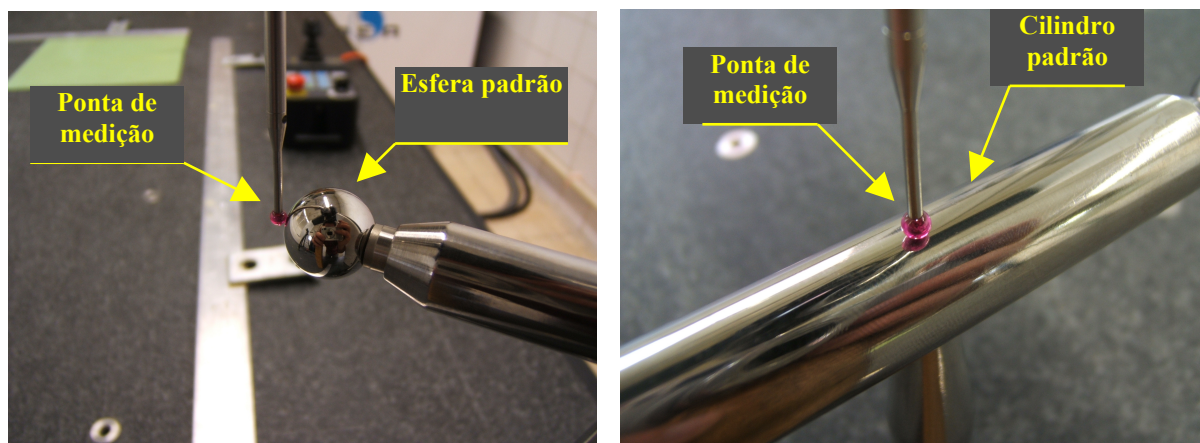


Figura 9.7: Imagens da medição de grandezas dimensionais e geométricas em padrões no LNEC

Considere-se, como ponto de partida, a medição de três coordenadas  $(x, y, z)$  num conjunto de eixos de coordenadas cartesianas, das quais se possuem estimativas dos intervalos de incerteza associados, cf. o exposto no Quadro seguinte.

Quadro 9.2: Dados iniciais obtidos por via experimental

Coordenadas cartesianas	Estimativa	Incerteza de medição padrão (68%)
$x$	5,120 mm	$\pm 0,020$ mm
$y$	1,320 mm	$\pm 0,010$ mm
$z$	4,560 mm	$\pm 0,008$ mm

A conversão para outro sistema de eixos, polar (esférico) ou cilíndrico, envolve a aplicação de um conjunto de equações conhecidas. Por outro lado, sendo conhecida *a priori* a incerteza de medição de cada uma das coordenadas cartesianas consideradas na transformação, é de grande utilidade conhecer a incerteza de medição “equivalente” que resulta no novo sistema de coordenadas.

As equações de transformação, no caso da conversão para coordenadas polares, são:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad (9.2a-c)$$

Nos diagramas seguintes observa-se a representação de cada uma das coordenadas incorporadas nas diversas expressões 9.2 e 9.3.

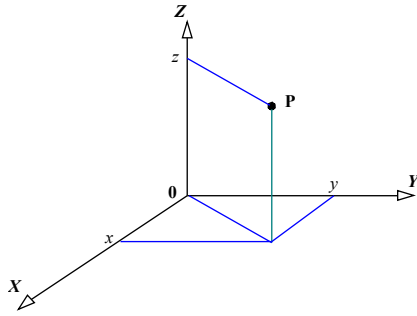


Figura 9.8: Coordenadas cartesianas

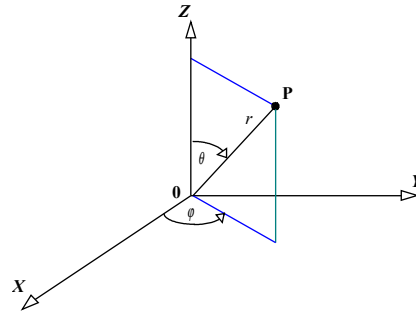


Figura 9.9: Coordenadas polares (esféricas)

Nas coordenadas polares,  $r$  representa o comprimento do vector raio,  $\varphi$  é a longitude e  $\theta$  a distância polar, verificando as condições adicionais:  $0 \leq r < \infty$ ,  $-\pi \leq \varphi < +\pi$  e  $0 \leq \theta \leq +\pi$ .

Este enquadramento permite, desde logo, obter as estimativas das coordenadas convertidas, aplicando os respectivos valores das coordenadas de entrada, de que resulta:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6,982 \quad \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = 14,50^\circ \quad \theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = 49,20^\circ$$

As estimativas dos limites de variabilidade ou das incertezas de medição podem ser obtidas por diferentes vias: usando uma metodologia de análise de extremos; usando uma metodologia suportada na Lei de Propagação de Variâncias; e como proposta adicional, recorrendo à MCS. De seguida, procura-se expôr cada uma destas vias e os resultados obtidos em cada caso, visando a sua comparação posterior.

No primeiro caso, a avaliação dos limites de variabilidade (que podem ser interpretados como majorantes dos intervalos de incertezas de medição) no novo sistema de coordenadas, procedimento prático muito utilizado nos domínios das Engenharias, conduz à obtenção de uma estimativa desses intervalos com base numa análise de extremos.

Esta técnica admite que a combinação de acordo com o modelo matemático dos valores extremos das variáveis (máximos e mínimos) permite aceder aos valores extremos de variação das grandezas em causa – e da sua incerteza.

Concretamente, o raciocínio seguido parte do pressuposto que as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  têm intervalos de variabilidade “equivalentes” a intervalos de incerteza de medição padrão  $\pm u$  ( $x$ ),  $\pm u$  ( $y$ ) e  $\pm u$  ( $z$ ), e admite que estes valores correspondem aos extremos de variação das variáveis<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Não esquecendo que os intervalos expostos correspondem a intervalos de confiança de 68%, o que significa que a sua utilização como intervalos de confiança de ordem superior, por exemplo 95%, deverá implicar a sua multiplicação pelo factor de expansão correspondente

Atendendo a estes factos, a nova coordenada dada por  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  poderá, na pior situação de combinação de valores, adquirir o valor máximo,  $r_{\max} = \sqrt{(x + u(x))^2 + (y + u(y))^2 + (z + u(z))^2}$ , correspondente a todas as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  tomarem, simultaneamente, os valores máximos admitidos e adquirir o valor mínimo,  $r_{\min} = \sqrt{(x - u(x))^2 + (y - u(y))^2 + (z - u(z))^2}$ , correspondente a todas as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  tomarem, simultaneamente, os valores mínimos especificados nos intervalos de incerteza que foram especificados.

Da mesma forma, para as coordenadas angulares tem-se:

$$\varphi_{\max} = \arctg\left(\frac{(y + u(y))}{(x - u(x))}\right) \qquad \varphi_{\min} = \arctg\left(\frac{(y - u(y))}{(x + u(x))}\right);$$

$$\theta_{\max} = \arctg\left(\frac{\sqrt{(x + u(x))^2 + (y + u(y))^2}}{(z - u(z))}\right) \qquad \theta_{\min} = \arctg\left(\frac{\sqrt{(x - u(x))^2 + (y - u(y))^2}}{(z + u(z))}\right)$$

Aplicado este raciocínio aos valores do exemplo, resultam os limites de variabilidade destas variáveis no novo sistema de coordenadas, conduzindo aos resultados expressos nos intervalos que se seguem.

$$r : (6,982 \text{ mm} \pm 0,022 \text{ mm}) \qquad (9.3a)$$

$$\varphi : (14,5^\circ - 0,20^\circ; 14,5^\circ + 0,12^\circ) \qquad (9.3b)$$

$$\theta : (49,2^\circ - 0,14^\circ; 49,2^\circ + 0,19^\circ) \qquad (9.3c)$$

A adopção destes intervalos como representativos dos pretendidos “intervalos de incerteza” merece discussão: não se conhece (por esta via) qual a configuração da distribuição de probabilidade da grandeza de saída (em resultado de se adoptarem limites de variabilidade em vez da dispersão de distribuições de probabilidade); e no que se refere às grandezas angulares, observam-se assimetrias consideráveis com diferenças de semi-amplitude que atingem 65%. A discussão destes resultados será mais detalhada no final desta secção.

A segunda via aplicável na avaliação das incertezas de medição pretendidas (das coordenadas polares obtidas a partir de coordenadas cartesianas), recorre à Lei de Propagação



de Variâncias (análoga à Lei de Propagação de Incertezas exposta no GUM), resultando da aplicação da matriz de variância-covariância, cuja configuração é a seguinte:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_\varphi^2 & \sigma_{\varphi\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\varphi\theta} & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Considerando que as 3 variáveis aleatórias originais, associadas as grandezas mensuráveis/coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ), são independentes e possuem distribuição de probabilidade normal com desvios-padrão dados por  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\sigma_z$ , (no contexto deste exemplo, as estimativas destes desvios-padrão são dadas pelas incertezas de medição padrão expostas no Quadro 9.2, respeitando as condições apontadas acima), a matriz exposta em 9.4 pode ser re-escrita como,

$$\Sigma = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \quad (9.5)$$

onde a matriz  $\mathbf{D}$  representa o operador jacobiano de transformação do campo vectorial (de coordenadas cartesianas em esféricas), dado por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

e a matriz variância-covariância das variáveis cartesianas é:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2(x) & 0 & 0 \\ 0 & u^2(y) & 0 \\ 0 & 0 & u^2(z) \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

contendo os termos de covariâncias todos nulos por serem variáveis aleatórias independentes.

As derivadas parciais aplicadas na matriz  $\mathbf{D}$ , atendendo às expressões de transformação expostas em (9.2a-c), têm as seguintes expressões:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left( -\frac{y}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)^2} \cdot \left( \frac{x \cdot (x^2 + y^2)^{-1/2}}{z} \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)^2} \cdot \left( \frac{y \cdot (x^2 + y^2)^{-1/2}}{z} \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \left( \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^{-1/2}}{z} \right) \cdot \left( - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2} \right)$$

Utilizando os valores particulares deste exemplo, resultam as matrizes,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 6,4 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,733 & -0,047 & 0,091 \\ 0,189 & 0,183 & 0,023 \\ 0,653 & 0 & -0,108 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2,46 \cdot 10^{-4} & -1,039 \cdot 10^{-5} & 2,248 \cdot 10^{-5} \\ -1,039 \cdot 10^{-5} & 4,246 \cdot 10^{-6} & -1,283 \cdot 10^{-6} \\ 2,248 \cdot 10^{-5} & -1,283 \cdot 10^{-6} & 4,089 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Da última matriz, podem obter-se os desvios padrão a partir dos elementos diagonais,

$$\sigma_r = \sqrt{2,46 \cdot 10^{-4}} = +0,0157 \text{ mm} \quad (9.8a)$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt{4,246 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{180}{\pi} = +0,118^\circ \quad (9.8b)$$

$$\sigma_\theta = \sqrt{4,089 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{180}{\pi} = +0,116^\circ \quad (9.8c)$$

os quais, correspondem às estimativas das incertezas de medição padrão (nível de confiança de 68%) das coordenadas polares resultantes da transformação. Estes valores serão discutidos, também, no final desta secção.

A terceira via de obtenção das incertezas de medição consiste na utilização, para esse efeito, da simulação numérica usando a MCS.

Esta terceira via, contrariamente à perspectiva “determinística” do raciocínio apresentado na primeira via referida (análise de extremos), segue o procedimento característico da simulação numérica por MCS, iniciando-se com a geração de sequências uniformes pseudo-aleatórias, seguindo-se a sua conversão em distribuições normais com parâmetros (valor médio e desvio-padrão estimado pela incerteza de medição padrão) coincidentes com os valores expostos no Quadro 9.2 e determinando-se, com base nessas sequências das

coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) e nos modelos matemáticos expostos em (9.2a-c), as sequências das grandezas de saída, de onde se extraem as coordenadas polares ( $r, \varphi, \theta$ ) pretendidas e os respectivo intervalos das incertezas de medição.

Nas etapas citadas são aplicados: o algoritmo de geração H-W para obtenção de sequências de 100 000 números pseudo-aleatórios; o algoritmo de conversão Box-Muller para obtenção de sequências com distribuição de probabilidade normal; e o algoritmo “Quicksort” para a ordenação das sequências de saída. Os resultados obtidos constam do Quadro seguinte.

Quadro 9.3: Resultados obtidos pela aplicação da MCS na transformação de coordenadas

Coordenadas cartesianas		Coordenadas polares	
Dados	Média aritmética MCS	Incerteza de medição padrão (68%)	Exactidão para percentis
$x = 5,12$ mm	$r = 6,98$ mm	$u(r) = \pm 1,55 \cdot 10^{-2}$ mm	$5 \cdot 10^{-4}$ mm
$y = 1,32$ mm	$\varphi = 14,5^\circ$	$u(\varphi) = \pm 1,17 \cdot 10^{-1}$ °	$4 \cdot 10^{-3}$ °
$z = 4,56$ mm	$\theta = 49,2^\circ$	$u(\theta) = \pm 1,15 \cdot 10^{-1}$ °	$4 \cdot 10^{-3}$ °

As distribuições de probabilidade que resultaram do processo de simulação são expostas nas Figuras seguintes evidenciando, em todas elas, a configuração de distribuição de probabilidade do tipo normal.

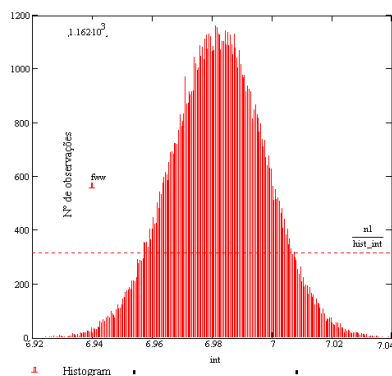


Figura 9.10: Distribuição de probabilidade da coordenada polar  $r$

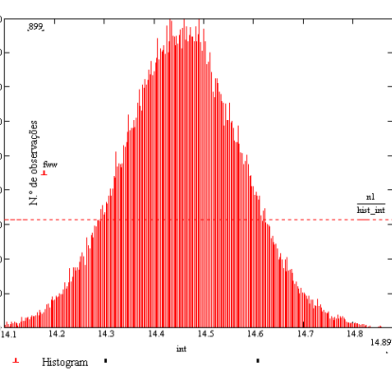


Figura 9.11: Distribuição de probabilidade da coordenada polar  $\varphi$

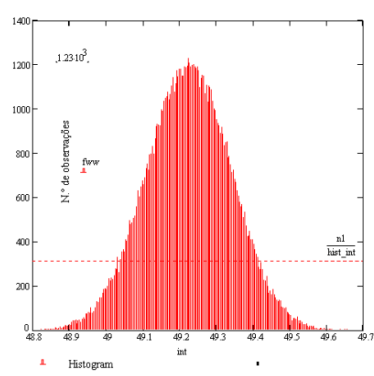


Figura 9.12: Distribuição de probabilidade da coordenada polar  $\theta$

Estes resultados permitem efectuar uma análise comparativa das três vias apresentadas, em três perspectivas distintas envolvendo: o estimador do valor médio; a configuração da distribuição de probabilidade de saída; e a estimativa do intervalo de incerteza de medição.

Primeiro, no que se refere à estimativa do valor médio, esta é coincidente nos três casos, situação expectável face às relações de transformação em causa e à adopção de configurações

normais para a incerteza de medição padrão relativa às coordenadas cartesianas, cf. Quadro seguinte.

9.4: Comparação de médias aritméticas calculadas pela via analítica e obtidas por MCS

Coordenadas cartesianas	Coordenadas polares			
Dados	Via analítica	Análise de extremos	Matriz variância-covariância	MCS
$x = 5,12 \text{ mm}$	$r = 6,98 \text{ mm}$	$r = 6,98 \text{ mm}$	$r = 6,98 \text{ mm}$	$r = 6,98 \text{ mm}$
$y = 1,32 \text{ mm}$	$\varphi = 14,5^\circ$	$\varphi = 14,5^\circ$	$\varphi = 14,5^\circ$	$\varphi = 14,5^\circ$
$z = 4,56 \text{ mm}$	$\theta = 49,2^\circ$	$\theta = 49,2^\circ$	$\theta = 49,2^\circ$	$\theta = 49,2^\circ$

Segundo, no que concerne à configuração das distribuições de probabilidade observa-se, desde logo, uma consequência importante: de acordo com a via MCS, as distribuições de saída são distribuições normais e, como tal, simétricas e centradas. No entanto, a análise de extremos prevê distribuições de valores em intervalos que são assimétricos, evidenciado pelos cálculos das semi-amplitudes com base nas expressões (9.3a-c), ao contrário do que acontece nos resultados obtidos pelas duas outras vias.

Quadro 9.5: Intervalos de incerteza de medição padrão obtidos

Intervalo de incerteza de medição padrão		
Análise de extremos	Matriz variância-covariância	MCS
$u(r) = \pm 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$	$u(r) = \pm 1,57 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$	$u(r) = \pm 1,55 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$
$u(\varphi) = [14,5^\circ - 2,0 \cdot 10^{-1}^\circ; 14,5^\circ + 1,2 \cdot 10^{-1}^\circ]$	$u(\varphi) = \pm 1,18 \cdot 10^{-1}^\circ$	$u(\varphi) = \pm 1,17 \cdot 10^{-1}^\circ$
$u(\theta) = [49,2^\circ - 1,4 \cdot 10^{-1}^\circ; 49,2^\circ + 1,9 \cdot 10^{-1}^\circ]$	$u(\theta) = \pm 1,16 \cdot 10^{-1}^\circ$	$u(\theta) = \pm 1,15 \cdot 10^{-1}^\circ$

Note-se, porém, que a via MCS é a única que explicita, de facto, a configuração da distribuição de probabilidade das coordenadas transformadas. No caso da análise de extremos subsiste a possibilidade de assumir uma distribuição normal, mas também a distribuição uniforme, uma vez que o raciocínio considerado aponta no sentido da “distribuição” de valores num intervalo, eventualmente, de forma equiprovável. No segundo caso, sabe-se que a convolução de distribuições normais origina uma distribuição de saída normal; no entanto, esta metodologia não permite obter a sua configuração, o que pode ser relevante caso as distribuições de probabilidade de entrada (das coordenadas cartesianas) não sejam normais podendo, inclusivamente, ser assimétricas. Este aspecto constitui uma importante vantagem da MCS face às restantes metodologias.

A terceira perspectiva de análise envolve os intervalos de incerteza de medição padrão que foram expostos no Quadro anterior e que se apresentam novamente na forma gráfica.

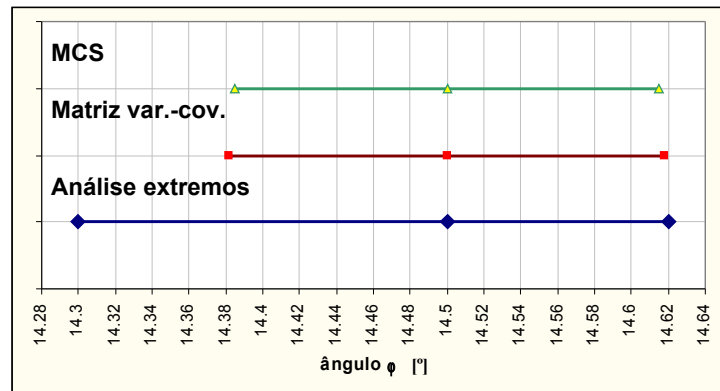


Figura 9.13: Representação dos intervalos de incerteza de medição padrão

Os resultados revelam que o intervalo obtido pela análise de extremos é fortemente majorante, atingindo valores desde 40 % na grandeza “raio” até valores da ordem de 60 % e de 70 % nas grandezas angulares. Salienta-se, contudo, que esta comparação é viciada, uma vez que este tipo de análise mistura a perspectiva determinística com a probabilística, aplicando directamente no modelo matemático valores extremos das grandezas de entrada com a expectativa de obter valores de saída “equiparados” a limites de intervalos de confiança de distribuições de probabilidade. Esta razão justifica a utilização da designação anterior de “intervalos de variabilidade” e não a designação estrita de “intervalos de incerteza” para designar os intervalos obtidos.

Os resultados mostram, por outro lado, uma concordância considerável (exibindo diferenças da ordem de 1%) entre a metodologia que utiliza a matriz de variância-covariância (de raiz analítica) e a MCS permitindo, portanto, considerar-se que conduzem a resultados equivalentes. O mesmo se verifica relativamente às covariâncias, cujos valores podem ser obtidos directamente a partir das sequências numéricas de cada variável de saída. Considerando as sequências de saída obtidas verifica-se que os resultados são concordantes com os obtidos pela via da matriz variância-covariância.

Quadro 9.6: Valores de covariâncias obtidos

Intervalo de incerteza de medição padrão		
Covariâncias	Matriz variância-covariância	MCS
cov ( r, $\varphi$ )	$-1,039 \cdot 10^{-5}$	$-1,037 \cdot 10^{-5}$
cov ( r, $\theta$ )	$2,248 \cdot 10^{-5}$	$2,250 \cdot 10^{-5}$
cov ( $\varphi, \theta$ )	$-1,283 \cdot 10^{-6}$	$-1,28 \cdot 10^{-6}$

A análise comparativa dos resultados obtidos mostra a concordância genérica entre os resultados obtidos usando a via analítica e a via da MCS. Este resultado é, de certa forma, expectável notando que o exemplo de aplicação, na forma como foi apresentado, tem condições que se podem considerar regulares.

No entanto, este tipo de problemas envolvendo transformações de variáveis, pode conter condições não regulares, apontando-se 3 casos genéricos de ocorrência:

- a expressão de transformação possuir relações implícitas ou não diferenciáveis;
- as variáveis de entrada (coordenadas cartesianas) possuem distribuições de probabilidade assimétricas;
- as incertezas das coordenadas cartesianas corresponderem a funções não lineares na vizinhança do ponto correspondente ao valor da mensuranda.

Em qualquer destes casos, a metodologia suportada na matriz variância-covariância encontra dificuldades, eventualmente, inultrapassáveis. No primeiro caso, porque não determina a matriz do operador diferencial. No segundo caso, porque não fornece as distribuições de probabilidade de saída e, conseqüentemente, não permite uma avaliação apropriada de potenciais estimadores do valor médio; e no terceiro caso, o operador diferencial não possui o significado físico subjacente à análise por esta via.

Por sua vez, a metodologia MCS não é afectada por estas condições: no primeiro caso, porque utiliza simplesmente o modelo matemático, seja diferenciável ou não; no segundo caso, porque fornece como resultado as distribuições de probabilidade e toda a informação adicional inerente a estas; no terceiro caso, porque absorve essas não-linearidades (assimiladas na distribuição de probabilidade da grandeza de entrada em causa, traduzíveis, por exemplo, na sua assimetria) utilizando-as no modelo matemático como simples argumentos inseridos nas sequências numéricas.

As duas metodologias podem, também, ser comparadas na perspectiva de aplicação posterior da informação obtida. Com efeito, se de um conjunto alargado de pontos se pretende obter uma relação matemática que permita uma estimativa de uma grandeza geométrica, a obtenção da sua incerteza (caso não se verifique qualquer uma das limitações citadas anteriormente) poderá ser determinada mediante a aplicação de ambas as metodologias.

No primeiro caso, o procedimento envolve a construção de uma nova relação a que está associada a combinação das matrizes de variância-covariância em cada ponto, e a construção dos operadores diferenciais e dos gradientes do modelo em causa. Esta combinação, em larga

escala, requer um desenvolvimento analítico significativo sendo complexo e necessitando de recursos computacionais relevantes.

No segundo caso, o procedimento requer a obtenção de sequências pseudo-aleatórias de valores relativos às grandezas de entrada ponderadas pelas covariâncias determinadas, havendo processos conhecidos para esse efeito, produzindo-se vectores cujos valores se podem combinar directamente de acordo com o modelo matemático. Neste caso, não se torna necessário obter desenvolvimentos analíticos complementares, bastando combinar adequadamente a informação gerada pelo modelo.

Uma vez mais, note-se que a MCS também disponibiliza as distribuições de probabilidade de saída, mantendo as vantagens já apontadas face ao primeiro método.

Por fim, importa realçar que a metodologia apresentada pode ter aplicações que ultrapassam largamente o âmbito deste exemplo, uma vez que permite a avaliação de incertezas de medição em problemas envolvendo funções trigonométricas onde a variável independente é espacial e, por outro lado, pode ser aplicada em problemas onde se utilize transformações genéricas, situação comum em muitos domínios científicos.

#### **9.4 Avaliação da incerteza de medição de coeficientes determinados pelo método de eliminação gaussiana**

##### 9.4.1 Enquadramento prévio

A realização da medição é efectuada em processos que, em determinadas circunstâncias, necessitam de recorrer a operações matemáticas de maior complexidade (por exemplo, envolvendo metodologias aplicadas num contexto matricial). Essas operações, por serem aplicadas a variáveis aleatórias, produzem resultados que contêm uma incerteza associada que se pretende quantificar.

A elaboração do GUM permite um tratamento relativamente abrangente desde que se cumpram requisitos básicos (como a linearidade da relação funcional e a simetria das distribuições de probabilidade), no entanto, em circunstâncias diversas desta não representa uma solução para o problema.

Uma destas situações encontra-se na aplicação do método de eliminação gaussiana quando utilizada como forma de obter soluções para coeficientes de equações – modelos matemáticos – não lineares que descrevem o comportamento de instrumentos de medição. Esta tipologia de problemas tem um tratamento analítico conhecido para a avaliação dos

coeficientes dessas curvas, mas o mesmo não acontece no que se refere à determinação da incerteza associada a esta determinação.

Para ilustrar esta situação, recorre-se a um exemplo particular, representativo de uma situação comum no domínio da grandeza temperatura, envolvendo a calibração de termistores [Ribeiro *et al.* (2005)]. Esta calibração requer a quantificação de parâmetros de uma curva característica de 3ª ordem, a equação de Steinhart-Hart (1968), sendo determinada por um conjunto de pares de valores (de referência e observados no instrumento a calibrar), tantos quanto o grau do polinómio em causa, e pela aplicação do método de eliminação gaussiana.

Este tipo de medição constitui uma situação de excepção de aplicação da metodologia GUM, desde logo pelo seu carácter não linear.

A via de recurso à metodologia MCS, como se verá adiante, pela sua ausência de constrangimentos fundamentais relativamente à natureza dos modelos matemáticos em causa, torna-a particularmente apelativa para a resolução deste tipo de análise.

Tal é possível porque se observam as condições de aplicação da metodologia MCS: a grandeza mensurável de entrada possui uma natureza estocástica; existe conhecimento acerca do comportamento probabilístico das suas componentes contributivas para a incerteza; e o resultado pretendido – variabilidade associada aos coeficientes da curva – é compatível com o tipo de resultados que pode obter com a MCS (distribuição de probabilidade de grandezas de saída e possibilidade de estimar os respectivos parâmetros).

Neste enquadramento, deve-se realçar que esta parte é constituída por uma introdução prévia e sucinta do método de eliminação gaussiana, seguindo-se, a apresentação dos valores experimentais utilizados, da sequência de operações subjacente à aplicação da metodologia MCS e dos resultados das simulações concretizadas neste estudo.

#### 9.4.2 Breve descrição do método de eliminação gaussiana

O método de eliminação gaussiana tem uma aplicação comum em problemas que envolvem a necessidade de resolver múltiplas equações possuindo parâmetros desconhecidos, com a forma seguinte:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = y_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k = y_k \end{cases} \quad (9.9)$$



podendo apresentar-se, igualmente, em notação matricial,

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (9.10)$$

onde  $\mathbf{A}$  representa uma matriz de coeficientes com dimensão  $n \times n$  e  $\mathbf{x}$  representa os parâmetros desconhecidos,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ , e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ .

Admitindo que a matriz  $\mathbf{A}$  é invertível, da multiplicação de ambos os termos pela matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  resulta,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \quad (9.11)$$

A solução que advém da resolução de  $n$  equações com  $n$  incógnitas pelo método de substituição revela-se de difícil aplicação quando o valor de  $k$  aumenta significativamente. Por isso, a alternativa aponta para a utilização do método de eliminação gaussiana, o qual propõe o desenvolvimento da matriz inicial numa *matriz aumentada*, com a forma seguinte:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & y_k \end{array} \right] \quad (9.12)$$

e com base nesta, fazendo uso de *operações elementares entre linhas*, poder-se-á obter a mesma *matriz aumentada* na forma de *matriz triangular superior*:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[ \begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & y'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & y'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & y'_k \end{array} \right] \quad (9.13)$$

Esta última matriz representa uma modificação fundamental, dado que permite resolver as diversas equações de forma sequencial, começando pela  $k$ 'ésima equação, obtendo o parâmetro desconhecido mediante a expressão ( $x_k = y'_k / a'_{kk}$ ) e em seguida, aplicando a expressão à equação da linha  $(k-1)$  de modo a obter a solução de  $x_{k-1}$ . Este procedimento repete-se permitindo obter, sucessivamente, as restantes soluções,  $x_i$ .

$$x_i = \frac{1}{a'_{ii}} \left( y'_i - \sum_{j=1+1}^k a'_{ij} x_j \right) \quad (9.14)$$

### 9.4.3 Aplicação do método de eliminação gaussiana na calibração de termistores

A calibração de cadeias de medição incorporando termistores constitui um dos casos em que a eliminação gaussiana é utilizada como metodologia para determinação dos parâmetros da curva de calibração.

Essa utilização resulta da aplicação da equação de Steinhart–Hart (1968), a qual estabelece (com base empírica) a relação de  $1/T$  – sendo  $T$  a temperatura (neste caso, embora a temperatura seja expressa em °C, manteve-se a notação original para o símbolo da grandeza) – com um polinómio do logaritmo de  $R$  – sendo  $R$  a resistência eléctrica – de acordo com:

$$\frac{1}{T} = a + b \cdot [\ln(R)] + c \cdot [\ln(R)]^3 \quad (9.15)$$

Na relação exposta observa-se a presença de 3 parâmetros constantes,  $a$ ,  $b$  e  $c$  desconhecidos e a determinar. O processo de calibração consiste, portanto, na realização de 3 patamares de temperatura (de referência), nos quais, se efectuem medições da resistência eléctrica – amostras relativas à mensuranda – daí resultando 3 pares de valores experimentais,  $(R_i, T_i)$ , que suportam a constituição das três equações requeridas para a aplicação do método de eliminação gaussiana a este exemplo particular. A sua expressão matricial é, portanto:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} \\ \frac{1}{T_3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \ln(R_1) & (\ln(R_1))^3 \\ 1 & \ln(R_2) & (\ln(R_2))^3 \\ 1 & \ln(R_3) & (\ln(R_3))^3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (9.16a-c)$$

A montagem experimental que permitiu a obtenção de valores resultou da utilização de um banho com regulação térmica – de uso em Metrologia, possuindo desvios de uniformidade e de estabilidade inferiores a 0,01 °C (numa região localizada onde se encontram inseridos os dois padrões de referência intercalados pelo termistor) – no qual foram imersos dois termómetros de resistência de platina de 25,5  $\Omega$  (padrões de referência) – calibrados de acordo com os requisitos da Escala Internacional de Temperatura de 1990 [EIT (1990)], [ITS (1997)] pelo Instituto Português da Qualidade – e um termístor.

A medição da temperatura de referência foi obtida pela média aritmética das indicações dos padrões (termómetros) de referência e a resistência eléctrica foi observada usando uma

cadeia de medição constituída pelo termístor e por um ohmímetro também calibrado. Os resultados obtidos e respectivas incertezas encontram-se descritos no quadro<sup>2</sup> seguinte.

*Quadro 9.7: Valores experimentais e informação complementar de incerteza expandida*

Temperatura de referência	Incerteza de medição expandida	Resistência observada	Incerteza de medição expandida
9,968 °C	± 0,012 °C	59,434 kΩ	± 0,002 kΩ
19,981 °C	± 0,014 °C	37,546 kΩ	± 0,002 kΩ
30,024 °C	± 0,016 °C	24,161 kΩ	± 0,002 kΩ

A informação apresentada no Quadro anterior permite a constituição da *matriz aumentada*,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \ln(59,434) & [\ln(59,434)]^3 & (1/9,968) \\ 1 & \ln(37,546) & [\ln(37,546)]^3 & (1/19,981) \\ 1 & \ln(24,161) & [\ln(24,161)]^3 & (1/30,024) \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

à qual se aplicou o método de eliminação gaussiana para obter os pretendidos coeficientes a, b e c, cujos valores se encontram expostos no Quadro seguinte.

*Quadro 9.8: Valores dos coeficientes obtidos por MCS*

Coeficiente	Valor
a	5.157 °C <sup>-1</sup>
b	-0.7635 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>
c	0.00251 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>

#### 9.4.4 Incerteza de medição associada aos coeficientes obtidos pelo método de eliminação gaussiana usando MCS

A aplicação da MCS na determinação da incerteza de medição tem como suporte o desenvolvimento de um processo de simulação [Karmanov (1989)] que considera como dados iniciais os valores médios de temperatura e as incertezas de medição padrão obtidas a partir do conteúdo do Quadro 9.7, entendendo que as funções de probabilidade aplicáveis são normais cujos parâmetros (valor médio e desvio padrão) correspondem aos valores médios e incertezas de medição padrão.

O procedimento de aplicação da MCS parte da definição da dimensão das sequências de valores apropriadas, admitindo-se a dimensão majorante de 100 000 valores, seguindo-se a

<sup>2</sup> As incertezas expressas neste Quadro reflectem a aplicação da LPI à temperatura de referência, combinando as componentes relativas à calibração dos termómetros de resistência de platina, da exactidão da ponte de medida utilizada, da incerteza associada à resistência padrão externa aplicada – de 25 Ω – e da uniformidade e da estabilidade do banho com regulação térmica observados durante o ensaio; no caso da leitura de resistência, reflecte a combinação de componentes de incerteza da calibração do ohmímetro para a escala de medição utilizada e das características metrológicas relevantes (resolução e linearidade).

geração de 6 sequências de valores (representativas das variáveis aleatórias envolvidas no problema) usando o gerador H-W e a conversão de sequências método de Box-Muller.

Quadro 9.9: Parâmetros das funções densidade de probabilidade usados na MCS

Grandeza	Símbolo	Valor médio	Variância	F <sub>o</sub> P*
Temperatura (no patamar 1)	$T_1$	9,968 °C	$1,2 \cdot 10^{-2}$ °C	N
Temperatura (no patamar 2)	$T_2$	19,981 °C	$1,4 \cdot 10^{-2}$ °C	N
Temperatura (no patamar 3)	$T_3$	30,024 °C	$1,6 \cdot 10^{-2}$ °C	N
Resistência (no patamar 1)	$R_1$	59,434 Ω	$2 \cdot 10^{-3}$ Ω	N
Resistência (no patamar 2)	$R_2$	37,546 Ω	$2 \cdot 10^{-3}$ Ω	N
Resistência (no patamar 3)	$R_3$	24,161 Ω	$2 \cdot 10^{-3}$ Ω	N

\* N – Normal, T – Triangular, R – Rectangular ou uniforme

Dispondo dessas sequências, a etapa seguinte consiste na selecção de vectores de 6 elementos,  $(T_{1i}, R_{1i}, T_{2i}, R_{2i}, T_{3i}, R_{3i})$  e, com base em cada vector e na aplicação do método de eliminação gaussiana, determinar uma solução da matriz, i.e., um vector-solução do tipo:  $(a_i, b_i, c_i)$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln(R_{1i}) & (\ln(R_{1i}))^3 & 1/T_{1i} \\ 1 & \ln(R_{2i}) & (\ln(R_{2i}))^3 & 1/T_{2i} \\ 1 & \ln(R_{3i}) & (\ln(R_{3i}))^3 & 1/T_{3i} \end{bmatrix} \rightarrow (a_i, b_i, c_i) \quad (9.18)$$

Assim, admitindo que cada sequência possui uma dimensão  $n$ , no final desta etapa são obtidos  $n$  vectores-solução.

Da sequência de vectores-solução podem-se extrair 3 sequências autónomas, cada uma das quais contém a informação relativa à função densidade de probabilidade de cada coeficiente e, conseqüentemente, pode ser utilizada – a sequência respectiva – para a determinação da sua dispersão, ou seja, as suas incertezas de medição padrão e expandida.

Salienta-se que os resultados obtidos evidenciam, desde logo, a configuração normal da distribuição, como se observa nos histogramas (expostos nas Figuras seguintes) relativos a cada um dos coeficientes da curva de Steinhart-Hart.

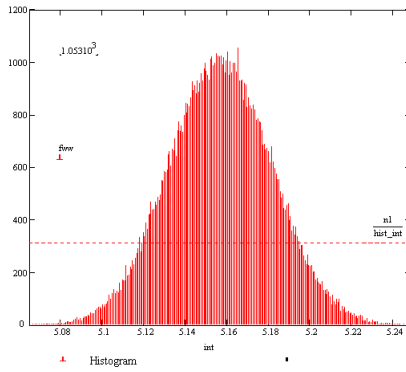


Figura 9.14: Função densidade de probabilidade do coeficiente a

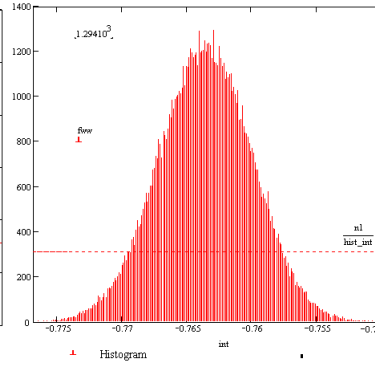


Figura 9.15: Função densidade de probabilidade do coeficiente b

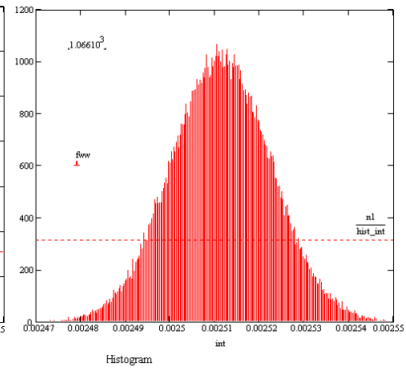


Figura 9.16: Função densidade de probabilidade do coeficiente c

As etapas complementares da aplicação do procedimento MCS envolvem a determinação dos parâmetros obtidos com as sequências de saída da simulação, da determinação do cumprimento de requisitos de exactidão e da análise de sensibilidade aplicada ao processo.

Relativamente à primeira, refira-se que foram obtidos os parâmetros: valor médio; e percentis associados ao intervalo de confiança de 95%. Esses resultados encontram-se no Quadro 9.10 notando-se, em particular, a concordância dos valores médios das distribuições com os valores obtidos usando a aplicação na sua forma analítica exacta apontada em 9.4.3.

Quadro 9.10: Resultados da simulação

Factor	Valor médio	Percentis	Incerteza expandida (95%)	Exactidão dos percentis (95%)
a	5.157 °C <sup>-1</sup>	<u>5.108 °C<sup>-1</sup> (a<sub>0.025</sub>)</u> 5.206 °C <sup>-1</sup> (a <sub>0.975</sub> )	± 0.049 °C <sup>-1</sup>	0.0016 °C <sup>-1</sup>
b	- 0.7635 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>	<u>- 0.771 °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-1</sup> (b<sub>0.025</sub>)</u> - 0.756 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup> (b <sub>0.975</sub> )	± 0.0075 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>	0.0002 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>
c	2.51·10 <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>	<u>2.49·10<sup>-3</sup> °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-3</sup> (c<sub>0.025</sub>)</u> 2.53·10 <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup> (c <sub>0.975</sub> )	± 2·10 <sup>-5</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>	0.002·10 <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>

No que se refere à exactidão, o valor expectável corresponde ao primeiro algarismo significativo dos limites de incerteza. No caso do coeficiente a, esse valor corresponde a 2 dígitos decimais significativos, d,

$$e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \text{ °C}^{-1} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ °C}^{-1}$$

e a comparação do valor obtido com os intervalos de confiança dos percentis permitem verificar o cumprimento dos critérios de aceitação (cf. 7.6.5.4).

$$\max(\delta y_L, \delta y_H) \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ °C}^{-1} \leq e_r = 5 \cdot 10^{-3} \text{ °C}^{-1}$$

No caso do coeficiente b, o valor de d corresponde a 3 dígitos decimais significativos,

$$e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\Omega^{-1} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\Omega^{-1}$$

e a respectiva comparação deste valor com os intervalos de confiança dos percentis da sequência em causa permite verificar o cumprimento dos critérios de aceitação.

$$\max(\delta y_L, \delta y_H) \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\Omega^{-1} \leq e_r = 5 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\Omega^{-1}$$

No caso do coeficiente c, o valor de d corresponde a 5 dígitos decimais significativos,

$$e_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\Omega^{-3} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\Omega^{-3}$$

e a comparação deste valor com os intervalos de confiança dos percentis da sequência de valores do coeficiente c permite, mais uma vez, verificar o cumprimento dos critérios de aceitação (cf. 7.6.5.4).

$$\max(\delta y_L, \delta y_H) \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\Omega^{-3} \leq e_r = 5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\Omega^{-3}$$

A simulação visando uma análise de sensibilidade seguiu o procedimento descrito anteriormente, utilizando um conjunto de sequências de números pseudo-aleatórios distintas das utilizadas na simulação original e determinando um novo conjunto de resultados. A aplicação deste teste evidencia, em particular na incerteza de medição expandida, a concordância completa no que se refere ao coeficiente c, diferenças da ordem de 0,2 % no que se refere ao coeficiente a e de 0,7 % no que se refere ao coeficiente b.

*Quadro 9.11: Resultados comparados (série 1 – Simulação original, série 2 – análise de sensibilidade)*

Grupo de séries	Factor	Valor médio	Percentis	Incerteza expandida (95%)	Exactidão dos percentis (95%)
1	a	5.157 °C <sup>-1</sup>	<u>5.108 °C<sup>-1</sup> (a<sub>0.025</sub>)</u> <u>5.206 °C<sup>-1</sup> (a<sub>0.975</sub>)</u>	± 0.049 °C <sup>-1</sup>	0.0016 °C <sup>-1</sup>
2	a	5.157 °C <sup>-1</sup>	<u>5.110 °C<sup>-1</sup> (a<sub>0.025</sub>)</u> <u>5.205 °C<sup>-1</sup> (a<sub>0.975</sub>)</u>	± 0.048 °C <sup>-1</sup>	0.0016 °C <sup>-1</sup>
1	b	- 0.7635 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>	<u>- 0.771 °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-1</sup> (b<sub>0.025</sub>)</u> <u>- 0.756 °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-1</sup> (b<sub>0.975</sub>)</u>	± 0.0075 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>	0.0002 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>
2	b	- 0.7635 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>	<u>- 0.770 °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-1</sup> (b<sub>0.025</sub>)</u> <u>- 0.756 °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-1</sup> (b<sub>0.975</sub>)</u>	± 0.0070 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>	0.0002 °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-1</sup>
1	c	2.51·10 <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>	<u>2.49·10<sup>-3</sup> °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-3</sup> (c<sub>0.025</sub>)</u> <u>2.53·10<sup>-3</sup> °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-3</sup> (c<sub>0.975</sub>)</u>	± 2·10 <sup>-5</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>	0.002·10 <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>
2	c	2.51·10 <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>	<u>2.49·10<sup>-3</sup> °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-3</sup> (c<sub>0.025</sub>)</u> <u>2.53·10<sup>-3</sup> °C<sup>-1</sup>Ω<sup>-3</sup> (c<sub>0.975</sub>)</u>	± 2·10 <sup>-5</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>	0.002·10 <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> Ω <sup>-3</sup>

O conjunto de resultados obtido mostra a forma simples como este tipo de problemas, aparentemente complexos, pode ser tratado quando se usa a MCS, evidenciando a sua flexibilidade face à complexidade da formulação envolvida.

### **9.5 Considerações complementares**

A aplicação da MCS permite abrir novas oportunidades de avaliação de incertezas de medição em contextos onde, até ao momento, não se conheciam soluções apropriadas.

Os exemplos expostos permitem evidenciar as vantagens de aplicação da MCS muito para além do enquadramento particular de cada exemplo, pois, cada um deles, representa um tipo de problemática com características próprias no contexto da Metrologia. A possibilidade de aplicar esta metodologia noutros contextos tem, por isso, uma importância acrescida.

Neste sentido, o primeiro exemplo ilustra um aspecto potenciado pela utilização da MCS que consiste em efectuar a análise dos resultados directamente a partir da distribuição de probabilidade da grandeza de saída, acedendo à informação determinada pela sua configuração, a qual pode ser determinante, por exemplo, na escolha do estimador da mensuranda que é mais apropriado. Este acesso à informação da distribuição de probabilidade é fundamental para que esta metodologia possa ser aplicada independentemente da configuração das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada, uma vez que estas se reflectem, necessariamente, na distribuição de probabilidade de saída.

O segundo exemplo tem a dupla perspectiva de tratar o problema da avaliação de incertezas em modelos matemáticos contendo funções trigonométricas e ilustrar o potencial de aplicação da MCS em contextos onde a variável aleatória independente é espacial cobrindo, dessa forma, as duas componentes de análise que são preponderantes – a temporal e a espacial. Este exemplo permite, ainda, evidenciar o interesse deste tipo de aplicação em contextos onde a análise vigente tem uma perspectiva determinística, caso da análise de extremos, conduzindo a resultados que são significativamente majorados e que apontam soluções menos próximas da realidade de processos estocásticos – nomeadamente, no que se refere à configuração dos intervalos de incerteza admitidos para grandezas mensuráveis. Acresce aos anteriores, a possibilidade de utilização das incertezas de medição em problemas envolvendo grandezas geométricas de forma mais eficiente que os métodos actuais, designadamente, o método de variância-covariância.

O terceiro exemplo permite evidenciar a capacidade da MCS na avaliação de incertezas associadas a processos de medição cujo modelo matemático envolve algum grau de

complexidade. Tal como nos casos anteriores, também neste caso se afigura de grande interesse a extensão da sua aplicação a outros casos envolvendo metodologias e procedimentos de complexidade similar.

O conjunto de exemplos apresentado permite mostrar que a MCS tem um âmbito de aplicação que alarga e supera consideravelmente o âmbito de aplicação do GUM, constituindo mais do que uma alternativa a este. De facto, este conjunto de exemplos permite consolidar a ideia de que a MCS representa uma abordagem privilegiada para a avaliação de incertezas de medição alargada, em determinadas situações, até à análise subjacente à selecção da própria estimativa da mensuranda – algo inatingível pela aplicação da metodologia GUM.

Esta última vertente configura a metodologia MCS como particularmente interessante e útil quando aplicada no contexto global do resultado da medição, uma vez que atinge um efeito mais abrangente que o GUM, estritamente vocacionado para a avaliação das incertezas de medição.



## 10. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE EVOLUÇÃO FUTURA

O desenvolvimento recente da Metrologia, assente numa fundamentação teórica bem consolidada, conduziu a um estado onde a perspectiva apropriada para a caracterização do resultado da medição é a perspectiva probabilística.

Assim, o resultado da medição requer o conhecimento não só da estimativa da mensuranda, mas também da sua incerteza, sendo esta última entendida como o parâmetro que quantifica a qualidade da estimativa. O seu conhecimento implica a disponibilidade de ferramentas adequadas para a sua avaliação.

Apesar de recente, a notoriedade já alcançada pela abordagem probabilística deve-se sobretudo à introdução de um documento guia patrocinado pela ISO [GUM (1993)].

A rapidez de divulgação e facilidade relativa de aplicação do GUM a muitos problemas metrológicos é uma das causas do desenvolvimento recente da Metrologia, conduzindo a que, de forma igualmente rápida (num período inferior a uma década), se identificassem dificuldades na sua aplicação a outros contextos metrológicos. Neste sentido, poder-se-ia dizer que a metodologia divulgada pelo GUM é vítima do seu próprio sucesso.

A discussão promovida neste documento pretende, em virtude da fragilidade e inaptidão evidenciada pelo GUM nesses outros contextos, apontar uma diferente via de simulação e análise numérica, para se chegar a uma avaliação das incertezas de medição susceptível de garantir, nessa avaliação, as exigências de rigor e exactidão.

É este o principal interesse dos estudos desenvolvidos, cujo carácter inovador resulta, por um lado, da análise detalhada e discussão dos elementos determinantes para assegurar a qualidade da aplicação da simulação numérica aos problemas metrológicos propostos – alguns dos quais, no presente momento, não dispõem de qualquer outra via de solução – e, por outro lado, de possibilitar a percepção das vantagens relativas de cada metodologia atendendo às especificidades dos modelos matemáticos envolvidos.

Dada a complexidade da temática em causa, a medição e o seu resultado, dependente de elementos de natureza experimental e de aplicação tão diversificada quanto os distintos ramos da ciência, tornou-se necessário perspectivar o conhecimento dos elementos que permitem realizar a medição e, também, caracterizar esses elementos de modo a compreender como se exerce a sua influência. É esta necessidade que se pretende colmatar nos capítulos iniciais,

onde se descreve detalhadamente o formalismo da medição, o enquadramento da prática experimental nas vertentes da instrumentação e da informação (onde se destaca a importância da “caracterização metrológica” como meio de identificar e estudar as origens do erro da medição e as suas manifestações), e as ferramentas da Estatística e da Teoria das Probabilidades que permitem enquadrar o processamento da informação na perspectiva probabilística do processo de medição.

Uma caracterização do contexto da avaliação de incertezas de medição e das metodologias utilizadas para concretizar essa avaliação foi apresentada nos capítulos 6 e 7, onde se faz, por um lado, uma exposição detalhada e uma análise crítica dos elementos que compõem uma aplicação de simulação numérica por MCS e que condicionam a qualidade dessa simulação e, por outro lado, a caracterização e discussão das diferentes metodologias de avaliação das incertezas de medição.

O estudo do GUM, identificando as suas principais características (limitações, fragilidades e riscos inerentes à sua aplicação), permite evidenciar algumas das razões que justificam a necessidade de uma via alternativa ou complementar para a avaliação de incertezas.

Um dos aspectos que se deve realçar neste estudo é que qualquer das metodologias estudadas possui duas fases características: uma de formulação e outra de cálculo. A primeira é partilhada por todas as metodologias, e requer um conjunto inicial de informação que impõe um importante condicionalismo sobre os resultados obtidos. De facto, qualquer que seja a metodologia, é necessário dispôr de um modelo matemático, identificando as variáveis aleatórias – grandezas de entrada – e, relativamente a estas, é necessário determinar quer a sua melhor estimativa quer a sua distribuição de probabilidade e os parâmetros que influenciam esta distribuição. A qualidade da avaliação das incertezas de medição obtidas, qualquer que seja o método seguido para as calcular, é obviamente dependente da qualidade da informação inicial utilizada.

Existem dois tipos de condicionalismos que afectam os resultados obtidos com a metodologia preconizada pelo GUM: os devidos a requisitos para a sua aplicação, e os devidos à natureza da própria metodologia.

No que se refere ao primeiro tipo de condicionalismos, a aplicação do GUM pressupõe contextos que permitam:

- A utilização de modelos matemáticos lineares e modelos não-lineares, cuja não linearidade seja pouco acentuada (isto é, onde não seja necessário recorrer a aproximações da série de Taylor de ordem superior à 1<sup>a</sup>);
- a utilização de modelos matemáticos explícitos e diferenciáveis;
- a avaliação da incerteza de medição em domínios que envolvam a vizinhança do valor da mensuranda (dado que o desenvolvimento em série de Taylor de 1<sup>a</sup> ordem é feito em torno desse valor);
- a confirmação de que todas as distribuições de probabilidade em causa são simétricas e centradas em zero (o GUM admite que todos os efeitos sistemáticos do erro são corrigidos).

No que se refere ao segundo tipo de condicionalismos, associado à própria metodologia GUM, apontam-se os mais relevantes:

- a necessidade de calcular derivadas parciais em modelos matemáticos que *a posteriori* se podem revelar não diferenciáveis nos domínios pretendidos, ou cuja complexidade (modelos com funções implícitas, por exemplo) obrigue à elaboração de sofisticados processos adicionais de cálculo;
- a necessidade de contabilizar as contribuições associadas à correlação entre grandezas de entrada, quando existam;
- a necessidade de conhecer os graus de liberdade de todas as contribuições provenientes de grandezas de entrada para determinar a expansão do intervalo de incerteza de medição, o que sendo simples para componentes do tipo A pode até ser desconhecido no caso de componentes do tipo B, obrigando a uma atribuição arbitrária de valores que influenciam o resultado da medição e, caso essa atribuição não siga estritamente regras convencionais, pode consubstanciar um risco elevado.

Para além destes condicionalismos, o GUM tem particularidades e pressupostos que, adoptados sem apropriada consideração dos problemas metrológicos em causa, podem conduzir a erros grosseiros. Um dos pressupostos menos reconhecidos é o de que a configuração da distribuição de probabilidade da grandeza de saída é normal; e, todavia, este pressuposto é, por vezes, utilizado na determinação da expansão do intervalo de incerteza de medição.

Ademais, a metodologia GUM envolve procedimentos cujo balanceamento entre exigências e resultados é algo discutível. Por exemplo, requer as distribuições de probabilidade de entrada embora só utilize as suas variâncias, enquanto que, relativamente ao resultado

(grandeza de saída), onde seria útil conhecer a distribuição de probabilidade, apenas é susceptível de informar sobre a sua variância.

Este tipo de condicionalismos e de pressupostos adensam as razões para a procura de outras metodologias mais consistentes no processo de avaliação das incertezas de medição. É neste contexto que surge a via da simulação numérica baseada no método de Monte Carlo.

A avaliação de uma metodologia parte, necessariamente, do conhecimento das condições que determinam o seu bom desempenho. Para tal, a metodologia MCS foi estudada com vista à identificação das componentes determinantes da sua qualidade e ao conhecimento do seu potencial e das suas fragilidades. Foram assim, como se relata nos capítulos 6 e 7, identificadas quatro componentes essenciais: o gerador de números pseudo-aleatórios; as técnicas de conversão de distribuições de probabilidade; a técnica de ordenação das sequências; e o processamento dos resultados incluindo a determinação da sua exactidão.

No caso da primeira componente – o gerador de números pseudo-aleatórios – há que escolher correctamente entre a grande diversidade geradores disponíveis tendo em vista que o que se pretende é a simulação de sequências de valores associados a variáveis aleatórias num processo (estocástico) de medição. As sequências a gerar para esta simulação devem, assim, possuir um conjunto de características, expressas por métricas (como a *discrepância*), e avaliadas por testes empíricos ou estatísticos que determinam da sua adequação.

A solução adoptada neste trabalho é uma de várias possíveis, seleccionada por ter características particularmente apropriadas aos problemas tratados, citando-se as seguintes: dimensão de sequências úteis adequadas face aos critérios de Ripley; contradomínio  $[0,1]$  equivalente ao domínio pretendido para aplicação de algoritmos de conversão de distribuições de probabilidade; bom desempenho face aos testes tradicionais de avaliação de aleatoriedade; simplicidade de programação; bom desempenho demonstrado em testes de sensibilidade; nível de exactidão dos resultados obtidos compatível com o grau de exactidão inerente aos processos de medição considerados.

A segunda componente respeita a técnicas de conversão de distribuições de probabilidade. Aqui o presente estudo beneficiou da multiplicidade de aplicações do método de Monte Carlo em diversos domínios científicos. De facto, não só são conhecidos algoritmos de inversão aplicáveis à maioria das distribuições de probabilidade (algumas das soluções remontam aos anos 50), como se conhecem técnicas que resolvem as situações não cobertas por esta técnica (por exemplo, o método de aceitação-rejeição).

No que se refere à terceira componente, a rotina de ordenação, também aqui se beneficiou de desenvolvimentos anteriores (ocorridos na segunda metade do Séc. XX). A tarefa de ordenação de dados, embora aparentemente de menor importância, condiciona efectivamente uma parte significativa do sucesso da aplicação dado que a sua optimização visando a minimização de tempo de processamento, pode representar a diferença que permite a sua aplicação em operações correntes de avaliação de incertezas de medição. Por exemplo, constatou-se neste trabalho a significativa diferença de tempo de execução do algoritmo “Quicksort”, quando este foi implementado por uma rotina programada segundo a descrição original do algoritmo ou quando o foi por uma rotina optimizada [Press *et al.* (1986)]. Para sequências numéricas da ordem de 200 000 valores, o tempo de processamento é da ordem de dezenas de minutos para o primeiro caso e de um segundo para a rotina optimizada. A comparação da eficiência do algoritmo “Quicksort” optimizado com outros algoritmos de ordenação é igualmente significativa.

A quarta componente permite a obtenção de pares de percentis que determinam a exactidão (com determinado nível de confiança) de cada um dos percentis determinados a partir da sequência de saída, o que tem particular importância ao aplicar-se aos que determinam os intervalos de incerteza. Refira-se que se beneficia, uma vez mais, da Estatística e da Teoria das Probabilidades, dado serem conhecidas as expressões que determinam quer os percentis quer os respectivos intervalos de confiança, que caracterizam a sua exactidão.

A importância desta componente é mais evidente no caso do par de percentis, que define o intervalo de incerteza, do que no caso dos pares de percentis que caracterizam a sua exactidão. O intervalo de incerteza respeita a uma estimativa da mensuranda, associado a um determinado grau de exactidão. Assim, é fundamental assegurar que esse intervalo de incerteza possui uma exactidão compatível com os requisitos de exactidão inerentes à expressão dessa mesma mensuranda.

Desta forma, o intervalo de exactidão dos percentis revela-se uma informação fundamental na avaliação da qualidade da simulação face à exactidão requerida pelos problemas metrológicos em causa<sup>1</sup> condicionando, inclusivamente, a dimensão das sequências que é necessário gerar para se atingir esse objectivo.

---

<sup>1</sup> Esta exigência é frequentemente ignorada em estudos onde este assunto é tratado. Exceptuam-se os trabalhos do Grupo de Análise Numérica do NPL, onde esta informação é sistematicamente utilizada como elemento do processo iterativo que determina a dimensão apropriada das sequências utilizadas nas simulações.

Uma conclusão importante do presente trabalho é que, dispondo das componentes referidas devidamente organizadas em rotinas numa linguagem estruturada, o processo de simulação MCS é de aplicação simples e eficiente, requerendo apenas os elementos apontados para a fase de formulação – igualmente requeridos pelas outras metodologias – mas dispensando todo o tratamento matemático subsequente (como sejam as derivações parciais do modelo matemático, a avaliação do número de graus de liberdade efectivos das grandezas de saída, etc.). Com os meios computacionais utilizados (PC pessoal), a avaliação de incerteza usando modelos multivariáveis concretiza-se em poucos segundos.

Outras vantagens da MCS decorrem do exposto nos capítulos 8 e 9 com base na análise de um conjunto de problemas de natureza metrológica, todos eles traduzindo situações de natureza experimental e, alguns, reflectindo mesmo tipos de processos que têm uma aplicação quotidiana. A análise comparativa das metodologias propostas e a subsequente qualificação das mesmas para a avaliação das incertezas de medição em contextos específicos foi desenvolvida a partir da análise dos exemplos aí apresentados. Esses exemplos mostram que, quando se verificam e cumprem os requisitos de aplicação do GUM, os resultados obtidos pela MCS são equivalentes aos do GUM. Contudo, qualquer pequeno desvio dessas condições “ideais” pode conduzir a efeitos imprevisíveis de majoração ou de sub-avaliação de incertezas por parte do GUM. Um bom exemplo, extraído do próprio GUM e analisado criticamente no capítulo 8, é o da medição de comprimento por comparação directa, onde o GUM introduz uma “pequena” simplificação do modelo visando ultrapassar uma situação de correlação entre pares de grandezas de entrada com consequências não desprezáveis, como foi evidenciado.

Este exemplo realça, igualmente, a capacidade (apontada por alguns autores) de utilização da MCS não só como alternativa ao GUM mas, também, como ferramenta de validação. Esta perspectiva afigura-se redutora, uma vez que, dispondo de ferramentas operacionais, a utilização directa da MCS revela-se de maior eficiência que a do GUM.

O exemplo relativo à medição de pressão (cap. 8) torna evidente o risco inerente à aplicação do GUM quando esta metodologia recorre à “simplificação” do modelo original para ultrapassar algumas dificuldades da sua aplicação – no caso, determinadas pela existência de correlação entre grandezas de entrada.

O exemplo relativo à medição de caudal (cap. 8) mostra a maior flexibilidade da MCS na representação de processos com algum grau de complexidade e, simultaneamente, a melhor capacidade de adaptação a condições particulares de comportamento de variáveis (por

exemplo, a diferença observada nos movimentos mecânicos responsáveis pela deflexão do líquido nas condutas, cuja distribuição de probabilidade, em rigor, dispõe de uma configuração assimétrica).

Os exemplos apresentados no capítulo 9 mostram o potencial da MCS face às limitações do GUM, evidenciando a sua capacidade para resolver o correspondente tipo de problemas metrológicos. Destes exemplos e dos resultados obtidos pode-se concluir que, por um lado, com a MCS, em condições regulares de aplicação, se obtêm resultados equivalentes às outras metodologias, podendo discutir-se, apenas, a questão da simplicidade do processo; verifica-se, por outro lado, que existe toda uma classe de problemas onde a MCS é – na actualidade – a única via conhecida para obter soluções. Esta grande vantagem da MCS manifesta-se quando:

- o modelo matemático é fortemente não linear;
- o modelo matemático contém relações implícitas;
- o modelo matemático não é diferenciável;
- as distribuições de probabilidade das grandezas de entrada e/ou da grandeza de saída são assimétricas;
- o contexto da análise não se restringe à vizinhança do ponto de observação e se assume um comportamento não linear nessa vizinhança.

Acresce que a MCS permite, naturalmente, a obtenção da distribuição de probabilidade de saída a partir das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada. Esta distribuição de probabilidade de saída é particularmente importante, pois contém, em si própria, informação fundamental sobre a mensuranda (a sua configuração e os parâmetros estatísticos que a caracterizam). Os restantes métodos não fornecem esta informação.

O primeiro exemplo apresentado no capítulo 9 (incerteza associada a uma função quadrática) permite ilustrar o potencial da metodologia MCS evidenciando como o acesso à configuração da distribuição de saída e à sua informação pode ser fundamental (e até crítica) para a interpretação física do resultado obtido. No segundo exemplo (incerteza associada à transformação de coordenadas), é ilustrada a sua capacidade e até, vocação, para tratamento de problemas metrológicos de fronteira ou fora das condições de aplicação dos outros métodos. Finalmente, o terceiro exemplo (incerteza de coeficientes determinados pelo método de eliminação gaussiana) trata a aplicação da MCS a um classe de situações onde se combinam

modelos físicos com tratamentos matemáticos elaborados, mostrando a sua adequação para esse efeito.

Ficou também evidenciada a robustez da metodologia MCS, expressa quer pela sua validação por resultados obtidos pela via analítica da convolução de distribuições de probabilidade, quer pela realização de testes de sensibilidade em todas as simulações efectuadas, que mostraram que distintas sequências pseudo-aleatórias usadas no cálculo produzem resultados equivalentes.

Estes e outros testes que foram executados também no processo de estudo do gerador e das restantes rotinas que constituem as ferramentas da simulação, são reveladores da estabilidade face a perturbações indesejáveis da abordagem MCS e da sua margem de confiança que os resultados obtidos traduzem. É evidente, porém, a necessidade de avaliação prévia destas ferramentas, uma vez que, de igual forma, se poderá manifestar a situação inversa, nomeadamente, se forem usados geradores de números pseudo-aleatórios de menor qualidade ou se for dada menor atenção a componentes influentes na correlação entre grandezas, com efeitos que se podem reflectir com grande intensidade nos resultados.

A aplicação da MCS aos exemplos referidos permitiu constatar que a sua aplicação, quando se descuida a natureza dos problemas metrológicos e, em particular, das suas grandezas de entrada, envolve risco, destacando-se as situações de correlação entre grandezas de entrada que, existindo, devem ser consideradas no modelo matemático (de avaliação de incerteza) e devidamente simuladas pois, caso contrário, produzem resultados numéricos que pouco têm a ver com o problema em causa. Note-se que o risco inerente à não consideração dos efeitos de correlação entre grandezas de entrada, embora comum a todas as metodologias, é mais acentuado em metodologias de simulação numérica devido à tendência para utilizar essas metodologias de forma mais automatizada.

Outro aspecto significativo na aplicação eficiente da MCS é a utilização de rotinas devidamente optimizadas e validadas, havendo uma diversidade muito significativa destas aplicáveis às principais linguagens estruturadas de programação.

No que concerne à adopção de metodologias de referência, quando o problema se enquadra nas condições de regularidade, permitindo a aplicação de métodos de origem analítica, do GUM ou da MCS, qualquer um deles pode ser escolhido notando que, no caso do GUM essas condições de regularidade pressupõem a utilização do modelo matemático original



(sem simplificações) e, no caso da MCS que a dimensão das sequências geradas deve ser suficiente para permitir atingir o grau de exactidão pretendido.

No caso de existirem condições regulares mas a aplicação do GUM exigir qualquer tipo de simplificação do pertinente modelo matemático, a MCS é, em geral, preferível como metodologia de referência.

Nos casos em que as condições se afastam da regularidade, a MCS é uma metodologia aplicável com boa probabilidade de sucesso e, portanto, na nossa perspectiva, deve constituir o método de referência.

A importância prática da introdução da MCS na avaliação de incertezas de medição resulta do seu carácter transversal, podendo aplicar-se em diferentes níveis de processos de medição, quer incorporados em processos industriais, quer em ensaios laboratoriais ou em desenvolvimento tecnológico e investigação científica. A sua aplicação no contexto particular do LNEC representa um benefício evidente dada a diversidade da actividade desenvolvida e a correspondente ocorrência de circunstâncias onde os processos de medição, requerendo a avaliação das incertezas de medição, deparam com muitas das dificuldades apontadas neste trabalho.

As perspectivas futuras de desenvolvimento no contexto da avaliação, não só das incertezas de medição, mas também de discussão do próprio resultado no seu todo, são amplas, impulsionadas por factores como a introdução recente de novas abordagens, a existência de um número considerável e em crescimento de problemas aos quais as metodologias vigentes não respondem satisfatoriamente, e a existência de diferentes alternativas de abordagem do problema, nenhuma delas devidamente explorada.

Este último aspecto torna-se particularmente relevante uma vez que ainda não existem consensos na comunidade científica acerca de matérias tão fundamentais como a adopção duma perspectiva frequentista ou bayesiana na abordagem dos problemas metrológicos. No próprio documento GUM observa-se esta dicotomia na definição das contribuições das grandezas de entrada.

Recentemente têm sido estudadas aplicações de metodologias de raiz bayesiana que dão passos importantes nalguns domínios de aplicação e que conduzem a resultados promissores (*vide* Tuninski *et al* (1997) e Lira *et al* (2006), por exemplo). As metodologias de inferência bayesiana evidenciam já um potencial de aplicação que começa a ser considerado não só na sua

vertente natural, analítica, mas também conjugada com a simulação e análise numérica, justificando, por isso, um investimento particular no seu estudo.

A introdução de métodos de simulação numérica abre novas perspectivas de resolução de dificuldades actuais. No longo caminho que há a percorrer, a MCS encontra-se, de facto, no início, sendo expectável que o futuro trará outra visibilidade ao método potenciada pelos resultados que se vão obtendo e porque ela própria promove técnicas da mesma índole, i.e., envolvendo a simulação e a análise numérica, que se encontram actualmente em fase de desenvolvimento e de estudo das suas aplicações e do seu potencial. É o caso, entre outros, do “Bootstrapping”; do método de Monte Carlo conjugado com o das cadeias de Markov “MCMC”; e das “Splines”.

O “Bootstrapping” é a técnica mais recente [Efron *et al* (1979), (1986), (1993)], [Davison *et al* (1997)] e tem um interesse particular, porque incorpora uma perspectiva bayesiana da informação e se aplica a variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade empíricas e, ainda, a contextos não paramétricos. Nesse sentido, tem capacidade para tratar problemas “periféricos” de maneira similar à que a MCS tem face à aplicação do GUM.

Esta dinâmica de estudo e desenvolvimento de metodologias aplicadas no contexto metrológico é também motivada pela evolução tecnológica actual, dado que esta se manifesta nos requisitos de qualidade, na complexidade e na diversidade dos processos envolvendo a medição, bem como na sua penetração em áreas de actuação que, em tempos não muito recuados, não eram sequer previsíveis, como é o caso da instrumentação virtual. Esta última, com forte divulgação na actualidade, carece do estudo quanto à forma de a integrar nos modelos tradicionais de instrumentação, e de a incorporar em processos fundamentais para validar a sua qualidade, como o da caracterização da rastreabilidade e da manutenção metrológica.

Algumas linhas de evolução futura podem conduzir, também, à discussão sobre se o parâmetro média aritmética é o mais adequado como estimativa da grandeza mensurável ou se devem ser utilizados outros estimadores. Com efeito, atendendo a situações onde a distribuição de probabilidade de saída não é simétrica (como no primeiro exemplo exposto no capítulo 9), outros parâmetros (a mediana e a moda, por exemplo) podem assumir, com vantagem, essa função.

Admite-se fundamentadamente que a MCS é uma via possível para a solução de problemas envolvendo a avaliação de incertezas de medição. Esta admissão resulta, por um lado, da

capacidade actual dos recursos informáticos e, por outro, do facto de, dispondo de uma estrutura de programação genérica de suporte à execução das simulações, a concretização do procedimento MCS ser fácil e rápido, dependendo de um conjunto reduzido de tarefas (definição do modelo matemático e da configuração das distribuições de probabilidade e seus parâmetros).

Um dos aspectos que pode sustentar a melhor adaptação da MCS ao problema da avaliação de incertezas é a sua capacidade para disponibilizar a informação relativa à distribuição de probabilidade da grandeza de saída. Este conhecimento pode ser determinante, por exemplo, para se estabelecer uma estimativa apropriada desta grandeza (como se destacou no exemplo da função quadrática referida no capítulo 9).

Deve-se salientar que, embora o presente trabalho tenha sido centrado na aplicação da MCS na avaliação de incertezas de medição, de facto, a intervenção deste método no âmbito da Metrologia é mais abrangente. A observação de alguns dos resultados da sua aplicação a problemas específicos (cap. 8) mostram que os resultados obtidos usando a MCS permitem não só obter estimativas mais adequadas dos intervalos de incerteza mas, para além disso, permitem efectuar uma melhor modelação de alguns processos de medição (por exemplo, permitindo a introdução de distribuições de probabilidade assimétricas) cujo efeito se manifesta também na estimativa a atribuir à grandeza, determinando completamente o resultado da medição.

As observações anteriores, evidenciando o potencial da metodologia de simulação e análise numéricas baseada no Método de Monte Carlo, permitem concluir que esta metodologia oferece um contributo importante para a problemática da avaliação das incertezas de medição e que, no contexto global do resultado da medição, é mais abrangente – perspectivando todo o resultado da medição – que a metodologia GUM, ou outras metodologias similares, exclusivamente vocacionadas para a avaliação das incertezas de medição.



## BIBLIOGRAFIA

1. Alagar, V. S. (1989) – *Fundamentals of Computing – Theory and Practice*. Prentice Hall, Inc. (E.U.A.).
2. Alder, K. (2002) – *The Measure of All Things*. Abacus, Lancaster (Reino Unido).
3. Almeida, G. (1997) – *Sistema Internacional de Unidades SI. Grandezas e Unidades Físicas: Terminologia, símbolos e recomendações*, 2ª Edição. Plátano Edições técnicas, Lisboa (Portugal).
4. Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1952) – Asymptotic Theory of Certain “Goodness-of-Fit” Criteria Based on Stochastic Processes. In *Ann. Math. Stat.* **23**, 193-212.
5. Asch, G. (1991) – *Les capteurs en instrumentation industrielle*, 4<sup>ème</sup> Ed. Dunod. Paris (França).
6. Balico, M. (2000) – Limitations of the Welch-Sathertwaite approximation for measurement uncertainty calculations. In *Metrologia*. **37**, 61-64.
7. Barker, R. M. and Forbes, A. B. (2001) – *Software Support for Metrology Group Best Practice Guide No. 10. Discrete Model Validation*. Ed. Crown, National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex (Reino Unido).
8. Bailey, R. W. (1994) – Polar generation of random variates with the t-distribution. In *Math. of Comp.* **62**, 779-781.
9. Blahut, R. (1984) – *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Addison Wesley Publishing Co. (E.U.A.).
10. Blum, L., Blum, M. and Shub, M. (1986) – A Simple unpredictable pseudorandom number generator. In *SIAM J. of Comp.* **15**, 364-383.
11. Box, G. E. P. and Muller, M. E. (1958) – A Note on the Generation of Random Normal Deviates. In *Ann. Math. Stat.* **29**, 610-611.
12. Bracewell, R. (1999) – *The Fourier Transform and its Applications*, 3<sup>rd</sup> Ed. McGraw Hill, New York (E.U.A.).
13. Bratley, P. and Fox, B. (1988) – Algorithm 659. Implementing Sobol’s Quasirandom Sequence Generator. In *ACM Trans. on Math. Soft.* **14**, 1.
14. Bratley, P., Fox, B. and Niederreiter, H. (1992) – Implementation and tests of low discrepancy sequences. In *ACM Trans. on Math. Soft.* **2**, 3, 195-213.
15. Buescu, J. (2005) – O Exorcismo do Padre Bayes. In *Ingenium, II Série* **86**, 74-86.
16. Callen, H. B. (1985) – *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley & Sons, New York (E.U.A.).
17. Carvalhal, F., Oliveira Costa, C., Schiappa de Azevedo, F. (1991) – *Elementos de sistemas e de análise e processamento de sinais*. LNEC, Lisboa (Portugal).
18. Castrup, H. (2000) – *A Critique of the Uniform Distribution*. Integrated Sciences Group (E.U.A.).

19. CEI/IEC 61508-1 (1998) – *Functional Safety of Electrical/ Electronic/ Programmable Electronic Safety-Related Systems. General Requirements.* International Electrotechnical Commission, Genève (Suíça).
20. CEI/IEC 61508-3 (1998) – *Functional Safety of Electrical /Electronic/ Programmable Electronic Safety-Related Systems. Software Requirements.* International Electrotechnical Commission, Genève (Suíça).
21. Certificado de calibração 201.23.03/94 de 2003-02-2003. Laboratório Regional de Metrologia – DRE-LVT (Direcção Regional de Economia de Lisboa e Vale do Tejo). Ministério da Economia.
22. Certificado de calibração 201.23.03/93 de 2003-02-2003. Laboratório Regional de Metrologia – DRE-LVT (Direcção Regional de Economia de Lisboa e Vale do Tejo). Ministério da Economia.
23. Certificado de calibração 1719/04 de 2004-07-23. Laboratório de Calibrações, Manutenção e Engenharia, TAP Air Portugal.
24. Certificado de calibração 1720/04 de 2004-07-23. Laboratório de Calibrações, Manutenção e Engenharia, TAP Air Portugal.
25. Certificado de calibração 1813/04 de 2004-07-23. Laboratório de Calibrações, Manutenção e Engenharia, TAP Air Portugal.
26. *Comptes rendus de la 3<sup>e</sup> CGPM* (1901), 1901, 70. BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).
27. *Comptes rendus de la 9<sup>e</sup> CGPM* (1948), 1949, 64: Resolution n.º 6, *Proposal for establishing a practical system of units of measurement.* BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).
28. *Comptes rendus de la 10<sup>e</sup> CGPM* (1954), 1956, 80: Resolution n.º 6, *Practical system of units.* BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).
29. *Comptes rendus de la 11<sup>e</sup> CGPM* (1960), 1961, 87: Resolution n.º 12, *Système International d'Unités.* BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).
30. *Comptes rendus de la 13<sup>e</sup> CGPM* (1967), 1969, 103: Resolution n.º 1, *SI unit of time (second).* BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).
31. *Comptes rendus de la 13<sup>e</sup> CGPM* (1967), 1969, 104: Resolution n.º 4, *SI unit of thermodynamic temperature (kelvin).* BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).
32. *Comptes rendus de la 14<sup>e</sup> CGPM* (1971), 1972, 78: Resolution n.º 3, *SI unit of amount of substance (mole).* BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).
33. *Comptes rendus de la 16<sup>e</sup> CGPM* (1979), 1980, 100: Resolution n.º 3, *SI unit of luminous intensity (candela).* BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).
34. *Comptes rendus de la 17<sup>e</sup> CGPM* (1983), 1984, 97: Resolution n.º 3, *Definition of the Metre.* BIPM, Sévres (França).  
(disponível em : <http://www.bipm.fr/en/convention/cgpm/> ).

35. *Convention du Mètre* (1875, 1901, 1921). BIPM. Sèvres (França).
36. Cox, M. G., Harris, P. M. (1998) – *The Design and Use of Reference Data Sets for Testing Scientific Software*. Ed. Crown, National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex (Reino Unido).
37. Cox, M. G., (1999) – *A Discussion of Approaches for Determining a Reference Value in the Analysis of Key-Comparison Data*, NPL Report CISE 42/99. Ed. Crown, National Physical Laboratory, Teddington Middlesex (Reino Unido).
38. Cox, M. G., Dainton, M. P., Forbes, A. B., Harris, P. M., Siebert, B. R. L. and Wöger, W. (2000) – Use of Monte Carlo Simulation for Uncertainty in Metrology. *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology V*. Ed.s P. Ciarlina, M. Cox, E. Filipe, F. Pavese, D. Richter. World Scientific Publishing Co. Singapore. 94-106.
39. Cox, M. G., Dainton, M. P. and Harris, P. M., (2001a) – *Software Specifications for Uncertainty Calculation and Associated Statistical Analysis*, NPL Report CMSC 10/01. Ed. Crown, National Physical Laboratory. Teddington Middlesex (Reino Unido).
40. Cox, M. G., Harris, P. M., (2001b) – Measurement Uncertainty and the Propagation of Distributions, In *Proc. of 10<sup>th</sup> Int. Metrology Congress*, Saint Louis (França).
41. Cox, M. G., Dainton, M.P. and Harris, P. M. (2001c) – *Software Support for Metrology Best Practice Guide No. 6: Uncertainty and Statistical Modelling*. Ed. Crown, National Physical Laboratory. Teddington (Reino Unido).
42. Cox, M. G., Harris, P. M., Johnson, E. G., Kenward, P. D. and Parkin, G.I., (2004a) – *Testing the Numerical Correctness of Software*, NPL Report CMSC 34/04. Ed. Crown, National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex (Reino Unido).
43. Cox, M. G., Harris, P. M., (2004b) – *Software Specifications for Uncertainty Evaluation*. NPL Report CMSC 40/04. Ed. Crown, National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex (Reino Unido).
44. Dally, J., Riley, W., McConnell, K. (1993) – *Instrumentation for Engineering Measurements*, 2<sup>nd</sup> Ed. John Wiley & Sons. Singapore.
45. Davison, A. C. and Hinkley, D. V. (1997) – *Bootstrap methods and their application*. Cambridge Univ. Press (E.U.A).
46. Davis, R. S. (1991) – Formule pour la Détermination de la Masse Volumique de L’Air Humide (1981/1991). *Extrait des Procès-verbaux du Comité International des Poids et Mèures*, **59**, 97-104.
47. Decreto-Lei n.º 320/84 – Sobre a actualização das definições do Sistema Internacional, adoptado em Portugal como Sistema de Unidades. 7 de Dezembro.
48. Decreto-Lei n.º 222/88 – Rectificações ao Decreto-Lei 427/83 relativo à adopção do Sistema Internacional de Unidades. 28 de Julho.
49. Decreto-Lei n.º 223/88 – Rectificações ao Decreto-Lei 427/83 relativo à adopção do Sistema Internacional de Unidades. 7 de Julho.
50. Decreto-Lei n.º 238/94 – Sobre a adopção do Sistema de Unidades Legais. 19 de Setembro.

51. Decreto-Lei n.º 254/2002 – Transposição para a ordem jurídica nacional da Directiva nº 80/181/CEE. 22 de Novembro.
52. Deng, L. and Lin, D. (2000) – Random Number Generation for the New Century. In *The Amer. Statist.* **54**, 145-150.
53. Dietrich, C. F. (1991) – *Uncertainty, Calibration and Probability*, 2<sup>nd</sup> Ed. Adam Hilger (Reino Unido).
54. Directiva do Parlamento Europeu e do Conselho 1999/103/CE, de 24 de Janeiro de 2000 – *Unidades de Medidas Legais*.
55. Doebelin, E. (1990) – *Measurement Systems: Application and Design*. 4<sup>th</sup> Ed. McGraw-Hill Publishing Co. Singapore.
56. EA 4/02 (1999) – *Expression of the Uncertainty of Measurements in Calibration*, European Cooperation for Accreditation of Laboratories. Paris (França)..
57. EA 4/07 (anterior EAL-G12), (1995) – *Traceability of Measuring and Test Equipment to National Standards*, European Cooperation for Accreditation of Laboratories. Paris (França).
58. EA 10/03, (1997) (ex. EAL G26): *Calibration of Pressure Balances*, European co-operation for Accreditation of Laboratories. Paris (França).
59. EA 10/18 (anterior EAL-G26) (2005) – *Guidelines on the calibration of nonautomatic weighing instruments*, European co-operation for Accreditation of Laboratories. Paris (França).
60. EA 10/03 (anterior EAL-G26) (1997) – *Calibration of Pressure Balances*, European Cooperation for Accreditation of Laboratories. Paris (França).
61. Efron, B. (1979) – Bootstrap methods: another look at the jackknife. In *Ann. of Stat.* **7**, 1-26.
62. Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1986) – Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals and other measures of statistical accuracy. *Stat. Sci.* **1**, 54-96.
63. Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993) – *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York (E.U.A.).
64. Eichenauer-Herrmann, J. and Lehn, J. (1986) – A non-Linear congruential Pseudo-Random Number Generator, *Statistische Hefte* **27**, 315-326.
65. Eichenauer-Herrmann, J., Grothe, H. and Lehn, J. (1988) – Marsaglia's lattice test and nonlinear congruential pseudo random number generators, In *Metrika*, **35**, 241-250.
66. Eichenauer-Herrmann, J. (1995) – Pseudorandom number generator by nonlinear methods, In *Int. Stat. Rev.* **63**, 247-255.
67. Eichenauer-Herrmann, J. (1996) – Modified explicit inversive congruential pseudorandom numbers with power of 2 modulus. In *Stat. and Comp.* **6**, 31-36.
68. Eichenauer-Herrmann, J. and Niederreiter, H. (1997) – Inversive Congruential Pseudorandom Numbers: Distribution of Triples. In *Math. of Comp.* **66**, 220, Oct., 1629-1644.
69. EIM, 2004 – Hellenic Institute of Metrology – Metrology History.  
(Disponível em <http://www.eim.gr/>)



70. EIT-90 / ITS-90 (1989) – Échelle Internationale de Temperature de 1990. Extrait des Procès-verbaux du Comité International des Poids et Mèures, 78<sup>e</sup> Session. Durand (França).
71. EN 45001 (1989) – *General Criteria for the Operation of Testing Laboratories*. CEN – European Committee for Standardization. Brussels (Bélgica).
72. EN 45501, (1992) – *Metrological Aspects of Non-automatic Weighing Instruments*; CEN – European Committee for Standardization. Brussels (Bélgica).
73. EN ISO/IEC 17025 (2000) – *General Requirements for the Competence of Testing and Calibration Laboratories*. CEN – European Committee for Standardization. Brussels (Bélgica).
74. Fermi, E. (1937) – *Termodinâmica*. Trad. Carlos Sá Furtado (1973), Ed. Livraria Almedina. Lisboa (Portugal).
75. Finkelstein, L. (1975) – Fundamental concepts of Measurement: Definition and scales. In *Meas. and Conrol*, **8**, 105-111.
76. Finkelstein, L. (1982) – Theory and Philosophy of Measurement (Chap. 1). In *Handbook of Measurement Science, Vol. 1. – Theoretical Fundamentals*, P. Sydenham (Ed.). John Wiley & Sons. Norwich (Reino Unido).
77. Finkelstein, L. (2003) – Widely, strongly and weakly defined measurement. *Measurement*, **34**, 39-48.
78. Fishman, G. (1973) – *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation*. John Wiley & Sons (E.U.A.).
79. Fox, B. (1986) – Algorithm 647. Implementation and relative efficiency of quasirandom Sequence Generator. In *ACM Trans. on Math. Soft.* **12**, 4, 362-373.
80. Fuller, W. A. (1987) – *Measurement Error Models*. John Wiley & Sons. New York (E.U.A.).
81. Fushimi, M and Tezuka, S. (1983) – The k-distribution of generalized feedback shift register pseudorandom numbers. In *ACM* **26**, 7, Jul., 516-523.
82. Fushimi, M (1990) – Random number generation with the recursion  $X_T = X_{T-3p} \oplus X_{T-3q}$ , *J. of Comp. and Appl. Math.* **31**, 105–118.
83. Gentle, J. E. (2003) – *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*, 2<sup>nd</sup> Ed. Springer-Verlag. New York (E.U.A.).
84. Goreski, M. and Klapper, A. (2003) – Efficient Multiply-with-Carry Random Number Generators with Maximal Period. In *ACM Trans. on Model. and Comp. Sim.* **13**, N.º 4, Oct., 1-12.
85. GUM (1993, 1995) – *Guide for the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO, BIPM, CEI, IFCC, IUPAC, IUPAP, OIML (1993, re-editado em 1995).
86. Green, B. F., Smith, J. E. K. and Klem, L- (1959) – Empirical tests of an additive random number generator, *J. ACM*, **6**, 527-537.
87. Hill, I. And Wichmann, B. (1982) – An efficient and portable pseudo-random number generator, In *Applied Stat.* **31**, 188-190.
88. Hall, B. D. and Willink, R. (2001) – Does “Welch-Satterthwaite” make a good uncertainty estimate?. In *Metrologia*, **38**, 9-15.

89. Hofmann, D. (1982) – Measurement Errors, Probability and Information Theory (Chap. 6). In *Handbook of Measurement Science, Vol. 1. – Theoretical Fundamentals*, P. Sydenham (Ed.). John Wiley & Sons. Norwich (Reino Unido).
90. INC 01 (1980) – Report of the Working Group on the Statement of Uncertainties (1<sup>st</sup>. Meeting 21 to 23 Oct. 1980) to the Comite Internationale des Poids et Mèures. Sèvres (França).
91. IEEE 1012 (1998) – *Standard for Software Verification and Validation*.
92. Ireland, K. and Rosen, M. (1991) – *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. Springer-Verlag, New York (E.U.A.).
93. ISO 31-0 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 0: General principles*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
94. ISO 31-1 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 1: Space and Time*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
95. ISO 31-2 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 2: Periodic and related phenomena*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
96. ISO 31-3 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 3: Mechanics*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
97. ISO 31-4 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 4: Heat*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
98. ISO 31-5 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 5: Electricity and magnetism*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
99. ISO 31-6 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 6: Light and related electromagnetic radiations*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
100. ISO 31-7 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 7: Acoustics*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
101. ISO 31-8 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 8: Physical chemistry and molecular physics*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
102. ISO 31-9 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 9: Atomic and nuclear physics*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
103. ISO 31-10 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 10: Nuclear reactions and ionizing radiations*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
104. ISO 31-11 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 11: Mathematical signs and symbols for use in the physical sciences and technology*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
105. ISO 31-12 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 12: Characteristic numbers*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
106. ISO 31-13 (1992, amended 1998) – *Quantities and units – Part 13: Solid state physics*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).

107. ISO 1000 (1992) – *SI units and recommendations for the use of their multiples and of certain other units*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
108. ISO 4185 (1990) – *Measurement of Liquid Flow in closed conduits – weighing method*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
109. ISO 6817 (1992) – *Measurement of conductive liquid flow in close conduits – Method using electromagnetic flowmeters*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
110. ISO 8402 (1994) – *Quality Vocabulary*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
111. ISO 9104 (1991) – *Measurement of fluid flow in closed conduits - Methods of evaluating the performance of electromagnetic flow-meters for liquids*. International Organization for Standardization. Genève (Suiça).
112. ISO/IEC 9126 (1991) – *Information Technology - Software Product Evaluation. Quality Characteristics and Guidelines for their Use*.
113. ISO IEC 12207 (1995) – *Information technology - Software life cycle processes*. International Organization for Standardization. Genebra, Suiça.
114. ISO IEC 17025 (1999) – *General requirements for the competence of testing and calibration laboratories*. Genebra, Suiça. (equivalente a EN ISO/IEC 17025: European Committee for Standardization (CEN). 2000).
115. ITS-90 consultar EIT-90
116. ITS-90 (1997) – *Supplementary Information for the International Temperature Scale of 1990*. BIPM. Sévres (França).
117. Johnson, B. (1996) – Radix-b extensions to some common empirical tests for pseudorandom number generators. In *ACM Trans. on Model. and Comp. Sim.* **6**, 4, Oct., 261-273.
118. Johnson, N. and Leone, F. (1977) – *Statistics and experimental design in engineering and the physical sciences*. Vol. I, 2<sup>nd</sup> Ed.. John Wiley & Sons (E.U.A.).
119. Jones, F.E. and Schoonover, R. M., (2002) – *Handbook of Mass Measurement*. CRC Press. Boca Raton, Florida (E.U.A.).
120. Kato, T., Wu, L., Yanagihara, N. (1996a) – On a nonlinear congruential pseudorandom number generator, In *Math. of Comp.* **65**, 227-233.
121. Kato, T., Wu, L., Yanagihara, N. (1996b) – The serial test for a nonlinear pseudorandom number generator, In *Math. of Comp.* **65**, 761-769.
122. Kacker, R. and Jones, A. (2003) – On use of Bayesian statistics to make the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement consistent. In *Metrologia* **40**, 235-248.
123. Karmanov, V. G. (1989) – *Mathematical Programming*. MIR Publishers, Moscovo (URSS). Trad. de V. Volosov.
124. Kinderman, A. J. and Monahan, J. F. (1980) – New Methods for Generating Student's t and Gamma Variables. In *Computing*, **25**, 369-377.

125. Knuth, D. (1998) – *The Art of Computer Programming, Vol. 2 – Seminumerical Algorithms*, 3<sup>rd</sup> Ed. Addison-Wesley. Reading, Mass. (E.U.A.).
126. Kolmogorov, A. N. e Fomin, S. V. (1982) – *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*. Editora MIR, Moscovo (URSS). Trad. de M. Dombrovsky.
127. Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P., and Tversky, A. (1971) – *Foundations of Measurement, Vol. 1: Additive and Polynomial Representations*. Academic Press. New York (E.U.A.).
128. Kreyszig, E. (1993) – *Advanced Engineering Mathematics, 7<sup>th</sup> Edition*. John Wiley & Sons, Singapore.
129. Leaning, M. S. and Finkelstein, L. (1979) – A Probabilistic Treatment of Measurement Uncertainty in the Formal Theory of Measurement. In *Acta IMEKO VIII*.
130. L'Ecuyer, P. (1986) – Efficient and Portable 32-bit Random Variate Generators, *1986 Winter Sim. Conf. Proc.*, Dec., 275--277.
131. L'Ecuyer, P. (1987) – A Portable Random Number Generator for 16-bit Computers, In *Model. and Sim. on Microcomp. 1987, SCS*, 45-49.
132. L'Ecuyer, P., (1988) – Efficient and Portable Combined Random Number Generators. *Communications of the ACM* **31**, 6, 742-749.
133. L'Ecuyer, P., Blouin, F. and Coutre, R. (1993) – A search for good multiple recursive random number generators. In *ACM Trans. on Model. and Comp. Sim.* **3**, 87-98.
134. L'Ecuyer, P. (1994a): Uniform Random Number Generation. In *Ann. of Oper. Res.* **53**, 77-120.
135. L'Ecuyer, P. (1994b): Recent Advances in Uniform Random Number Generation. In *Proc. of the 1994 Winter Sim. Conf.*, Dec., 122-132.
136. L'Ecuyer, P. (1996a) – Combined Multiple Recursive Random Number Generators. In *Oper. Res.* **44**, 5, 816-822.
137. L'Ecuyer (1996b) – Maximally Equidistributed Combined Tausworthe Generators. In *Math. of Comp.* **65**, 213, Jan., 203-213.
138. Lemieux, C. and L'Ecuyer, P., (2000) – Quasi-random numbers and their applications: using lattice rules for variance reduction in simulation. In *Proc. of 32<sup>nd</sup> Winter Sim. Conf.* Orlando, Florida (E.U.A.).
139. L'Ecuyer, P. (2001) – *Random numbers*, In *Encyc. Social and Behavioural Sciences*.
140. Lira, I. and Wöger, W. (2001) – Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model. In *Meas. Sci. Technol.* **12**, 1172-1179.
141. Lesurf, J. C. (1995) – *Information and Measurement*. I.O.P. Publishing. Bristol (Reino Unido).
142. Lira, I. and Wöger, W. (2006) – Evaluation of Repeated Measurements from the Viewpoints of Conventional and Bayesian Statistics. In *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology VII*. Ed.s P. Ciarlini, E. Filipe, A. B.

- Forbes, F. Pavese, C. Perruchet & B. Siebert. World Scientific Publishing Co. Singapore. 73-84.
143. Lord, G. J. and Wright, L. (2003) – *Uncertainty Evaluation in Continuous Modelling*. NPL Report CMSC 31/03. Ed. Crown, National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex (Reino Unido).
  144. Maine, R. E. and Iliff, K. W. (1985) – *Identification of Dynamic Systems*. AGARD (Advisory Group for Aerospace Research & Development) Flight Test Techniques Series, Vol. 2. NATO (North Atlantic Treaty Organization). Ed. R. K. Bogue. AGARD. Loughton (Reino Unido).
  145. Marsaglia, G. (1980) – Generating random variables with a t-distribution. In *Math. of Comp.* **34**, 235-236.
  146. Marsaglia, G., (1984a) – The exact-approximation method for generating random variables in a computer. *J. of the Amer. Stat. Assoc.* **79**, 218-221.
  147. Marsaglia, G. (1984b) – A Current View of Random Number Generators. *Keynote apresentada no 16<sup>th</sup> Symposium on the Interface*. Atlanta (E.U.A.).
  148. Marsaglia, G. Zaman, A. and Tsang, W. W. (1990) – Toward a universal random number generator. In *Stat. and Prob. Letters*, 835-839.
  149. Marsaglia, G. and Zaman, A. (1991) – A New Class of Random Number Generators. In *Ann. of Appl. Prob.* **3**, 3, 462-480.
  150. Matsumoto, M. and Kurita, Y (1992) – Twisted GFSR generators. In *ACM Trans. on Model. and Comp. Sim.* **2**, 179–194.
  151. Matsumoto, M. and Kurita, Y (1994) – Twisted GFSR generators II. In *ACM Trans. on Model. and Comp. Sim.* **4**, 245–266.
  152. Matsumoto, M. and Nishimura, T., (1998) – Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator, In *ACM Trans. on Model. and Comp. Sim.* **8**, 1, 3-30.
  153. Marshal, A. W. and Olkin, I. (1979) – *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Volume 143 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press. New York (E.U.A.).
  154. Metropolis, N and Ulam, S (1949) – The Monte Carlo Method. In *Journal of Amer. Stat. Soc.*, n.º 247, **44**, Set.
  155. Mimoso, J. (1999) – Certificação de materiais de referência (Estudo de Investigação). *Laboratório Nacional de Engenharia Civil*. Lisboa (Portugal)
  156. Montgomery, D. C., (1991) – *Introduction to Statistical Quality Control*, 2<sup>nd</sup> Ed. John Wiley & Sons. Singapore.
  157. Mood, A., Graybill, F. and Boes, D. (1974) – *Introduction to the Theory of Statistics*, 3<sup>rd</sup> Ed. Mc-Graw Hill. Singapore.
  158. Murteira, B. (1979) – *Probabilidades e Estatística*, Vol. I. Mc-Graw Hill de Portugal, Lisboa (Portugal).
  159. NASA (2001) – *Assessment of NASA's Use of the Metric System*. NASA Inspection Report G-00-021, 20 Feb. 2001. Washington (E.U.A.).

160. Niederreiter, H. (1978) – Quasi–Monte Carlo Methods and Pseudorandom Numbers. In *Bull. Amer. Math. Soc.* **84**, 6, 957-1041.
161. Niederreiter, H. (1985) – The Serial Test for Pseudorandom Numbers Generated by the Linear Congruential Method, In *Num. Math.* **46**, 6, 51-68.
162. Niederreiter, H. (1989) – The serial test for congruential pseudorandom numbers generated by inversions. In *Math. Comp.* **52**, 135-144.
163. Niederreiter, H. (1991) – Recent Trends in Random Number and Random Vector Generation, In *Ann. of Op. Res.* **31**, 323-345.
164. Niederreiter, H. (1992a) – Quasirandom sampling computer graphics. In *Proc. of the 3<sup>rd</sup> Int. Sem. on Dig. Image Processing in Medicine. Remote Sensing and Visualization of Information.* Riga (Letónia). 29-34.
165. Niederreiter, H. (1992b) – Random Number Generation and Quasi–Monte Carlo Methods, In *SIAM CBMF-NSF Reg. Conf. Series in Appl. Math.* **63**, Filadélfia (E.U.A.).
166. Niederreiter, H. (1995a) - Low-discrepancy sequences and nonarchimedean diophantine approximations. In *Stud. Sci. Math. Hun.* **30**, 111-122.
167. Niederreiter, H. and Lasrcher, G. (1995b) – Generalized (t,s)-sequences, Kronecker-type sequnces, and diophantine approximations of formal Laurent séries. In *Trans. MAS*, **347**, 2051-2073.
168. Niederreiter, H. and Xing, C. P. (1995c) – Low discrepancy sequences obtained from algebraic function fields over finite fields. In *Acta Arithm.* **72**, 281-298.
169. Niederreiter, H. and Eichenauer-Herrmann, J. (1997) – Parallel Streams of nonlinear congruential pseudorandom numbers. In *Finite Fields and Their Applications*, **3**, 219-237.
170. NP 37 (1961) – Arredondamento dos Valores Numéricos. Instituto Português da Qualidade. Monte da Caparica (Portugal).
171. NP EN 837–1 (1997) – *Manómetros de Tubo de Bourdon. Parte 1: Dimensões, Metrologia, Requisitos e Métodos de Ensaio.* Instituto Português da Qualidade. Monte da Caparica (Portugal).
172. NPL (1993) – *Temperature* (Booklet on measurement and calibration services). National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex (Reino Unido)
173. NPL (1998) – *Temperature Measurement and Calibration. Course Lecture Notes.* National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex (Reino Unido).
174. OIML International Recommendation n.º 33 (1979) – *Conventional value of the result of weighing in air.* International Organization of Legal Metrology. Paris (França).
175. Papoulis, A. (1965) – *Probability. Random Variables, and Stochastic Processes.* McGraw Hill Kogakusha, Ltd. (Japão).
176. Paulino, C., Turkman,A. e Murteira, B. (2003) – *Estatística Bayesiana.* Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa (Portugal).
177. Peixoto, J. P. e Rodrigues, F. C. (1991) – *Sistemas, Entropia, Coesão.* Discórdia Editores. Lisboa (Portugal).

178. Peixoto, J. P. (1968) – *Lições de Termodinâmica*. Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa (Portugal).
179. Pfanzagl, J. (1968) – Theory of Measurement. In *Physica Verlag*, Würzburg-Vienna (Áustria).
180. Press, W. H. , Flannery, B. P., Teukolsky, S. A and Vetterling, W. T. (1986) – *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press (E.U.A.).
181. Price, R. (Obra póstuma do Rev. Thomas Bayes), (1763) – *An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*. In *Philosophical Trans. of the Royal Society of London*, **53**, 370-418.
182. Rabinovich, S. G. (2000) – *Measurement Errors and Uncertainties. Theory and Practice*. 2<sup>nd</sup> Ed. AIP Press. New York (E.U.A.).
183. Ribeiro, A. S. (2001) – *Validação de Ferramentas Computacionais. Elementos Sobre a Sua Incidência em Metrologia*. LNEC ICT-ITM 5. Lisboa (Portugal).
184. Ribeiro, A. S., Oliveira Mimoso, J., Alves e Sousa, J. and Pimenta de Castro, M. (2003) – Uncertainty Related with the Use of Linear Regression Analysis for the Correction of Calibrated Instruments. In *Proc. of XVII IMEKO World Congress*, 22-27 Jun. 2003, Cavtat-Dubrovnik (Croácia).
185. Ribeiro, A. S., Alves e Sousa, J. and Pimenta de Castro, M. (2004a) – Some Remarks on the use of U-Shape Probability Distribution Functions in Monte Carlo Simulations. In *Proc. Of 10<sup>th</sup> Intern. Symp. on Advances of Meas. Science*, 29 Jun. – 2 Jul. 2004, S. Petersburgo (Rússia).
186. Ribeiro, A. S., Alves e Sousa, J. and Pimenta de Castro, M. (2004b) – Evaluation of Uncertainties Related with the PRT's Calibration by Comparison using GUM and MCS Approaches. In *Proc. of Tempmeko 2001*, 22-25 Jun. 2004, Cavtat-Dubrovnik (Croácia).
187. Ribeiro, A. S., Oliveira Costa, C. and Pimenta de Castro, M. (2005) – On the use of Monte Carlo simulation applied to the evaluation of coefficients uncertainty for mathematical models with complex operations. In *Proc. of NMIJ-BIPM Workshop on the Impact of Information Technology in Metrology*, 18-20 Mai. 2005, Tsukuba (Japão).
188. Ribeiro, A. S., Alves e Sousa, J., Oliveira Costa, C. and Pimenta de Castro, M. (2006) – Uncertainty Propagation in Multi-stage Measurements using Linear Regression Analysis and Monte Carlo Simulation. *A apresentar ao XVIII IMEKO World Congress*, 17-22 Set. 2006, Rio de Janeiro (Brasil).
189. Rice, J. A. (1985) – *Mathematical Statistics and Data Analysis*, 2<sup>nd</sup> Ed. Duxbury Press, International Thomson Publishing (E.U.A.).
190. Ripley, B. (1987) – *Stochastic Simulation*. Wiley. New York (E.U.A.).
191. Roussas, G. G. (2005) – *An Introduction to Measure-Theoretic Probability*. Elsevier Academic Press (E.U.A.).
192. Rubinstein, R. Y. (1981) - *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons (E.U.A.).

193. Sakamoto, M. and Murito, S. (1995) – Combination of multiplicative congruential random-number generators with safe prime modulus. In *Proc. of the 1995 Winter Sim. Conf.*, Arlington, Virginia (E.U.A.). Ed.s C. Alexopoulos, K. Kang, W. R. Liledgon and D. Goldsman, Dec., 309-315.
194. Schulmeyer, G. G. and Mackenzie, G. R., (2000) – *Verification & Validation of Modern Software-Intensive Systems*. Prentice Hall (E.U.A.).
195. Shannon, C. E. (1948) – *A Mathematical Theory of Communication*. **27**, *The Bell System Technical Journal*, July, Oct., 379-423, 623-656.
196. SI (1998) – The International System of Units (SI), 7<sup>th</sup> Edition. Organisation Intergouvernementale de la Convencion du Mètre. BIPM. Sévres (França).
197. SI (2000) – Le Système International d'Unités (SI). Supplement 2000: Additions et corrections à la 7<sup>e</sup> Edition (1998). Organisation Intergouvernementale de la Convencion du Mètre. BIPM. Sévres (França).
198. Siebert, B. (2000) – Discussion of Methods far the Assessment of Uncertainties in Monte Carlo Particle Transport Calculations. P.Ciarlini, A.B. Forbes, F.Pavese and D.Richter (eds.), *Advanced Mathematical Tools in Metrology IV*, **53**. World Scientific Publishing Co. Singapore. 220-229.
199. Siebert, B., Siebold, D. and Sommer, K-D. (2005) – The use of Monte Carlo Techniques for metrology – evaluation of uncertainties and simulation of experiments. Keynote in *NMIJ-BIPM workshop on the impact of Information Technology in Metrology*. 18-20 Mai. 2005. Tzukuba (Japão).
200. Sousa Lopes, J. (1989) – *Electrónica*, Departamento de Física da Faculdade de Ciências – Universidade de Lisboa (Portugal).
201. Sousa Lopes, J. (1991) – *Instrumentação e Microprocessadores*. Departamento de Física da Faculdade de Ciências – Universidade de Lisboa (Portugal).
202. Steele, A. G., Wood, B. M. and Douglas, R. J. (2006) – The Middle Ground in Key Comparison Analysis: Revisiting the Median. *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology VII*. Ed.s P. Ciarlini, E. Filipe, A. B. Forbes, F. Pavese, C. Perruchet & B. Siebert. World Scientific Publishing Co. Singapore. 245-252.
203. Steele, A. G., Wood, B. M. and Douglas, R. J. (2005) – Monte Carlo Uncertainties. Choosing Parent Distributions. Keynote in *NMIJ-BIPM workshop on the impact of Information Technology in Metrology*. 18-20 Mai. 2005. Tzukuba (Japão).
204. Steinhart, J. S. and Hart, S. R. (1968) – Calibration Curves for Thermistors. In *Deep Sea Research*, **15**, 497-503.
205. Stevens, S. S. (1946) – On the Theory of the Scales of Measurement. In *Science*, **103**, 677-680.
206. Stevens, S. S. (1951) – *Handbook of Experimental Psychology*. Wiley. London (Reino Unido).
207. Suppes, P., and Zinnes, J. L. (1965) – *Basic Measurement Theory*. In R. D. Luce, R. Bush, and E. Galanter (Ed.s), *Handbook of Mathematical Psychology*, Wiley. New York (E.U.A.).



208. Stigler, S. M. (1986) – *The History of Statistics. The measurement of uncertainty before 1900*. Harvard University Press. Cambridge mass., London (Reino Unido).
209. Sydenham, P. H. (1982a) – *Measurements, Models and Systems* (Chap. 2). In *Handbook of Measurement Science, Vol. 1. – Theoretical Fundamentals*, P. Sydenham (Ed.). John Wiley & Sons. Norwich (Reino Unido).
210. Sydenham, P. H. (1982b) – *Standardization of Measurement Fundamentals and Practice* (Chap. 3). In *Handbook of Measurement Science, Vol. 1. – Theoretical Fundamentals*, P. Sydenham (Ed.). John Wiley & Sons. Norwich (Reino Unido).
211. Sydenham, P. H. (1985) – Structured understanding of the measurement process. In *Measurement*, **3**, 115-120, 161-168.
212. Sydenham, P., Hancock, N. and Thorn, R. (1989) – *Introduction to Measurement Science and Engineering*. John Wiley & Sons (Reino Unido).
213. Sydenham, P. (2003) – Relationship between measurement, knowledge and advancement. *Measurement*, **34**, 3-16.
214. Tezuka, S. and L'Ecuyer P. (1992) – Analysis of add-with-carry and subtract-with-borrow generators, In *Proc. of the 1992 Winter Sim. Conf.*, New York (E.U.A.). 443-447.
215. Tezuka, S., L'Ecuyer P. and Couture, R. (1993) – Analysis of add-with-carry and subtract-with-borrow random number generators, In *ACM Trans. on Model. and Comp. Sim.* **3**, 4, Oct., 315-331.
216. Tsang, W. W., Hui, L. C. K., Chow, K. P. and Chong, C. F. (2000) – *Tuning the Collision Test for Stringency*. Hong Kong University CSIS Tech Report TR-2000-05.
217. Tuninski, V. and Wöger, W. (1997) – Bayesian approach to recalibration. In *Metrologia*, **34**, 459-465.
218. VIM (1994) – *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology*. International Organization for Standardization. Genève (Suíça).
219. VIM-IPQ (1996) – *Vocabulário Internacional de Metrologia - Termos Fundamentais e Gerais, 2ª Edição*, Instituto Português da Qualidade, Monte da Caparica (Portugal).
220. VIM (2005, em revisão) – *International vocabulary of basic and general terms in metrology*. International Organization for Standardization. Genève (Suíça).
221. von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944) – *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press. Princeton (E.U.A.).
222. Wichmann, B., (1999) – *Measurement Good Practice Guide nº 5 - Software in Scientific Instruments*. Ed. Crown, National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex (Reino Unido).
223. Wichmann, B., Parkin, G. and Barker, R. (2004) – *Software Support for Metrology Best Practice Guide No. 1: Validation of Software in Measurement Systems*. Ed. Crown, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex (Reino Unido).

224. Woschni, E.-G. (1982) – *Signals and Systems in the Time and Frequency Domains* (Chap. 4). In *Handbook of Measurement Science, Vol. 1. – Theoretical Fundamentals*, P. Sydenham (Ed.). John Wiley & Sons. Norwich (Reino Unido).
225. Wylie, C. R. (1975) – *Advanced Engineering Mathematics*. Mc-Graw Hill. Tokyo (Japão).

### Referências suplementares

O Autor considera que alguns documentos, pela sua importância depreendida através do contexto em que se inserem, como referências de fontes consideradas fidedignas e por poderem representar uma contribuição adicional para os potenciais leitores interessados, em particular, aqueles que pretendam obter dele outras fontes de informação, justificam que sejam apresentadas as respectivas referências e a sua origem.

Stevens, S. S. (1959) – *Measurement Psychophysics and Utility* (Chap. 2). In C. W. Churchman and P. Ratoosh (Eds), *Basic Concepts of Measurement*, Cambridge University Press. Cambridge (Reino Unido).

Tarski, A. (1954) – Contributions to theory of models. In *Indagationes Mathematicae*, **16**, 572–88.

Torgerson, W. S. (1958) – *Theory and Methods of Scaling*. Wiley. New York (E.U.A.).

D. H. Lehmer (1952) – Mathematical methods in large-scale computing units. In *Proc. 2nd Sympos. on Large-Scale Digital Calculating Machinery, Cambridge, MA, 1949*, pp. 141-146, Cambridge, MA, 1951. Harvard University Press.

## A experiência de Buffon e a aplicação da simulação numérica no cálculo integral

O entendimento do potencial de uma metodologia é, frequentemente, potenciado por pequenos exemplos e experiências que, de uma forma inexorável, demonstram muitas das suas virtualidades. Pode-se dizer que a “experiência da agulha de Buffon” é um desses casos exemplares onde a aplicação permite evidenciar, simultaneamente, a simplicidade do método e o seu alcance.

Desde a antiguidade que o problema da obtenção do valor de  $\pi$ , tal como de outros números irracionais, constitui motivo de estudos recorrendo a estratégias envolvendo a geometria, o cálculo analítico e outros vias que, em regra, envolvem algum grau de complexidade.

Georges-Louis Leclerc (*Conde de Buffon*) descreveu em 1777 uma experiência conceptual que Laplace posteriormente retomaria, que permite encontrar o valor de  $\pi$  através de uma abordagem de cariz probabilístico. A *experiência da agulha de Buffon*, como ficou conhecida, está na base dos conceitos modernos de simulação numérica como é o caso da metodologia de Monte Carlo.

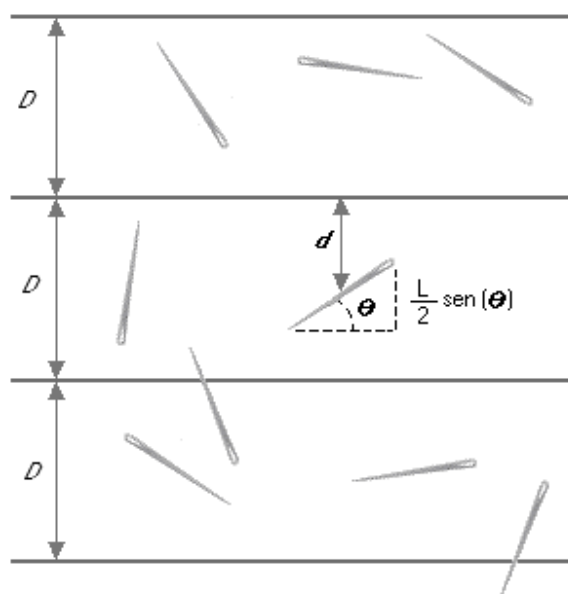


Figura A1.1: Esquema de base da experiência da agulha de Buffon

Considere-se a figura anterior. Se  $d$  representar a distância (aleatória) a que fica o centro da agulha da linha mais próxima e  $\theta$  representar o ângulo formado pela posição (aleatória) da agulha relativamente à orientação das linhas, verifica-se que a agulha intercepta a linha se  $d \leq (L/2) \sin(\theta)$ . O ângulo  $\theta$  varia entre 0 e  $\pi$  e a distância,  $d$ , do centro da agulha a uma das duas linhas (a que se encontre mais próxima) está compreendida entre 0 e  $D/2$ . Na Fig. A1.1 efectua-se uma representação gráfica relativa à função  $f(\theta) = (L/2) \sin(\theta)$ .

Considere-se, agora, um ângulo  $\theta'$  qualquer compreendido entre 0 e  $\pi$ . Os casos em que o lançamento da agulha que a deixam imobilizada na posição angular  $\theta'$  encontram-se todos situados sobre o segmento de linha vertical traçado entre  $(\theta'; 0)$  e  $(\theta'; D/2)$ . Os pontos situados entre  $(\theta'; 0)$  e  $(\theta'; (L/2) \sin(\theta'))$  representam todos os casos em que a agulha se imobilizou numa posição angular  $\theta'$  e a uma distância  $d \leq (L/2) \sin(\theta')$ , i.e., todos os casos em que, para essa posição angular, a agulha intercepta uma linha do papel pautado.

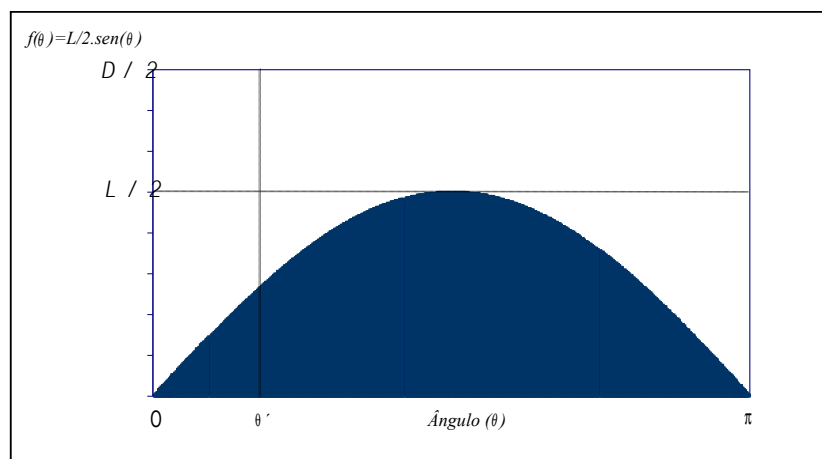


Figura A1.2: Representação de  $f(\theta) = (L/2) \sin(\theta)$  e do seu integral entre 0 e  $\pi$  (área sombreada)

Dito isto, conclui-se que a área sombreada corresponde à totalidade dos lançamentos da agulha onde resultou um posicionamento do centro da agulha e um ângulo de inclinação  $\theta$  tal que  $d \leq (L/2) \sin(\theta)$ . Esta área sombreada é, portanto, uma medida dos sucessos no lançamento da agulha. Os casos em que a agulha não intercepta a linha são representados pelos pontos situados na área superior a branco. A área total do rectângulo que engloba estas duas áreas corresponde à totalidade das hipóteses de lançamento.

A probabilidade de um lançamento da agulha conduzir a uma intercepção da linha é pois calculável pela razão entre a área sombreada

$$\int_0^{\pi} f(\theta) d\theta = L \quad (\text{A1.1})$$

e a área total ( $\pi D/2$ ).

Se atendermos ao facto de que a probabilidade da agulha interceptar uma linha se pode exprimir quer como o limite de uma razão de lançamentos,

$$P\left[d \leq \frac{L}{2} \cdot \text{sen}(\theta)\right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} \quad (\text{A1.2})$$

quer como uma razão de áreas,

$$P\left[d \leq \frac{L}{2} \cdot \text{sen}(\theta)\right] = \frac{\int_0^{\pi} \frac{L}{2} \text{sen}(\theta) d\theta}{\pi D/2} = \frac{L}{\pi D/2} = \frac{2L}{\pi D} \quad (\text{A1.3})$$

conclui-se que, atendendo à igualdade entre as duas expressões anteriores, se torna possível estimar, por via experimental, o valor de  $\pi$ :

$$\pi = \frac{2L}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N}{M} \right] \quad (\text{A1.4})$$

Se a dimensão linear da agulha igualar o espaçamento entre linhas sucessivas, i.e.,  $D = L$ , resulta a expressão simplificada:

$$\pi = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N}{M} \right] \quad (\text{A1.5})$$

Esta forma de se determinar o valor do número irracional  $\pi$ , através da contagem dos sucessos e insucessos no lançamento de uma agulha, foi introduzida por Laplace em 1820 e traduz uma nova abordagem no cálculo desse número até aí efectuado por métodos geométricos, primeiro, e analíticos, depois.

Este tipo de metodologia tem-se revelado de grande utilidade na resolução de outras classes de problemas, cuja natureza se revela mais difícil quando efectuada através de outros métodos, sendo nalguns casos, não uma alternativa mas a única via de solução conhecida.

Um tipo de problemas em que a adoção de técnicas de “amostragem estatística” (desenvolvidas e introduzidas a partir do Séc. XIX) recorrendo ao cálculo numérico, se revelou particularmente útil, foi a estimação do valor de funções integrais, cuja determinação era considerada como sendo de difícil execução (nomeadamente, funções com comportamentos complexos associados à existência de descontinuidades e de integrais em espaços multi-dimensionais).

Uma das funções que é frequentemente tomada como caso exemplar é a função  $f(x) = \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)$  que exhibe uma descontinuidade em zero e tem um comportamento considerado complexo na vizinhança desse valor (veja-se a Fig. A1.3).

A solução para este tipo de problemas, associados à determinação de integrais definidos cujas funções possuem as particularidades apresentadas,

$$\int_0^{\zeta} f(x)dx = I(\zeta) \tag{A1.6}$$

passa por uma metodologia de simulação numérica com raízes na experiência de Buffon.

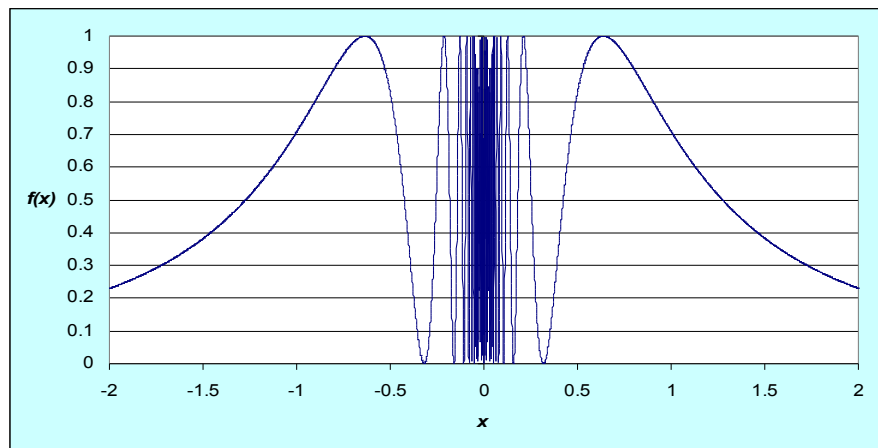


Figura A1.3: Gráfico da função  $f(x) = \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)$

Considerando que o interesse reside num intervalo  $] 0, \zeta ]$  pertencente ao domínio da função  $f(x)$  e que o seu contra-domínio corresponde ao intervalo  $[0,1]$ , então, tal como no caso da *experiência de Buffon*, o integral pretendido corresponde à área inferior delimitada pela linha representativa da função  $f(x)$ , inscrita numa área total igual a  $\zeta$  (produto entre a dimensão  $\zeta$  do intervalo considerado e a dimensão 1 do contra-domínio da função).

Nesta situação, considerando o espaço bidimensional definido por  $] 0, \zeta ] \times [0,1]$ , pode-se conceber uma experiência que consiste em gerar pares de valores aleatórios reais  $(h, v)$  neste espaço ( $h \in ] 0, \zeta ]$  e  $v \in [0,1]$ ), representando as coordenadas horizontal e vertical de um ponto qualquer desse espaço. Como se observa na Fig. A1.4, para cada coordenada horizontal,  $h$ , poder-se-ão obter coordenadas verticais,  $v$ , ao longo da linha a traço interrompido (contradomínio  $[0,1]$  da função), às quais podem corresponder valores inferiores, iguais ou superiores ao valor de  $f(h)$ .

Assim, agrupando os valores inferiores com os valores coincidentes com a linha representativa da função, o resultado da experiência poderá concretizar duas situações genéricas: o ponto encontra-se abaixo ou coincide com a linha representativa da função (o que se pode traduzir por  $v \leq f(h)$ ); ou encontra-se acima dessa linha da função (o que se pode traduzir pela expressão  $v > f(h)$ ).

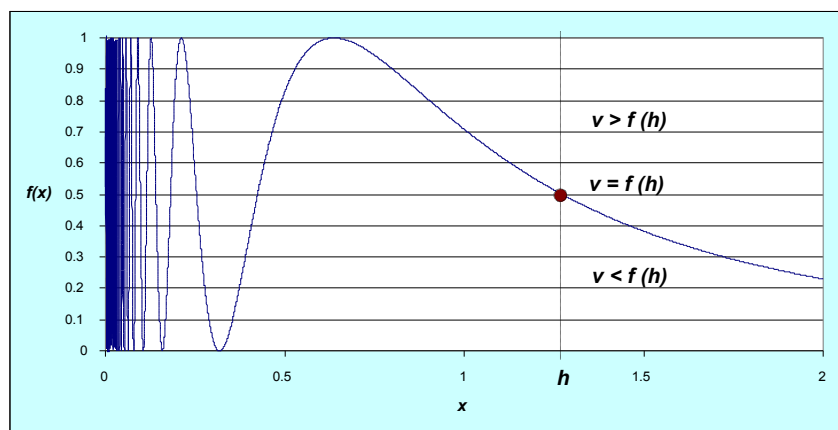


Figura A1.4: Gráfico da função  $f(x) = \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)$  no intervalo  $[0,2]$

No primeiro caso, considera-se que o resultado corresponde a um “sucesso” da experiência e, no segundo, equivale a um “insucesso” da experiência. Sabendo que a área inferior corresponde ao valor do integral que se pretende obter,  $I(\zeta)$ , e que a área total é igual a  $\zeta$ , então, adoptando um mecanismo frequencista de análise de probabilidades suportado na selecção de um conjunto de  $N$  pares de pontos aleatórios e determinando o número,  $M$ , destes pontos que se encontram abaixo da linha representativa da função, recorrendo à Teoria de Probabilidades, verifica-se que:

$$\frac{I(\zeta)}{\zeta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{M}{N} \right] \quad (\text{A1.7})$$

o que permite estimar o valor do integral pretendido através da expressão seguinte.

$$I(\zeta) = \zeta \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{M}{N} \right] \quad (\text{A1.8})$$

Desta forma, foi encontrado um novo método de cálculo de integrais definidos da função  $f(x)$  num intervalo  $] 0, \zeta ]$ : Gera-se uma lista  $N$ , suficientemente grande, de pares aleatórios equiprováveis  $(h, v)$  compreendidos entre 0 e  $\zeta$  e entre 0 e 1, respectivamente, e contam-se quantos deles ( $M$ ) verificam a condição  $v \leq f(h)$ ; O valor de uma estimativa do integral  $I(\zeta)$  é dado por  $\zeta \cdot \left( \frac{M}{N} \right)$ .



### Elementos para a compreensão da métrica “Discrepância”

A qualidade das sequências de números pseudo-aleatórios está relacionada com uma métrica designada por “discrepância”, cuja compreensão é fundamental pois é com base nesta que se estabelece um paralelismo com as “sequências genuinamente aleatórias” e, também, porque distingue as sequências ditas “pseudo-aleatórias” das sequências ditas “quasi-aleatórias”<sup>1</sup>.

Esta métrica está na base de uma das condições mais importantes a satisfazer na aplicação de geradores de números pseudo-aleatórios: a limitação da utilização a uma fracção reduzida, do período da sequência.

Esta condição é considerada determinante para se obter, de facto, sequências cuja estimativa se aproxima das manifestadas pelas sequências “genuinamente aleatórias” e deu origem a critérios como o de Ripley (1987) que, para geradores congruenciais lineares com período  $\tau$  permite a utilização de subsequências de dimensão máxima  $D$  que cumpram o critério:  $\tau \geq 10 \cdot D^2$ .

Relembra-se, tal como exposto no capítulo 6, que a razão que determina a utilização desta pequena fracção do período da reside no facto de “*para grande parte dos geradores do tipo linear a discrepância dos vectores constituídos por valores sucessivos ao longo do período completo ser muito inferior àquela que se observa no de sequências verdadeiramente aleatórias*” [L’Ecuyer (1994b)].

A métrica em causa, *discrepância*, tem sido objecto de estudo de muitos autores, sendo o nome de H. Niederreiter, apontado (cf. afirma P. L’Ecuyer) como o “*grande mestre deste assunto*”. Este Apêndice visa, apenas, introduzir este assunto.

A exposição que se segue utiliza a notação e a sequência explicativa de Niederreiter e, por vezes, é apoiada em elementos de um importante artigo de L’Ecuyer (1994b).

Como ponto de partida, considera-se a geração de uma sequência de números por parte de um determinado gerador, a partir da qual se estabelecem  $N$  pontos  $s$ -dimensionais,  $\mathbf{x}_n = (x_n, \dots, x_{n+s-1})$  com  $0 \leq n \leq N - 1$ , constituindo um conjunto de vectores em que cada um contem  $s$  valores sucessivos. Estes vectores, pela sua definição, possuem uma zona de sobreposição.

---

<sup>1</sup> Para um aprofundamento da forma de se obterem sequências deste tipo recomenda-se a leitura das referências [Bratley *et al.* (1988), (1992)], [Fox (1986)] e [Lemieux *et al.* (2000)].



seguinte:  $V(R) = \prod_{j=1}^2 (\beta_j - \alpha_j) = (\beta_1 - \alpha_1) \times (\beta_2 - \alpha_2)$ . Com estes valores, obter-se-ia uma estimativa da métrica discrepância para a região  $R$ . Este procedimento repetir-se-ia para outras regiões cumprindo:  $R \in \mathcal{R}$ .

Note-se que, admitindo uma distribuição uniforme perfeitamente uniforme num espaço unidimensional com domínio  $[0,1]$ , o valor da probabilidade  $P[\xi \leq i] = i$ , o que constitui a base dos testes de ajustamento do  $\chi$ -quadrado e de Kolmogorov-Smirnov e, também, da métrica de *discrepância*. Com efeito, fazendo uma analogia para o espaço bidimensional  $[0; 1) \times [0; 1)$ , admitindo uma distribuição de valores uniforme ideal, num espaço  $R$  definido em  $[0; i) \times [0; j)$  a probabilidade de  $P[\xi_x \leq i; \xi_y \leq j] = i \cdot j = V(R)$ . Este parâmetro  $V(R)$  corresponde, portanto, ao valor expectável que se incorpora na definição formal da *discrepância*.

Por outro lado, a estimativa dessa probabilidade com base numa amostra de pontos, consiste na contagem dos pontos da sequência que se encontram na região de interesse, cuja estimativa é:  $I(R)/N$ . Logo, quanto menor for a diferença entre a estimativa e o valor

expectável ideal numa determinada região,  $\left| \frac{I(R)}{N} - V(R) \right|$ , maior será a proximidade entre a distribuição de pontos e a distribuição uniforme.

A maximização destas diferenças que determina o estimador da *discrepância* constitui, conseqüentemente, uma métrica que permite avaliar esse grau de proximidade da distribuição com a distribuição de probabilidade uniforme, sendo mais próxima quando menor for o valor da métrica.

Desta descrição depreende-se, em particular, a importância de efectuar esta análise considerando que um dos extremos da região coincide com a origem, determinando a variante mais utilizada desta métrica, designada por *discrepância estrela (star discrepancy)*,  $D_N^*$ , e cuja definição resulta da imposição:  $\alpha_j = 0$  para qualquer  $j$ , representando o conjunto  $\mathcal{R}$  os hiper-cubos em que um dos seus vértices coincide com a origem.

A definição desta métrica, usando a notação do seu autor (Niederreiter), é a seguinte:

$$D_N^*(P) = \sup_{B \in \mathcal{J}^*} \left| \frac{A(B; P)}{N} - \lambda_s(B) \right| \quad (\text{A2.2})$$

onde  $P$  representa o conjunto de valores da sequência em análise  $x_1, \dots, x_n$ ,  $\lambda_s$  representa a métrica de Lebesgue,  $A(B; P)$  representa o número de pontos de  $P$  que se encontram na região  $B$ , e  $\mathcal{I}^*$  representa o conjunto de intervalos com a forma  $\prod_{j=1}^s [0, u_j)$ , em que  $u_i$  se encontra no intervalo semi-aberto  $[0, 1)$ ,

$$D_N^*(P) = \|\text{disc}\|_\infty \quad (\text{A2.2})$$

e a função *discrepância* é definida por:

$$\text{disc}(y) = \frac{A([0, y]; P)}{N} - \lambda_s([0, y]) \quad (\text{A2.4})$$

Um valor elevado desta métrica indica, conseqüentemente, que a distribuição de pontos se afasta da uniformidade enquanto que um valor mais baixo significa que a distribuição de pontos se aproxima, tendencialmente, de uma distribuição equitativa no espaço considerado. Desta forma, esta métrica fornece informação acerca da natureza da distribuição dos valores da sequência em observação.

Retomando o caso bidimensional, considerando uma distribuição “uniforme” de 4 pontos e dois hiper-cubos de dimensões:  $[0; 0,5) \times [0; 0,5)$  e  $[0; 0,8) \times [0; 0,8)$ , cf. a Fig. seguinte:

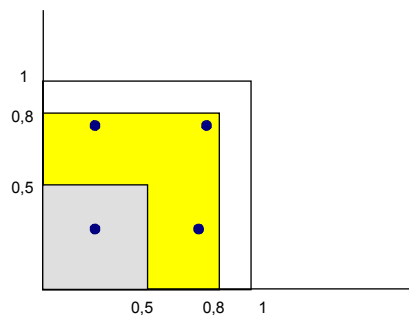


Figura A2.2 – Exemplos de regiões de determinação da discrepância

No primeiro caso,  $V(R) = 0,25$  e  $I(R) = 1/4 = 0,25$ , logo, para este hiper-cubo o valor da *discrepância estrela* é igual a  $\left| \frac{1}{4} - 0,25 \right| = 0$ ; no segundo caso,  $V(R) = 0,64$  e  $I(R) = 4/4 = 1$ ,

sendo o valor da *discrepância estrela* é igual a  $|1 - 0,64| = 0,36$

Relembra-se que o objectivo final consiste em comparar o valor desta métrica relativo a sequências geradas por determinado gerador com o valor da métrica obtido por uma sequência

*genuinamente aleatória* (de dimensão  $N$ ). Para tal, torna-se necessário dispor de informação acerca da relação entre a métrica de referência (da sequência genuinamente aleatória) e a dimensão da sequência.

Uma importante contribuição de Niederreiter (1992a, 1992b), foi a “Lei de iteração logarítmica”, que demonstrou que o valor de referência de discrepância para as sequências *genuinamente aleatórias* se encontra compreendido<sup>2</sup> entre  $O(N^{-1/2})$  e  $O(N^{-1/2}(\log \log N)^{1/2})$ .

Desta forma, conhece-se um intervalo de referência que permite avaliar o grau de proximidade das sequências simuladas com as *genuinamente aleatórias*.

É com base na comparação deste resultado com o intervalo de referência de sequências “genuinamente aleatórias”, apresentado anteriormente, que se conclui que para valores elevados de  $m$  esta métrica tem um valor demasiado baixo, indicando que existe excessiva regularidade dos números gerados. Foi esta constatação que determinou a regra de que as sequências geradas não devem ser utilizadas na totalidade do seu período mas, apenas, numa fracção deste, para o qual o valor da *discrepância* é concordante com o intervalo de referência.

São estes estudos que dão origem aos critérios que servem de base ao conceito de “sequência útil” descritos no capítulo 6, designadamente, o critério proposto por Ripley e utilizado no desenvolvimento experimental descrito neste documento.

---

<sup>2</sup> Nestas expressões, o termo  $O(f(n))$  representa o conjunto de funções  $g$  tais que, para uma constante  $c > 0$ ,  $g(n) \leq c \cdot f(n)$  para qualquer  $n$ .



### Teoremas para a maximização do período em geradores congruenciais

A relação estabelecida entre os valores atribuídos às variáveis incorporadas na equação de um gerador congruencial e o período que este origina tem uma importância fundamental no processo de simulação, uma vez que por um lado, existe uma limitação à sequência útil de valores que se admite utilizar de modo a obter uma apropriada caracterização pseudo-aleatória e, por outro lado, essa dimensão máxima determina um grau de exactidão que pode ou não ser compatível com a exactidão requerida para o resultado da simulação.

Para ilustrar este facto, considere-se a selecção dos seguintes parâmetros:  $m=10$  e  $s_0 = a = c = 7$ , produz uma sequência cujo período de repetição é igual a 4 (sequência: 7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, 0, 7, ...) e não 10 como o majorante antes indicado poderia fazer esperar, mas se fizermos  $s_0=4$ ,  $a=6$  e  $c=7$  obtemos a sequência (1,3,5,7,9,1,3,...), de período igual a 5.

A condição de custo/velocidade de processamento determinou, por razões e limitações de natureza histórica associada à lógica binária, a utilização inicial de potências de 2 ( $2^e$  com  $e$  inteiro positivo). No entanto, outras representações são possíveis, pelo que, numa forma genérica, a representação adoptada para o número utilizado no meio computacional é  $p^e$ , sendo  $p$  a base (no caso binário,  $p=2$ ).

Esta representação permite a obtenção do maior valor que se pode atribuir a uma “palavra” computacional,  $w$ , por exemplo, se a dimensão disponível da mesma corresponde a 32 bits, isso significa que o maior valor possível corresponde a  $2^{32}$  (i.e.,  $\approx 4,29 \times 10^9$ ) notando que, sendo frequente a existência de um bit reservado ao sinal, então, o limite passa a ser de  $2^{31}$  (equivalente à obtenção dos limites  $\approx \pm 2,15 \times 10^9$ ).

O período máximo possível de um gerador é  $(m-1)$  sabendo que a sua maximização resulta de se atribuir ao valor de  $m$  o valor máximo possível da palavra  $w$ . No caso anterior, seria  $m=2^{31}$  (numa forma geral, considerando a existência de um bit de sinal, seria  $m=p^{e-1}$ ). Esta não é, contudo, uma condição suficiente para se atingir esse valor máximo do período, verificando-se a dependência face aos restantes elementos do gerador.

Dois exemplos: com a combinação de valores  $s_0 = 2$ ,  $a = 2^{10}$ ,  $c = 3$  e  $m = 2^{31}$ , os resultados obtidos mostram a sequência (2051, 2100227, 3148803, 1076890627, 1076890627, 1076890627...), exibindo um transiente constituído por 3 elementos a que se segue uma repetição de período igual a 1.

A combinação  $s_0 = 2$ ,  $a = 1$ ,  $c = 1$  e  $m = 2^{31}$ , é obtida a sequência de números (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...,  $s_n = s_{n-1} + 1, \dots$ ), o que se verifica imediatamente como não aleatória. Assim, dada a importância da maximização do período dum gerador congruencial linear e a sua dependência dos parâmetros do mesmo ( $a$ ,  $c$ ,  $m$  e  $s_0$ ), revela-se de utilidade conhecer um conjunto de Teoremas, cujo alcance se encontra detalhadamente exposto em Knuth (1998), que visam caracterizar as condições que permitem efectuar uma selecção desses parâmetros (designados, frequentemente, por "números mágicos") que maximize a periodicidade.

### Teorema A:

A sequência  $s_i$  produzida por um gerador congruencial linear  $s_{n+1} = (as_n + c) \bmod m$  possui o período máximo possível "m" sse:

- $a$  constante " $c$ " e o módulo " $m$ " são primos relativos entre si;
- $b = (a-1)$  é um múltiplo de " $p$ ", para qualquer número primo " $p$ " divisor de " $m$ ";
- " $b$ " é um múltiplo de 4, se " $m$ " é um múltiplo de 4.

Este Teorema foi demonstrado, pela primeira vez, por M. Greenberger (em 1961) para o caso particular de  $m = 2^e$ , evidenciando a importância que o facto dos números envolvidos na definição dos parâmetros serem primos entre si <sup>1</sup>.

A procura de um valor  $m$  que seja tão próximo de  $w$  quanto possível e, simultaneamente, que seja número primo, maximiza o número de possibilidades de selecção para os restantes parâmetros. Um segundo factor que condiciona a selecção, decorre de se verificar que a escolha de  $m = w$  conduz à criação de sequências cujos dígitos de maior ordem de  $s_n$  exibem menor aleatoriedade que os dígitos de menor ordem, o que não se verifica se  $m = w \pm 1$ . Da conjugação destas diferentes condições, resulta a solução frequentemente adoptada, em que  $m$  se encontra o mais próximo possível de  $w \pm 1$ , cumprindo a condição suplementar de ser um número primo.

No caso de  $w = 2^{32}$ , o número primo adoptado, por conveniência, corresponde a  $(2^{31} - 1)$ , sendo a escolha determinada, em primeiro lugar, por  $(2^{31} - 1)$  ser um número primo, e em segundo lugar, por poder ser usado com números de 32 *bits* em que existe um *bit* de sinal e,

---

<sup>1</sup> Dois números  $c$  e  $m$  designam-se por *primos relativos entre si* se o seu máximo divisor comum é 1 (a condição é trivialmente satisfeita se forem seleccionados parâmetros  $c$  e  $m$  primos).



finalmente, pela sua estrutura, próxima do maior dos números de base binária – de 32 *bits* – permitir uma computação mais eficiente <sup>2</sup>.

A análise do Teorema A permite referir que, quando os números  $a$  e  $m$  são *primos entre si*, o menor inteiro  $\omega$  que verifica  $(a^\omega \bmod m)=1$  designa-se convencionalmente por “ordem de ( $a$  modulo  $m$ )”, conduzindo a que qualquer valor de  $a$  que possua a *ordem* máxima possível modulo  $m$  se designe por “elemento primitivo modulo  $m$ ”.

Adicionalmente, três outros Teoremas estabelecem, no primeiro caso – Teorema B – as condições de obtenção do período máximo aplicável a geradores congruenciais multiplicativos (i.e., com  $c=0$ ); no segundo caso – Teorema C – a resposta a uma questão suscitada no Teorema B, relativa à determinação dos *elementos primitivos* módulo  $m$ ; e no terceiro caso – Teorema D – a forma de selecção de parâmetros para geradores cujo módulo  $m$  é uma potência de base 10, permitindo a maximização do período.

**Teorema B** [C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801]:

*O Período máximo possível quando  $c=0$  é  $\lambda(m)$ , sendo obtido utilizando as expressões apresentadas a seguir à descrição deste Teorema. Este período é obtido se:*

- “ $s_0$ ” e “ $m$ ” são números primos entre si;
- “ $a$ ” é um elemento primitivo mod  $m$ .

Relativamente a este Teorema,  $\lambda(m)$  representa a *ordem do elemento primitivo*, sendo é possível demonstrar – Teorema de Euler em [Knuth (1998)] – que  $\lambda(p^e)$  é um divisor de  $(p^e - 1) \cdot (p - 1)$  e que o valor respectivo, para os diferentes valores de  $m$  potências positivas de base 2 (i.e.,  $m=2^e$ ), se obtem: para  $e=1$ ,  $\lambda(2)=1$ ; para  $e=2$ ,  $\lambda(4)=2$ ; para  $e \geq 3$ ,  $\lambda(2^e)=2^{e-2}$ ;  $\lambda(p^e) = (p^e - 1) \cdot (p - 1)$ ; e  $\lambda(p_1^{e_1}, \dots, p_t^{e_t}) = \text{mmc}[\lambda(p_1^{e_1}), \dots, \lambda(p_t^{e_t})]$ , onde “mmc” representa o *menor múltiplo comum*.

---

<sup>2</sup> A adopção do valor  $(2^{31}-1)$ , no caso de sistemas usando 32 bits sendo um de sinal torna-se óbvia, pelo facto de esse número constituir o número primo mais elevado próximo do limite  $(2^{31})$ . No caso do sistema de 32 bits não utilizar o bit de sinal, poder-se-ão encontrar números primos superiores a  $(2^{31}-1)$  compreendidos entre  $(2^{31})$  e  $(2^{32})$ . Uma razão para a adopção corrente, mesmo nesse caso, de  $(2^{31}-1)$  resultará, porventura, deste valor favorecer a eficiência da computação numa base binária e ser suficientemente elevado (da ordem de  $10^{10}$ ) para ser utilizado numa parte significativa das aplicações. Refira-se, adicionalmente, que em grande parte dos casos, os números do tipo  $(2^e-1)$  e  $(2^e+1)$  não o são [Knuth, 1998 – pp.14]. Por exemplo,  $(2^{31}+1)$  é divisível por 3 e por 715827883,  $(2^{32}-1)$  é equivalente a  $3 \times 5 \times 17 \times 257 \times 65537$  e  $(2^{32}+1)$  também não é número primo – resultado demonstrado por Euler – sendo divisível por 641 e por 6700417. Números primos deste tipo, superiores a  $2^{14}$ , são  $2^{17}-1$  (igual a 131071),  $2^{19}-1$  (igual a 524287) e  $(2^{31}-1)$  (igual a 2147483647), não se encontrando outros números primos, pelo menos, até  $2^{64} \pm 1$ . Por esta razão, o valor de  $2^{31}-1$  é frequentemente adoptado como valor a atribuir a  $m$ , sendo particularmente atractivo no caso de sistemas de 32 bits.

### Teorema C:

O número “a” é um elemento primitivo modulo ( $p^e$ ) sse um dos seguintes casos se aplica:

- $p=2, e=1$  e “a” é um número ímpar;
- $p=2, e=2$  e  $(a \bmod 4) = 3$ ;
- $p=2, e=3$  e  $(a \bmod 8) = 3, 5$  ou  $7$ ;
- $p=2, e \geq 4$  e  $(a \bmod 4) = 3$  ou  $5$ ;
- “p” é um número ímpar,  $e = 1, a \not\equiv 0 \pmod{p}$  e  $(a^{(p-1)/q}) \not\equiv 1 \pmod{p}$  para qualquer número “q” que seja divisor primo de  $(p-1)$ ;
- “p” é um número ímpar,  $e > 1$ , “a” satisfaz a condição (v) e  $(a^{p-1}) \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ .

### Teorema D:

Se  $m = 10^e, e \geq 5, c = 0$  e  $X_0$  não é um múltiplo de 2 ou 5, o período da sequência linear congruencial é  $5 \times 10^{e-2}$  sse  $(a \bmod 200)$  for equivalente a um dos seguintes 32 valores:

3, 11, 13, 19, 21, 27, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 69, 77, 83, 91, 109, 117, 123, 131, 133, 139, 141, 147, 163, 171, 173, 179, 181, 187, 189, 197.

Deste conjunto de Teoremas resulta a definição das condições que enquadram a selecção de variáveis para parametrização das equações congruenciais de modo a produzir a pretendida maximização do período das sequências geradas.

### Complementos sobre os testes $\chi^2$ e de Kolmogorov-Smirnov

Estes testes estatísticos clássicos têm como principal finalidade a avaliação do grau de aproximação entre distribuições de probabilidade empíricas e teóricas permitindo, pela quantificação de estimadores de estatísticas de teste apropriados, obter informação para a decisão da sua adequação.

No contexto da geração de sequências de números “aleatórios”, esta tarefa de relacionar as distribuições empíricas com as distribuições teóricas, com destaque para a distribuição uniforme, tem uma importância particular, uma vez que determina o grau de aproximação à situação desejável como representativa da realidade que se pretende simular.

A importância destes testes é acrescida, pelo facto de estes frequentemente constituírem elementos incorporados na avaliação de resultados obtidos por estimadores de outros testes estatísticos.

Neste sentido, apresenta-se um conjunto de elementos em complemento ao que foi descrito na Secção 6.3.2.2, nomeadamente, a tabela e o procedimento aplicável na execução da análise pelo método de  $\chi^2$  e a tabela aplicável no teste de Kolmogorv-Smirnov [Knuth (1998)].

No que concerne ao teste  $\chi^2$ , relembra-se que o *estimador de estatística (de teste)*,  $V$ , indicador da proximidade entre as observações experimentais,  $y_i$ , e as observações expectáveis equivalentes,  $np_i$ , conhecendo-se as probabilidades respectivas e a dimensão da amostra  $n$ , é (6.50):

$$V = \frac{(y_1 - np_1)^2}{np_1} + \dots + \frac{(y_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{i=1}^k \frac{(y_i - np_i)^2}{np_i}$$

permitindo a sua adaptação a uma formulação computacionalmente mais adequada (6.51):

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \left( \frac{y_i^2}{p_i} \right) - n$$

Este estimador estabelece uma relação do estimador com a dimensão da amostra  $n$ , sendo recomendado como regra de aplicação do teste que o valor de  $n$  seja escolhido de tal forma que os valores  $np_i$  não sejam inferiores a 5 (por exemplo, no lançamento de um dado, uma vez que cada acontecimento de saída dispõe de 1/6 de probabilidade – a aplicação do teste pressupõe a equiprobabilidade dos acontecimentos possíveis – então, o valor mínimo da dimensão de uma amostra analisada  $n$  a considerar seria de 30, uma vez que  $30 \times (1/6) = 5$ ). Esta exigência apontada resulta da distribuição  $\chi^2$  constituir uma aproximação cuja validade e exactidão dependem da dimensão da amostragem.

Definido o estimador, a avaliação dos seus resultados obtidos experimentalmente, carece do conhecimento dos valores associados aos intervalos de probabilidade da distribuição  $\chi^2$  e do seu significado. Estes, de acordo com a definição da distribuição de probabilidade em causa, dependem do número de graus de liberdade e do intervalo de probabilidade considerado, sendo apresentados em diversas referências bibliográficas como, por exemplo, em Knuth (1998), de onde se transcrevem os valores para o Quadro seguinte.

*Quadro A4.1: Intervalos de probabilidade associados ao estimador do teste  $\chi^2$*

<b>p</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>25%</b>	<b>50%</b>	<b>75%</b>	<b>95%</b>	<b>99%</b>
v = 1	0,00016	0,00393	0,1015	0,4549	1,323	3,841	6,635
v = 2	0,02010	0,1026	0,5754	1,386	2,773	5,991	9,210
v = 3	0,1148	0,3518	1,213	2,366	4,108	7,815	11,34
v = 4	0,2971	0,7107	1,923	3,357	5,385	9,488	13,28
v = 5	0,5543	1,1455	2,675	4,351	6,626	11,07	15,09
v = 6	0,8721	1,635	3,455	5,348	7,841	12,59	16,81
v = 7	1,239	2,167	4,255	6,346	9,037	14,07	18,48
v = 8	1,646	2,733	5,071	7,344	10,22	15,51	20,09
v = 9	2,088	3,325	5,899	8,343	11,39	16,92	21,67
v = 10	2,558	3,940	6,737	9,342	12,55	18,31	23,21
v = 11	3,053	4,575	7,584	10,34	13,70	19,68	24,72
v = 12	3,571	5,226	8,438	11,34	14,85	21,03	26,22
v = 15	5,229	7,261	11,04	14,34	18,25	25,00	30,58
v = 20	8,260	10,85	15,45	19,34	23,83	31,41	37,57
v = 30	14,95	18,49	24,48	29,34	34,80	43,77	50,89
v = 50	29,71	34,76	42,94	49,33	56,33	67,50	76,15
v > 30	$v + \sqrt{2v} \cdot x_p + \frac{2}{3}x_p^2 - \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right)$						
$x_p =$	-2,33	-1,64	-0,674	0,00	0,674	1,64	2,33

A aplicação do teste  $\chi^2$ , conhecidos os valores do estimador de teste e do número de graus de liberdade, visa colocar esse estimador num dos intervalos de probabilidade da distribuição de referência requerendo, para tal, a definição prévia dos limites dos intervalos de probabilidade e do critério de aceitação ou de rejeição da amostra face ao cumprimento dos requisitos de aleatoriedade. Esse critério encontra-se incorporado num procedimento genérico, baseado em Knuth (1998), que é apresentado a seguir.

- a) Determinam-se as categorias e as probabilidades associadas às mesmas;
- b) Com base no descrito na alínea a) define-se o número mínimo para a dimensão da amostra ( $n_{\min} = 5 \times p_{i,\min}^{-1}$ );
- c) Executam-se os ensaios experimentais para obtenção da amostra;
- d) Determina-se o estimador de teste,  $V$ , de acordo com as expressões (6.50) ou (6.51);
- e) Se  $V$  é inferior a 1 % ou superior a 99 %, é rejeitada a hipótese dos números da sequência possuírem uma natureza aleatória (sendo classificados como não suficientemente aleatória);
- f) Se  $V$  se encontra nos intervalos compreendidos entre 1 % e 5 % ou 95 % e 99 %, os números da sequência são classificados como "suspeitos";
- g) Se  $V$  se encontra nos intervalos compreendidos entre 5 % e 10 % ou 90 % e 95 %, os números da sequência são classificados como "quase suspeitos";
- h) Se  $V$  se encontra no intervalo compreendido entre 10 % e 90 % é aceite a hipótese dos números da sequência possuírem uma natureza aleatória.

A aplicação deste teste realiza-se, em regra, a pelo menos 3 conjuntos diferentes de dados (amostras). Se pelo menos 2 dos 3 resultados obtidos são classificados como "suspeitos" as sequências produzidas por determinado gerador conduzem à sua classificação como *não suficientemente aleatórias*, caso contrário, admite-se a hipótese de cumprimento dos requisitos de aleatoriedade.

O teste  $\chi^2$ , apresentado anteriormente, é especialmente vocacionado na análise de amostras face a distribuições de probabilidade discretas. Contudo, é igualmente frequente a necessidade de se efectuarem testes a amostras visando uma análise comparativa com distribuições de probabilidade contínuas, conduzindo à introdução do teste K-S.

A aplicação deste teste resulta da definição dos estimadores de estatística de teste (6.58) cf. exposto na Secção 6.3.2.2 (resultantes da modificação de Smirnov relativamente ao estimador originalmente introduzido por Kolmogorov):

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F_n(x) - F(x)) \qquad K_n^- = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F(x) - F_n(x))$$

A concretização do teste K-S depara com algumas dificuldades, designadamente, a utilização das distribuições de probabilidade definidas num domínio contínuo enquanto que, nas situações experimentais, se dispõe de uma representação discreta contendo um número finito de amostras de  $n$  elementos. Desta circunstância resulta a observação da existência de "saltos" entre pontos sucessivos da amostra experimental ( $X_j, X_{j+1}$ ). Uma das formas de promover a relação entre os dois contextos, consiste em considerar que o valor da função num determinado ponto, por exemplo,  $i$ , representa, na verdade, um intervalo  $x \in [x_i, x_{i+1}[$ .

Alguns autores consideram, em alternativa a esta abordagem, que é preferível adoptar um único estimador da estatística de teste, sendo este dado pelo *máximo* ou pelo *supremo* do valor absoluto das diferenças entre a distribuição de probabilidade empírica e a distribuição que resulta da amostra experimental. Esta abordagem pode criar análises incorrectas se os intervalos associados ao comportamento discreto da amostra forem de dimensão significativa, i.e., se os  $[x_i, x_{i+1}[$  não possuírem uma reduzida amplitude.

Tal como no caso anterior, a análise efectuada nos diferentes subintervalos resulta da quantificação prévia dos valores do estimador determinados pelos intervalos de probabilidade e pelos graus de liberdade, permitindo constituir uma tabela de referência idêntica à que foi apresentada para o teste  $\chi^2$ .

Quadro A4.2: Tabela indicadora dos resultados da distribuição K-S relativa a diferentes graus de liberdade e diferentes níveis de confiança

<b>p</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>25%</b>	<b>50%</b>	<b>75%</b>	<b>95%</b>	<b>99%</b>
v =1	0,01000	0,05000	0,2500	0,5000	0,7500	0,9500	0,9900
v =2	0,01400	0,06749	0,2929	0,5176	0,7071	1,0980	1,2728
v =3	0,01699	0,07919	0,3112	0,5147	0,7539	1,1017	1,3589
v =4	0,01943	0,08789	0,3202	0,5110	0,7642	1,1304	1,3777
v =5	0,02152	0,09471	0,3249	0,5245	0,7674	1,1392	1,4024
v =6	0,02336	0,1002	0,3272	0,5319	0,7703	1,1463	1,4144
v =7	0,02501	0,1048	0,3280	0,5364	0,7755	1,1537	1,4246
v =8	0,02650	0,1086	0,3280	0,5392	0,7797	1,1586	1,4327
v =9	0,02786	0,1119	0,3274	0,5411	0,7825	1,1624	1,4388
v =10	0,02912	0,1147	0,3297	0,5426	0,7845	1,1658	1,4440
v =11	0,03028	0,1172	0,3330	0,5439	0,7863	1,1688	1,4484
v =12	0,03137	0,1193	0,3357	0,5453	0,7880	1,1714	1,4521
v =15	0,033424	0,1244	0,3412	0,5500	0,7926	1,1773	1,4606
v =20	0,03807	0,1298	0,3461	0,5547	0,7975	1,1839	1,4698
v =30	0,04354	0,1351	0,3509	0,5605	0,8036	1,1916	1,4801
v >30	$y_p - \frac{1}{6}n^{-1/2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$ , com $y_p^2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{(1-p)}\right)$						
$y_p =$	0,07089	0,1601	0,3793	0,5887	0,8326	1,2239	1,5174

De acordo com este processo, a hipótese de teste consiste em avaliar se a variável aleatória pode ser descrita por uma determinada função distribuição de probabilidade empírica. Para tal, é necessário determinar se o estimador da estatística de teste,  $K_n$ , se encontra compreendido no intervalo da função “K-S” que define determinado nível de confiança correspondente a  $(1-\alpha)$  e cujo limite superior é definido pelo valor de  $k_{n,1-\alpha}$  (estabelecido através da tabela anterior ou recorrendo à expressão da função assintótica apresentada na mesma tabela).

$$H_0 : X_i \sim F(X)$$

$$[K_n \leq k_{n,1-\alpha}] \text{ (aceitação)}$$

$$[K_n > k_{n,1-\alpha}] \text{ (rejeição)}$$

Uma abordagem alternativa, resulta de se determinar o valor de  $K_n$  e, através deste, estimar o valor de referência  $k_{n,1-\alpha}$  equivalente, o qual define o respectivo nível de confiança  $(1-\alpha)$  máximo que lhe está associado.





### Testes “DIEHARD” de G. Marsaglia

Na actualidade, a bateria de testes “DIEHARD”<sup>1</sup> desenvolvida por G. Marsaglia é aceite como a que contém os testes estatísticos mais eficazes na avaliação da natureza “aleatória” de sequências numéricas permitindo simultaneamente, por essa via, qualificar os geradores que lhes dão origem.

Com efeito, estes testes são de um grau de exigência elevado que ultrapassa largamente os testes “clássicos” ( $\chi^2$ , testes de correlação, testes de entropia, testes de deriva e outros), razão pela qual são, também conhecidos como “Stringent tests” (*testes que impõem padrões de desempenho com rigor ou severidade extrema*). Como refere Marsaglia (1984b), “designam-se por *stringent tests* porque aparentam criar maior dificuldade de aceitação que os testes moderados que entretanto se tornaram padronizados”.

Esta perspectiva enunciada por Marsaglia reflectiu-se, de facto, na prática, pois a sua aplicação tem tido como consequência a rejeição de um número considerável de geradores, até então aceites como apropriados para a finalidade pretendida (é o caso de geradores do tipo congruencial linear e *lagged Fibonacci*).

Antes, porém, é conveniente realçar alguns aspectos particulares deste tipo de testes, notados em Marsaglia (1984b) e em Gentle (2003): um destes é o facto da maior parte deles se aplicarem a números inteiros no intervalo  $(0, 2^{31} - 1)$  de acordo com uma distribuição uniforme de valores discretos; outra, corresponde aos valores de probabilidade reportados nos testes, que correspondem a valores de funções de probabilidade acumulada da estatística de teste, o que se traduz numa inversão da interpretação relativa ao sentido de um baixo valor de probabilidade no contexto do teste  $\chi^2$ , uma vez que um resultado de probabilidade baixo num teste *DIEHARD* traduz-se numa boa aproximação relativamente às frequências expectáveis; e finalmente, é importante notar que a aplicação de alguns testes resulta na obtenção de valores individuais de probabilidade (*p-value*) enquanto que outros repetem sucessivamente o teste e comparam a distribuição da estatística de teste com a distribuição teórica da estatística de teste no âmbito da hipótese nula, constituindo, portanto, o que se designa por *testes de segunda-ordem*.

Os 18 testes que compõem a bateria de testes *DIEHARD* são descritos em seguida.

---

<sup>1</sup> Tradução livre do autor: *tradicionalista* ou *conservador*.

### *Teste de espaçamento de aniversários (Birthday spacing test)*

Este teste é desenvolvido numa base equivalente ao que se aplica ao *teste de colisões*, descrito no capítulo 6. A sua exposição é efectuada por analogia, considerando a hipótese de selecção de  $m$  aniversários no período anual contendo  $n$  dias disponíveis, e sendo contabilizado o espaçamento entre os dias de aniversário. Designando a variável  $j$  o número de valores que ocorre mais que uma vez, admite-se que a variável associada possui uma função de distribuição de probabilidade assintótica de Poisson cujo valor médio é conhecido e corresponde a  $m^3/(4n)$ .

Segundo Marsaglia (1984b), o procedimento corresponde a uma versão discreta do “teste de espaçamento iterado”, partindo de se considerar que  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , são espaçamentos induzidos por  $(n - 1)$  valores de variável aleatória uniforme no intervalo  $[0,1)$ . Admitindo que esses valores podem ser extraídos de forma a obter  $S_{(1)} \leq S_{(2)} \leq \dots \leq S_{(n)}$ , então as diferenças ponderadas:

$$nS_{(1)}, (n-1) \cdot [S_{(2)} - S_{(1)}], \dots, 2 \cdot [S_{(n-1)} - S_{(n-2)}], 1 \cdot [S_{(n)} - S_{(n-1)}]$$

constituem um novo conjunto de espaçamentos com distribuição uniforme, ao qual se pode aplicar o teste K-S. A este segundo conjunto de espaçamentos pode-se repetir o mesmo procedimento e assim sucessivamente, teoricamente, um número infinito de vezes. Na prática, devido à representação computacional finita, este processo admite um número reduzido de iterações (segundo Marsaglia (1984b), entre 3 a 10 até se observar a degenerescência das sequências de espaçamentos).

A dimensão de  $n$  é usualmente elevada, por exemplo  $n \geq 2^{18}$ , permitindo a comparação dos resultados obtidos com os resultados expectáveis de uma distribuição de probabilidade de Poisson com a referida média.

Utilizando uma amostra, por exemplo, de 500 valores de  $j$  e aplicando-se o teste  $\chi^2$ , resulta um valor de probabilidade, *p-value*. A repetição deste procedimento para outras amostras fornece outros valores de probabilidade, aplicando-se ao conjunto destes o teste K-S como forma de avaliar a qualidade do ajustamento obtido.

### *Teste de sobreposição de permutações de 5 elementos (Overlapping 5-permutation test)*

Também conhecido como “*OPERM5 Test*”, promove uma análise efectuada a quintuplos consecutivos de números inteiros de uma sequência de teste (por exemplo, valores inteiros pseudo-aleatórios de *32-bit*), onde cada subsequência corresponde a 1/120 combinações possíveis ( $120 = 5!$ ). Cada um dos números inicia uma dessas subsequências, gerando um

*estado* e da sua acumulação, resultam *transições* de *estados*. O teste observa o número de ocorrências de cada estado e das frequências de transição e promove uma avaliação com base na matriz de covariância (120×120). Espera-se que as probabilidades observadas nas diferentes transições de estado possuam uma distribuição assintótica da distribuição  $\chi^2$ , pelo que o teste de avaliação refere-se ao cumprimento dessa relação.

Em Marsaglia (1984b) encontra-se um exemplo prático do “teste de sobreposição em M-tuplos”, particularizado para um caso em que a análise de uma sequência se reporta a triplos que se constituem a partir desta.

#### *Teste da característica de matrizes binárias 31×31 (Binary rank test for 31×31 matrices)*

Este tipo de teste aplica-se aos 31 *bits* colocados nas posições mais à esquerda de 31 números inteiros *aleatórios* de uma sequência observada, constituindo matrizes de números binários de dimensão 31×31 no campo {0,1}. A característica (“*rank*”) da matriz é estimada, sendo esse procedimento repetido, e contadas as matrizes com característica 31, 30, 29 e 28 ou menos (considera-se que raramente se observam ocorrências de matrizes de característica inferior a 28, justificando este agrupamento final) sendo aplicado, em seguida, o teste  $\chi^2$  a estas quatro categorias citadas.

Mais uma vez encontra-se em Marsaglia (1984b) a expressão genérica que determina a probabilidade de se observar um valor da característica de uma matriz *aleatória*, cuja dimensão é  $m \times n$ , e que permite (no caso deste teste e dos dois que se seguem) utilizar esses valores como critérios de aceitação de sequências de geradores conjuntamente com a aplicação do teste  $\chi^2$ .

#### *Teste da característica de matrizes binárias 32×32 (Binary rank test for 32×32 matrices)*

Teste equivalente ao anterior, com a diferença observada na modificação da dimensão da matriz, sendo aplicável aos 32 *bits* de números inteiros *aleatórios*. Neste caso, é observado o valor acumulado para matrizes de característica igual ou inferior a 29 pelas mesmas razões invocadas no caso do teste anterior. A avaliação é efectuada novamente, aplicado o teste  $\chi^2$  às quatro categorias consideradas (32, 31, 30 e 29 ou menor).

#### *Teste da característica de matrizes binárias 6×8 (Binary rank test for 6×8 matrices)*

Tipo de teste equivalente aos anteriores, incorporando uma modificação do conteúdo das linhas da matriz, as quais, são constituídas por grupos de seis números inteiros *aleatórios* de

32 *bits*, originando um *byte*. Os 6 *bytes* constituídos formam uma matriz de dimensão 6×8, para a qual, se determina a sua *característica*. É habitual considerar como ocorrências para a execução posterior do teste  $\chi^2$  às *características* 6, 5 e 4 ou inferior, por se considerar que a ocorrência de *características* equivalentes a 0, 1, 2 e 3 são raras.

#### *Teste de sequências de bits (Bit stream test)*

Este teste aplica-se a subsequências de *bits* de um gerador de números aleatórios, constituindo agrupamentos de 20 *bits* cada, com sobreposição resultante de se iniciar cada *palavra* com os *bits* sucessivos. Considerando uma “*palavra*” de 20-*bits*  $b_1b_2\dots b_{20}$ , a “*palavra*” seguinte será  $b_2b_3\dots b_{21}$  e assim sucessivamente.

O teste consiste em contabilizar o número de ausências de “*palavras*” de 20-*bits* (sendo esta a estatística de teste) numa amostra constituída da forma apresentada anteriormente, e tendo como base uma sequência que, tipicamente, tem a dimensão de  $2^{21}$  *bits*. Assim, o teste aplica-se às  $2^{20}$  “*palavras*” de 20-*bits* possíveis, para as quais se espera observar uma distribuição de probabilidade normal.

Com efeito, admitindo uma sequência de  $(2^{21}+19)$  *bits* genuinamente aleatória, o número de “*palavras*” em falta,  $j$ , deve possuir uma distribuição normal cuja média é 141 909 e desvio-padrão 428. Perante este facto, o teste pressupõe verificar que a variável  $(j - 141\,909) / 428$  corresponde a uma variável normal padronizada. Este teste deve ser repetido, tipicamente, por vinte vezes.

#### *Teste de ocupação dispersa de pares com sobreposição (Overlapping-pairs-sparse-occupancy test)*

Este teste, Também designado por “*OPSO Test*”, resulta da constituição de *palavras* de 2-*letras*, as quais, são obtidas a partir de um alfabeto de 1024 (entre 0 e 1023) ou 2048 (entre 0 e 2047) possibilidades de escolha (consoante o número de *bits* de “*palavras*” sucessivas, por exemplo, no caso de 2047 refere-se a *palavras* de 11 *bits*). Cada *letra* resulta de um conjunto especificado de 10-*bits* pertencentes a um inteiro de 32-*bits*, integrados na sequência sujeita ao teste.

Admitindo a geração de  $2^{21}$  *palavras* de 2-*letras* (com sobreposição) é contabilizado o número de *palavras* não presentes na sequência,  $k_i$ , testando a sua aproximação relativamente à distribuição expectável de probabilidade normal (de média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ ), usando a

estatística de teste  $(k_i - \mu)/\sigma$ . O teste utiliza *10-bits* consecutivos de amostras de *32-bits* de cada vez, repetindo esse procedimento.

Tal como no caso anterior, a distribuição normal expectável possui média igual a 141 909 e desvio-padrão 290 (em rigor, 290,26), o que permite testar a variável  $(missingwords - 141\ 909) / 290$ , onde *missingwords* representa a variável “*palavras não presentes*”, para verificar se é uma variável normal padronizada. No caso de *palavras* de 11 bits e  $n=2^{22}$  os parâmetros a considerar [Marsaglia (1984b)] são  $\mu=1\ 542\ 998$  e  $\sigma=638,75$  e para *palavras* de 11 bits e  $n=2^{23}$  tem-se  $\mu=567\ 639$  e  $\sigma=580,80$ .

#### *Teste de ocupação dispersa de quádruplos com sobreposição (Overlapping-quadruples-sparse-occupancy test)*

Este teste, também designado por “*OQSO Test*”, tem uma estrutura similar ao anterior com a diferença resultante de considerar alternadamente *palavras* de *4-letras*, as quais são obtidas a partir de um alfabeto de 32 possibilidades de escolha, resultando cada *letra* da designação de subsequências de 5-bits de elementos da sequência em teste. Neste caso, o valor do desvio-padrão de referência é igual a 295, sendo determinado por simulação.

#### *Teste DNA (DNA test)*

Teste equivalente ao anterior embora utilizando palavras de 10 *letras* suportadas num alfabeto de quatro *letras* (designadas por C, G, A, T), equivalente ao aplicável na decifração do DNA, decorrendo desse facto a sua designação. O processo de avaliação é equivalente aos dois testes apresentados anteriormente.

#### *Teste de contagem de 1s em sequências de bytes (Count-the-1s test on a stream of bytes)*

Este teste tem como suporte a distribuição de probabilidade binomial (8; 0,5), de *1s* em *bytes* aleatórios distribuídos uniformemente. Considerando que o ficheiro em teste é constituído por sequências de *bytes*, quatro por cada valor de *32-bits*, contendo cada byte entre 0 e 8 valores “1”, a contagem de valores “1” é efectuada para os *bytes*, contabilizando a presença de 0, 1, 2, ... 8 bits iguais a “1” e agrupando-os em 5 classes possíveis {0, 1, 2}, {3}, {4}, {5} e {6, 7, 8} – as probabilidades associadas às classes 0,1,...,8 correspondem a 1,8,28,56,70,56,28,8,1 sobre 256, enquanto que as cinco classes consideradas possuem probabilidade correspondentes a 37,56,70,56,37 sobre 256. Seguidamente, são constituídas

sequências de 5 bits, com sobreposição, e são efectuadas contagens das  $5^5$  combinações que se podem obter.

Constrói-se, com base na informação precedente, a matriz de covariância, e aplica-se o teste  $\chi^2$  aos resultados obtidos. Este teste é, igualmente, identificado por “*monkey at a typewriter test*” por analogia com a probabilidade de um macaco carregar em cinco teclas específicas de uma máquina de escrever.

#### *Teste de contagem de 1s em bytes seleccionados (Count-the-1s test for specific bytes)*

Teste cujo princípio é equivalente ao apresentado anteriormente, aplicando-se a um conjunto específico de *bytes* seleccionáveis em cada valor inteiro da sequência. Por exemplo, o *byte* constituído pelos 8 *bits* colocados mais à esquerda. A análise que se concretiza a seguir é, então, equivalente à desenvolvida e exposta relativamente ao teste anterior.

#### *Teste de estacionamento (Parking lot test)*

Este tipo de teste visa a avaliação da uniformidade de pontos num espaço  $m$ -dimensional, sendo o seu exemplo mais simples baseado na colocação aleatória de círculos de raio de 1 unidade em torno de um centro colocado aleatoriamente num quadrado de lado igual, por exemplo, a 100 unidades. O teste consiste em avaliar o número de “carros estacionados” (ou seja, círculos colocados sem sobreposição), após um número elevado de tentativas. Por essa via, procura-se determinar os valores críticos e a estatística de teste através do recurso à simulação computacional (Uma variante mais fácil de visualizar consiste em considerar, em alternativa, o estacionamento de helicópteros).

A análise efectua-se conhecendo-se o número de tentativas de “estacionamento” e contabilizando o número de sucessos de “estacionamento”, resultando uma curva comparável com a de um gerador “perfeito” de números aleatórios, cuja distribuição é normalmente distribuída.

Assim, para um valor de tentativas de  $n = 12000$ , por exemplo, a média de sucessos,  $k$ , deve corresponder a 3523 e o desvio-padrão a 21,9. Desta forma, uma avaliação do teste pressupõe, para o caso apresentado, o teste de verificação da normalidade relativamente à variável normalizada  $(k-3523)/21,9$  tendo como base a aplicação do teste K-S aos resultados obtidos.

### *Teste de distâncias mínimas (Minimum distance test)*

Este teste avalia a distância mínima,  $d$ , estabelecida entre um número,  $n$ , elevado de pontos aleatórios num quadrado, efectuando-se o teste para os  $(n^2 - n)/2$  pares de pontos envolvidos. Se os pontos forem uniformemente independentes, então, a variável associada ao quadrado da distância mínima,  $d^2$ , deverá evidenciar do tipo exponencial, cuja média dependerá do comprimento do lado do quadrado e do número de pontos considerados no teste. É aplicado o teste K-S avaliando a adequação da adopção da função de distribuição de probabilidade exponencial.

### *Teste de esferas 3-D (3-D Spheres Test)*

Este teste resulta da selecção aleatória de um número elevado de pontos (4000, por exemplo) num cubo cujo lado tem a dimensão de 1000 unidades. Em cada ponto coloca-se uma esfera centrada, com raio suficientemente alargado que possa atingir o ponto mais próximo. Verifica-se que o volume da esfera de menor dimensão assume uma distribuição de probabilidade exponencial com média igual a  $120\pi/3$ , permitindo a determinação da distribuição de probabilidade do raio ao cubo, igualmente exponencial, com média igual a 30. A repetição do teste gera valores mínimos de  $r^3$  que se traduz numa variável uniforme com valores de probabilidade, podendo aplicar-se, a esta, o teste de ajustamento K-S.

### *Teste de compressão (Squeeze test)*

Teste aplicável a sequências provenientes de distribuições que, por hipótese, configuram uma distribuição de probabilidade uniforme  $\mathcal{U}(0,1)$ , consistindo da determinação de iterações,  $i$ , necessárias para reduzir um determinado número  $k$  (por exemplo, igual a  $2^{31}$ ) a 1, utilizando subsequências de teste  $u$  e recorrendo à operação  $k = \lceil k * u \rceil$ . A avaliação é concretizada usando o teste  $\chi^2$  aplicado aos resultados de um número de repetições do processo (por exemplo,  $10^6$ ), às classes  $i$ :  $\{\leq 6, 7, \dots, 46, 47, \geq 48\}$ .

### *Teste de sobreposição de somas (Overlapping sums test)*

Este teste tem uma aplicação num contexto que é equivalente ao teste anterior, aplicando-se a subsequências de somas de 100 elementos, admitindo a sobreposição destes em somas sucessivas. É aplicada, repetidamente a cada soma, uma avaliação de normalidade usando o teste  $\chi^2$ .

Supondo que o conjunto de somas constitui uma sequência de valores independentes normais, é efectuada uma avaliação final, recorrendo novamente ao mesmo teste.

#### *Teste craps (Craps Test)*

Este tipo de teste efectua uma simulação baseada no jogo praticado em casinos designado por “craps” (jogo que pressupõe o lançamento simultâneo de dois dados, designando-se por *craps* o evento constituído pela observação da saída de 1 marca em cada dado), sendo contabilizado o número de sucessos (cuja função de distribuição de probabilidade deve aproximar-se da normal de média  $n.p$  e variância  $[n.p.(p-1)]$ ) e o número de lançamentos necessários para concluir cada jogo, aplicando-se, em seguida, o teste do  $\chi^2$  às contagens que foram observadas. É habitual efectuar o agrupamento das contagens superiores a 21 numa única categoria.

#### *Teste de corridas (Runs Test)*

Este teste equivale aos testes “runs up” e “runs down”, cuja descrição se encontra pormenorizada no capítulo 6.

Como nota final, refira-se que Marsaglia (1984b) expõe, nesta referência bibliográfica, os resultados obtidos pela aplicação de oito destes testes aos geradores, Congruencial linear, de deslocamento de registos, *Lagged-Fibonacci* com diferentes operações aritméticas, Super-Duper, COMBO e NCOMBO, determinando aqueles onde o seu desempenho conduz a uma aceitação ou a uma rejeição consoante os testes aplicados.



### **Sobre a validação de *software* utilizado na simulação computacional**

A simulação computacional é suportada em ferramentas computacionais envolvendo o desenvolvimento de programas dedicados a concretizar as diferentes etapas (neste caso, associadas ao método de Monte Carlo) e, como tal, possuem elementos de risco característicos deste tipo de processos.

Esta sua natureza faz com que estas ferramentas computacionais (adiante designadas simplesmente por *software*) tipicamente classificadas como “MOTS” (“Modified Off-The-Shelf”) ou “Custom” [Ribeiro (2001)] devam ser objecto de procedimentos de validação, de forma a garantir a sua qualidade face aos requisitos da simulação.

Neste contexto, a *validação*<sup>1</sup> [ISO/IEC 12207 (1995)] é *a confirmação e evidenciação objectiva de que os requisitos particulares para uma utilização específica são cumpridos*.

Assim, dentro do objectivo de garantia da qualidade podem-se apontar dois elementos distintos onde se entende haver necessidade de promover essa validação:

- o elemento que incorpora o gerador de sequências de números pseudo-aleatórios, cuja validação deve ser considerada face aos requisitos associados às propriedades de independência e de uniformidade essenciais para a sua qualificação;
- o elemento que agrupa as rotinas na linguagem estruturada seleccionada (Fortran 90), face à reprodução dos valores, parâmetros e configurações expectáveis – teóricos.

O processo de validação aplicável ao gerador utilizado, de Hill e Wichmann (H-W), envolve a execução de testes empíricos (cf. exposto no capítulo 7), cujos resultados permitem a aceitação ou rejeição para o objectivo em causa: a geração de números pseudo-aleatórios. Esta questão foi detalhada em 7.6.5.1, onde se apresentam os resultados dos testes e os argumentos que sustentam a adopção do gerador H-W como apropriado a essa finalidade.

No que se refere ao segundo elemento apontado, verifica-se que as rotinas desenvolvidas têm funcionalidades diversificadas que convém identificar previamente e caracterizar os aspectos para os quais se justifica avaliar a sua aptidão.

---

<sup>1</sup> Considera-se importante não confundir este conceito com o conceito de *verificação*, cuja definição se encontra na mesma referência bibliográfica, designando a *confirmação e evidenciação objectiva de que os requisitos especificados são cumpridos*.

As funcionalidades das rotinas são:

- a) a implementação do algoritmo de geração H-W;
- b) a conversão de sequências de valores com função de probabilidade uniforme noutras sequências de valores com funções de probabilidade distintas desta;
- c) a combinação de valores associados a grandezas de entrada visando a obtenção de sequências de valores de grandezas de saída;
- d) a ordenação dos valores de sequências de saída;
- e) a identificação de valores associados aos percentis, determinados nas sequências ordenadas de saída;
- f) o cálculo de resultados (intervalos de incerteza de medição, exactidão associada aos valores dos percentis, etc.).

No que se refere aos aspectos de avaliação das rotinas, estes serão referidos resumidamente ao se apontarem os parâmetros de teste aplicáveis às diferentes rotinas.

O processo de validação adoptado recorre a um procedimento específico [Ribeiro (2001)] que estabelece um conjunto de etapas, de acordo com uma metodologia desenvolvida no seio da *SSfM* [Cox et al (1998), (2004a), (2004b)], [Cox (1999)], [Wichmann (1999)], [Wichmann et al. (2004)] e complementada com a análise de metodologias similares [Schulmeyer et al (2000)]. O procedimento, abreviadamente exposto, tem como suporte normativo as referências [ISO/IEC 9126 (1991)], [IEEE 1012 (1998)], [ISO/IEC 12207 (1995)], [CEI/IEC 61508-1 (1998)] e [CEI/IEC 61508-3 (1998)]. Este procedimento de validação tem as etapas descritas em seguida.

- p1. a identificação genérica do software constituinte do sistema;*
- p2. a identificação das características funcionais e requisitos do software;*
- p3. a determinação de parâmetros de teste;*
- p4. a realização da análise do risco e da criticidade. Determinação do grau de integridade associado ao software;*
- p5. a selecção e execução de técnicas de validação;*
- p6. a especificação de parâmetros de referência e de critérios de validação, definição de dados de teste e obtenção de resultados de teste;*
- p7. a comparação entre parâmetros de teste e de referência e, com base nos critérios e nos parâmetros de validação, decidir acerca da validação do software em análise;*

*p8. a elaboração de um relatório final de validação, incluindo a conclusão relativamente à aceitação/rejeição do software relativamente à utilização pretendida.*

A aplicação deste procedimento aos diversos tipos de rotinas (*a - f*), é descrita no que se refere aos seus aspectos fundamentais.

A *identificação das características funcionais e requisitos, p2*, visou apontar as características de *natureza funcional*<sup>2</sup>, envolvendo a execução de funções, operações lógicas e algoritmos, tarefas de conversão de dados, tolerâncias e erros, e o arquivo e a gestão de informação. No caso das rotinas de ordenação *a.*, *b.* e *d.*, considerou-se importante a avaliação adicional de requisitos de *desempenho*, designadamente, o desempenho temporal e de requisitos de ocupação de memória.

A *determinação de parâmetros de teste, p3*, procurou identificar as variáveis críticas no processo envolvido em cada uma das rotinas. Por exemplo, no caso da aplicação do algoritmo de H-W, a principal variável de teste é o número gerado – que depende do valor de semente; no caso da utilização do modelo matemático para obter valores da sequência de saída, a variável de teste é o próprio valor de saída.

A *realização da análise do risco e da criticidade*<sup>3</sup>, a partir da qual se determina o *grau de integridade requerido ao processo, p4*, visa suportar a selecção de técnicas de validação efectuada em *p5*. Esta etapa consiste, genericamente, em caracterizar o *risco* envolvido na utilização de cada rotina para o processo e, com base nessa informação, identificar o *grau de integridade do sistema* (indicador designado por GIS) [Ribeiro (2001)].

Esse *grau de integridade do sistema* (neste caso, *computacional*) subdivide-se em quatro parâmetros (*criticidade; requisitos normativos ou aprovações regulamentares; complexidade de controlo; e complexidade de processamento de dados*). Cada um destes admite uma classificação de 1, 2, 3 ou 4, consoante o seu grau de exigência é mínimo (1), menor (2), moderado (3) ou elevado (4). O valor atribuído ao *grau de integridade do sistema* é o maior dos valores observados nas quatro variáveis apontadas resultando, nas situações consideradas de risco mínimo (GIS 1) e nas de risco crítico ou máximo (GIS 4).

---

<sup>2</sup> Para além das características consideradas fundamentais, de natureza funcional e de desempenho, outras características consideradas relevantes noutros contextos de aplicação são, por exemplo: os atributos de Qualidade, os constrangimentos de concepção e desenvolvimento, de segurança e protecção, de documentação e de interface, por exemplo [Ribeiro, 2001].

<sup>3</sup> Entende-se por criticidade a severidade das consequências decorrentes da falha dum sistema em análise.

Esta classificação é utilizada, posteriormente, na determinação de técnicas de validação apropriadas a cada caso (etapa crucial atendendo a três variáveis dependentes desta selecção: a diversidade de técnicas disponíveis, o risco associado a uma avaliação incompleta de um sistema, e o efeito económico subjacente a um processo de validação excessivamente exigente), que constituem a etapa seguinte do procedimento, p5.

Refira-se que a análise das diferentes rotinas conduziu a uma classificação genérica de GIS 3, correspondente a sistemas envolvendo criticidade elevada (nível 3) – aplicável quando as funções afectam o desempenho do sistema de forma significativa –; o processamento de dados é moderado (nível 3) – aplicável a casos em que a influência da execução no processo não é perfeitamente quantificável –; a complexidade de controlo é moderada (nível 3) – aplicável a sistemas de parametrização moderada, não exigindo recursos complexos para a sua aplicação; e observando-se a inexistência de requisitos normativos específicos (nível 1).

De acordo com o indicador obtido, GIS 3, foram seleccionadas duas técnicas [Ribeiro (2001)] que são recomendadas para esse indicador e cuja combinação se considera particularmente apropriada para o tipo de avaliação requerido nas diferentes rotinas:

- **conjunto de testes de referência**, técnica baseada no desenvolvimento de conjuntos de dados de referência e de resultados, com os quais é efectuada uma comparação objectiva com valores equivalentes de teste (obtidos tratando a ferramenta computacional como "caixa-negra"), recorrendo a parâmetros métricos. Esta comparação visa a avaliação do grau de correcção do algoritmo, tendo em vista a exactidão e a adequação aos requisitos associados à sua utilização;
- **especificações matemáticas**, técnica baseada em especificações de natureza matemática que indicam os resultados obtidos como função dos valores de entrada. Este processo é adequado quando existe um processamento simples de dados de medições. É necessário ter em consideração que, nalguns casos, a forma de implementação computacional poderá ser diferente do tratamento matemático caracterizado na especificação.

A selecção destas técnicas de validação implica, adicionalmente, que sejam definidos os parâmetros de referência – no caso, os resultados expectáveis, por via das especificações matemáticas ou funcionais – e os critérios de validação – ou tolerâncias. A aplicação típica aos casos de estudo, envolve uma *rotina de combinação de valores associados a grandezas de entrada visando a obtenção de sequências de valores de grandezas de saída*,  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ .

A variável de teste é  $y$ , o parâmetro de referência é  $y_{ref} = f(x_1, \dots, x_n)$ , e o critério de validação é suportado na diferença máxima admissível  $\delta$  entre o valor de referência e o valor obtido pela rotina em valor absoluto,  $|y_{ref} - y|$ . A combinação das duas técnicas apontadas incorporando os elementos anteriores, apresenta-se no diagrama da Fig. A6.1.

No caso particular da utilização da MCS existe uma forma complementar de validação do processo na sua globalidade. Com efeito, em virtude de ser possível obter os resultados pela via analítica para a convolução de algumas funções, constituindo resultados de referência, é possível comparar esses resultados com os resultados da simulação.

Nesse sentido, foram efectuados testes visando a comparação entre os resultados obtidos pela via analítica e pela simulação de duas funções de probabilidade uniforme (cujo resultado é exposto no capítulo 7).

Esse teste foi realizado, combinando distribuições de probabilidade uniforme com diferentes amplitudes e comparando os resultados obtidos com os resultados expectáveis. Como ilustração dos resultados obtidos é exposta a figura seguinte, associada à convolução de duas distribuições de probabilidade uniforme cujas semi-amplitudes correspondem a  $\pm 1$  e  $\pm 2$ , apresentando-se a curva obtida por via analítica – convolução – e o histograma obtido em resultado da MCS (para sequências de 200 000 valores cada), evidenciando a concordância de forma – configuração – e dos parâmetros que definem a sua geometria e a sua probabilidade (vértices do polígono e probabilidade máxima igual a 0,5) obtidos de acordo com as posições de referência expostas na Figura A6.2.

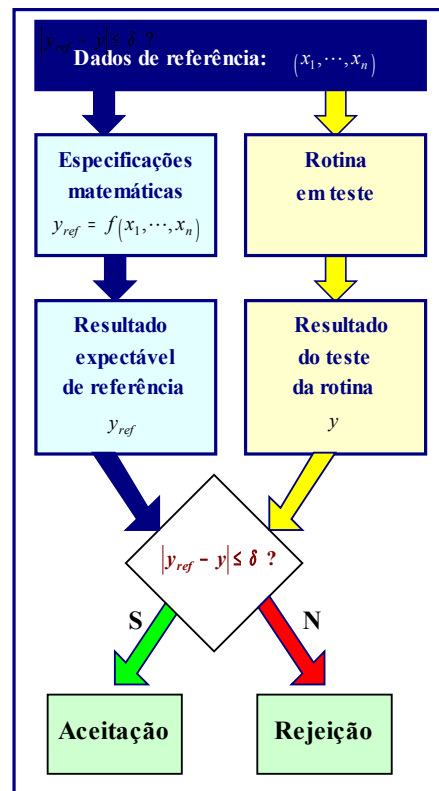
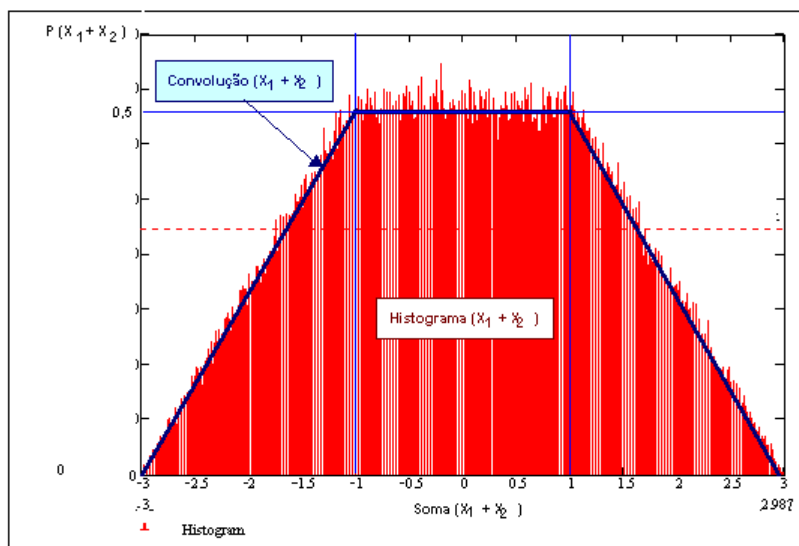


Figura A6.1: Combinação do teste de referência com o teste de especificações matemáticas



*Figura A6.2: Comparação de resultados obtidos por via analítica e por MCS, relativa à convolução de duas distribuições uniformes*

No processo de validação foi introduzido, ainda, um teste adicional, aplicado em todos os ensaios descritos nos capítulos 8 e 9, destinados a avaliar a sensibilidade da metodologia MCS face a modificações – ao nível do elemento de semente do gerador.

O procedimento adoptado envolveu a replicação da simulação, suportada em sequências de números pseudo-aleatórios totalmente distintas da primeira execução, seguindo-se uma comparação entre os resultados obtidos na primeira e na segunda simulação. A comparação evidencia o grau de sensibilidade associado a este factor. Os resultados obtidos foram expostos nas secções relativas aos diferentes casos, podendo afirmar-se que, genericamente, todos eles possuem resultados que evidenciam uma reduzida sensibilidade face à variação dos valores de semente utilizados.

### Distribuição de probabilidade meio-U ou meio-arcoseno

No contexto da Metrologia, existe um conjunto de distribuições de probabilidade que são predominantemente associadas a grandezas de influência sendo, inclusivamente, apontadas no GUM. É o caso das distribuições uniforme, triangular e arcoseno.

Estas distribuições têm, entre outras particularidades, uma configuração simétrica e, em grande parte das aplicações, um valor médio nulo.

Este facto não impede, porém, a ocorrência de circunstâncias onde a variação da grandeza aleatória em causa possui uma distribuição assimétrica e não centrada em zero. Um exemplo característico ocorre em medições de tempo, onde a variabilidade existe entre os valores 0 e  $t$ , podendo ser assimétrica no sentido de ser mais provável junto de  $t$  do que de 0 (a situação contrária ou outras intermédias são igualmente possíveis).

Neste caso particular, aplicado a uma grandeza de entrada  $q$ , um processo de caracterização dessa distribuição de probabilidade consiste em determinar uma distribuição, aqui designada pelo autor por “distribuição de probabilidade meio-arcoseno”, a qual teria uma configuração equivalente a metade da conhecida distribuição “arcoseno”, aplicável a domínios  $[0, \delta q]$  [ ou ]  $[-\delta q, 0]$  (esta segunda opção obter-se-ia facilmente a partir da primeira ao inverter o sinal dos valores de  $q$ ).

Uma solução encontrada para este problema, consiste na utilização de uma função (similar à que determina a distribuição arcoseno) definida num intervalo  $[0; a]$  e dada por:

$$f(\xi; a) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < 0 \\ \frac{2}{\pi \sqrt{a^2 - \xi^2}} & \text{se } 0 \leq \xi < a \\ 0 & \text{se } \xi \geq a \end{cases} \quad (\text{A7.1})$$

Esta expressão cumpre os princípios da Teoria das Probabilidades, em particular, a função assume valores tais que:  $f(\xi; a) \geq 0$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$  e o seu integral em todo o domínio é igual a 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi; a) d\xi = \int_0^a f(\xi; a) d\xi = \int_0^a \frac{2}{\pi \sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi a} \cdot \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2}} d\xi = \frac{2}{\pi} \cdot [\arcsen(1) - \arcsen(0)] = 1$$

A função distribuição cumulativa, por sua vez, é dada por:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f(v; a) dv = \int_0^{\xi} \frac{2}{\pi \sqrt{a^2 - v^2}} dv = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2}} dv =$$

$$\frac{2}{\pi a} \left[ a \cdot \arcsen\left(\frac{\xi}{a}\right) - a \cdot \arcsen(0) \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsen\left(\frac{\xi}{a}\right) \right]$$

ou seja,

$$F(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < 0 \\ \frac{2}{\pi} \left[ \arcsen\left(\frac{\xi}{a}\right) \right] & \text{se } 0 \leq \xi < a \\ 1 & \text{se } \xi \geq a \end{cases} \quad (\text{A7.2})$$

Conhecendo a função distribuição de probabilidade (A7.2), a obtenção de sequências aleatórias com esta função aplicáveis na simulação MCS envolve a aplicação do método de inversão de funções (descrito no cap. 6),

$$u = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsen\left(\frac{\xi}{a}\right) \right] \Rightarrow \arcsen\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{\pi u}{2} \Rightarrow \left(\frac{\xi}{a}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)$$

e, finalmente,

$$\xi = a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right) \quad (\text{A7.3})$$

onde  $u$  representa os valores da variável aleatória de distribuição de probabilidade uniforme no domínio  $[0,1]$ .

A equação (A7.3) é válida em todo o domínio de  $u \in [0, 1[$ , uma vez que, nestes limites, o termo  $\left(\frac{\pi u}{2}\right)$  tem uma variação compreendida em  $\left[0, \frac{\pi}{2}[ \right]$ ,  $\text{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)$  em  $[0, 1[$  e, finalmente,  $a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)$  em  $[0, a[$  conforme desejado.



Avaliando, agora, a sua configuração, verifica-se que a representação da função densidade de probabilidade (A7.1) aplicada no intervalo  $[0,1]$  (i.e., o valor de  $a$  é igual a 1), é a seguinte.

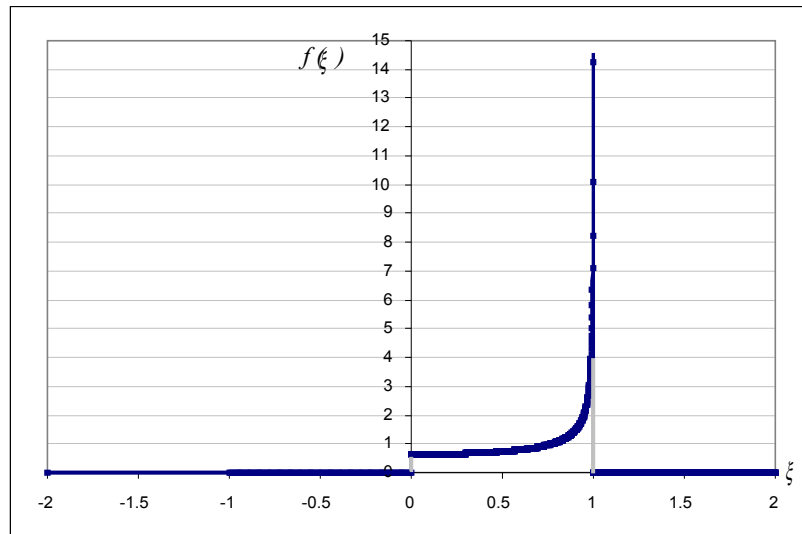


Figura A7.1: Representação da função densidade de probabilidade meio-arco seno

A segunda verificação consiste em utilizar a equação A7.3 na simulação usando MCS e observar o resultado obtido – histograma dos valores da sequência de saída.

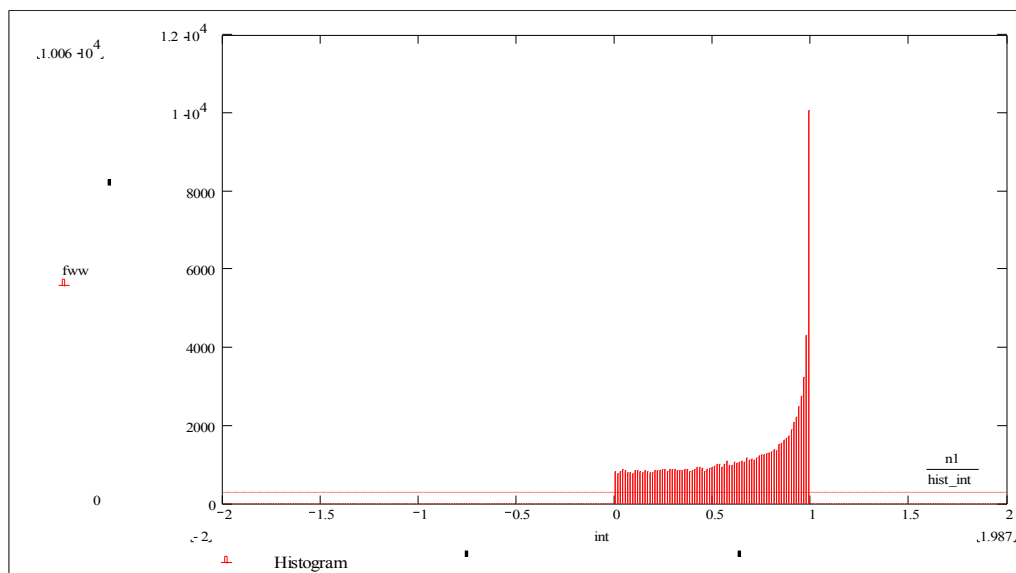


Figura A7.2: Histograma resultante da aplicação da expressão (A7.3) em simulação MCS

