

CRITÉRIO DE INTERACÇÃO ENTRE O ESFORÇO NORMAL E O MOMENTO FLECTOR EM SECÇÕES DE AÇO EM I MONOSSIMÉTRICAS TOTALMENTE PLASTIFICADAS

António Manuel Baptista ^a

^a *Departamento de Estruturas, LNEC*

Resumo. O presente trabalho propõe um critério de interacção N-M para secções de aço em I monossimétricas totalmente plastificadas, definido por expressões analíticas exactas deduzidas com base na hipótese clássica de formação de uma rótula plástica. É também apresentado um critério de interacção N-M para estas secções no seu estado limite elástico. Estes critérios são descritos através de variáveis adimensionais, sendo por isso independentes das dimensões da secção em causa. A influência da assimetria da secção nestes critérios é posta em relevo através da sua representação gráfica no caso particular de um exemplo de aplicação.

1 Introdução

Os métodos de cálculo elastoplástico têm vindo a ser progressivamente introduzidos nos regulamentos de cálculo de estruturas metálicas de vários países europeus, desde meados do século XX. A verificação da segurança das secções transversais no seu estado limite último de plastificação é frequentemente efectuada através de critérios de interacção N-M, que fornecem os valores resistentes do esforço normal e do momento flector numa secção totalmente plastificada, habitualmente designada “rótula plástica” [1,2,3].

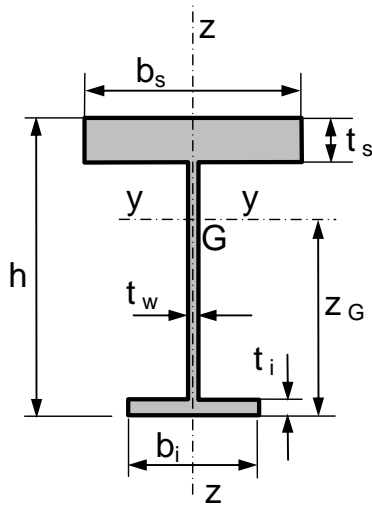
Estes critérios são estabelecidos através das condições de equilíbrio entre os esforços internos da secção e as forças exteriores aplicadas, e dependem da forma geométrica da secção [4]. No entanto, a informação disponível na literatura e nos regulamentos de cálculo sobre os critérios de interacção N-M aplicáveis a determinados tipos de secções é relativamente escassa, nomeadamente no caso de secções assimétricas relativamente ao seu eixo de flexão. O Eurocódigo 3 [5], por exemplo, não fornece indicações a este respeito, e as expressões existentes na literatura [2] revelam-se por vezes insuficientes para efeitos da sua aplicação prática directa.

O presente trabalho propõe um critério de interacção N-M aplicável a secções de aço em I com um único eixo de simetria, perpendicular ao seu eixo de flexão. Este critério é definido por expressões analíticas exactas, estabelecidas com base nas hipóteses associadas à formação de uma rótula plástica. Adicionalmente, é também apresentado um critério de interacção N-M para estas secções no seu estado limite elástico.

As expressões analíticas destes critérios são escritas sob uma forma adimensional, sendo por isso independentes das dimensões da secção transversal [5]. Por outro lado, tomam directamente em conta as relações entre as dimensões dos elementos constituintes da secção, alma e banzos, reflectindo por isso a influência que estas características geométricas têm sobre a interacção entre os esforços internos da secção.

2 Características geométricas das secções transversais

A geometria das secções transversais analisadas no presente trabalho é apresentada na Fig. 1, bem como a indicação das principais dimensões que a caracterizam:



b_s - largura do banzo superior

t_s - espessura do banzo superior

b_i - largura do banzo inferior

t_i - espessura do banzo inferior

h - altura total da secção

t_w - espessura da alma

z_G - distância do centro de gravidade (G) à fibra extrema inferior da secção

Fig. 1: Secção em I monossimétrica

Embora, na secção-tipo considerada, o banzo superior tenha dimensões superiores às do banzo inferior, as equações apresentadas neste trabalho são também aplicáveis às respectivas secções invertidas (com o banzo inferior maior que o superior), conforme se explicará adiante.

A área da secção transversal indicada na Fig. 1 pode ser calculada através da equação (1):

$$A = k_A t_w h \quad (1)$$

O coeficiente k_A é determinado através da equação (2), em função dos factores de forma α_B , α_H , α_b e α_h definidos nas equações (3) a (6):

$$k_A = 1 + (\alpha_B - 1) \alpha_H + (\alpha_b - 1) \alpha_h \quad (2)$$

$$\alpha_B = b_s / t_w \quad (3)$$

$$\alpha_H = t_s / h \quad (4)$$

$$\alpha_b = b_i / t_w \quad (5)$$

$$\alpha_h = t_i / h \quad (6)$$

A distância z_G do centro de gravidade (G) à fibra extrema inferior da secção (Fig. 1) pode ser determinada através da equação (7), em função do factor α_G fornecido pela expressão (8).

$$z_G = \alpha_G h \quad (7)$$

$$\alpha_G = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + (\alpha_B - 1)(2 - \alpha_H)\alpha_H + (\alpha_b - 1)\alpha_h^2}{1 + (\alpha_B - 1)\alpha_H + (\alpha_b - 1)\alpha_h} \right] \quad (8)$$

Como se pode observar através desta equação (8), a posição do centro de gravidade depende dos quatro factores de forma definidos nas equações (3) a (6). No caso de uma secção em I bissimétrica, tem-se $\alpha_B = \alpha_b$ e $\alpha_H = \alpha_h$, pelo que a equação (8) conduz à solução $\alpha_G = 0,5$, como seria de esperar.

Esta solução corresponde ao valor mínimo de α_G para uma secção em I monossimétrica com a configuração indicada na Fig. 1 (com o banzo superior maior que o inferior). O valor máximo de α_G depende das dimensões relativas de cada um dos banzos, superior e inferior, através dos factores de forma α_B , α_H , α_b e α_h , bem como da relação entre estes mesmos factores. Assim, por exemplo, no caso de uma secção em I monossimétrica com os banzos superior e inferior da mesma largura ($\alpha_B = \alpha_b$), o valor da espessura relativa do banzo inferior α_h que conduz a um valor máximo de α_G é dado pela expressão (9):

$$\alpha_h = \frac{-1 + \sqrt{\alpha_b}}{(\alpha_b - 1)(\alpha_H/\alpha_h + 1)} \quad (9)$$

De acordo com esta equação, se os parâmetros de forma α_B e α_b tomarem o valor $\alpha_B = \alpha_b = 12,5$, por exemplo, e se a espessura do banzo superior for igual ao dobro da do banzo inferior ($\alpha_H/\alpha_h = 2$), o factor α_G (e, conseqüentemente, a distância z_G) atingirá o seu valor máximo $\alpha_G = 0,59317$ quando $\alpha_h = 0,07349$. Já no caso de a espessura do banzo superior ser igual ao triplo da do banzo inferior, o factor α_G atingirá o seu valor máximo $\alpha_G = 0,63976$ quando $\alpha_h = 0,05512$.

A representação gráfica da variação do valor de α_G em função do factor α_h e da relação α_H/α_h , para o caso particular de $\alpha_B = \alpha_b = 12,5$, pode ser observada na Fig. 2.

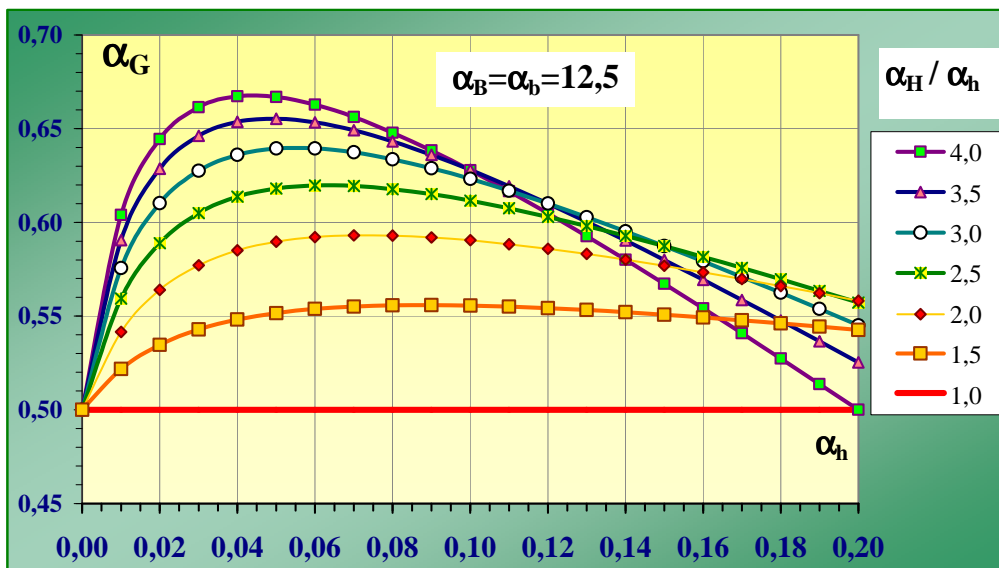


Fig. 2: Representação da variação da posição do centro de gravidade ($\alpha_G = z_G/h$) de uma secção em I monossimétrica com os dois banzos da mesma largura ($\alpha_B = \alpha_b = 12,5$)

O momento de inércia I_y da secção transversal, relativamente ao eixo y - y indicado na Fig. 1, pode ser calculado através da equação (10):

$$I_y = k_I \frac{t_w h^3}{3} \quad (10)$$

O coeficiente k_I é determinado através da equação (11), em função dos factores de forma $\alpha_B, \alpha_H, \alpha_b, \alpha_h$ e α_G anteriormente definidos:

$$k_I = 1 + (\alpha_B - 1) (\alpha_H^2 - 3 (\alpha_H - 1)) \alpha_H + (\alpha_b - 1) \alpha_h^3 + \dots \\ \dots + 3 \alpha_G [(\alpha_B - 1) (\alpha_G + \alpha_H - 2) \alpha_H + (\alpha_b - 1) (\alpha_G - \alpha_h) \alpha_h + (\alpha_G - 1)] \quad (11)$$

3 Esforços reduzidos e factores de escala

A fim de tornar os critérios de interacção, propostos no presente trabalho, independentes das dimensões da secção transversal em análise, a sua expressão analítica será apresentada em função de variáveis reduzidas (não dimensionais), obtidas através da divisão das variáveis do problema por factores de escala adequados.

Supõe-se que o material que constitui a secção apresenta um comportamento elastoplástico perfeito, simétrico em tracção e em compressão, sem endurecimento e com uma capacidade de deformação ilimitada em regime plástico (Fig. 3).

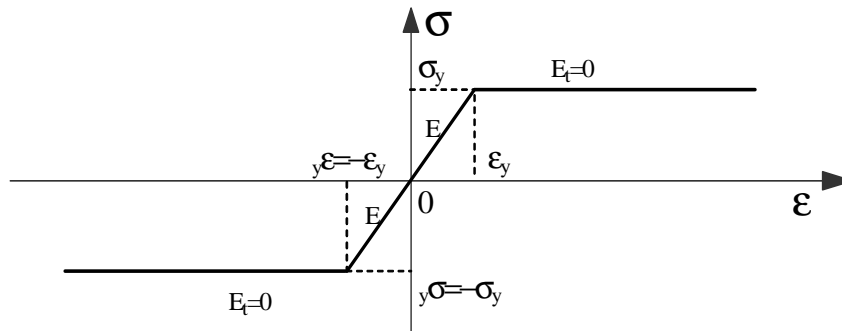


Fig. 3: Lei de comportamento tensão-extensão do material.

O esforço normal reduzido n é definido através da expressão (12):

$$n = N/N_y \quad (12)$$

O factor de escala N_y (13) corresponde à força de cedência da secção em tracção pura, quando todas as fibras da secção estão sujeitas à tensão de cedência σ_y (Fig. 3):

$$N_y = EA\epsilon_y = k_A t_w h \sigma_y \quad (13)$$

O momento flector reduzido m , por sua vez, é definido através da expressão (14):

$$m = M/M_y \quad (14)$$

O factor de escala M_y (15) corresponde ao momento flector na secção quando esta atinge o seu estado limite elástico em flexão simples, ou seja quando a fibra mais afastada do centro de gravidade da secção atinge a tensão de cedência σ_y sob o efeito exclusivo da flexão:

$$M_y = EI\chi_y = \frac{k_I}{\alpha_G} \frac{t_w h^2}{3} \sigma_y \quad (15)$$

Nesta equação (15), a variável χ_y representa a curvatura da secção quando esta atinge o seu estado limite elástico em flexão simples.

4 Critérios de interacção entre o esforço normal e o momento flector

4.1 Estado limite elástico

Uma secção alcança o seu estado limite elástico quando a sua fibra mais deformada atinge a tensão de cedência σ_y do material, em tracção ou em compressão. O critério de interacção entre o esforço normal e o momento flector resistentes da secção neste estado limite é definido através da equação (16).

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha_G \leq n \leq 1 & \Rightarrow m = 1 - n \\ -1 \leq n \leq 1 - 2\alpha_G & \Rightarrow m = \frac{\alpha_G (1 + n)}{1 - \alpha_G} \end{cases} \quad (16)$$

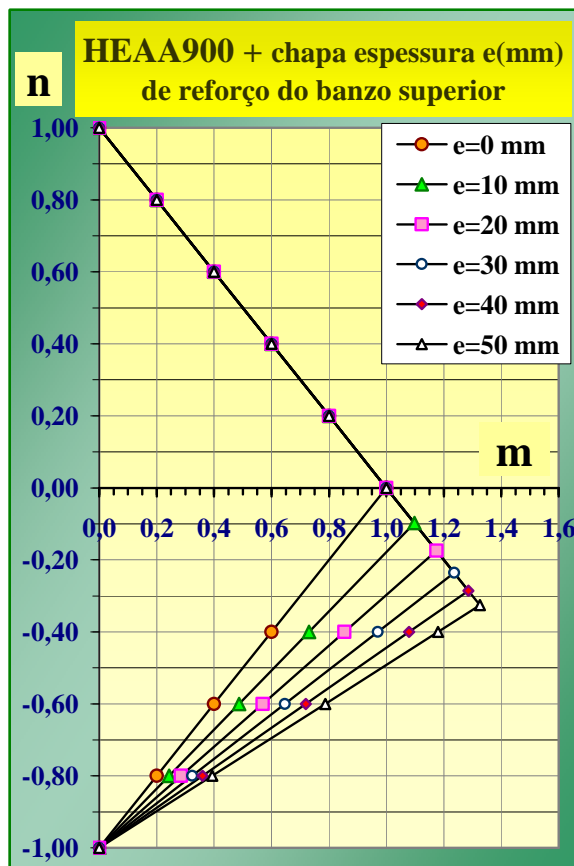


Fig. 4: Representação do critério de interacção elástico de diferentes secções, no espaço dos esforços reduzidos n e m

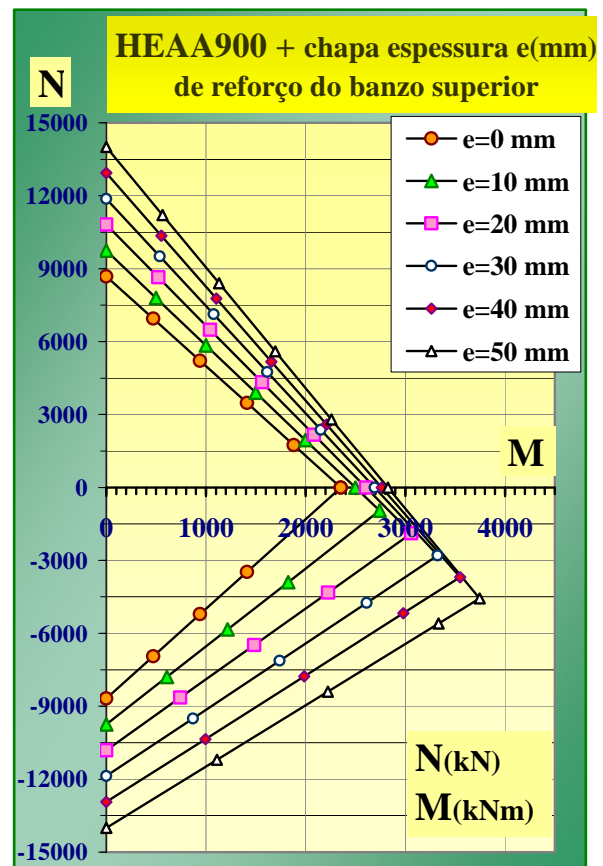


Fig. 5: Representação do critério de interacção elástico de diferentes secções, no espaço dos esforços dimensionais N e M

A representação gráfica deste critério, no espaço das variáveis reduzidas n e m , pode ser observada na Fig. 4, para o caso particular de uma secção composta por um perfil HEAA900, com as dimensões (em mm) $b = 300$, $h = 870$, $t_f = 20$ e $t_w = 15$, cujo banzo superior é reforçado por uma chapa com a largura de 300 mm e espessura e , pelo que $b_s = 300$ e $t_s = 20 + e$. A espessura e das chapas de reforço, constituídas pelo mesmo tipo de aço do perfil, varia entre 0 mm (caso do perfil HEAA900 isolado) e 50 mm.

Faz-se notar que o critério representado na Fig. 5 é igual para todas as outras secções que apresentem a mesma forma (e, conseqüentemente, o mesmo valor de α_G), independentemente das suas dimensões, devido à utilização de variáveis reduzidas. O mesmo não acontece no caso de se utilizarem os esforços dimensionais N e M , uma vez que estes são obtidos através da multiplicação dos esforços reduzidos n e m pelos factores de escala N_y e M_y , Eq. (12) e (14), os quais dependem das dimensões da secção considerada, Eq. (13) e (15).

Na Fig. 5 é apresentada a representação gráfica da interacção entre os esforços dimensionais N e M no estado limite elástico, para as secções consideradas na Fig. 4. Nesta figura é possível observar a influência do aumento das dimensões do perfil HEAA900, após a adição de chapas de reforço ao seu banzo superior.

As Fig. 4 e 5 permitem ainda constatar que, ao contrário do que acontece nas secções bissimétricas, o momento flector máximo das secções monossimétricas em regime elástico é superior ao seu momento de cedência em flexão simples, ou seja $M_{max} > M_y$ ($m_{max} > 1$).

De acordo com a Eq. (16), o valor máximo do momento flector reduzido, m_{max} , ocorre quando $n = 1 - 2\alpha_G$, sendo o seu valor fornecido pela Eq. (17), pelo que o seu correspondente valor dimensional pode ser obtido através da Eq. (18):

$$m_{max} = 2\alpha_G \quad (17)$$

$$M_{max} = 2\alpha_G M_y \quad (18)$$

Faz-se notar que, no caso particular das secções bissimétricas se tem $\alpha_G = 0,5$. Deste modo, de acordo com as Eq. (17) e (18), $m_{max} = 1$ e $M_{max} = M_y$, o que significa que estas equações, tal como a Eq. (16), são também aplicáveis às secções bissimétricas.

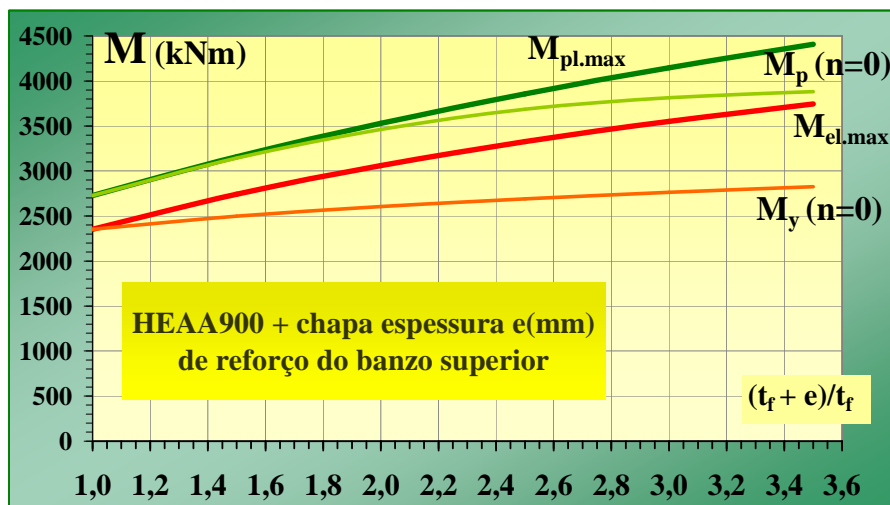


Fig. 6: Variações dos valores máximos e em flexão simples ($n = 0$) do momento elástico M_y e do momento plástico M_p de uma secção em I monossimétrica

A Fig. 6 mostra a evolução do momento de cedência M_y em flexão simples, quando $n=0$, e do momento flector máximo em regime elástico $M_{el,max}$, no caso das secções consideradas nas Fig. 4 e 5. Nesta figura é possível observar que o reforço do banzo superior deste perfil para o triplo da sua espessura através da adição de uma chapa com $e=40$ mm, ou seja para $t_s = 20+40 = 3 t_f$, permite aumentar o momento de cedência M_y desta secção cerca de 17%, de 2352,49 kN para 2762,48 kN, e o momento elástico máximo $M_{el,max}$ cerca de 51%, de 2352,49 kN para 3550,51 kN.

4.2 Estado limite plástico

Uma secção alcança o seu estado limite plástico quando todas as suas fibras atingem a tensão de cedência σ_y do material, em tracção ou em compressão, dando origem a uma rótula plástica. Nestas circunstâncias, a relação entre os esforços reduzidos da secção, n e m , pode ser estabelecida através do critério de interacção indicado na equação (19), deduzido com base nas condições de equilíbrio entre os esforços internos da secção e as forças exteriores aplicadas.

$$\left\{ \begin{array}{l} n_B \leq n \leq 1 \Rightarrow m = 3 \frac{\alpha_G k_A}{k_I} (1-n) \left[4(1-\alpha_G) - \frac{(1-n)k_A}{\alpha_B} \right] \\ -n_b \leq n \leq n_B \Rightarrow m = 12 \frac{\alpha_G}{k_I} \left[\alpha_G (1+n) k_A + (1-\alpha_b) \alpha_h^2 - \left[(1+n) \frac{k_A}{2} + (1-\alpha_b) \alpha_h \right]^2 \right] \\ -1 \leq n \leq -n_b \Rightarrow m = 3 \frac{\alpha_G k_A}{k_I} (1+n) \left[4 \alpha_G - \frac{(1+n)k_A}{\alpha_b} \right] \end{array} \right. \quad (19)$$

Os valores dos limites n_B e n_b indicados na equação (19) podem ser determinados através das equações (20) e (21), respectivamente.

$$n_B = 1 - \frac{2 \alpha_B \alpha_H}{k_A} \quad (20)$$

$$n_b = -1 + \frac{2 \alpha_b \alpha_h}{k_A} \quad (21)$$

A representação gráfica deste critério plástico, no espaço das variáveis reduzidas n e m , pode ser observada na Fig. 7, para o caso das secções consideradas nas Fig. 4 e 5. Na Fig. 8 é apresentada a representação gráfica da interacção entre os esforços dimensionais N e M no estado limite plástico, no caso destas secções. Mais uma vez, é possível observar a influência do aumento das dimensões do perfil HEAA900, após a adição de chapas de reforço ao seu banzo superior, na interacção entre os esforços dimensionais N e M , devido ao aumento progressivo dos factores de escala N_y e M_y (Fig. 6).

As Fig. 7 e 8 permitem também constatar que, à semelhança do que acontece no estado limite elástico, o momento flector plástico máximo $M_{pl,max}$ das secções monossimétricas é superior ao momento plástico destas secções M_p em flexão simples. O valor reduzido de M_p é fornecido na Eq. (22), que resulta da introdução da condição $n=0$ na Eq. (19).

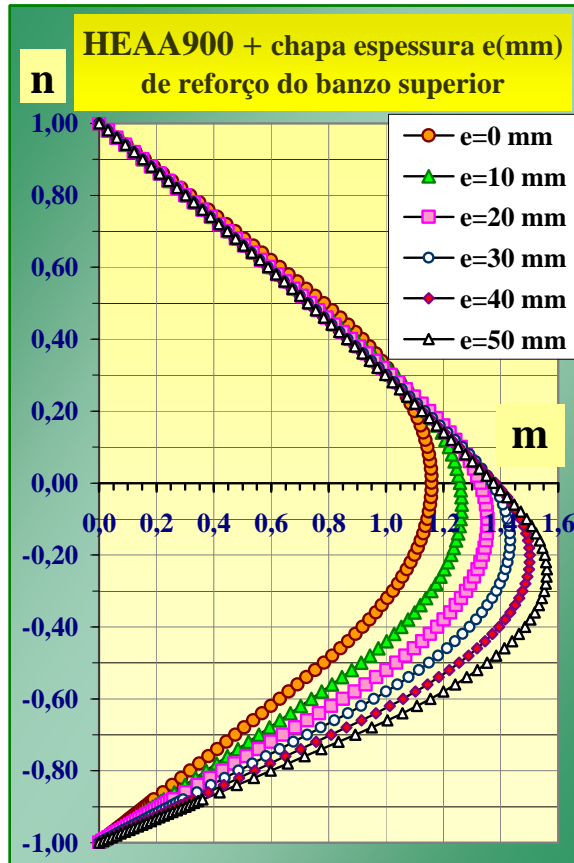


Fig. 7: Representação do critério de interação plástica de diferentes secções, no espaço dos esforços reduzidos n e m

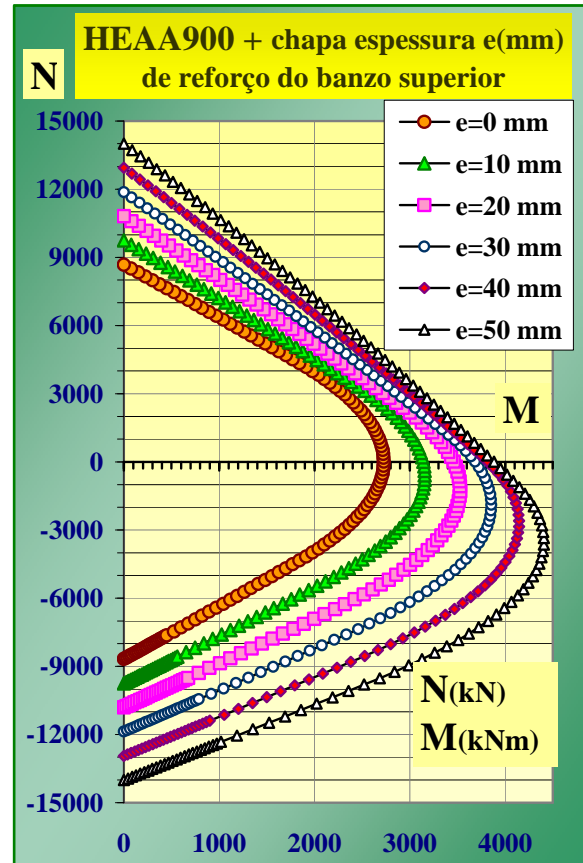


Fig. 8: Representação do critério de interação plástica de diferentes secções, no espaço dos esforços dimensionais N e M

$$\left\{ \begin{array}{l} n_B \leq 0 \Rightarrow m_p = 3 \frac{\alpha_G k_A}{k_I} \left[4(1 - \alpha_G) - \frac{k_A}{\alpha_B} \right] \\ n_B > 0 \Rightarrow m_p = 12 \frac{\alpha_G}{k_I} \left[\alpha_G k_A + (1 - \alpha_b) \alpha_h^2 - \left[\frac{k_A}{2} + (1 - \alpha_b) \alpha_h \right]^2 \right] \end{array} \right. \quad (22)$$

Por sua vez, o valor reduzido do momento flector plástico máximo, $m_{pl.max}$, pode ser determinado através da expressão (23):

$$m_{pl.max} = \frac{6\alpha_G}{k_I} \left[(1 - \alpha_G)^2 + \alpha_G^2 + (\alpha_B - 1)(2(1 - \alpha_G) - \alpha_H)\alpha_H + (\alpha_b - 1)(2\alpha_G - \alpha_h)\alpha_h + k_p \right] \quad (23)$$

O termo k_p indicado na equação (23) pode ser obtido através da expressão (24):

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_G + \alpha_H \leq 1 \Rightarrow k_p = 0 \\ \alpha_G + \alpha_H > 1 \Rightarrow k_p = 2(\alpha_B - 1)(\alpha_G + \alpha_H - 1)^2 \end{array} \right. \quad (24)$$

No caso particular de uma secção bissimétrica tem-se $\alpha_G = 0,5$, $\alpha_B = \alpha_b$ e $\alpha_H = \alpha_h$, pelo que as Eq. (22) e (23) conduzem a uma mesma solução, indicada na Eq. (25).

$$m_p = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - 4(1 - \alpha_b)(1 - \alpha_h)\alpha_h}{k_I} \right) \quad (25)$$

Esta conclusão significa que, no caso das secções bissimétricas, o momento plástico máximo indicado na Eq. (25) é atingido quando a secção forma uma rótula plástica em flexão simples. Este facto pode ser confirmado através das Figs. 7 e 8 (quando $e = 0$ mm), ou da Fig. 6, onde é possível observar a evolução do momento plástico M_p em flexão simples e do momento flector máximo em regime plástico $M_{pl,max}$, no caso das secções consideradas nas Fig. 7 e 8.

Nas Fig. 6 e 8 é possível constatar que o reforço do banzo superior deste perfil para o triplo da sua espessura, por exemplo, permite aumentar o momento flector máximo $M_{pl,max}$ desta secção cerca de 52%, de 2727,60 kN para 4147,26 kN. Por sua vez a Fig. 7 mostra que o valor reduzido deste esforço, $m_{pl,max}$, passa de $m_p = 1,159$ para $m_p = 1,501$, o que mostra o incremento significativo da reserva de resistência plástica conferida à secção por este reforço.

5 Cálculo de secções invertidas

As equações (16) e (19) foram estabelecidas para secções em I monossimétricas com a configuração indicada na Fig. 1, submetidas a momentos positivos. Entretanto, ao efectuar um novo estudo para determinar os critérios de interacção $n - m$ destas secções quando sujeitas a momentos flectores negativos, no estado limite elástico ou no estado limite último de plastificação completa, é possível concluir que estes novos critérios são antissimétricos dos anteriores relativamente à origem dos eixos no espaço (n, m) , conforme se pode observar na Fig. 9. Esta conclusão significa que a aplicação dos critérios indicados nas Eq. (16) e (19) pode ser alargada aos casos em que a secção seja submetida a momentos flectores negativos, desde que no cálculo sejam utilizados os valores simétricos de n e de m .

Se, por exemplo, se pretender conhecer o momento negativo máximo que a secção consegue suportar em regime elástico quando sujeita a um esforço normal de compressão $n = -0,6$, basta introduzir o seu valor simétrico ($n = 0,6$) na Eq. (16). A solução obtida, $m = 0,4$, significa que a resposta ao problema seria $m = -0,4$, como se pode observar na Fig. 9.

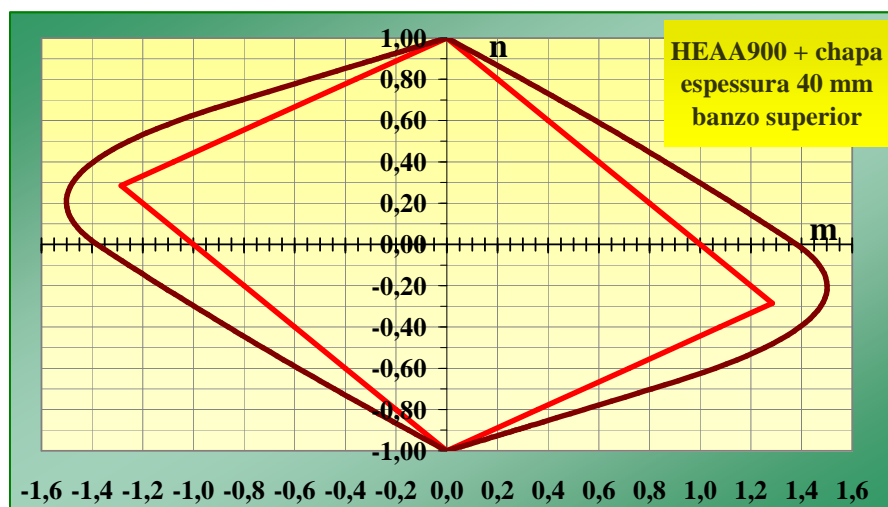


Fig. 9: Critérios de interacção $n - m$, nos estados limites elástico e plástico, de uma secção em I monossimétrica sujeita a momentos flectores positivos ou negativos.

O mesmo princípio é aplicável na determinação dos esforços no estado limite plástico, quando a secção se encontra sujeita a um momento negativo.

Entretanto, é de referir o facto de a análise da secção representada na Fig. 1, quando sujeita a um momento flector negativo, ser idêntica à análise da correspondente secção invertida (com o banzo inferior maior que o banzo superior), quando sujeita a um momento positivo.

Deste modo, os critérios indicados nas Eq. (16) e (19) são também aplicáveis a este tipo de secções desde que, no final, seja atribuído o sinal simétrico à solução encontrada para o valor de n ou de m . Assim, por exemplo, se a secção, com a forma invertida da secção considerada na Fig. 9, for submetida a um momento flector $m = 1,4$, conclui-se que o esforço normal máximo de tracção a que poderá resistir no estado limite plástico será $n = 0,4$, uma vez que o esforço normal de compressão máximo a que a secção considerada na Eq. (19) poderá resistir, quando submetida a um momento flector $m = 1,4$, será $n = -0,4$ (ver Fig. 9).

6 Conclusões

O presente trabalho propõe um conjunto de expressões analíticas para a definição dos critérios de interacção entre o esforço normal e o momento flector de uma secção de aço em I monossimétrica, no seu estado limite elástico e no estado limite último de plastificação completa, correspondente à formação de uma rótula plástica.

Uma vez definidas as características geométricas destas secções, bem como os factores de forma que condicionam o seu cálculo, indicam-se as equações que permitem estabelecer os critérios de interacção atrás referidos. A fim de facilitar a sua compreensão, apresenta-se uma análise pormenorizada da influência da assimetria da secção nestes critérios de interacção, relativamente ao comportamento de secções em I simétricas em relação ao eixo de flexão. Esta influência é demonstrada através de vários gráficos, referentes a um exemplo de aplicação.

Por último, é feita referência à generalização das equações apresentadas a outros casos de aplicação, nomeadamente a secções em I monossimétricas com uma configuração invertida, relativamente à considerada neste estudo, ou seja com o banzo inferior maior que o banzo superior, bem como a secções submetidas a momentos flectores negativos, com qualquer uma destas configurações (com o banzo de maiores dimensões na posição superior ou inferior).

Referências

- [1] Lescouarc'h Y. - Capacité de résistance d'une section soumise à divers types de sollicitations. *Construction Métallique* 1977;2, p. 3-17.
- [2] Massonnet Ch., Save M. - Calcul plastique des constructions. Vol. 1 – Structures dépendant d'un paramètre. Ed. B. Nelissen, 3rd Edition, 1976.
- [3] Mrázik A., Škaloud M., Tocháček M. - Plastic Design of Steel Structures. Ellis Horwood Limited, John Wiley & Sons, 1st Edition, 1987.
- [4] Baptista A.M. - Critério de interacção entre o esforço normal e o momento flector em secções de aço em I ou rectangulares ocas totalmente plastificadas. Livro de Resumos das 4as Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas – JPPE2006, LNEC, Lisboa, Dezembro de 2006, p. 102-103 (Comunicação completa editada em CD-ROM).
- [5] CEN/TC 250 - Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. European Standard EN 1993-1-1:2005.