

**UTILIZAÇÃO DAS CURVAS DE ENCURVADURA DO EUROCÓDIGO 3
NA VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE ELEMENTOS
ESTRUTURAIS DE AÇO COM INÉRCIA VARIÁVEL
SUJEITOS A COMPRESSÃO SIMPLES**



António M. BAPTISTA
Investigador Auxiliar
LNEC
Lisboa

SUMÁRIO

O presente trabalho propõe um método de verificação da segurança de pilares de aço com inércia variável sujeitos a compressão simples, baseado na aplicação directa das curvas de encurvadura adoptadas pelo EC3. A validade da sua aplicação é demonstrada através do estudo de duzentos e quarenta pilares com diferentes condições de fronteira, constituídos por perfis de secção em I de altura variável, sujeitos a varejamento segundo o eixo de maior inércia das secções transversais.

1. INTRODUÇÃO

Os elementos de inércia variável constituem uma solução interessante para determinados tipos de estruturas de aço. Além disso, as técnicas modernas de fabrico deste tipo de elementos têm vindo a torná-los cada vez mais atractivos sob o ponto de vista económico.

No entanto, a recente normalização europeia relativa a projectos de estruturas de aço (Eurocódigo 3) não dispõe ainda de disposições específicas para a verificação da resistência de elementos de inércia variável sujeitos a compressão simples.

Uma solução para este problema poderá consistir na aplicação directa das expressões estipuladas no Eurocódigo 3 (EC3) para elementos de secção uniforme [1], através do recurso às curvas europeias de encurvadura. Para tal, é necessário calcular a esbelteza reduzida dos elementos de inércia variável em função da respectiva carga crítica elástica.

Na presente comunicação descreve-se um estudo de aplicação deste método à verificação de mais de duas centenas de pilares com secção transversal em I de altura variável, e com diferentes condições de fronteira. Os valores de cálculo da força axial resistente, determinados através do método proposto, são comparados com os da força axial máxima, obtidos por simulação numérica do comportamento destes elementos através de um modelo de cálculo elastoplástico de 20 ordem.

Através desta comparação é possível efectuar um juízo sobre a aplicabilidade deste método, em função da taxa de variação da altura das secções transversais e do tipo de condições de fronteira dos pilares de inércia variável.

2. DESCRIÇÃO DO MODELO DE CÁLCULO ELASTOPLÁSTICO

O modelo de cálculo elastoplástico de 20 ordem utilizado no presente estudo baseia-se na formulação analítica dos esforços e dos termos de rigidez das secções transversais, em função das respectivas deformações globais (deformações axial e de flexão) [2], [3].

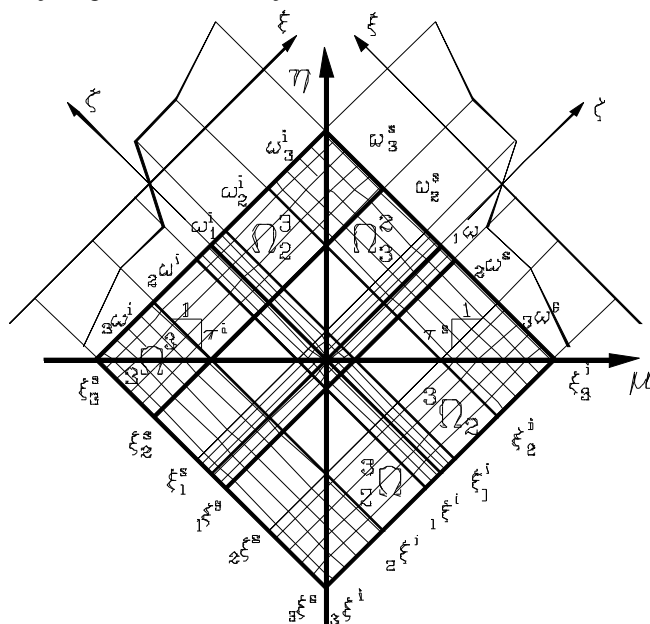


Figura 1 : Domínio de evolução das deformações globais de uma secção rectangular

Este modelo permite considerar os principais factores físicos que condicionam a não linearidade do seu comportamento, tais como a evolução progressiva da plasticidade ao longo das secções transversais e do comprimento dos elementos estruturais, a influência das tensões residuais e os efeitos do endurecimento dos aços.

A evolução do comportamento não linear das secções transversais depende unicamente de *factores de comportamento*, tais como a forma da secção transversal ou da lei constitutiva $\sigma = f(\epsilon)$ do material, por exemplo. Esta evolução pode ser dividida em diferentes domínios (Fig. 1), definidos no espaço das deformações globais da secção [2], [3], [4].

O cálculo dos esforços internos e dos termos de rigidez das secções transversais depende dos referidos *factores de comportamento* e de *factores de escala*, como o módulo de elasticidade E , a tensão de cedência σ_y ou as dimensões da secção transversal, por exemplo, que permitem exprimir os resultados do cálculo num determinado sistema de unidades.

A formulação analítica do cálculo dos esforços internos e dos termos de rigidez das secções transversais é feita em função de variáveis reduzidas (não dimensionais), independentes dos referidos *factores de escala*, tais como:

$$\xi = \frac{\epsilon}{\epsilon_l}; \zeta = \frac{\sigma}{E_l \epsilon_l}; \tau = \frac{z}{z_M}; z_M = \max(z^i; z^s) \quad (1)$$

O significado das variáveis das expressões (1) e (2) é ilustrado através das figuras 2 e 3:

$$\eta = \frac{\epsilon_N}{\epsilon_l} = \frac{\epsilon(0)}{\epsilon_l}; \mu = \chi \frac{z_M}{\epsilon_l} = - \frac{d\epsilon}{dz} \frac{z_M}{\epsilon_l} \quad (2)$$

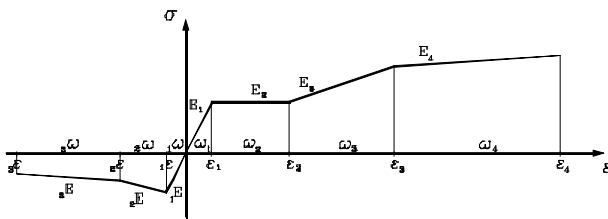


Figura 2 : Exemplo da forma de uma lei constitutiva $\sigma = f(\epsilon)$ aproximada por uma função multilinear

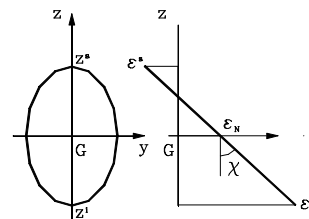


Figura 3 : Deformações globais da secção transversal, ϵ_N e χ

No caso de uma secção de inércia variável, os *factores de escala* são variáveis ao longo do comprimento do elemento. No caso de se designar por $\zeta = x/L$ a coordenada reduzida em relação ao eixo longitudinal do elemento, a variação das dimensões de cada secção transversal do elemento podem ser expressas através de uma função genérica do seguinte tipo [4]:

$$a(\zeta) = f(a_{\min}, a_{\max}, \zeta) \quad (3)$$

O presente trabalho cobre o estudo do comportamento de perfis de secção em I, cuja inércia muda ao longo do seu eixo longitudinal devido a uma variação linear da altura das secções transversais entre as duas extremidades do elemento, onde se situam as secções de maior e de menor inércia.

Deste modo, todas as dimensões da secção transversal se mantêm constantes excepto a altura, que varia linearmente entre os valores $h = h_{min}$ e $H = h_{max}$:

$$h(\zeta) = h + \zeta(H - h) \quad (4)$$

Uma vez que a formulação do cálculo dos esforços e dos termos de rigidez da secção transversal é independente dos *factores de escala*, o valor reduzido (adimensional) destas variáveis pode ser sempre calculado através das mesmas expressões analíticas, após o que basta multiplicar o resultado obtido por um factor de escala, cujo valor é calculado para cada secção transversal em função da altura respectiva, determinada através da expressão (4).

3. ESBELTEZA EQUIVALENTE DE UM PILAR DE INÉRCIA VARIÁVEL

3.1. Comprimento de encurvadura de um pilar de secção uniforme

No caso particular de um pilar de secção uniforme, articulado em ambas as extremidades, a sua carga crítica elástica pode ser determinada através da clássica expressão de Euler (5):

$$P_{cr} = P_E = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \quad (5)$$

Se as condições de fronteira deste pilar forem alteradas, a relação entre a sua carga crítica elástica, P_{cr} , e a respectiva carga de Euler, P_E , é dada pela expressão (6):

$$P_{cr} = K P_E \quad (6)$$

A relação genérica (6) é frequentemente escrita sob a forma (7), em que se identifica a carga crítica do pilar em questão com a carga crítica de um pilar biarticulado equivalente, constituído pelo mesmo material (igual valor de E), com a mesma secção transversal (igual valor de I), e com um comprimento $l = k L$, habitualmente designado Acomprimento de encurvadura.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2} = \frac{\pi^2 E I}{(k L)^2} \quad (7)$$

A relação $K = 1 / k^2$ depende das condições de fronteira a que o pilar se encontra submetido. No caso de um pilar biencastrado, por exemplo, o valor de K é igual a 4, pelo que $k = 1 / 2$ e o comprimento de encurvadura deste pilar é $l = 0,5 L$.

3.2. Esbelteza reduzida de um pilar de secção uniforme

No caso de um pilar de aço, a sua resistência é também limitada pelas características do material que o constitui. Se o pilar for constituído por um aço laminado a quente, por exemplo, a uma fase inicial de comportamento elástico segue-se um patamar de comportamento plástico perfeito, após ter sido atingida a tensão de cedência σ_y .

Durante esta segunda fase, as deformações no material aumentam sob tensão constante, pelo que, quando o pilar se encontra submetido a compressão simples, o esforço normal máximo suportado pela secção transversal do pilar, A , é igual à carga de plastificação $P_y = A \sigma_y$. A relação entre a carga de plastificação e a carga crítica elástica do pilar é dada pela expressão (8):

$$\frac{P_y}{P_{cr}} = \frac{A \sigma_y}{\frac{\pi^2 E I}{l^2}} = A E \epsilon_y \frac{l^2}{\pi^2 E I} = \frac{A l^2}{I \pi^2} \epsilon_y = \frac{l^2}{i^2} \frac{\epsilon_y}{\pi^2} \quad (8)$$

A variável i representa o raio de giração da secção transversal do pilar. O quociente entre o comprimento de encurvadura do pilar, l , e o raio de giração, i , representa a esbelteza λ do pilar. Deste modo, a relação P_y / P_{cr} pode ser escrita sob a seguinte forma:

$$\frac{P_y}{P_{cr}} = \left(\lambda \frac{\sqrt{\epsilon_y}}{\pi} \right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda_i} \right)^2 = \bar{\lambda}^2 \quad (9)$$

em que a variável $\bar{\lambda}$ representa a esbelteza reduzida do pilar.

A expressão (9) permite constatar que, quando a esbelteza reduzida $\bar{\lambda}$ é inferior a 1, a carga crítica P_{cr} é superior à carga P_y , pelo que a resistência do pilar é condicionada pela plastificação da secção transversal mais solicitada. De modo inverso, quando $\bar{\lambda}$ é superior a 1, o valor de P_{cr} é inferior ao de P_y , pelo que a resistência do pilar é condicionada pela instabilidade por varejamento do pilar.

3.3. Carga crítica elástica de um pilar de inércia variável

À semelhança do que foi exposto no parágrafo 3.1., relativamente a pilares com diferentes condições de fronteira, também a carga crítica elástica, $P_{cr,var}$, de um pilar biarticulado de inércia variável pode ser expressa em função da carga crítica elástica, P_E , de um pilar biarticulado de inércia constante:

$$P_{cr,var} = \rho P_E \quad (10)$$

A carga de Euler, P_E , é calculada para um pilar de referência, de secção transversal uniforme. A secção do pilar de referência pode, em princípio, ser uma qualquer, sendo habitualmente identificada com a secção de maior inércia ou de menor inércia do pilar de inércia variável.

No presente trabalho foi adoptada a última hipótese, pelo que a secção transversal do pilar de referência é a secção de menor altura do pilar, h . A vantagem desta opção reside essencialmente no facto de ser esta a secção transversal que condiciona a resistência do pilar à plastificação, no caso de pilares de pequena esbelteza.

A variável ρ depende da variação das várias dimensões da secção transversal do pilar ao longo do seu comprimento, conforme indicado genericamente pela expressão (3). No caso de um pilar de secção rectangular cuja altura varia linearmente entre as duas extremidades, por exemplo, a variável ρ depende da relação entre a altura das duas secções extremas, H/h . Se a largura da secção variasse de modo idêntico, a variável ρ dependeria também da relação entre a largura das secções extremas, B/b .

A expressão (10) é também aplicável a pilares com outras condições de fronteira, podendo ser escrita sob a forma generalizada:

$$P_{cr.var} = \rho P_{cr.min} \quad (11)$$

Nesta expressão, $P_{cr.var}$ representa a carga crítica elástica de um pilar de inércia variável com quaisquer condições de fronteira, e $P_{cr.min} = K P_{E.min}$ (6) representa a carga crítica elástica de um pilar de referência, com as mesmas condições de fronteira, de secção transversal uniforme igual à secção mínima do pilar de inércia variável referido. O coeficiente ρ depende, neste caso, também do tipo de condições de fronteira a que o pilar se encontra sujeito.

O cálculo da carga crítica de um pilar de inércia variável através da expressão (11) torna-se bastante simples, desde que se disponha previamente de funções que permitam calcular, para as suas condições de fronteira, o coeficiente ρ em função das características geométricas das suas secções transversais e da respectiva variação ao longo do comprimento do pilar [7].

3.4. Esbelteza reduzida de um pilar de inércia variável

No caso de um pilar de inércia variável constituído por um aço laminado a quente, submetido a compressão simples, a carga de plastificação, P_y , é condicionada pela menor secção transversal do pilar: $P_y = A_{min} \sigma_y$. A relação entre a carga de plastificação e a carga crítica elástica do pilar é, neste caso, dada pela expressão (12):

$$\frac{P_y}{P_{cr.var}} = \frac{P_y}{\rho P_{cr.min}} = \frac{A_{min} E \epsilon_y}{\rho \pi^2 E I_{min}} = \frac{I}{\rho I_{min}} \frac{l^2}{\pi^2} \epsilon_y \quad (12)$$

$$\frac{P_y}{P_{cr.var}} = \frac{I}{\rho} \left(\lambda_{min} \frac{\sqrt{\epsilon_y}}{\pi} \right)^2 = \frac{\bar{\lambda}_{min}^2}{\rho} = \bar{\lambda}_{var}^2 \quad (13)$$

Ao introduzir na expressão anterior a esbelteza do pilar de referência, $\lambda_{min} = l/i_{min}$, obtém-se uma generalização da expressão (9) ao caso dos pilares de inércia variável, na qual a variável $\bar{\lambda}_{var}$ ($\bar{\lambda}_{var} = \rho^2 \lambda_{min}$) representa a esbelteza reduzida do pilar de inércia variável:

4. APLICAÇÃO DAS CURVAS EUROPEIAS A PILARES DE INÉRCIA VARIÁVEL

Uma vez que se constata que a expressão (13) é formalmente idêntica à expressão (9), propõe-se a utilização das curvas de encurvadura estabelecidas pela Convenção Europeia para a Construção Metálica (CECM), e adoptadas pelo EC3 [1], na verificação da segurança de pilares de aço de inércia variável, sujeitos a compressão simples.

No presente trabalho apresentam-se os resultados de um estudo realizado com o objectivo de validar este método de verificação da segurança, no caso particular de pilares de secção transversal em I, constituídos por banzos de secção constante e almas de espessura constante e altura linearmente variável, submetidos a compressão simples, e sujeitos a varejamento no plano perpendicular aos eixos de maior inércia das secções transversais.

Este estudo envolveu o cálculo da força de compressão máxima, P_{max} , suportada por cada um de duzentos e quarenta pilares com vários comprimentos, com seis relações H/h , e cinco condições de fronteira diferentes. O cálculo da sua resistência à compressão foi efectuado através de simulações do seu comportamento, tendo-se recorrido, para esse fim, ao modelo de cálculo elastoplástico geométricamente não linear referido no 2.

Para cada um dos pilares foi ainda calculada a respectiva esbelteza reduzida, $\bar{\lambda}_{var}$, indicada na expressão (13). O valor de $\bar{\lambda}_{var}$ pode ser determinado com base na carga crítica elástica do pilar, $P_{cr,var}$, determinada por via numérica através de um programa de cálculo elástico de 20 ordem, por exemplo. Outra alternativa para o cálculo de $\bar{\lambda}_{var}$ consiste no cálculo da esbelteza $\bar{\lambda}_{min}$ do pilar de referência (de secção uniforme), seguido da sua multiplicação pela raiz quadrada do coeficiente ρ (3.4), no caso de se dispôr de um processo de cálculo desta grandeza [7].

Para cada pilar efectuou-se então uma comparação entre o valor de P_{max}/P_y , obtido pelo processo descrito, e o valor do coeficiente $\chi(\bar{\lambda}_{var}) = N_{b,Rd,var}/P_y = N_{b,Rd,var}/(A\sigma_y)$, fornecido pelas curvas de encurvadura europeias adoptadas pelo EC3 [1]. Nestas expressões, a variável $N_{b,Rd,var}$ representa o valor de cálculo da máxima força de compressão simples suportada por um pilar de inércia variável, determinado de acordo com o método proposto (no caso de se considerar o coeficiente de segurança $\gamma_{MI} = 1$, e secções transversais de Classe 1, 2 ou 3 [1], para as quais $\beta_A = 1$).

A comparação referida é ilustrada pelas figuras 4 a 7, relativas a quatro das condições de fronteira estudadas, nas quais se apresentam as curvas de encurvadura $\chi(\bar{\lambda})$ adoptadas pelo EC3 [1] e os resultados obtidos, representados por pontos que correspondem aos valores reduzidos P_{max}/P_y da força máxima suportada pelos pilares, em função das respectivas esbeltezas reduzidas $\bar{\lambda}_{var}$ (13).

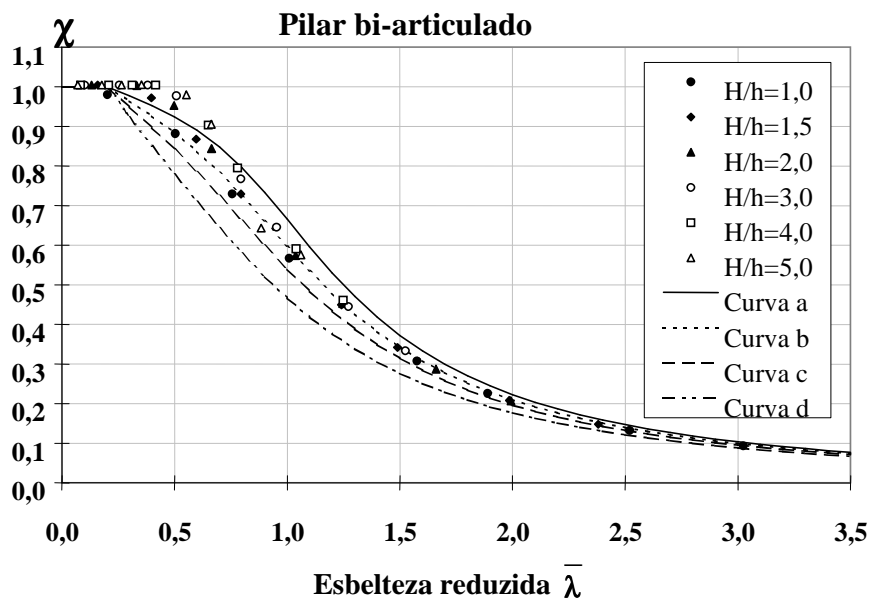


Figura 4 : Comparação, com as curvas de encurvadura do EC3 [1], dos resultados obtidos no caso de pilares bi-articulados, de secção em I de altura variável

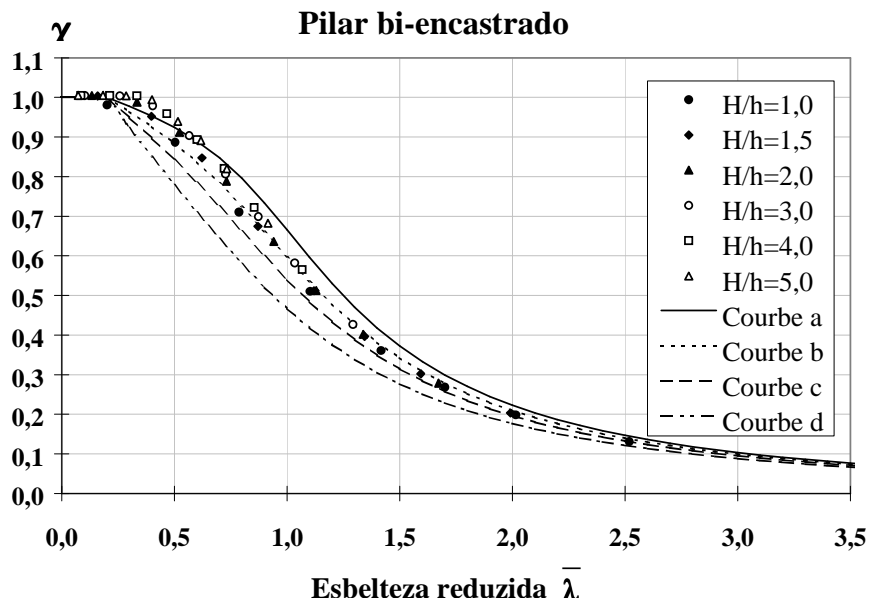


Figura 5 : Comparação, com as curvas de encurvadura do EC3 [1], dos resultados obtidos no caso de pilares bi-encastados, de secção em I de altura variável

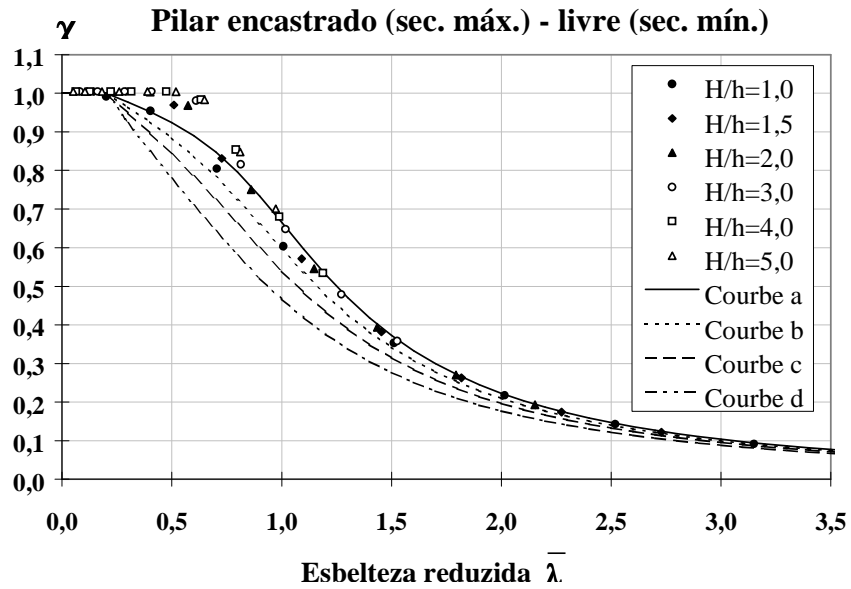


Figura 6 : Comparação, com as curvas de encurvadura do EC3, dos resultados obtidos no caso de pilares de secção em I de altura variável, encastrados na base (secção de maior inércia) e articulados no topo (secção de menor inércia)

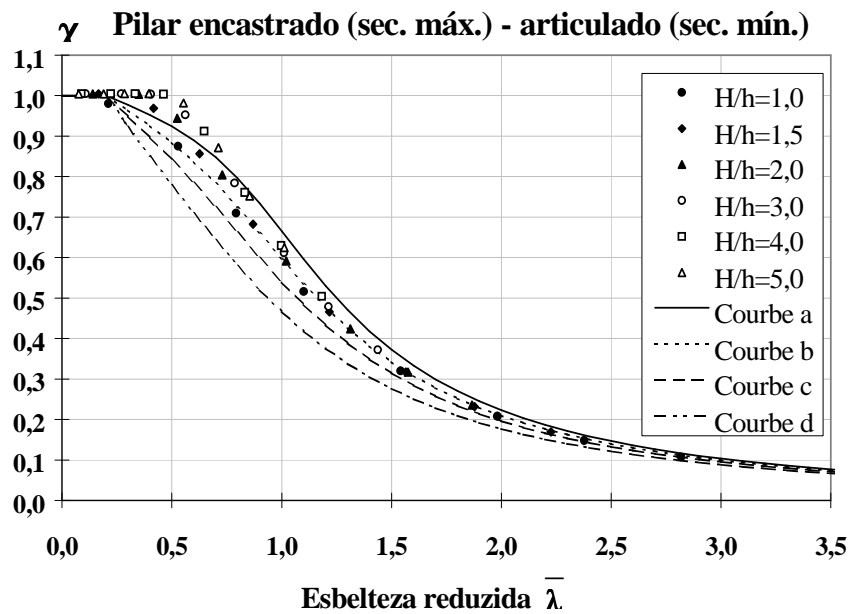


Figura 7 : Comparação, com as curvas de encurvadura do EC3, dos resultados obtidos para pilares em consola, de secção em I de altura variável, encastrados na base (secção de maior inércia) e livres no topo (secção de menor inércia)

Através destas figuras é possível constatar que, em geral, os pontos referidos se situam ligeiramente acima da curva **b**, cuja escolha é preconizada pelo EC3 [1] para o caso de pilares de secção transversal uniforme em I, obtidos por soldadura entre a alma e os banzos. Além disso verifica-se que, à medida que aumenta a relação H/h , entre as alturas das secções de maior e de menor inércia, os resultados obtidos se vão situando cada vez mais acima da referida curva **b**. Este facto parece legitimar a aplicação desta curva de encurvadura à verificação da segurança de pilares de inércia variável, constituídos por perfis em I soldados, de acordo com o método proposto neste trabalho.

5. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi proposto um método de verificação da segurança de pilares de aço de inércia variável, baseado na aplicação directa das curvas de encurvadura adoptadas pelo EC3 [1]. Os resultados da sua aplicação a duzentos e quarenta pilares, constituídos por perfis de secção em I de altura variável, permitem concluir que, para um mesmo valor de esbelteza reduzida, a força máxima suportada pelo pilar aumenta ligeiramente com a relação H/h entre as alturas das secções de maior e de menor inércia. Trata-se portanto de um método ligeiramente conservativo, justificando-se assim a sua aplicação a pilares de inércia variável com as características descritas. Apesar de ainda não se possuir informação suficiente, presume-se que, de igual modo, será também aplicável a pilares de inércia variável com outros tipos de secções transversais.

Este método constitui uma alternativa a um outro anteriormente proposto pelo autor, para a verificação da segurança de pilares de inércia variável, sem ser necessário recorrer ao cálculo da respectiva carga crítica elástica ou esbelteza reduzida [5], [6].

6. REFERÊNCIAS

- [1] European Prestandard ENV 1993-1-1 - *Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1.1: General rules and rules for buildings*, CEN, 1992, 344 p.
- [2] Baptista, A.M. - *Modèle non linéaire géométrique et matériel fondé sur l'analyse des déformations globales des sections* - Thèse de Doctorat, Univ. Blaise-Pascal, 1994, 480 p.
- [3] Baptista, A.M.; Muzeau, J.P. - *Modèle analytique en déformations globales pour l'étude élastique non linéaire de sections industrielles*, *Rev. Const. Métallique*, 1996, n1 4, p. 29-40.
- [4] Baptista, A.M.; Muzeau, J.P. - *Non-linear Buckling of Tapered Columns*, *2nd Int. Conf. On Coupled Instabilities in Metal structures, CIMS=96*, Liège, September 1996, 199-206
- [5] Baptista, A.M. - *Estudo da resistência de pilares de inércia variável em aço em regime elastoplástico*, LNEC, Lisboa, Nota Técnica N1 13/97 - NCE, 89 p.
- [6] Baptista, A.M.; Muzeau, J.P. - *Design of tepered compression members according to Eurocode 3*, *2nd World Conf. on Steel in Construction*, San Sebastián, 1998.
- [7] Baptista, A.M. - *Cálculo da carga crítica elástica de pilares de inércia variável*, LNEC, Lisboa, 1998, Nota Técnica N1 30/98 - NCE.