LABORATÓRIO NACIONAL
DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE BARRAGENS DE BETÃO
Núcleo de Modelação Matemática e Física

Proc. 0402/11/17726

SOLUÇÕES DISTRIBUCIONAIS DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Lisboa • março de 2013

I&D BARRAGENS DE BETÃO

RELATÓRIO 66/**2013 – DBB/NMMF**

SOLUÇÕES DISTRIBUCIONAIS DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

RESUMO

As equações de Navier-Stokes são equações de derivadas parciais. As incógnitas no caso de incompressibilidade consistem no campo de velocidades. As pressões numa 1ª aproximação resultam de um equilíbrio estático.
A principal causa de problemas relacionados com a solução destas equações é devida à parcela das acelerações convectivas que está na origem da turbulência.
Pesando estas equações e integrando duas vezes por partes obtém-se uma forma fraca destas equações.
Em problemas 3D as variáveis independentes são 3 espaciais e 1 temporal. Admite-se que o campo de velocidades pode ser desenvolvido em série de distribuições de Delta de Dirac espaciais e suas derivadas com coeficientes funções do tempo. Com funções de teste polinomiais obtém-se a formulação distribucional proposta das equações de Navier-Stokes.

DISTRIBUTIONAL SOLUTIONS OF NAVIER-STOKES EQUATIONS

ABSTRACT

The Navier-Stokes equations are partial derivative equations. For uncompressible case the velocity field are unknown variables. In a first approach the pressure are due to a static equilibrium.
The convective accelerations which cause turbulence are the main origin of solution problems.
Weighting these equations and applying the divergence theorem the weak form of these equations is obtained.
Three spatial variables and one time variable are the independent variables for 3D problems. The velocity field may be developed in Dirac Delta and theirs spatial derivatives series with time function coefficients. Polynomial test functions may be used in order to obtain the distributional formulation of Navier-Stokes equations.

ÍNDICE

SOLUÇÕES DISTRIBUCIONAIS DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Câmara, R.; Azevedo, N.

INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes são equações de derivadas parciais. As incógnitas no caso de incompressibilidade consistem no campo de velocidades. As pressões resultam numa 1ª aproximação de um equilíbrio estático.

A principal causa de problemas relacionados com a solução destas equações é devida à parcela das acelerações convectivas que está na origem da turbulência.

Pesando estas equações e integrando duas vezes por partes obtém-se uma forma fraca destas equações.

Em problemas 3D as variáveis independentes são 3 espaciais e 1 temporal. Admite-se que o campo de velocidades pode ser desenvolvido em série de distribuições de Delta de Dirac espaciais e suas derivadas com coeficientes funções do tempo. Com funções de teste polinomiais obtém-se a formulação distribucional proposta das equações de Navier-Stokes.

Sendo a aceleração convectiva do 2º grau nas velocidades, obtém-se o produto de distribuições cuja Transformada de Laplace é a convolução das transformadas de Laplace das parcelas. Pela Transformada Inversa, após realizar a convolução, obtém-se uma distribuição equivalente ao produto das distribuições.

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

No caso de fluido incompressível $U^i_{;i}(x^n,t)=0$ (U^i – componente i da velocidade) :

$$\frac{\rho DU^i(x^n,t)}{Dt}=\tilde{\nu}U^{i;m}_{;m}(x^n,t)+f^i(x^n,t)-P^{;i}(x^n,t) \qquad \tilde{\nu}-\text{viscosidade dinâmica}$$

$$P-\text{Pressão} \qquad (1)$$

$$\text{em que}: \frac{DU^i(x^n,t)}{Dt}=\dot{U}^i(x^n,t)+U^j(x^n,t)U^i_{;j}(x^n,t) \qquad f-\text{Força volúmica}$$

Co-derivando em relação a x^i temos a seguinte equação de equilíbrio estático:

$$P^{;i}_{;i}(x^n,t)=f^i_{;i}(x^n,t) \quad ;x^n\in V_0 \qquad (2)$$

Sujeita às condições de fronteira:

$$P(x^n,t)=\overline{P}(x^n,t) \quad ;x^n\in S_0 \qquad (3)$$

$$P^{;i}(x^n,t)\,n_i(x^n)=\overline{P}^{;i}(x^n,t)\,n_i(x^n) \quad ;x^n\in S_0 \qquad (4)$$

Considerando que as Transformadas de Laplace de $f^i(x^n,t)$, $U^i(x^n,t)$, $P^{;i}(x^n,t)$ são analíticas é possível desenvolve-las nas séries:

$$f^i(x^n,t)=f^{Ni}_\alpha(t)\,\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N) \quad ; \quad P^{;i}(x^n,t)=P^{N;i}_\alpha(t)\,\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N) \quad ;$$

$$U^i(x^n,t)=U^{Ni}_\alpha(t)\,\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N) \qquad (5)$$

$$U^j(x^n,t)U^i_{;j}(x^n,t)=U^{Nj}_\alpha(t)\,U^{Mi}_\beta(t)\delta^\alpha(x^n-x^n_N)\frac{\partial\delta^\beta(x^n-x^n_M)}{\partial x^j}$$

Admite-se para facilidade de cálculo:

$$U^j(x^n,t)U^i_{;j}(x^n,t)=U^{Nj}_\alpha(t)\,U^{Mi}_\beta(t)\delta^\alpha(x^n-x^n_N)\frac{\partial\delta^\beta(x^n-x^n_M)}{\partial x^j}\delta^{MN} \qquad (6)$$

Nota:

$$\delta^{(\alpha)}(x)\delta^{(\beta)}(x)=\frac{\partial^{\alpha_i}\delta(x^i)}{(\partial x^i)^{\alpha_i}}\frac{\partial^{\alpha_j}\delta(x^j)}{(\partial x^j)^{\alpha_j}}\frac{\partial^{\alpha_k}\delta(x^k)}{(\partial x^k)^{\alpha_k}}\frac{\partial^{\beta_i}\delta(x^i)}{(\partial x^i)^{\beta_i}}\frac{\partial^{\beta_j}\delta(x^j)}{(\partial x^j)^{\beta_j}}\frac{\partial^{\beta_k}\delta(x^k)}{(\partial x^k)^{\beta_k}}$$

com (i,j,k)=(1,2,3) (7)

$$s^\alpha * s^\beta = L_{(3)}(\delta^{(\alpha)}(x)\delta^{(\beta)}(x))=(s_i^{\alpha_i}*s_i^{\beta_i})(s_j^{\alpha_j}*s_j^{\beta_j})(s_k^{\alpha_k}*s_k^{\beta_k}) \quad \text{(i,j,k)=(1,2,3)} \qquad (8)$$

Visto que: $s_i^{\alpha_i}*s_i^{\beta_i}=\sum_\gamma (-1)^\gamma\frac{\alpha_i!}{(\alpha_i-\gamma)!\gamma!}\frac{s_i^{\alpha_i+\beta_i+1}}{\gamma+\beta_i+1}$ (9)

$$\delta^{(\alpha)}(x)\delta^{(\beta)}(x)=L^{-1}_{(3)}s^\alpha * s^\beta =$$

Pelo que: $\sum_\gamma (-1)^\gamma\frac{\alpha_i!}{(\alpha_i-\gamma)!\gamma!}\frac{\delta(x^i)^{\alpha_i+\beta_i+1}}{\gamma+\beta_i+1}\cdots\sum_\gamma (-1)^\gamma\frac{\alpha_k!}{(\alpha_k-\gamma)!\gamma!}\frac{\delta(x^k)^{\alpha_k+\beta_k+1}}{\gamma+\beta_k+1}$ (10)

(i,j,k)=(1,2,3)

Assim, atendendo à condição de incompressibilidade $U^{l}_{;l}(x^n,t)=0$:

$$U^{l}(x^n,t)U^{q}_{;l}(x^n,t)=U^{Nl}_{\alpha}(t)U^{Nq}_{\beta}(t)$$
$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\left(\sum_{\gamma}\frac{(-1)^{\gamma}\alpha_i!\,\delta(x^i-x^i_N)^{\alpha_i+\beta_i+1}}{(\alpha_i-\gamma)!\,\gamma!(\gamma+\beta_i+1)}\right)\cdots\left(\sum_{\gamma}\frac{(-1)^{\gamma}\alpha_k!\,\delta(x^k-x^k_N)^{\alpha_k+\beta_k+1}}{(\alpha_k-\gamma)!\,\gamma!(\gamma+\beta_k+1)}\right)\right)$$
(i,j,k)=(1,2,3) (11)

EQUAÇÕES FRACAS

Pesando as equações de Navier-Stokes e integrando duas vezes por partes:

$$\int_{V_0}\rho\, w_i(x^n)\dot{U}^i(x^n,t)\,dv_0+\int_{V_0}\rho\, w_i(x^n)U^j(x^n,t)U^i_{;j}(x^n,t)=$$
$$+\int_{V_0}\tilde{\nu}w^{;m}_{i;m}(x^n)U^i(x^n,t)dv_0+\int_{S_0}\tilde{\nu}w_i(x^n)U^i_{;m}(x^n,t)n^m(x^n)ds_0$$
$$-\int_{S_0}\tilde{\nu}w^{;m}_{i}(x^n)U^i(x^n,t)n_m(x^n)ds_0+\int_{V_0}w_i(x^n)f^i(x^n,t)dv_0-\int_{V_0}w_i(x^n)P^{;i}(x^n,t)dv_0$$
(12)

Note-se que:

$$\int_{S_0}\tilde{\nu}w_i(x^n)U^i_{;m}(x^n,t)n^m(x^n)ds_0-\int_{S_0}\tilde{\nu}w^{;m}_{i}(x^n)U^i(x^n,t)n_m(x^n)ds_0=$$
$$\int_{S_0}w_i(x^n)(\bar{t}^i(x^n,t)+\bar{P}(x^n,t)n^i(x^n))ds_0-\int_{S_0}\tilde{\nu}w^{;m}_{i}(x^n)\bar{U}^i(x^n,t)n_m(x^n)ds_0$$
(13)

EQUAÇÕES DISTRIBUCIONAIS

Para funções de teste $w_i(x^n)$:

$$\int_{V_0}\rho\, w_i(x^n)\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N)\dot{U}^{Ni}_{\alpha}(t)\,dv_0+\int_{V_0}\rho\, w_i(x^n)U^j(x^n,t)U^i_{;j}(x^n,t)=$$
$$+\int_{V_0}\tilde{\nu}w^{;m}_{i;m}(x^n)\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N)U^{Ni}_{\alpha}(t)dv_0+\int_{S_0}\tilde{\nu}w_i(x^n)(\bar{t}^i(x^n,t)+\bar{P}(x^n,t)n^i(x^n))ds_0$$
$$-\int_{S_0}\tilde{\nu}w^{;m}_{i}(x^n)\bar{U}^i(x^n,t)n_m(x^n)ds_0+\int_{V_0}w_i(x^n)\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N)f^{Ni}_{\alpha}(t)dv_0$$
$$-\int_{V_0}w_i(x^n)\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N)P^{N;i}_{\alpha}(t)dv_0$$
(14)

Em que:

$$U^{l}(x^n,t)U^{q}_{;l}(x^n,t)=U^{Nl}_{\alpha}(t)U^{Nq}_{\beta}(t)$$
$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\left(\sum_{\gamma}\frac{(-1)^{\gamma}\alpha_i!\,\delta(x^i-x^i_N)^{\alpha_i+\beta_i+1}}{(\alpha_i-\gamma)!\,\gamma!(\gamma+\beta_i+1)}\right)\cdots\left(\sum_{\gamma}\frac{(-1)^{\gamma}\alpha_k!\,\delta(x^k-x^k_N)^{\alpha_k+\beta_k+1}}{(\alpha_k-\gamma)!\,\gamma!(\gamma+\beta_k+1)}\right)\right)$$
(i,j,k)=(1,2,3) (11)

As expressões anteriores simplificam-se atendendo que:

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \quad ; \quad \delta^{(\alpha)}(x^n)=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)}{(\partial x^1)^{\alpha_1}(\partial x^2)^{\alpha_2}(\partial x^3)^{\alpha_3}} \quad ;$$
$$w^{(\alpha)}(x^n)=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}w(x^1,x^2,x^3)}{(\partial x^1)^{\alpha_1}(\partial x^2)^{\alpha_2}(\partial x^3)^{\alpha_3}} \quad ; \quad \delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N)w(x^n)=(-1)^\alpha w^{(\alpha)}(x^n_N) \tag{15}$$

ELEMENTOS FINITOS

Consideram-se tetraedros regulares (matriz jacobiana constante). Assim:

$w_k(x^n)=N_M(x^n)w_k{}^M \quad ; \quad N_M(x^n_N)=\delta_{MN}$

ou em coordenadas de volume:

$w_k(L^i(x^n))=N_M(L^i(x^n))w_k{}^M \quad ; \quad N_M(L^i(x^n_N))=\delta_{MN}$

de notar que com $\bar{M}$ representando um nó generalizado (compatibilidade garantida entre faces):

$N_{\bar{M}}(L^i)=(L^1)^n\ldots(L^4)^q \quad ; \quad \bar{M}=nmpq \quad ; \quad L^i=a^i+b^i_j x^j \quad ; \quad w_k(L^i)=N_{\bar{M}}(L^i)w_k^{\bar{M}} \quad ;$

$$w_k^N=w_k(L^i(x^j_N))=N_{\bar{M}}(L^i(x^j_N))w_k^{\bar{M}} \Rightarrow w_k^{\bar{M}}=\left(A^{\bar{M}N}\right)^{-1}w_k^N$$

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}w(x^n)}{(\partial x^1)^{\alpha_1}(\partial x^2)^{\alpha_2}(\partial x^3)^{\alpha_3}}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{(\partial x^1)^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{(\partial x^2)^{\alpha_2}}\frac{\partial^{\alpha_3}}{(\partial x^3)^{\alpha_3}}w(x^n)$$
$$;\frac{\partial^{\alpha_1}}{(\partial x^1)^{\alpha_1}}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial L^p\cdots\partial L^q}\frac{\partial L^p}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial L^q}{\partial x^1} \quad ; \quad \frac{\partial L^p}{\partial x^m}=\text{const}$$

INTRODUÇÃO DE EQUAÇÕES NO SISTEMA CORRESPONDENTES À CONDIÇÃO DE INCOMPRESSIBILIDADE

A condição de incompressibilidade vem dada por:

$$U^i_{;i}(x^n,t)=0 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha,N} U^{Ni}_\alpha \frac{\partial\delta^\alpha(x^n-x^n_N)}{\partial x^i} \xrightarrow{L_{(3)}} U^{Np}_\alpha (s_p)^{\alpha_p+1}(s_q)^{\alpha_q}(s_r)^{\alpha_r}e^{-(s_p x^p_N+s_q x^q_N+s_r x^r_N)}=0 \quad ;(p,q,r)$$

Agrupando os termos em $(s_1)^{\alpha_1}(s_2)^{\alpha_2}(s_3)^{\alpha_3}$ obtém-se para cada um deles igualando a zero equações em $U^{Np}_\alpha(t)$.

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS

Qualquer função contínua ou descontínua em si ou nas suas derivadas, f(x), desde que tenha transformada de Laplace analítica pode ser representada por:

$$f(x) = f_\alpha \delta^{(\alpha)}(x) \quad ; \alpha = 1, 2, \ldots$$

Visto:

$$\hat{f}(s) = f_\alpha s^\alpha \quad ; \alpha = 1, 2, \ldots$$

Analogamente pode ser representada por:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f_n \delta^0(x + n\Delta x) \quad ; n = 1, 2, \ldots$$

Com efeito:

$$\delta^{(\alpha)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^\alpha \delta^0(x)}{(\Delta x)^\alpha} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^{\alpha+1} H(x)}{(\Delta x)^{\alpha+1}}$$

CONCLUSÕES

As equações distribucionais de Navier-Stokes têm uma parcela contínua que pode ser obtida considerando como funções de teste as funções próprias das equações de Navier-Stokes linearizadas (sem acelerações convectivas).

O gradiente de pressões $P^{;i}$ no volume, pelo teorema da divergência dá origem a $P\ n^i$ que anula na superfície de fronteira o valor de sinal oposto resultante da condição de fronteira.

Do mesmo modo as forças volúmicas f^i equilibram, na fronteira, as tensões t^i resultante da condição de fronteira.

As condições de fronteira são expressas em termos das histórias das velocidades fixadas na fronteira.

A parcela descontínua obtém-se subtraindo da solução a parcela contínua. A parcela descontínua apenas toma uma expressão explícita se se puder calcular a sua Transformada de Laplace Inversa. As descontinuidades referem-se à função e às suas derivadas e representam os movimentos turbulentos.

BIBLIOGRAFIA

Eringen, A. – “Continuum Physics I,II,III,IV”.Academic Press, 1971, 1975, 1976, 1976.
Friedlander, G.; Joshi, M. – “Introduction to the Theory of Distributions”. Cambridge University Press, 1982, 1998.
Friedman, A. “Generalized Functions and Partial Differential Equations”. Dover, 1963.
Friedman, A. “Partial Differential Equations of Parabolic Type”. Dover, 1964.
Friedman, A. “Partial Differential Equations”. Dover, 1969.
Pathak, R.S. – “A Course on Distribution Theory and Applications”. Alpha Science, 2001.
Schwartz, L. “Théorie des distributions I,II”. Hermann, 1950.

ANEXO:
SOLUÇÕES SUAVES DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Tensões na fronteira: $\sigma^i_j(x,t)\,n^j(x)=\overline{t}^i(x,t) \quad x\in S; \quad \sigma^i_j=\tilde{\nu}U^i_{;j}-\frac{\tilde{\nu}}{3}U^m_{;m}\delta^i_j-P\delta^i_j$

Equações distribucionais de Navier-Stokes:

$$\rho\left\langle \underbrace{\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N)\dot{U}^{Ni}_{\alpha}(t)}_{\dot{U}^i(x^n,t)},\overline{\varphi}^P_i(x^n)\right\rangle-\tilde{\nu}\left\langle \underbrace{\delta^{(\alpha)}(x^n-x^n_N)U^{Ni}_{\alpha}(t)}_{U^i(x^n,t)}),(-\overline{\lambda}^P)\overline{\varphi}^P_i(x^n)\right\rangle+$$
$$\rho\left\langle U^j(x^n,t)U^i_{;j}(x^n,t),\overline{\varphi}^P_i(x^n)\right\rangle=0$$

Em que os valores e funções próprias satisfazem:

$$\varphi^{P;m}_{i;m}(x^n)=-\lambda^P\varphi^P_i(x^n) \quad ; \quad \left\langle\varphi^P_i(x^n),\overline{\varphi}^{Qi}(x^n)\right\rangle=\delta^{PQ} \quad ; \quad \overline{\lambda}^P=\lambda^P$$

Em que as funções próprias se anulam na parte da fronteira em que se fixam as velocidades, e:

$$\rho\left\langle U^l(x^n,t)U^q_{;l}(x^n,t),\overline{\varphi}^P_q(x^n)\right\rangle=\rho(-1)^{\alpha+\beta}U^{Nl}_{\alpha}(t)U^{Nq}_{\beta}(t)$$
$$\left(\left(\sum_{\gamma}\frac{(-1)^{\gamma}\alpha_i!}{(\alpha_i-\gamma)!\gamma!(\gamma+\beta_i+1)}\right)\cdots\left(\sum_{\gamma}\frac{(-1)^{\gamma}\alpha_k!}{(\alpha_k-\gamma)!\gamma!(\gamma+\beta_k+1)}\right)\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x^l}\overline{\varphi}^P_q(x^i_N,x^j_N,x^k_N)^{(\alpha_i+\beta_i+1,\cdots,\alpha_k+\beta_k+1)}$$
(i,j,k)=(1,2,3) ; l,q=1,2,3 ; $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$; $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

Nas variáveis modais:
$$\rho\dot{\alpha}^P(t)+\overline{\lambda}^P\tilde{\nu}\alpha^P(t)=-\rho\left\langle U^l(x^n,t)U^q_{;l}(x^n,t),\overline{\varphi}^P_q(x^n)\right\rangle$$
$$;\alpha^P(t)=\left\langle U^i(x^n,t),\overline{\varphi}^P_i(x^n)\right\rangle \quad ; \quad U^i(x^n,t)=\alpha^P(t)\varphi^{Pi}(x^n)$$

Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Março de 2013

VISTOS

O Chefe do Núcleo de Modelação
Matemática e Física

José Vieira de Lemos

O Director do Departamento de
Barragens de Betão

José Vieira de Lemos

AUTORIA

Romano Jorge Calhau Câmara

Romano Jorge Calhau Câmara
Engenheiro Civil
Investigador Coordenador

Nuno Monteiro Azevedo

Nuno Monteiro Azevedo
Engenheiro Civil
Investigador Auxiliar

ADENDA

$$\left(s_i^{\alpha_i} e^{-x_N^i s_i}\right) * \left(s_i^{\beta_i} e^{-x_M^i s_i}\right) = \int_0^{s_i} (s_i - \tau)^{\alpha_i} e^{-x_N^i (s_i - \tau)} \tau^{\beta_i} e^{-x_M^i \tau} d\tau =$$

$$= \frac{\alpha_i !}{(\alpha_i - \gamma)! \gamma!} (-1)^{\gamma} s_i^{(\alpha_i - \gamma)} e^{-x_N^i s_i} \int_0^{s_i} \tau^{\gamma + \beta_i} e^{(x_N^i - x_M^i)\tau} d\tau$$

Em que,

$$\int \tau^{\gamma+\beta_i} e^{(x_N^i - x_M^i)\tau} d\tau = \tau^{\gamma+\beta_i} \frac{e^{(x_N^i - x_M^i)\tau}}{(x_N^i - x_M^i)} - \frac{\gamma+\beta_i}{(x_N^i - x_M^i)} \int \tau^{\gamma+\beta_i - 1} e^{(x_N^i - x_M^i)\tau} d\tau$$

Para M=N $x^i \in \left[x_M^i, x_N^i\right]$ em que $\frac{\delta(t)}{t} = -\dot{\delta}(t)$, o L.E. da equação

$$\int \tau^{\gamma+\beta_i} e^{(x_N^i - x_M^i)\tau} d\tau = \frac{\tau^{\gamma+\beta_i+1}}{\gamma+\beta_i+1}$$

Para M=N $x^i \in \left[x_M^i, x_N^i\right]$ em que $\frac{\delta(t)}{t} = -\dot{\delta}(t)$, o L.D. da equação

$$\tau^{\gamma+\beta_i} \frac{e^{(x_N^i - x_M^i)\tau}}{(x_N^i - x_M^i)} - \frac{\gamma+\beta_i}{(x_N^i - x_M^i)} \tau^{\gamma+\beta_i-1} \frac{e^{(x_N^i - x_M^i)\tau}}{(x_N^i - x_M^i)} +$$

$$+ \cdots + (-1)^n \left(\frac{\gamma+\beta_i}{(x_N^i - x_M^i)}\right)^n \tau^{\gamma+\beta_i-n} \frac{e^{(x_N^i - x_M^i)\tau}}{(x_N^i - x_M^i)}$$

=

$$\tau^{\gamma+\beta_i} \frac{1}{(x_N^i - x_M^i)} - \frac{\gamma+\beta_i}{(x_N^i - x_M^i)} \tau^{\gamma+\beta_i-1} \frac{1}{(x_N^i - x_M^i)} +$$

$$+ \cdots + (-1)^n \left(\frac{\gamma+\beta_i}{(x_N^i - x_M^i)}\right)^n \tau^{\gamma+\beta_i-n} \frac{1}{(x_N^i - x_M^i)}$$

É singular, (com $\frac{s_i^{\theta} e^{-x_N^i s_i}}{x_N^i - x_M^i} \xrightarrow{L} \frac{\delta^{(\theta)}\left(x^i - x_N^i\right)}{x_N^i - x_M^i} = -\frac{\delta^{(\theta)}\left(x^i - x_N^i\right)}{x_M^i - x_N^i} = \delta^{(\theta+1)}\left(x^i - x_N^i\right)$)

Com,

$$\theta = \gamma + \beta_i \quad ; \quad \tau \to s_i \quad ; \quad \frac{\delta^{(\theta)}(x^i - x_N^i)}{(x_N^i - x_M^i)} \sum 1 - \theta + \cdots + \theta^n =$$

$$\frac{\delta^{(\theta)}(x^i - x_N^i)}{(x_N^i - x_M^i)} \frac{1}{1+\theta} = \frac{\delta^{(\gamma+\beta_i+1)}(x^i - x_N^i)}{(\gamma+\beta_i+1)}$$