

Simulação numérica do escoamento sobre um cilindro com oscilação transversal a baixos números de Reynolds

Teixeira P.R.F.¹, Gonçalves R.¹ e Didier E.^{2,3}

¹Universidade Federal do Rio Grande, Escola de Engenharia, Avenida Itália, km8, Campus Carreiros, 96201-900, Rio Grande, RS, Brasil

email: pauloteixeira@furg.br <http://www.furg.br>

²Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Departamento de Hidráulica e Ambiente, Avenida do Brasil, 101,1700-066, Lisboa, Portugal

³MARETEC, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001, Lisboa, Portugal

Sumário

Neste artigo, é apresentada uma análise da interação entre escoamentos a baixos números de Reynolds (95 a 140) e um cilindro circular sob apoio elástico (mola e amortecedor). A simulação é realizada através de um modelo que usa o método de Taylor-Galerkin de dois passos semi-implícito para discretizar as equações de Navier-Stokes e a formulação arbitrária lagrangeana-euleriana para acompanhar os movimentos do cilindro. O movimento de corpo rígido é calculado pelo uso do Método de Newmark. São estudados o processo de geração de vórtices, as forças de arrasto e de sustentação, o deslocamento do cilindro e as frequências de vibração.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos; Cilindro circular oscilante; Interação fluido-estrutura.

1 INTRODUÇÃO

A vibração induzida por desprendimentos de vórtices na esteira de um corpo não fuselado (*Vortex-Induced Vibration* - VIV) é um fenômeno encontrado em diversos campos da engenharia. São exemplos: o vento sobre pontes, edifícios esbeltos, chaminés e cabos de transmissão de energia; escoamento a altas velocidades em tubos internos de um trocador de calor; e correntes e ondas em pipelines e risers.

O escoamento uniforme em torno de cilindros circulares sobre base elástica envolvem o fenômeno VIV e representa um caso importante para a validação de modelos numéricos de interação fluido-estrutura. Em muitas aplicações, o cilindro oscila e interage com o processo de desprendimento de vórtice. Uma das características mais interessantes deste tipo de interação fluido-estrutura é o de sincronização (*lock-in*) entre o desprendimento de vórtice e a frequência de vibração. Neste fenômeno, que ocorre em uma faixa de velocidade do escoamento, a amplitude do movimento do cilindro atinge o seu valor máximo.

Diversas análises numéricas podem ser encontradas na literatura para uma grande faixa de número de Reynolds, incluindo os métodos baseados nas equações de Navier-Stokes na média de Reynolds (*Reynolds Averaged Navier-Stokes* - RANS), na simulação de grandes escalas (*Large Eddy Simulations* - LES), e na simulação numérica direta (*Direct Numerical Simulations* - DNS). Encontram-se também muitos trabalhos que usam os métodos das aproximações de volumes finitos e de elementos finitos para a discretização das equações de Navier-Stokes.

O modelo numérico usado neste trabalho está baseado em um esquema particionado de interação fluido-estrutura. O código de modelação numérica do escoamento utiliza um método fraccionado para simular problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis e emprega o método de Taylor-Galerkin de dois passos semi-implícito para discretizar no tempo e no espaço as equações de Navier-Stokes [1]. É usada uma formulação lagrangeana-euleriana arbitrária, ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*), para permitir os movimentos de corpos. Para a discretização no espaço é aplicado o método clássico dos resíduos ponderados de Galerkin empregando um elemento triangular linear. A distribuição espacial da velocidade da malha é tal que a distorção dos

elementos é minimizada pela sua suavização através do uso de funções que ponderam a influência da velocidade de cada nó pertencente às superfícies de contorno.

O movimento de corpo rígido do cilindro é calculado a cada instante, considerando a equação diferencial de um grau de liberdade do deslocamento de um sistema massa-mola-amortecedor. A discretização temporal desta equação é realizada através do método implícito de Newmark.

O estudo apresentado neste artigo consiste em um cilindro circular sujeito a um escoamento uniforme de água. O cilindro é apoiado em uma mola e um amortecedor na direção transversal e fixo na direção do escoamento. Primeiramente, é analisado o comportamento do escoamento considerando o cilindro fixo para uma faixa de número de Reynolds de 90 a 140, para os quais o escoamento é bidimensional e laminar. Nestes casos, são calculados os números de Strouhal ($St=fD/U$) e comparados com os obtidos pela equação de Roshko [3], baseada em resultados experimentais. Especificamente para um número de Reynolds $Re=105$, são apresentadas as distribuições de pressão e de velocidade próximas ao cilindro, além da força na direção transversal e longitudinal. Após, são realizadas simulações para diversos números de Reynolds em uma faixa de 90 a 140, considerando o apoio elástico na direção transversal. Os resultados obtidos são comparados com os experimentais desenvolvidos por Anagnostopoulos e Bearman [2]. São determinadas as relações entre a amplitude (Y) de oscilação do cilindro e seu diâmetro D para cada número de Reynolds. Também são calculadas as relações entre as frequências de vibração do cilindro e a frequência natural do sistema (f/fn).

2 O MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico é baseado em um esquema particionado, no qual o escoamento do fluido e a estrutura são solucionados de forma acoplada. Basicamente, a interação fluido-estrutura adotada no código consiste nos seguintes passos:

- atualização das variáveis do escoamento do instante t para o $t+\Delta t$;
- imposição da pressão e das tensões viscosas como carga na estrutura;
- atualização das variáveis da estrutura do instante t para o $t+\Delta t$;
- imposição do movimento do corpo para o escoamento em termos de atualização do vetor de velocidades e da posição do contorno.

Para calcular o movimento de corpo rígido da estrutura é necessário determinar os deslocamentos e as rotações de uma massa concentrada hipotética localizada no centro de gravidade do corpo. Neste estudo de caso, existe apenas movimento na direção transversal ao escoamento (um grau de liberdade - GDL) e, conseqüentemente, as variáveis a serem determinadas a cada passo de tempo são o deslocamento, a velocidade e a aceleração.

As metodologias usadas para a solução do escoamento do fluido e da estrutura são descritos nas seguintes seções.

2.1 Módulo do escoamento do fluido

Basicamente, o algoritmo do escoamento do fluido consiste nos seguintes passos [1]:

- Cálculo da velocidade não-corrigida a $\Delta t/2$, onde o termo de pressão está no instante t de acordo com a Eq. (1).

$$\tilde{U}_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - \rho g_i - w_j^n \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

onde ρ é a densidade, p é a pressão, g_i são as componentes da aceleração da gravidade, v_i são as componentes de velocidade, w_i são as componentes de velocidade do sistema de referência e τ_{ij} é o tensor de tensões viscosas, $U_i = \rho v_i$, $f_{ij} = v_j(\rho v_i) = v_j U_i$ ($i, j = 1, 2$).

- Cálculo da pressão p a $t+\Delta t$, dada pela equação de Poisson:

$$\frac{1}{c^2} \Delta p = -\Delta t \left[\frac{\partial \tilde{U}_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right] \quad (2)$$

onde $\Delta p = p^{n+1} - p^n$ e $i = 1, 2$.

(c) Correção da velocidade a $t+\Delta t/2$, adicionando o termo de variação de pressão de t para $t+\Delta t/2$, de acordo com a equação:

$$U_i^{n+1/2} = \tilde{U}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (3)$$

(d) Cálculo da velocidade em $t+\Delta t$ usando variáveis atualizadas nos passos anteriores como segue:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t \left(\frac{\partial f_{ij}^{n+1/2}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{n+1/2}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_i} - w_j^{n+1/2} \frac{\partial U_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \quad (4)$$

A discretização espacial é realizada através do método clássico dos resíduos ponderados de Galerkin e pelo uso do elemento finito triangular. Uma função de interpolação constante é usada para as variáveis a $t+\Delta t/2$ e uma função de interpolação linear é usada para as variáveis em t e $t+\Delta t$. Este procedimento é aplicado nas Eq. (1), (2), (3) e (4) [4].

A equação de Poisson, resultado da discretização espacial da Eq. (2), é resolvida usando o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento diagonal [5]. Na Eq. (4) discretizada no espaço, a matriz de massa consistente é substituída pela matriz de massa diagonal (*lumped matrix*), sendo, então, resolvida por um processo iterativo. O esquema é condicionalmente estável e a condição de estabilidade local para um elemento E é dada por

$$\Delta t_E \leq \beta h_E / |u| \quad (5)$$

onde h_E é o tamanho característico do elemento, β é o fator de segurança e u é a velocidade do fluido.

Para diminuir as distorções dos elementos, é calculada a componente vertical da velocidade da malha baseado nas velocidades prescritas das superfícies de contorno móveis e estacionárias. O algoritmo de movimento de malha adotado neste artigo usa um procedimento de suavização para as velocidades baseado nestas linhas de contorno. A atualização da velocidade da malha em um ponto i do domínio é baseado na velocidade da malha dos pontos j que pertencem as linhas de contorno e é expressa da seguinte forma [6]:

$$w_2^i = \frac{\sum_{j=1}^{ns} a_{ij} w_2^j}{\sum_{j=1}^{ns} a_{ij}} \quad (6)$$

onde ns é o número total de pontos que pertencem as linhas de contorno e a_{ij} são os coeficientes de influência entre o ponto i dentro do domínio e o ponto j na linha de contorno dada pela seguinte expressão:

$$a_{ij} = \frac{1}{d_{ij}^4} \quad (7)$$

com d_{ij} sendo a distância entre os pontos i e j .

2.2 O módulo da estrutura

O movimento de corpo rígido do cilindro é calculado a cada instante, depois das variáveis do escoamento (pressão e tensões viscosas) serem conhecidas. Para o estudo de caso, a equação dinâmica de um GDL é considerada para a direção transversal, como segue:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F \quad (8)$$

onde y , \dot{y} e \ddot{y} são o deslocamento, velocidade e aceleração transversais, respectivamente; m é a massa; c é o coeficiente de amortecimento; k é a rigidez; e F é a força dinâmica.

Neste código, a Eq. (8) é discretizada no tempo pelo uso do método implícito de Newmark. O deslocamento, a velocidade e a aceleração na direção transversal são calculadas a cada instante de tempo de acordo com o seguinte algoritmo [7], cujos cálculos iniciais são:

a) Inicialização de ${}^0\ddot{y}$, ${}^0\dot{y}$ e 0y ;

b) Cálculo das constantes de integração;

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}; a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}; a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); a_6 = \Delta t(1 - \delta); a_7 = \delta\Delta t$$

c) Formação do coeficiente de rigidez efetivo: $k_e = k + a_0m + a_1c$.

Para cada passo de tempo, a sequência é:

a) Cálculo das cargas efetivas no instante $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}F_e = {}^{t+\Delta t}F + m(a_0{}^t y + a_2{}^t \dot{y} + a_3{}^t \ddot{y}) + c(a_1{}^t y + a_4{}^t \dot{y} + a_5{}^t \ddot{y});$$

b) Solução dos deslocamentos em $t+\Delta t$: ${}^{t+\Delta t}y = {}^{t+\Delta t}F_e / k_e$;

c) Cálculo das acelerações e velocidades em $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{y} = a_0({}^{t+\Delta t}y - {}^t y) - a_2{}^t \dot{y} - a_3{}^t \ddot{y};$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{y} = {}^t \dot{y} + a_6{}^t \dot{y} + a_7{}^{t+\Delta t}\ddot{y}.$$

3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

3.1 O estudo de caso e as condições de simulação

O estudo de caso consiste em um cilindro circular (diâmetro e massa iguais a 0.0016m e 0.2979kg, respectivamente) sujeito a um escoamento uniforme de água (massa específica, ρ , e viscosidade, μ , iguais a 1000.0kg/m³ e 0.001kg/(ms), respectivamente). O cilindro é montado em uma mola e um amortecedor na direção transversal e é fixo na direção do escoamento (ver Fig. 1). A rigidez da mola, k , é igual a 579N/m e o coeficiente de amortecimento, c , é igual a 0.0325kg/s. A frequência natural deste sistema é $fn=7.016$ Hz.

Primeiramente, é analisado o comportamento do escoamento considerando o cilindro fixo. Especificamente, são estudadas as características do escoamento com $Re=105$ (velocidade U igual a 0.0656 m/s). Após, são realizadas simulações para diversos números de Reynolds na faixa de 90 a 140, considerando um apoio elástico na direção transversal (para todos os casos o cilindro é mantido fixo até a estabilização do escoamento).

Neste caso, as variáveis adimensionais que influenciam nas vibrações são [8, 9, 10]:

a) Velocidade reduzida $U^* = \frac{U}{Dfn}$. Para $90 \leq Re \leq 135$, a faixa de velocidade reduzida é $5 \leq U^* \leq 7.5$.

Experimentos mostram que existe uma faixa de excitação que proporcionam vibrações significantes, tal como $3 \leq U^* \leq O(10)$ com amplitudes máximas na faixa de $6 \leq U^* \leq 8$.

b) Relação de massa $m^* = \frac{4m}{\rho\pi D^2 L} = 148$, onde L é o comprimento do cilindro (igual a um metro neste artigo, por se tratar de uma simulação bidimensional).

c) Relação de amortecimento $\zeta = \frac{c}{c_{crit}} = 0.0012$, onde c_{crit} é o amortecimento crítico.

Depois da análise de convergência de malha, são usadas duas malhas de elementos finitos compostas de triângulos. Existem 100 e 200 divisões ao redor do cilindro em cada malha (Fig. 2). Os tamanhos dos elementos aumentam gradualmente em direção aos contornos do domínio. A malha grosseira tem 34054 nós e 67526 elementos e a malha refinada tem 49887 nós e 99072 elementos. A primeira foi usada para $95 \leq Re \leq 126$ e a última foi empregada para $129 \leq Re \leq 140$.

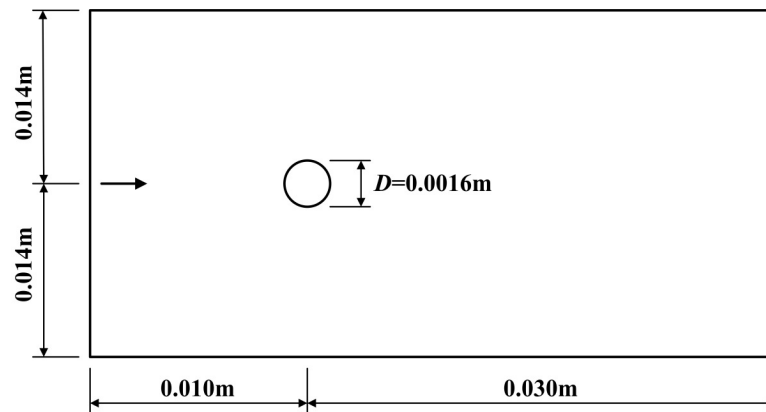


Fig. 1. Domínio computacional

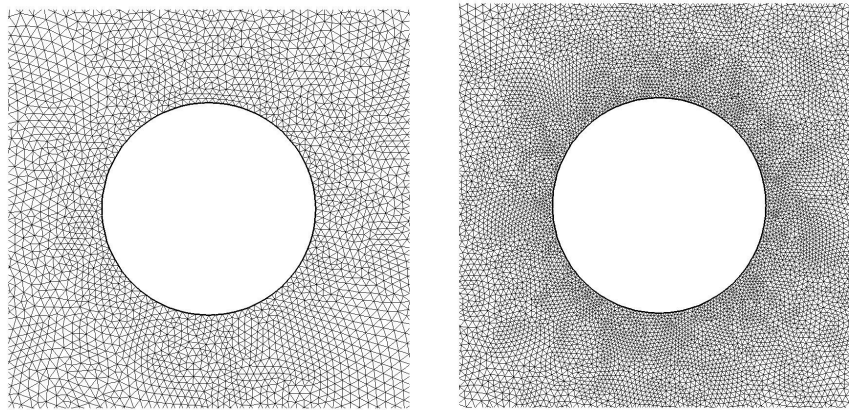


Fig. 2. Malhas de elementos finitos: malha grosseira (67526 elementos) e fina (99072 elementos)

A velocidade constante é imposta no lado esquerdo (Fig.1); nas paredes superior e inferior, é imposta a condição de deslizamento; e o lado direito é livre, mas é imposta pressão nula no seu ponto médio. Os passos de tempo usados para as simulações pelo uso das malhas grosseira e refinada são $1.0(10^{-4})$ s e $5.0(10^{-5})$ s, respectivamente.

3.2 Resultados com o cilindro fixo

Nesta secção, é apresentada a análise do cilindro circular fixo. Como exemplo, são mostrados os resultados numéricos para um $Re=105$. As Fig. 3 e 4 mostram as distribuições de pressão e os vectores de velocidade para oito instantes de tempo ao longo de um período de formação de vórtices, respectivamente. Em relação as distribuições de pressão, as principais características observadas foram: alta pressão na parte frontal do cilindro (o maior valor está no ponto de estagnação) e os valores negativos na região da esteira. No que se refere aos vectores de velocidade, foi observada a formação de vórtices, mostrando duas regiões diferentes junto ao cilindro onde ocorre a separação. Perto da superfície do cilindro, enquanto o vórtice maior está num sentido, o vórtice oposto está no outro. Observou-se que a força na direcção longitudinal sobre o cilindro estabilizou em 0.0034N. Na direcção transversal, ocorre um comportamento periódico com amplitude igual a 0.0012N e frequência de 7.220Hz ($St=0.176$).

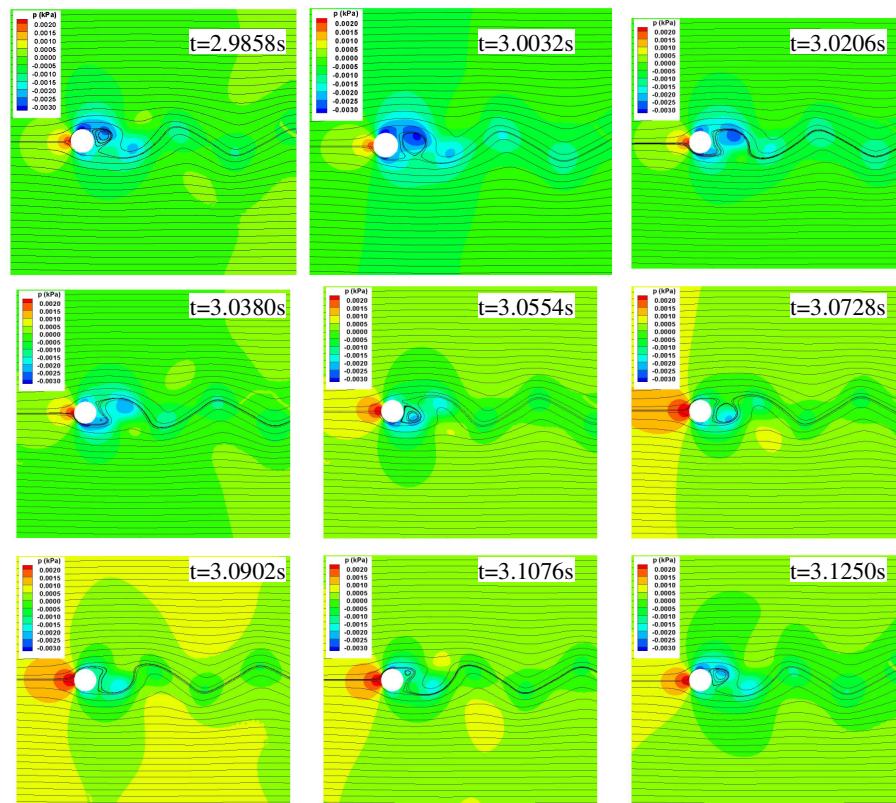


Fig. 3. Distribuições de pressão em oito instantes ao longo de um período de formação de vórtices

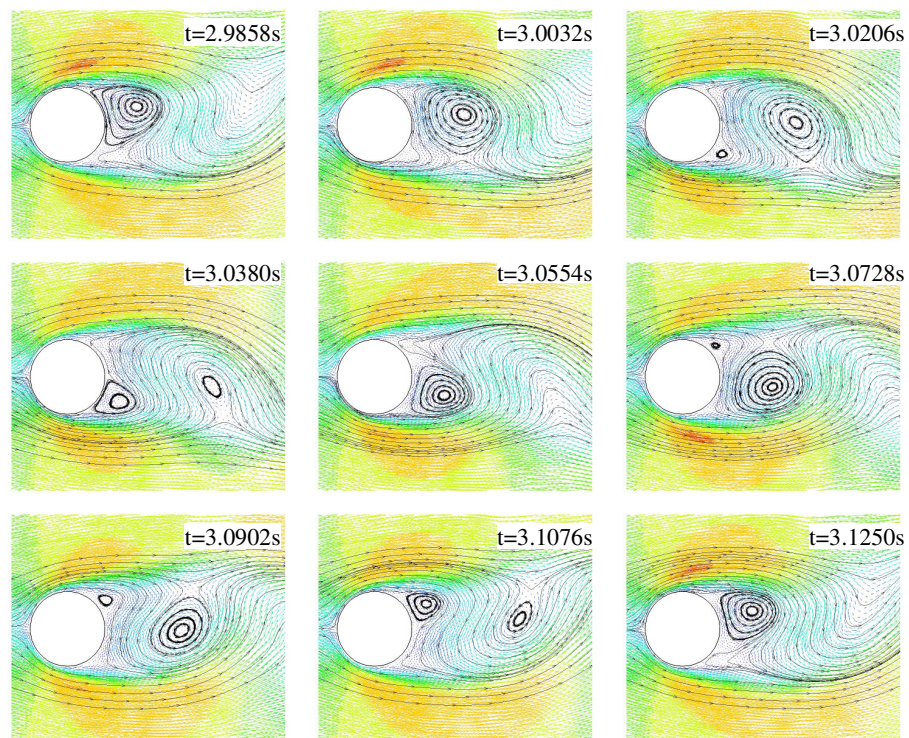


Fig. 4. Vetores de velocidade em oito instantes ao longo de um período da formação de vórtices

A Fig. 5 mostra uma comparação entre o número de Strouhal ($St = fD/U$) obtido numericamente (considerando f igual a frequência da força transversal) e a equação de Roshko [3], baseado em resultados experimentais. Esta equação é expressa da forma:

$$St = 0.212 \left(1 - \frac{21.2}{Re} \right) \quad (9)$$

Os números de Strouhal obtidos numericamente são suavemente superiores aos experimentais para todos os números de Reynolds. Possivelmente este comportamento sistemático tenha sido causado por alguma influência do contorno do domínio computacional nos resultados. A confirmação desta possibilidade deverá ser esclarecida através de uma análise de convergência em relação às dimensões do domínio. Observa-se que, neste trabalho, o tamanho do domínio é o mesmo adotado por Dettmer e Peric [11].

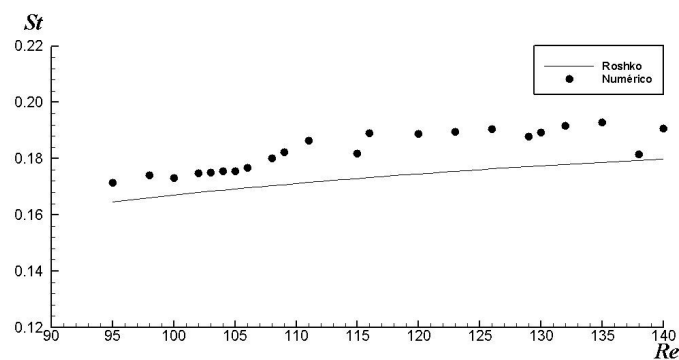


Fig. 5. Números de Strouhal em relação aos números de Reynolds

3.3 Resultados com o cilindro oscilante

Nesta seção, o cilindro circular montado em uma fixação elástica na direção transversal está sujeito a escoamentos com diversos números de Reynolds, de 90 a 140. Estes experimentos foram desenvolvidos por Anagnostopoulos e Bearman [2] e seus resultados são comparados com os obtidos numericamente.

A Fig. 6 mostra a relação entre a amplitude (Y) de oscilação do cilindro e seu diâmetro (D) em função dos números de Reynolds (90 a 140). A Fig. 7 mostra a relação entre a frequência de vibração e a frequência natural (f/f_n) em função dos números de Reynolds.

Os resultados numéricos mostram que o fenômeno de *lock-in* foi capturado para números de Reynolds entre 98 e 106. Isto foi observado devido ao aumento da amplitude e da proximidade das frequências de vibração e natural. Fora da região de *lock-in*, as amplitudes são muito pequenas e as frequências de vibração coincidem com as do despreendimento dos vórtices que ocorrem para o cilindro fixo. Estas frequências seguem aproximadamente a curva de Roshko (ver Fig. 5).

As diferenças das amplitudes obtidas experimentalmente e numericamente na faixa de número de Reynolds da região de *lock-in* foram observados por Dettmer e Peric [11]. Estes autores usaram um modelo que emprega a técnica dos elementos finitos com o acoplamento pressão-velocidade estabilizada e de baixa ordem, uma formulação Lagrangeana-Euleriana e o método de discretização implícito α -generalizado para o movimento de corpo rígido. De acordo com os autores, estas diferenças podem ser explicadas comparando o domínio e condições de contorno numéricos com a situação real do experimento, no qual um cilindro vertical é imerso até 0.12m de profundidade um canal. A falta de uma placa horizontal fixada na extremidade submersa do cilindro possibilita a formação de vórtices nesta região. Este fato e a influência da superfície livre contribui para o desenvolvimento de um comportamento tridimensional do escoamento, diferentemente da situação de simulação.

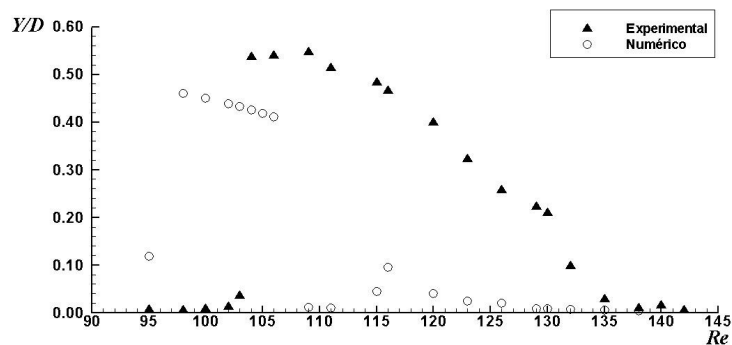


Fig. 6. Amplitude (Y/D) em relação ao número de Reynolds

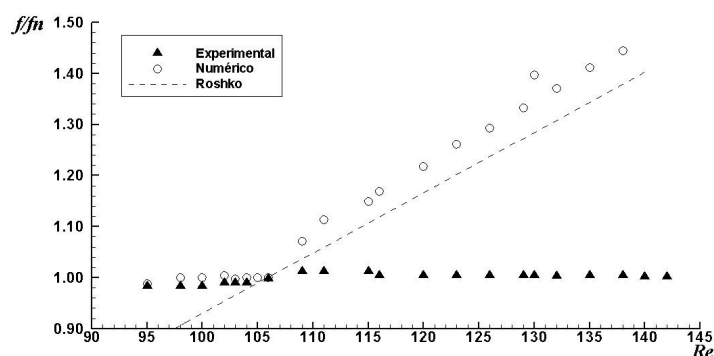


Fig. 7. Frequência de vibração (f/f_n) em relação ao número de Reynolds

A Fig. 8 mostra o comportamento das forças longitudinal e transversal para os cilindros fixo e oscilante com $Re=105$. A força longitudinal sobre o cilindro fixo estabiliza-se em um valor constante de 0.0034N, enquanto que, sobre o cilindro oscilante, esta força oscila entre 0.0037N e 0.0058N a uma frequência igual a 14.029Hz (praticamente duas vezes a frequência na direção transversal). Na direção transversal, as forças diferem em termos de frequência e de amplitude. As amplitudes das forças para os cilindros fixo e oscilante são 0.0012N e 0.0010N e suas frequências são 7.219Hz e 6.986Hz, respectivamente. A primeira frequência está relacionada ao desprendimento de vórtices, enquanto que a última é próxima a frequência natural do sistema dinâmico do cilindro.

Para casos fora da zona de *lock-in*, observou-se que as forças longitudinal e transversal tem praticamente os mesmos comportamentos, comparando a situação do cilindro fixo com a do cilindro oscilante. Por exemplo, para o caso de $Re=123$, as forças longitudinais têm poucas variações em torno do valor médio de 0.0048N, enquanto que as forças transversais descrevem um comportamento periódico com amplitudes maiores do que aquelas obtidas para $Re=105$, de 0.0020N. Esta característica não é reproduzida em termos de deslocamentos, o qual são muito pequenos para $Re=123$, pelo fato do caso estar fora da região de *lock-in*.

Na Fig. 9 estão mostradas as forças de mola, de amortecimento e de inércia envolvidas nos sistemas dinâmicos para $Re=105$ e 123. As forças de mola e de amortecimento tem diferenças de fase de 180 graus, como esperado. As amplitudes destas forças são mais altas que as de inércia. Para $Re=105$ (região de *lock-in*), as amplitudes das forças de mola e de amortecimento são mais altas que a amplitude da força transversal (ver Fig. 8b). A relação entre eles é de aproximadamente 450. Para $Re=123$, esta relação é baixa (em torno de 5), pelo fato de estar fora da região de *lock-in*.

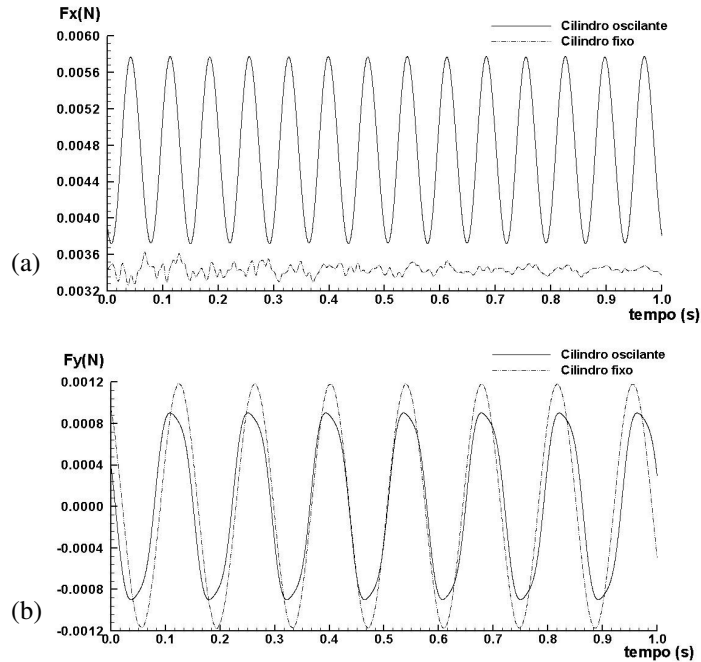


Fig. 8. Forças longitudinal (a) e transversal (b) para o cilindro oscilante com $Re=105$

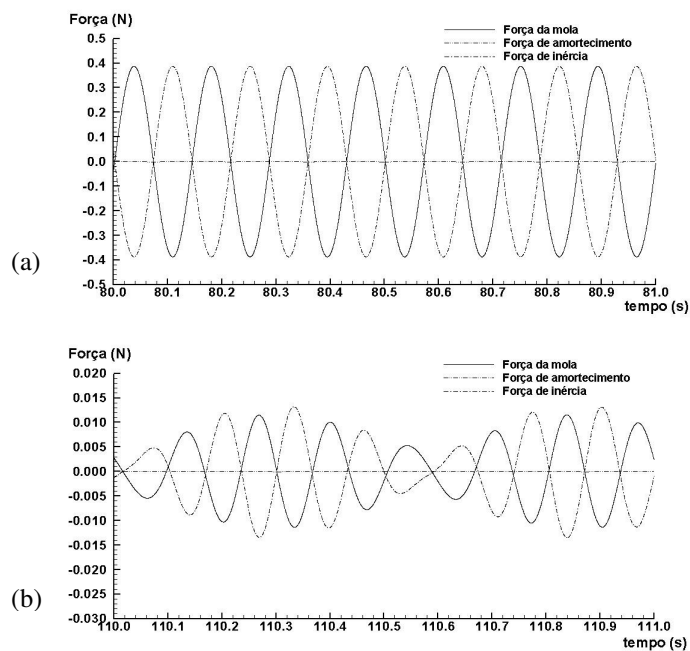


Fig. 9. Forças de mola, de amortecimento e de inércia sobre o cilindro oscilante com (a) $Re=105$ e (b) $Re=123$

4 CONCLUSÕES

Neste artigo, foram apresentadas análises numéricas dos fenômenos que ocorrem na interação entre escoamentos a baixos números de Reynolds e cilindros fixados em apoios elásticos. As simulações foram realizadas usando um modelo numérico que usa o método semi-implícito de Taylor-Galerkin de dois passos para discretizar as equações de Navier-Stokes e uma formulação lagrangeana euleriana arbitrária para acompanhar os movimentos do cilindro. A descrição do movimento de corpo rígido do cilindro é calculado usando o método de Newmark.

Para o cilindro fixo, o fenômeno da formação de vórtices foi corretamente reproduzida: perto da superfície do cilindro, enquanto o cilindro maior está em um sentido, o outro está no sentido contrário. Os números de Strouhal foram calculados para uma faixa de números de Reynolds de 95 a 140. Estes valores são similares aos obtidos através dos experimentos de Roshko.

O fenômeno de sincronização (*lock-in*) foi capturado para números de Reynolds entre 98 e 106, caracterizado pelo aumento de amplitude e aproximação dos valores das frequências de vibração com a natural do sistema. Comparando os resultados numéricos com os experimentais [2], algumas diferenças foram observadas devido a presença dos efeitos tridimensionais do experimento que não são considerados na simulação numérica.

5 AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq através do projeto 303308/2009-5. O segundo autor agradece a bolsa de pós-graduação da CAPES.

REFERÊNCIAS

1. P.R.F. Teixeira, *Simulação numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método de elementos finitos*, Tese de doutorado, PPGEC-UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 2001.
2. P. Anagnostopoulos, P.W. Bearman, Response characteristics of a vortex-excited cylinder at low Reynolds numbers, *Journal of Fluids and Structures*, 14(6) 39-50, 1992.
3. A. Roshko, *On the development of turbulent wakes from vortex streets*, NACA Report 1191, California Institute of Technology, 1954.
4. P.R.F. Teixeira, A.M. Awruch, Three-dimensional simulation of high compressible flows using a multi-time-step integration technique with subcycles, *Applied Mathematical Modelling*, 25 613-627, 2001.
5. J. Argyris, J. St. Doltsinis, H. Wuestenberg, P.M. Pimenta, *Finite element solution of viscous flow problems*, *Finite Elements in Fluids*, 6 89-114, Wiley, New York, 1985.
6. P.R.F. Teixeira, A.M. Awruch, Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method, *Computers & Fluids*, 34 249-273, 2005.
7. K.J. Bathe, *Finite element procedures*, Prentice-Hall, 1996.
8. A. Placzek, J-F.β. Sigrist, A. Hamdouni, Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low Reynolds number: Forced and free oscillations, *Computer & Fluids*, 38 80-100, 2009.
9. D. Shiels, A. Leonard, A. Roshko, Flow-induced vibration of circular cylinder at limiting structural parameters, *Journal of Fluids and Structures*, 15 3-21, 2001.
10. M.H. Bahmani, M.H. Akbari, Effects of mass and damping ratios on VIV of a circular cylinder. *Ocean Engineering*, 37 511-519, 2010.
11. W. Dettmer, D. Peric, A computational framework for fluid-rigid body interaction: Finite element formulation and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 1633-1666, 2006.