



LABORATÓRIO NACIONAL  
DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
Núcleo de Engenharia Sísmica e Dinâmica  
de Estruturas

Proc. 305/11/17713

# **MODELOS DE COMPORTAMENTO DINÂMICO APLICÁVEIS A AMORTECEDORES DE LÍQUIDO SINTONIZADO**

## **Relatório de estágio – Parte IV**

Plano de Investigação Programada n.º 0305/11/17713

Lisboa • Novembro de 2011

**I&D** ESTRUTURAS

**RELATÓRIO 374/2011 – NESDE**



# NOTA PRÉVIA

O presente trabalho constitui parte do relatório de estágio da Eng<sup>a</sup> Maria João Serpa da Lança Falcão da Silva no Núcleo de Engenharia Sísmica e Dinâmica de Estruturas (NESDE) do Departamento de Estruturas (DE) do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC).

O estágio foi realizado entre 3 de Agosto de 2009 e 16 de Dezembro de 2010 sob a orientação do Engenheiro Alfredo Peres de Noronha Campos Costa, Investigador Principal do NESDE, enquadrado no Plano de Investigação Programada (2009-2012) nº 0305/11/17713 e subordinado ao tema Protecção Sísmica de Estruturas: Reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.

O trabalho desenvolvido pela estagiária, não só durante o período de estágio suprarreferido, mas também enquanto bolsreira de doutoramento FCT/LNEC (2004-2009), deu origem a uma tese de doutoramento em Engenharia Civil (IST), intitulada *Sistemas passivos para a protecção sísmica de estruturas: Uma abordagem baseada no desempenho de amortecedores de líquido sintonizado*, orientada pelo Engenheiro Alfredo Peres de Noronha Campos Costa e pelo Professor Luís Manuel Coelho Guerreiro (IST).



## MODELOS DE COMPORTAMENTO DINÂMICO APLICAVEIS A AMORTECEDORES DE LÍQUIDO SINTONIZADO (ALSs)

No presente relatório pretendem-se apresentar e definir alguns das linhas orientadoras para a simulação do comportamento dinâmico de fluidos no interior de Amortecedores de Líquido Sintonizado (TLDs), de acordo com o proposto na literatura.

O problema da modelação do comportamento de fluidos no interior de Amortecedores de Líquido Sintonizado, à semelhança do que acontece para reservatórios, é complexo, sendo apresentados os principais modelos matemáticos e mecânicos utilizados na actualidade.

Assim serão descritos modelos de comportamento adoptados no caso particular dos Amortecedores de Líquido Sintonizado (TLDs) e modelos simplificados de sistemas de 1 (SDOF) ou mais graus (MDOF) de liberdade com os referidos dispositivos de mitigação de acções dinâmicas acoplados

O presente relatório servirá, à semelhança dos relatórios *Sistemas passivos, activos, híbridos e semi-activos: Estado dos conhecimentos, Actividade experimental na área dos sistemas passivos para a protecção sísmica de estruturas: Experiência do NESDE* e *Modelos de comportamento dinâmico para fluidos no interior de reservatórios* como uma das linhas orientadoras para o desenvolvimento dos trabalhos propostos no âmbito do PIP 2009-2012 do NESDE-DE Protecção Sísmica de Estruturas: Reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.



## DYNAMIC BEHAVIOR MODELS USED FOR TUNED LIQUID DAMPERS (TLDS)

This report aims to present and define some of the guidelines for the simulation of the dynamic behavior of fluids inside Tuned Liquid Dampers, according to the proposed in the literature.

The problem of modeling the behavior of fluids inside Tuned Liquid Dampers, similarly to what happens in storage tanks, is a complex problem, being presented the main mechanical and mathematical models used nowadays.

It is intended to describe the theoretical basis that can be adopted in the particular case of the Tuned Liquid Dampers (TLDs), in compound systems of 1 (SDOF) or multi (MDOF) degree of freedom structure with Tuned Liquid Dampers (TLDs) attached

This document also serves, similarly to reports *Passive, active, hybrid and semi-active systems for seismic protection of structures: State of the art and Experimental activities in the area of passive devices for seismic protection of structures: NESDE experience and Dynamic behavior models for fluids inside storage tanks*, as guideline for the development of the work proposed under the 2009-2012 PIP NESDE DE Protecção Sísmica de Estruturas: reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.



## LES MODELES DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES FLUIDES DANS AMORTISSEURS DE LIQUID RÉGLÉS (ALRs)

Ce rapport vise à présenter et à définir des lignes directrices pour la simulation du comportement dynamique des fluides dans les Amortisseurs de Liquid Regles (ALRs), conformément à la proposition de la littérature

Le problème de la modélisation du comportement des fluides dans les Amortisseurs de Liquid Régles est, comme en réservoirs, très complexe et montre les principales modèles mathématiques et utilisés actuellement

Les tentatives visant à décrire les fondements théoriques qui peuvent être adoptées dans le cas particulier des Amortisseurs de Liquide Régles (TLD) et dans le cas des systèmes à 1 (SDOF) ou plusieurs (MDOF) degrés de liberté avec Amortisseurs de Liquide Régles (TLD)

Ce rapport sera une des lignes directrices, comme rapports *Systèmes passifs, actifs, hybrides et semi-actifs pour la protection sismique des structures : État des connaissances et Activité expérimentel dans les systemes passifs pour la protection sismique des structures: Expérience du NESDE* et *Les modèles du comportement dynamique des fluides dans réservoirs*, pour le développement des activités proposées dans le cadre du PIP 2009-2012 DE NESDE Protecção Sísmica de Estruturas: Reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.



# ÍNDICE

|   |           |
|---|-----------|
| 1. Introdução   | 1         |
| 2. Evolução dos modelos de comportamento aplicáveis a Amortecedores de Líquido Sintonizado  | 3         |
| 3. Modelos de comportamento dinâmico aplicáveis a Amortecedores de Líquido Sintonizado: Estudos preliminares  | 9         |
| 3.1. Teoria Linear de onda (Shallow water wave theory)  | 9         |
| 3.2. Modelo não-linear baseado na teoria Linear de onda   | 17        |
| 3.3. Linearização do modelo analítico não-linear (baseado nas shallow water wave equations)   | 25        |
| 3.4. Modelos não-lineares com fenómenos de quebra de onda (breaking waves)  | 30        |
| 3.5. Modelos mecânicos lineares baseados na analogia com o Tuned Mass Damper equivalente – Modelos de Housner 1957 e Housner 1963                   | 32        |
| 3.6. Modelo não-linear baseado na analogia com o amortecedor de massa sintonizado equivalente – Extensão dos modelos de Housner 1957 e Housner 1963 | 41        |
| 3.7. Modelo de massa múltipla [Tokarczyk, 1997]   | 44        |
| 3.7.1. Modelo mecânico equivalente para simulação das forças de sloshing  | 45        |
| 3.7.2. Modelo matemático desenvolvido a partir do modelo mecânico equivalente   | 47        |
| 3.8. Modelo do amortecedor sloshing-slamming ( $S^2$ ) [Kareem e Ayala, 1999]   | 49        |
| 3.8.1. Modelação do <i>sloshing</i> do fluido   | 50        |
| 3.8.2. Determinação do impacto ( <i>slamming</i> ) do fluido  | 51        |
| 3.8.3. Analogia sloshing-slamming ( $S^2$ )   | 52        |
| 3.8.4. Modelação do impacto   | 57        |
| 3.8.5. Modelos lineares equivalentes  | 61        |
| <b>4. Modelo de interacção entre amortecedores de líquido sintonizado e sistemas estruturais com um grau de liberdade (SDOF)</b>                    | <b>64</b> |
| 4.1. Características de sistemas com um grau de liberdade (SDOF)  | 64        |
| 4.2. Formulação das equações do movimento de SDOF excitados por movimento da base (acção sísmica)   | 65        |
| 4.3. Integral de Duhamel  | 67        |
| 4.4. Força hidrodinâmica no equilíbrio do sistema de um grau de liberdade (SDOF)  | 71        |
| <b>5. Modelo de interacção entre amortecedores de líquido sintonizado e sistemas estruturais com vários graus de liberdade (MDOF)</b>               | <b>73</b> |
| 5.1. Características de sistemas com vários graus de liberdade (MDOF)   | 73        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 5.2.      | Formulação das equações do movimento  | 74        |
| 5.3.      | Frequências naturais e modos de vibração  | 78        |
| 5.4.      | Resposta dinâmica de sistemas lineares MDOF com base em sobreposição modal      | 81        |
| 5.5.      | Forças hidrodinâmicas no equilíbrio do sistema MDOF                             | 83        |
| <b>6.</b> | <b>Considerações finais</b>   | <b>84</b> |
| <b>7.</b> | <b>Agradecimentos</b>   | <b>87</b> |
|           | <b>BIBLIOGRAFIA</b>   | <b>89</b> |
| I.1.      | Soluções numéricas pelo Método Runge-Kutta-Gill                                 | 97        |
| I.2.      | Soluções numéricas pelo Método SOLA-VOF (Solution Algorithm-Volume of Function) | 103       |
| I.3.      | Soluções numéricas pelo Método NSD (Non-Linear Stiffness and Damping)           | 107       |
| I.4.      | Soluções numéricas pelo RCM (Random Choice Method)                              | 113       |
| I.5.      | Soluções numéricas pelo método de análise Newmark-Beta                          | 125       |
| I.6.      | Métodos de resolução de equações diferenciais                                   | 132       |
| I.6.1.    | Solução clássica  | 132       |
| I.6.2.    | Métodos transformados   | 132       |
| I.6.3.    | Métodos numéricos no tempo  | 133       |
| I.7.      | Equações do movimento para sistemas estruturais planos sujeitos a translação    | 135       |
| I.8.      | Equações do movimento para sistemas estruturais planos sujeitos a rotação       | 137       |
| I.9.      | Equações do movimento para edifícios simétricos em planta sujeitos a translação | 138       |
| I.10.     | Equações do movimento para edifícios simétricos em planta sujeitos a rotação    | 140       |

# ÍNDICE DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| FIGURA 1 – AMORTECEDOR DE LÍQUIDO SINTONIZADO ACOPLADO À ESTRUTURA DE UM EDIFÍCIO COM O FLUIDO (A) EM REPOUSO E (B) EM MOVIMENTO DEVIDO À ACÇÃO DE UM SISMO, ADAPTADO DE [NOVO, 2008]..... | 2  |
| FIGURA 2 - GEOMETRIA DA SHALLOW WATER WAVE.....  | 10 |
| FIGURA 3 - PERFIL DA VELOCIDADES DO FLUIDO, DENTRO E FORA DA PELÍCULA DE FRONTEIRA, NA DIRECÇÃO DA SOLICITAÇÃO, ADAPTADO DE [SUN, 1991]. ....  | 17 |
| FIGURA 4 - FORÇA DE CORTE BASAL DEVIDO AO MOVIMENTO HORIZONTAL [ADAPTADO DE SUN, 1991].....  | 25 |
| FIGURA 5- TLD SUJEITO A EXCITAÇÃO HORIZONTAL DINÂMICA .....  | 26 |
| FIGURA 6 – ESQUEMATIZAÇÃO DE AMORTECEDOR DE LÍQUIDO SINTONIZADO COM FLUÍDO EM REPOUSO .....  | 33 |
| FIGURA 7 - MODELO EQUIVALENTE COM IDENTIFICAÇÃO DAS MASSAS ESTÁTICA ( $M_0$ ) E DINÂMICA ( $M_1$ ) E DA RIGIDEZ ELÁSTICA LINEAR ( $K_1$ ), ADAPTADO DE [NEWMARK E ROSENBLUETH, 1971] ..... | 34 |
| FIGURA 8 - MACRO-MODELO PLANO PROPOSTO PARA IMPLEMENTAÇÃO DE AMORTECEDORES DE LÍQUIDO SINTONIZADO COM GEOMETRIA RECTANGULAR EM PROGRAMAS DE CÁLCULO AUTOMÁTICO DE ESTRUTURAS .....         | 40 |
| FIGURA 9 - MACRO-MODELO BIDIRECCIONAL PROPOSTO PARA IMPLEMENTAÇÃO DE AMORTECEDORES DE LÍQUIDO SINTONIZADO COM GEOMETRIA CIRCULAR EM PROGRAMAS DE CÁLCULO AUTOMÁTICO DE ESTRUTURAS.....     | 40 |
| FIGURA 10 – MODELO DO AMORTECEDOR DE MASSA SINTONIZADO EQUIVALENTE.....  | 42 |
| FIGURA 11- MODELOS MECÂNICOS PARA (i) SISTEMA DE MASSA, (ii) TANQUE CHEIO DE LÍQUIDO, (iii) TANQUE PARCIALMENTE CHEIO DE LÍQUIDO E IV) TANQUE VAZIO, ADAPTADO DE [TOKARCZYK, 1997] .....   | 45 |
| FIGURA 12- MODELOS MECÂNICOS SIMPLIFICADO SIMULANDO VÁRIOS MODOS DE VIBRAÇÃO, ADAPTADO DE [TOKARCZYK, 1997].....   | 46 |
| FIGURA 13 - MODELO MECÂNICO EQUIVALENTE PARA O SLOSHING DO FLUIDO NO INTERIOR DE AMORTECEDORES DE LÍQUIDO SINTONIZADO RECTANGULARES, ADAPTADO DE [YALLA, 2001].....                        | 50 |
| FIGURA 14 - MODELO MECÂNICO EQUIVALENTE PARA O AMORTECEDOR DE IMPACTO (SLAMMING), ADAPTADO DE [YALLA, 2001].....   | 52 |
| FIGURA 15 - VARIAÇÃO DA FREQUÊNCIA DE SALTO COM A AMPLITUDE ADIMENSIONAL DE EXCITAÇÃO DE BASE, ADAPTADO DE [YU ET. AL, 1999].....  | 53 |
| FIGURA 16 - VARIAÇÃO DA RAZÃO DE AMORTECIMENTO COM A AMPLITUDE ADIMENSIONAL DE EXCITAÇÃO DE BASE, ADAPTADO DE [YU ET. AL, 1999].....   | 54 |
| FIGURA 17 - IMPACTO NO INTERIOR DE UM AMORTECEDOR DE LÍQUIDO SINTONIZADO PARA AMPLITUDES DE EXCITAÇÃO ELEVADAS .....   | 55 |
| FIGURA 18 - ESQUEMATIZAÇÃO DO MODELO SLOSHING-SLAMMING ( $S^2$ ) EQUIVALENTE, ADAPTADO DE [YALLA, 2001] .....  | 55 |
| FIGURA 19 - FENÓMENO DE SALTO EM SISTEMAS NÃO-LINEARES, ADAPTADO DE [YALLA, 2001].....   | 57 |
| FIGURA 20 - CURVAS DE FORÇA ADIMENSIONAL PARA DIFERENTES VALORES DE $\eta$ , ADAPTADO DE [AYALA, 2001] .....   | 60 |
| FIGURA 21- RESPOSTA DE UM SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE APRESENTANDO COMPORTAMENTO LINEAR (1) E COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR (2), ADAPTADO DE [NOVO, 2008] .....                             | 64 |
| FIGURA 22- SISTEMA ESTRUTURAL EQUIVALENTE DE UM GRAU DE LIBERDADE (SDOF) .....   | 66 |
| FIGURA 23- EQUILÍBRIO DE FORÇAS PARA UM SISTEMA ESTRUTURAL EQUIVALENTE COM UM GRAU DE LIBERDADE (SDOF) SUJEITO A ACÇÕES DINÂMICAS NA BASE .....  | 67 |
| FIGURA 24- INTERACÇÃO DE UM AMORTECEDOR DE LÍQUIDO SINTONIZADO COM O SISTEMA ESTRUTURAL EQUIVALENTE COM UM GRAU DE LIBERDADE (SDOF).....   | 71 |



# ÍNDICE DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| TABELA 1 - CLASSIFICAÇÃO DE ONDAS, ADAPTADO DE [SUN, 1991] ..... | 16 |
|--|----|



## 1. Introdução

Tendo sido apresentadas as características essenciais dos modelos que podem ser usados para prever o comportamento dinâmico de fluidos no interior de reservatórios torna-se agora possível, concretizar os modelos mais adequados para o caso particular dos dispositivos dissipadores de energia do tipo amortecedores de líquido sintonizado (ALSs), cujo comportamento dinâmico se encontra a ser objecto de estudo no âmbito do PIP 2009-2012 Protecção Sísmica de Estruturas: Reabilitação, reforço e sistemas inteligentes (0305/11/17713).

O grande objectivo da utilização de amortecedores de líquido sintonizado em estruturas de edifícios é a obtenção de uma melhoria considerável do seu comportamento, nomeadamente face a acções dinâmicas impostas pelo vento e/ou sismos.

A excitação por uma dada acção dinâmica sobre uma estrutura que tenha amortecedores de líquido sintonizado acoplados produz um movimento oscilatório no fluido (*sloshing*) que origina forças que alteram as características dinâmicas da própria estrutura.

O impulso horizontal que o mesmo fluido exerce sobre as paredes do reservatório em repouso corresponde a um sistema auto-equilibrado, não induzindo como tal forças de corte sobre a estrutura (Figura 1a). Quando a estrutura é solicitada por uma acção dinâmica, o movimento do fluido produz forças impulsivas não equilibradas sobre as paredes do reservatório, gerando desta forma forças de corte sobre a estrutura do edifício (Figura 1b).

As referidas forças de corte podem ser facilmente determinadas, em cada instante de tempo  $t$ , como uma função da pressão hidráulica nas paredes laterais de topo do reservatório perpendiculares à direcção da acção sísmica (igual à pressão hidrostática nesse instante de tempo  $t$ ), e como tal dependente da altura de fluido junto a cada uma das duas paredes do reservatório.

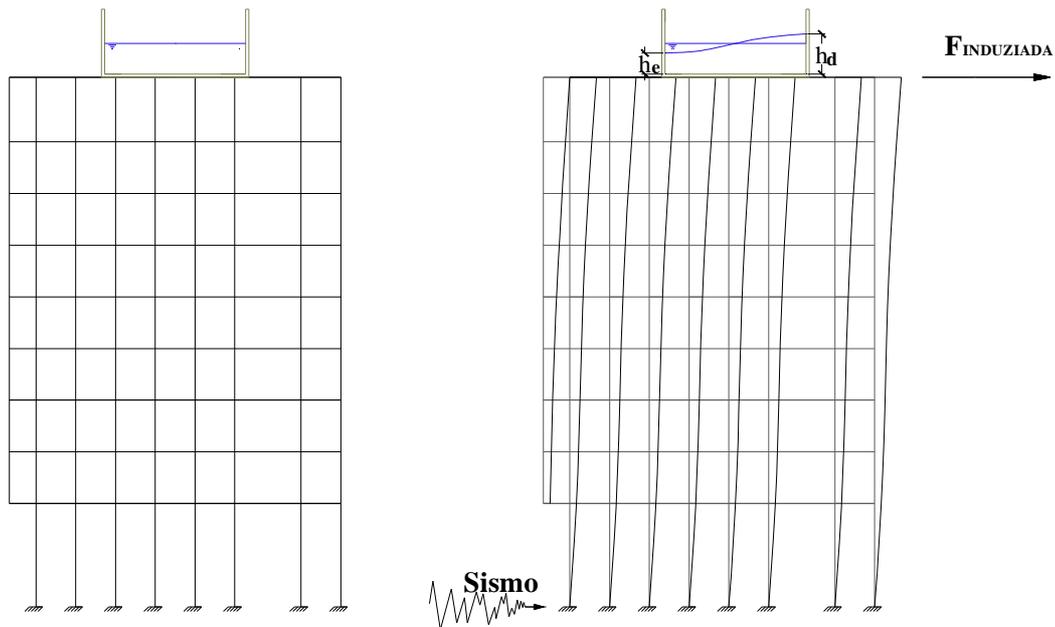


Figura 1 – Amortecedor de líquido sintonizado acoplado à estrutura de um edifício com o fluido (a) em repouso e (b) em movimento devido à acção de um sismo, adaptado de [Novo, 2008]

A força induzida na estrutura pode considerar-se como dependente apenas da pressão hidrostática, uma vez que esta é significativamente superior quer às forças de inércia originadas pela aceleração horizontal da massa fluida em movimento horizontal no reservatório (*sloshing*), quer às forças de atrito nas paredes e no fundo do reservatório associadas ao movimento do fluido.

Após terem sido apresentadas as características essenciais dos modelos usados para prever o comportamento dinâmico de fluidos no interior de reservatórios [Falcão Silva e Campos Costa, 2011] será então possível concretizar alguns desses modelos disponíveis na literatura e usados desde há alguns anos para o caso particular de dispositivos dissipadores de energia do tipo amortecedores de líquido sintonizado.

Estes modelos podem ser divididos em modelos matemáticos ou mecânicos. Os pressupostos em que se baseiam os diferentes modelos são distintos embora haja situações em que se verifica uma sobreposição e até mesmo situações que compreendam mais do que um tipo de modelos.

Em primeiro lugar apresenta-se de uma forma sumária a evolução dos conhecimentos na área dos modelos que permitem simular o comportamento de fluidos no interior de amortecedores de líquido sintonizado, não esquecendo as devidas referências aos métodos desenvolvidos por diferentes autores ao longo do tempo e um pouco por todo o mundo.

Posteriormente apresentam-se exemplos dos principais modelos (matemáticos, mecânicos ou mistos) disponíveis na literatura para serem usados na simulação dos fenómenos que ocorrem no interior de um amortecedores de líquido sintonizado.

Para além disso apresentam-se também modelos que podem ser adoptados na simulação de amortecedores de líquido sintonizado associados a sistemas estruturais com um (SDOF) grau de liberdade, o que permite a compreensão do efeito da interacção entre o dispositivo de protecção e a própria estrutura em que se encontra incluído. A generalização a sistemas de vários graus (MDOF) de liberdade, com base na sobreposição modal, é também apresentada.

## **2. Evolução dos modelos de comportamento aplicáveis a Amortecedores de Líquido Sintonizado**

Uma das primeiras aproximações com o intuito de modelar o fenómeno de sloshing do fluido que se encontra no interior de amortecedores de líquido sintonizado envolveu o uso de modelos matemáticos baseados na teoria do escoamento potencial linear e/ou não-linear.

Os modelos referidos traduzem extensões das teorias clássicas, como por exemplo a de Boussinesq [Boussinesq, 1878] e de Lamb [Lamb, 1945] para reservatórios contendo alturas de água reduzidas, as denominadas águas rasas (*shallow water*), ou para reservatórios alturas de água mais elevadas, as denominadas águas profundas (*deep water*).

Já durante a segunda metade do século XX foi efectuada uma extensão aos modelos existentes e propostos, tendo sido introduzido um termo fictício que permitiu considerar de uma forma aproximada o efeito da dissipação viscosa do líquido e a sua influência ao nível dos fenómenos não lineares que surgem durante a solicitação dinâmica [Faltison, 1978].

Os estudos efectuados e o modelo apresentado por Lepelletier e Raichlen em finais da década de 80 [Lepelletier e Raichlen, 1988] permitem reconhecer que, de facto, se deve aproximar de uma forma racional o contributo do amortecimento viscoso do líquido de forma a permitir a modelação do sloshing não-linear para amplitudes de excitação mais elevadas.

Para além do referido para grandes amplitudes de excitação [Okamoto e Kawahara, 1990] [Chen et. al, 1996] a nível da modelação de ondas de *sloshing* tridimensionais [Wu et al., 1998] tem também vindo a ser desenvolvidos estudos de cariz analítico-experimental.

Seguindo as aproximações anteriormente mencionadas, Sun e Fujino [Sun e Fujino, 1994] desenvolveram e apresentaram uma extensão, tendo apresentado um modelo semi-analítico que contabiliza um fenómeno altamente não linear, a denominada quebra de onda (*breaking waves*). Na extensão proposta para o modelo linear inicialmente utilizado foram efectuadas alterações ligeiras no sentido de contabilizar precisamente o fenómeno altamente não-linear que surge. Neste modelo foram incluídas duas constantes, obtidas experimentalmente, que permitiram contabilizar o aumento no amortecimento do líquido associado à quebra de onda e as mudanças observadas ao nível da frequência fundamental do movimento (*sloshing*).

A presença de dispositivos de dissipação (grelhas, redes,...) foi também considerada nos modelos matemáticos por meio da introdução dos denominados coeficientes de “arraste”, obtidos experimentalmente, que permitem simular com alguma aproximação a atenuação das ondas resultante [Hsieh et. al, 1988].

Adicionalmente, num estudo desenvolvido sobre o efeito de *sloshing* de fluidos no interior de amortecedores de líquido sintonizado sujeitos a grandes amplitudes de excitação, foi usado um método de diferenças finitas implícito o que permitiu obter uma malha de fluido em que se encontravam descritas as equações para pressões lineares, não-lineares e dissipativas admitindo que se estava em presença de um fluido contido com resposta num modo de *sloshing* [Chen, Haroum e Liu, 1996].

Em finais da década de 90 foram identificados e desenvolvidos alguns modelos adicionais para o movimento de *sloshing* do fluido [Warnitchai e Pinkaew, 1998], muito embora apresentem algumas desvantagens, como o excessivo tempo de cálculo necessário para resolver um sistema de equações de diferenças finitas.

No entanto muitas vezes as técnicas de modelação matemática do fenómeno de *sloshing* falham ao tentar captar de uma forma exacta o comportamento não-linear observável nos amortecedores de líquido sintonizado. Esta questão deve-se principalmente à inapetência comprovada de alguns modelos teóricos para grandes simulações ao longo do tempo devido principalmente à alternância de massa do fluido durante a excitação [Faltinsen e Rognebakke, 1999].

Mais se adianta que se torna muito difícil incorporar o fenómeno de impacto (*slamming*) num método matemático directo. Para que se obtenham previsões adequadas das pressões de impacto sobre as paredes do tanque torna-se necessário que nos modelos seja introduzida a compressibilidade física local nas equações governativas do movimento.

A rápida mudança, que se processa no interior dos amortecedores de líquido sintonizado, quer no tempo quer no espaço, requer um tratamento especial [Yalla, 2001]. Trabalhos desenvolvidos mais recentemente [Kim, 2001] [Ibrahim, 2005] ao nível da modelação matemática de *sloshing* em escoamentos violentos em tanques com águas de altura elevada (*deep water*) tem vindo a encorajar a comunidade científica representando um grande salto no estado dos conhecimentos nesta área.

No entanto, embora esteja já disponível na literatura um grande número de modelos matemáticos e de suas extensões para a ocorrência de diversas não-linearidades no interior do fluido em movimento, a sua resolução pressupõe a aplicação de esquemas numéricos mais ou menos complexos. Porém até que aos esquemas numéricos disponíveis se encontrarem mais eficazes, torna-se mais fácil recorrer a modelos mecânicos uma vez que estes poupam em esforço computacional não deixado de fornecer bases muito fidedignas para a avaliação do comportamento e consequente dimensionamento de amortecedores de líquido sintonizado para implementação em estruturas reais.

Um dos primeiros modelos mecânicos desenvolvidos com o objectivo de representar o fenómeno de *sloshing* de um fluido em superfície livre contido num dado reservatório foi apresentado por Housner num estudo sobre os efeitos da aceleração do solo sobre tanques de armazenamento de líquido [Housner, 1957]. Neste modelo, a pressão exercida sobre as paredes foi aproximada usando a equação de Laplace para determinadas condições de fronteira. Dentro do recipiente, o fluido foi modelado de forma a ser simplificado numa série de massas e molas. Os coeficientes associados ao modelo foram obtidos para tanques rectangulares, cilíndricos e fazendo variar a geometria do tanque de forma a serem usados numa solução no domínio da frequência para as pressões internas.

Também da responsabilidade de Housner surgiu posteriormente um modelo matemático mais refinado para uso adaptativo em tanques de água elevados sujeitos a solicitações sísmicas, sendo o estudo usado em primeira instância para gerar os

coeficientes necessários para a modelação da resposta dos mesmos reservatórios elevados [Housner, 1963].

Ainda durante a década de 60 foi desenvolvido e utilizado um método experimental com o intuito de caracterizar as forças de *sloshing* em fluidos contidos [Abramson, 1966] para posteriormente ser implementado em modelos mecânicos simplificados. A maior parte destes primeiros modelos mecânicos são lineares, baseando-se na formulação do campo do potencial de velocidades, e tendem a considerar apenas o modo fundamental de vibração do fluido no interior do recipiente que o contém [Yalla, 2001].

Em reservatórios de águas rasas (*shallow water tanks*), que é o que acontece predominantemente no caso dos dispositivos do tipo amortecedores de líquido sintonizado, vários fenómenos não-lineares associados à superfície livre do líquido entram em jogo originando dissipação de energia. Estes fenómenos incluem saltos hidráulicos, furos (*bores*), quebras de onda, turbulência e impacto nas paredes. É um facto que os modelos lineares falham quando se torna necessário contabilizar os efeitos dos fenómenos atrás referidos.

A consideração de modos mais elevados de translação do fluido e do reservatório relativamente ao descrito inicialmente por Housner [Housner, 1957] foi objecto de um pequeno capítulo sobre hidrodinâmica desenvolvido por Newmark e Rosenblueth [Newmark e Rosenblueth, 1971]. Para além disso, os autores [Newmark e Rosenblueth, 1971] teceram algumas considerações sobre os efeitos da superfície da onda formada sobre a compressibilidade do *sloshing* do fluido, bem como os efeitos da geometria do tanque na pressão desenvolvida nas paredes do reservatório.

Os efeitos da superfície da onda gerada pelo movimento de *sloshing* do fluido foram incluídos no problema da película de fronteira, para além de terem sido igualmente consideradas as respostas de modos mais elevados para a obtenção dos coeficientes do modelo mecânico. A frequência de *sloshing* do fluido em movimento foi determinada no sentido de contabilizar um termo de erro dentro de limites aceitáveis e baseada nas razões entre dimensões características dos reservatórios (comprimento, largura, altura de fluido ...) [Tocarczyk, 1997].

Foram desenvolvidos outros modelos mecânicos mais elaborados com o objectivo de estudar vibrações em plataformas *offshore*, cujo âmbito de aplicação foi posteriormente estendido ao caso particular dos amortecedores de líquido sintonizado. Refere-se um modelo desenvolvido para estimar as pressões de fluidos armazenados

e o impacto que tem nas características de vibração da plataforma *offshore* [Vandiver e Mitone, 1978]. O modelo mecânico desenvolvido era semelhante ao proposto por Housner [Housner, 1957] sendo no entanto contabilizados efeitos de ordem superior. Os autores [Vandiver e Mitone, 1978] usaram a teoria do fluxo potencial e uma função de transferência no domínio do tempo para estimar as alterações no amortecimento global da plataforma fazendo variar os níveis de fluido armazenado.

Num estudo posterior de Housner [Housner e Haroun, 1980], que incidiu sobre reservatórios colocados ao nível do solo para armazenamento de fluido, obtiveram-se os coeficientes mecânicos do modelo tendo por base estudos anteriores do mesmo autor [Housner, 1957] e de Newmark e Rosenblueth [Newmark e Rosenblueth, 1971]. O refinamento do modelo incluiu a separação da massa de fluido em termos directamente associados com a resposta provável do reservatório ao movimento oscilatório do solo em termos de deformação das paredes e dos efeitos de *sloshing*.

Como resultados obtiveram-se uma série de estudos que permitiram a determinação de um modelo matemático refinado que concretizou o modelo mecânico assim como foi possível verificar experimentalmente as relações obtidas. As relações matemáticas foram determinadas basicamente com a informação presente em várias publicações da área [Haroun, 1980] [Haroun e Housner, 1981a] [Haroun e Housner, 1981a] bem como com o trabalho experimental apresentado em [Housner e Haroun, 1979] e detalhado no estudo sobre o dimensionamento sísmico de tanques de armazenamento de líquido colocados directamente sobre o solo [Haroun e Housner, 1982].

A semelhança dinâmica do *sloshing* do fluido (teoria do fluxo potencial) foi usada para obter um modelo mecânico simples no domínio da frequência para determinação das pressões desenvolvidas num reservatório rígido [Kareem e Sun, 1987]. O modelo mecânico em questão usou termos múltiplos de massa e rigidez o que permitiu o desenvolvimento das várias componentes de frequência da resposta. Na descrição do sistema combinado foi usada uma função de transferência simplificada, assim como as características da resposta do sistema líquido.

A analogia com um amortecedor de massa sintonizado equivalente para os fenómenos não-lineares de *sloshing* que ocorrem no interior de dispositivos amortecedores de líquido sintonizado foi proposta e apresentada há mais de 10 anos [Sun et. al, 1995]. A força que surge na interface entre o dispositivo e a estrutura foi representada como a força induzida por uma massa e amortecedor virtuais. Os valores

analíticos para massas, frequências e amortecimentos equivalentes foram obtidos com base numa série de resultados experimentais.

Posteriormente foram formulados outros modelos não-lineares que compreendiam um sistema equivalente do tipo amortecedor de massa com rigidez e amortecimento não-lineares [Yu et. al, 1999]. Estes modelos permitem ajustar, com base nos modelos lineares existentes, o aumento da frequência de *sloshing* com o aumento da amplitude de excitação. Este efeito, denominado de “efeito de endurecimento” é obtido de resultados de programas experimentais em termos de um “coeficiente de endurecimento de rigidez”.

No entanto nenhum dos dois modelos indicados anteriormente [Sun et al, 1995] [Yu et. al, 1999] consegue explicar de uma forma clara e objectiva o que sucede em termos físicos quando ocorre o fenómeno de *sloshing* a elevadas amplitudes de excitação dinâmica.

Contrastando com os modelos precedentes, Yalla e Kareem [Yalla e Kareem, 1999] propuseram uma analogia que tenta explicar a transformação que ocorre entre o fenómeno denominado de *sloshing* linear e o fenómeno de *sloshing* não-linear com endurecimento, assim como o aumento do amortecimento não totalmente contemplado pelas correcções empíricas propostas nos modelos que consideram quebra de onda (*wave breaking*). Para amplitudes de excitação mais elevada o *sloshing* do líquido assemelha-se a um impacto (*slamming*) periódico da massa do líquido nas paredes do tanque. Este fenómeno é semelhante ao impacto de quebra de onda (*wave breaking*) observado em oceanografia. Nenhum dos modelos numéricos e/ou mecânicos desenvolvidos até então para simular o comportamento de amortecedores de líquido sintonizado contabilizava este efeito de impacto nas paredes do tanque.

Tanto para os modelos matemáticos como para os modelos mecânicos identificam-se fenómenos dinâmicos de *sloshing* linear, *sloshing* fracamente não-linear e *sloshing* de impacto. Neste último são já identificados fenómenos amplamente não lineares, sendo a sua modelação claramente mais difícil do que para as situações de *sloshing* linear e *sloshing* não-linear.

### **3. Modelos de comportamento dinâmico aplicáveis a Amortecedores de Líquido Sintonizado: Estudos preliminares**

Na sequência dos fundamentos teóricos de cariz generalista apresentados no relatório 373/2011 – NESDE *Modelos de comportamento dinâmico para fluidos no interior de reservatórios*, torna-se importante identificar, traduzir e concretizar de uma forma mais simples e objectiva alguns dos modelos mais frequentemente adoptados na simulação do comportamento de amortecedores de líquido sintonizado para posterior implementação em simulações numéricas.

Os modelos apresentados traduzem adaptações bastante simplificadas dos princípios teóricos de dinâmica de fluidos apresentados no relatório supramencionado para implementação mais directa em ferramentas de cálculo disponíveis e que serão apresentadas com algum detalhe aquando do desenvolvimento de simulações numéricas do comportamento dinâmico de amortecedores de líquido sintonizado.

#### **3.1. Teoria Linear de onda (Shallow water wave theory)**

As equações de águas rasas (*shallow water equations*) também denominadas de equações de Saint-Venant compreendem um conjunto de equações hiperbólicas parcialmente diferenciáveis que permitem descrever o fluxo de um fluido em superfícies livre.

As equações são obtidas por integração na altura do fluido das equações de Navier Stokes, para os casos em que o desenvolvimento horizontal (comprimento do tanque) é muito maior do que o desenvolvimento vertical (altura do tanque). Sob estas condições, a conservação da massa implica que a velocidade vertical do fluido em movimento é reduzida.

É possível mostrar a partir da equação do momento que os gradientes de pressão vertical são praticamente hidroestáticos e que os gradientes de pressão horizontal ocorrem devido ao deslocamento da pressão à superfície, o que implica que o campo de velocidades é praticamente constante na altura do fluido. Tomando as variações verticais da velocidade ao longo da altura do fluido como zero nas equações

de Navier-Stokes, então obtêm-se as denominadas equações para águas rasas (*shallow water equations*)

As teorias lineares do movimento de onda rasa (*shallow water*) são aqui revistas e apresentadas de uma forma resumida com o principal objectivo de compreender as propriedades básicas dos fenómenos que ocorrem no fluido em movimento no interior de amortecedores de líquido sintonizado, sejam elas a frequência natural de *sloshing*, distribuição de pressão nas paredes de topo do tanque, as forças induzidas pelo fluido e responsáveis pela mitigação das vibrações, energia dissipada, relações de dispersão, entre outros.

Considerando uma onda de fluido com um comportamento bi-dimensional no plano x-o-z, em que a altura do fluido em repouso é de  $h_0$ , e  $z=0$  corresponde ao plano da superfície em repouso (*still liquid surface*),  $\eta$  descreve a elevação da superfície livre do fluido, que é função da posição x e do instante t. L e H exprimem o comprimento e altura de onda (distância entre crista e cava de duas ondas adjacentes), respectivamente (Figura 2). Assume-se a amplitude da onda como infinitesimalmente pequena para que os movimentos de onda possam ser admitidos como lineares.

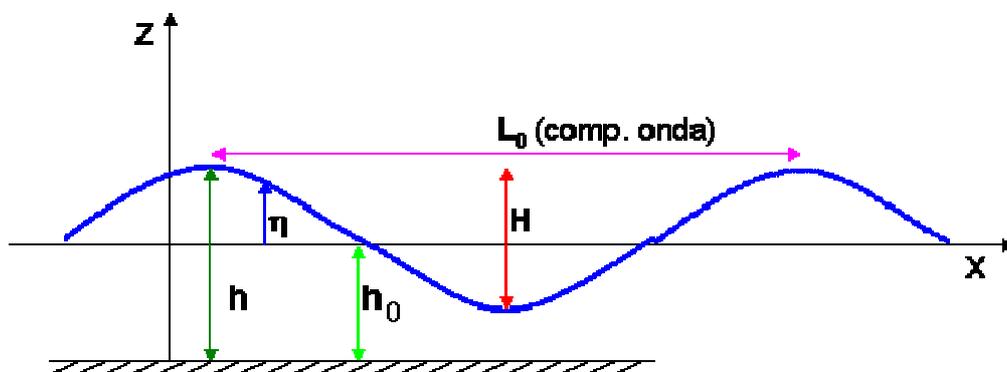


Figura 2 - Geometria da shallow water wave

O fluido é assumido como invíscido, irrotacional e incompressível num campo gravítico constante e as leis de conservação de massa e momento traduzem as equações:

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0 \quad (1)$$

$$\rho(\vec{q}_t + \vec{q} \cdot \nabla \vec{q}) = -\nabla(p + \rho g z) \quad (2)$$

onde  $\vec{q} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  corresponde ao vector de velocidades com  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  correspondentes aos vectores unitários cartesianos ao longo dos eixos coordenado x, y e z, respectivamente, p é a pressão,  $\rho$  é a densidade do fluido e g a aceleração da gravidade.

Admitindo o fluxo bi-dimensional (Figura 2), o potencial de velocidades,  $\Phi$ , existe e é função da posição de uma determinada partícula de fluido (x,z) e do instante de tempo t. Para esta situação em particular a equação (1) toma a forma que a seguir se apresenta devendo ser resolvida sob determinadas condições de fronteira.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Integrando a equação anterior na altura de água  $y=-h_0$  permite obter:

$$\int_{-h_0}^{\eta} \left( \frac{\partial \Phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial z^2} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_0}^{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz + \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=-h_0}^{z=\eta} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{z=-h_0} h_{0,x} = 0 \quad (4)$$

Nas situações em que o fundo do tanque é plano,  $h_{0,x}=0$ , o último termo da equação (4) anula-se, o que permite obter de uma forma mais simplificada:

$$\int_{-h_0}^{\eta} \left( \frac{\partial \Phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial z^2} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_0}^{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz + \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=-h_0}^{z=\eta} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Assume-se que o potencial de velocidades,  $\Phi$ , pode ser escrito de acordo com a equação (6):

$$\Phi(x, z, t) = X(x)Z(z)e^{-i\omega t} \quad (6)$$

em que  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  corresponde à frequência angular do movimento da onda formada, f e T são respectivamente frequência e período natural. Por substituição da equação (6) na equação (3) obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \equiv -k^2 \quad (7)$$

Assume-se que as soluções para X e Z são:

$$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (8)$$

$$Z(z) = Ce^{kz} + De^{-kz} \quad (9)$$

As condições de fronteira permitem determinar as constantes A, B, C e D. A condição de fronteira cinemática para  $z=-h_0$ , admitindo um fundo plano, é dada por:

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

Substituindo as equações (9) e (10) na equação (7) obtêm-se:

$$Z(z) = 2Ce^{-kh} \cosh(k(z+h)) \quad (11)$$

Na superfície livre  $z=\eta(x,t)$  existem dois tipos de condições fronteira, uma corresponde à condição de fronteira dinâmica (equação (12)) e outra correspondente à condição de fronteira cinemática (equação (13)):

$$p = p_0 \equiv 0 \quad (12)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w \quad (13)$$

e m que  $p_0$  corresponde à pressão na superfície livre do fluido.

Introduzindo na equação (1) as condições de fronteira cinemática correspondentes à parede de fundo do amortecedor de líquido sintonizado e à superfície livre do fluido obtêm-se a seguinte forma simplificada:

$$\int_{-h_0}^{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

Admitindo que  $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ ,  $h_t = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ ,  $h_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ , considerando que a altura de fluido durante o movimento é dada por  $h = \eta + h_0$  então  $h_t = \eta_t$  e tomando u como constante na altura de fluido, a equação (14) pode ser reescrita:

$$h_t + (uh)_x = 0 \quad (15)$$

Num campo de pressões hidroestáticas, isto é  $p_y = -\rho g$  ou  $p = \rho g(\eta - y)$ , a conservação do momento na direção horizontal da solitação principal obtida da equação (2) toma a forma que a seguir se indica:

$$u_t + uu_x + wu_y = -g\eta_x \quad (16)$$

Considerando que  $u_z = \frac{\partial \Phi^2}{\partial z \partial x} = 0$  e que  $h_x = \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ , a equação (16) pode ser simplificada de acordo com o apresentado na equação (17):

$$u_t + uu_x + gh_x = 0 \quad (17)$$

Pode-se então afirmar que as equações básicas da teoria linear de onda de águas rasas (*linear shallow water waves*) são as indicadas pelas equações (15) e (17).

Para a determinação da pressão nas paredes do tanque, considera-se que  $p_0$  corresponde à pressão na superfície livre do fluido e que a equação de Bernoulli expressa como função do potencial de velocidade,  $\Phi$ , pode ser traduzida da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{p}{\rho} + g\eta = \text{constante} \quad (18)$$

em que  $\rho_f$  corresponde à densidade do fluido e  $g$  à aceleração da gravidade.

Na eventualidade da amplitude de excitação ser baixa a moderada, a amplitude da onda formada será também baixa, sendo possível admitir-se, por uma questão de simplificação, que os termos não-lineares podem ser omitidos (equação (19)).

No entanto, os movimentos reais de onda são não dispersivos e altamente não-lineares, daí que para a sua correcta implementação em modelos numéricos seja necessário que se efectuem determinadas alterações de acordo com o indicado mais adiante.

$$\eta \cong -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=\eta} \cong -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (19)$$

Omitindo o termo de 2ª ordem na equação (13) para  $z=0$  (altura do fluido em repouso) obtêm-se:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (20)$$

Eliminando  $\eta$  das equações (19) e (20), obtêm-se que as condições de fronteira na superfície livre, para  $z=0$ , são compiladas da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

Introduzindo na equação (21) as relações definidas pelas equações (6), (9) e (12) obtêm-se a seguinte relação de dispersão:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh_0) \quad (22)$$

Admite-se na formulação proposta que  $\eta$  toma a forma definida pela equação (23):

$$\eta = \frac{H}{2} \sin(kx - \omega t) \quad (23)$$

Por substituição das equações (6), (9) e (12) na equação (19) e comparando o obtido com a equação (23) é possível determinar os coeficientes associados às soluções para X (equação (8)) e para Z (equação (9)).

Com base no referido ao longo desta secção é possível definir uma boa aproximação para o potencial das velocidades,  $\Phi$ , por meio de uma função hiperbólica, de acordo com indicado na equação (24):

$$\Phi(x, z, t) = -\frac{gH}{2\omega} \frac{\cosh(k(z + h_0))}{\cosh(kh_0)} \cos(kx - \omega t) \quad (24)$$

em que  $g$  corresponde à aceleração da gravidade,  $H$  e  $h_0$  anteriormente definidos como altura de onda e altura de fluido em repouso,  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  corresponde à frequência angular do movimento da onda, e  $f$  e  $T$  são a frequência natural e o período natural do movimento da onda, respectivamente.

Com recurso às equações (18) e (24) a distribuição de pressões pode ser expressa da seguinte forma:

$$p(x, z, t) = -\rho g \left( z - \frac{\cosh(k(z + h_0))}{\cosh(kh_0)} \eta \right) \quad (25)$$

De acordo com a teoria supramencionada, é possível determinar a frequência fundamental de vibração de um dado fluido no interior de um amortecedor de líquido sintonizado (por exemplo de geometria rectangular ou circular).

Considerando um amortecedor de líquido sintonizado que apresente como dimensão característica o comprimento,  $L$ , e o raio,  $R$ , no caso de geometria rectangular e circular, respectivamente, e com altura média do fluido em repouso de  $h_0$ , e admitindo um sistema de coordenadas cartesianas ( $o-x-z$ ) ligado ao recipiente, com origem localizada no centro da superfície média do fluido.

Dado que as paredes do recipiente são verticais planas, o fenómeno de *sloshing* que se desenvolve no fluido em movimento no interior do tanque pode ser considerado como se tratando de uma sobreposição de uma onda progressiva e da sua onda de reflexão que apresenta uma fase oposta e se move em direcções contrárias. No caso de um amortecedor de líquido sintonizado sujeito a uma excitação de base horizontal, são apenas excitados os modos de *sloshing* não-simétricos.

A frequência natural de *sloshing* num amortecedor de líquido sintonizado rectangular com paredes verticais planas é dada pela equação:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2n-1}{L} \pi g \tanh\left(\frac{2n-1}{L} \pi h_0\right)} \quad (26)$$

em que n identifica os vários modos do *sloshing* do fluido. A frequência fundamental natural (n=1) corresponde a:

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi g}{L} \tanh\left(\frac{\pi h_0}{L}\right)} \quad (27)$$

Em amortecedores de líquido sintonizado circulares cilindricos de paredes verticais planas a frequência natural de *sloshing* é definida por:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.17(2n-1)}{2R} \pi g \tanh\left(\frac{1.17(2n-1)}{2R} \pi h_0\right)} \quad (28)$$

em que n identifica, à semelhança do indicado para os amortecedores de líquido sintonizado, os vários modos de *sloshing* do fluido no interior do dispositivo. A frequência fundamental natural (n=1) corresponde a:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.17 \pi g}{2R} \tanh\left(\frac{1.17 \pi h_0}{2R}\right)} \quad (29)$$

Neste modelo proposto é possível identificarem-se duas situações extremas de funcionamento, isto é, uma para a qual a altura do fluido,  $h_0$ , é muito maior que o comprimento de onda,  $L_0$  (Figura 2), e outra para a qual a altura do fluido,  $h_0$ , é muito menor do que o comprimento de onda  $L_0$ .

Usualmente a primeira situação corresponde às denominadas ondas de águas profundas (ou na terminologia anglo-saxónica *deep water waves*) enquanto que a segunda corresponde às denominadas ondas longas ou de águas rasas (*shallow water waves*).

De uma maneira geral as ondas em que se verifique  $h/L_0 > 1/2$  são consideradas ondas de águas profundas e aquelas em que se observe  $1/20 < h/L_0 < 1/2$  correspondem a ondas longas ou de águas rasas. As restantes ondas, para as quais  $h/L_0 < 1/25$ , são definidas como ondas de águas muito rasas ou ondas muito longas (Tabela 1).

Tabela 1 - Classificação de ondas, adaptado de [Sun, 1991]

| $h/L$                  |   | $1/20-1/25$ |  | $1/2$ |   |
|------------------------|---|-------------|--|-------|---|
| Tipo de onda           | Ondas de águas muito rasas (very shallow water waves) |             | Ondas de águas rasas (shallow water waves) |       | Ondas de águas profundas (deep water waves) |
| Parâmetros de controlo | $h_0, H/h_0$  |             | $H/h_0, H/L_0$                             |       | $H/L_0, L_0$                                |

Em ondas de águas profundas, a frequência natural obtida pela teoria linear de onda (equação 5) pode ser simplificada de acordo com a equação (30):

$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi g}{L}} \quad (30)$$

deixando de apresentar dependência directa da altura do líquido em repouso.

Para a situação diametralmente oposta, ondas de águas muito rasas ou ondas longas, obtêm-se a partir da equação (5):

$$\omega = \sqrt{gk^2 h_0} = k\sqrt{gh_0} \quad (31)$$

Então a fase da velocidade de onda, que é definida como:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} \quad (32)$$

pode ser expressa como:

$$c = c_0 = \sqrt{gh_0} \quad (33)$$

Com base nas equações definidas ao longo da presente secção é possível identificar que as propriedades que definem o movimento da onda são indirectamente controladas pela altura do líquido em repouso,  $h_0$ .

### 3.2. Modelo não-linear baseado na teoria Linear de onda

As equações governativas do movimento do fluido são a equação de continuidade (34) e as equações bidimensionais de Navier-Stokes.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (34)$$

em que  $u=u(x,y,z)$ ,  $w=w(x,y,z)$  corresponde às velocidades das partículas do fluido nas direcções  $x$  e  $z$ , respectivamente.

Para fluidos que apresentem viscosidade reduzida, o efeito da fricção interna é considerável apenas numa película de fronteira do fluido formada junto da fronteira sólida, ou por outras palavras na proximidade do fundo do tanque, como se pode observar na Figura 3.

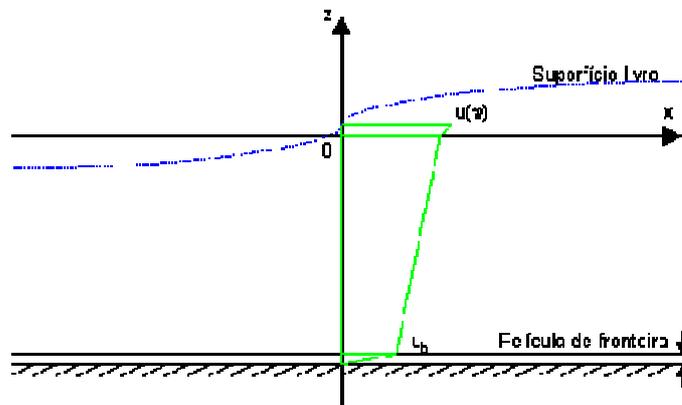


Figura 3 - Perfil da velocidades do fluido, dentro e fora da película de fronteira, na direcção da solicitação, adaptado de [Sun, 1991].

O fluido fora da supramencionada película de fronteira pode ser considerado como um fluxo potencial e as equações do movimento tornam-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \ddot{x}_s \quad (- (h_0 - h_b) \leq z \leq \eta) \quad (35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (-(h_0 - h_b) \leq z \leq \eta) \quad (36)$$

em que  $g$  corresponde à aceleração da gravidade.

No interior da película de fronteira, as equações do movimento são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \ddot{x}_s \quad (-h_0 \leq z \leq -(h_0 - h_b)) \quad (37)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (-h_0 \leq z \leq -(h_0 - h_b)) \quad (38)$$

em que  $h_b$  corresponde à espessura da película de fronteira. Esta espessura, para além de dependente da altura de fluido para o qual o amortecedor de líquido sintonizado apresenta um comportamento de tanque de águas rasas [Jonsson, 1966], está na ordem de um valor percentual relacionado com a dimensão característica do próprio dispositivo, isto é do comprimento para amortecedores de líquido sintonizado rectangulares e do diâmetro em dispositivos circulares cilíndricos de paredes verticais planas.

Considerando as condições fronteira expressas pelas equações (39) a (42):

$$u = 0 \quad \text{na parede de fundo} \quad (x = \pm a) \quad (39)$$

$$w = 0 \quad \text{na parede de fundo} \quad (z = -h) \quad (40)$$

$$w = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{na superfície livre} \quad (z = \eta) \quad (41)$$

$$p = p_0 = \text{const} \quad \text{na superfície livre} \quad (z = \eta) \quad (42)$$

em que  $\eta \equiv \eta(x, t)$  é a elevação da superfície livre do fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado.

O potencial de velocidades,  $\Phi$ , existe para o fluxo fora da película de fronteira. Com base na teoria de águas rasas (*shallow water wave theory*) (equação (24)), assume-se, por exemplo [Shimizu e Hayama, 1987] que  $\Phi$  pode ser uma equação hiperbólica dada pela seguinte relação:

$$\Phi(x, z, t) = G(x, t) \cosh(k(h + z)) \quad (43)$$

em que G corresponde a uma função arbitrária [Sun, 1991].

Tendo por base a equação (43), as velocidades (u e w) podem ser expressas de acordo com o que a seguir se apresenta (equações (44) a (48)):

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} \cosh(k(h+z)) \quad (44)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = kG \sinh(k(h+z)) \quad (45)$$

$$w = -\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \tanh(k(h+z)) \quad (46)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \tanh(k(h+z)) \quad (47)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = ku \tanh(k(h+z)) \quad (48)$$

Em particular ao nível da superfície livre do fluido, e admitindo uma função  $T_H = \tanh(k(h+\eta))$ , é possível considerar-se as seguintes simplificações relativas às equações (46) a (48):

$$w(\eta) = -\frac{1}{k} \frac{\partial u(\eta)}{\partial x} T_H \quad (49)$$

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = -\frac{1}{k} \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial x \partial t} T_H \quad (50)$$

$$\frac{\partial w(\eta)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial z} = ku(\eta) T_H \quad (51)$$

Desprezando a espessura da película de fronteira,  $h_b$ , e integrando a equação de continuidade na direcção vertical, eixo z, do movimento do fluido, a partir do fundo em direcção à superfície livre, e admitindo que o fluido é considerado como de águas rasas (shallow water), bem como que a velocidade horizontal de uma determinada partícula de fluido em movimento é fracamente dependente do eixo coordenado z, pode-se obter a seguinte aproximação da equação de continuidade:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\sigma \frac{\partial(\phi u(\eta))}{\partial x} = 0 \quad (52)$$

em que se considera que  $\sigma$  e  $\phi$  são dados, respectivamente, pelas equações (53) e (54).

Em cada uma das igualdades definidas pelas equações (53) e (54),  $k$  corresponde a uma variável denominada de número de onda e  $u(\eta) \equiv u(x, \eta, t)$  traduz a velocidade horizontal de uma partícula à superfície livre do fluido.

$$\sigma = \frac{\tanh(kh)}{kh} \quad (53)$$

$$\phi = \frac{\tanh(k(h + \eta))}{\tanh(kh)} \quad (54)$$

A equação do movimento na forma integral pode então ser diferenciada, com o objectivo de obter um sistema de equações mais fácil de resolver de acordo com processos numéricos já estudados em trabalhos anteriores [Sun, 1991].

Em primeiro lugar para obter uma expressão equivalente para  $(1/\rho)(\partial p/\partial x)$ , a equação (36) é integrada no que refere à altura do fluido (eixo coordenado  $z$ ), existente no interior do amortecedor de fluido sintonizado e consequentemente diferenciada em ordem à direcção preferencial do movimento.

Refere-se, a título meramente informativo, que as equações para fluidos no interior de amortecedores de líquido sintonizado sujeitos a solicitações dinâmicas em duas direcções em simultâneo correspondem a uma extensão, na direcção perpendicular  $y$ , ao que será definido e apresentado em seguida.

Assim, tendo por base as equações (44) a (51), o termo  $(1/\rho)(\partial p/\partial x)$  passa a ser expresso na seguinte forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{z=\eta} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u^2 + w^2)}{\partial x} \right) \quad (55)$$

Por substituição de (55) em (36) e (37) torna-se possível definir-se:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{z=\eta} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=\eta} + \left( g + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\ddot{x}_s \quad (-(h_0 - h_b) \leq z \leq \eta) \quad (56)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{z=\eta} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=\eta} + \left( g + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \ddot{x}_s \quad (-h_0 \leq z \leq -(h_0 - h_b)) \quad (57)$$

Fazendo a integração das equações (56) e (57) nos respectivos domínios, do fundo do amortecedor de líquido sintonizado até à superfície livre do fluido em movimento, obtêm-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\eta) + (1 - T_H^2)u(\eta)\frac{\partial}{\partial x}u(\eta) + g\frac{\partial\eta}{\partial x} + gh_0\sigma\phi\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\nu}{\eta + h_0}\int_{-h_0}^{-(h_0-h_b)}\frac{\partial^2u}{\partial z^2}dz - \ddot{x}_s \quad (58)$$

A equação que se obtêm, corresponde à forma integral das equações do movimento e obtêm-se a partir das equações do movimento após eliminação do termo de pressão. O primeiro termo no lado direito da equação (58), que corresponde directamente ao integral do segundo termo do lado direito da equação de movimento no interior da película de fronteira, é reconhecido como sendo um termo dissipativo, tomando a partir deste instante essa denominação.

Cada termo na equação (58) pode ser expresso em termos da velocidade horizontal na superfície livre  $u(\eta)$  na direcção da solitação dinâmica, da elevação da superfície do fluido  $\eta$  em qualquer ponto do domínio do Amortecedor de Líquido Sintonizado e dos valores diferenciais que se identificam nas equações (59) a (61):

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=\eta} = (1 - T_H^2)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z=\eta} \quad (59)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{z=\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = gh_0\sigma\phi\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad (60)$$

$$\frac{\nu}{(\eta + h_0)}\int_{-h_0}^{-(h_0-h_b)}\frac{\partial^2u}{\partial z^2}dz = -\lambda u(\eta) \quad (61)$$

Tanto na equação (59) como na equação (60) as variáveis independentes correspondem pois a  $u(\eta)$  e  $\eta$ .

A variável  $\lambda$ , identificada como se tratando de um coeficiente de amortecimento do fluido, será apresentada e explicada com maior detalhe mais adiante na presente secção. A presença desta variável leva a concluir que o amortecimento, devido ao comportamento da película de fronteira e da superfície livre (Figura 2), associado aos fenómenos que desenvolvem em fluido existentes no interior de amortecedores de líquido sintonizado sujeitos a solitações dinâmicas deve ser igualmente contabilizado nas equações fundamentais do movimento para amortecedores de líquido sintonizado.

Pela razão acima referida, a equação (58) poderá então ser reescrita de uma forma equivalente:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\eta) + (1 - T_H^2)u(\eta)\frac{\partial}{\partial x}u(\eta) + g\frac{\partial\eta}{\partial x} + gh_0\sigma\phi\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\lambda u(\eta) - \ddot{x}_s \quad (62)$$

Pode-se assim afirmar com alguma certeza que, as equações básicas disponíveis e aplicáveis na determinação do comportamento de fluidos no interior de amortecedores de líquido sintonizado sujeitos a solicitações dinâmicas no plano xz, e que permitem a resolução dos problemas associado correspondem às equações (52) e (62).

O efeito do amortecimento do fluido é muito significativo junto da ressonância e como tal deve ser considerado cuidadosamente na modelação do comportamento do fluido existente no interior de um dispositivo do tipo amortecedor de líquido sintonizado.

Na presente formulação, assumindo que a tensão de corte fora da película de fronteira, por ser extremamente reduzida, quando comparada com valores encontrados em outros pontos, pode ser considerada como desprezável, então o termo dissipativo referido atrás e presente na equação (58) pode ser expresso

$$\nu \int_{-h_0}^{-(h_0-h_b)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = \frac{1}{\rho} (\tau_z = -(h_0 - h_b) - \tau_z = -h) \quad (63)$$

em que  $\tau_b$  toma a forma apresentada na equação (64) e onde  $\tau_b \equiv \tau_z = -h$  corresponde à tensão de corte no fundo do amortecedor de líquido sintonizado

$$\tau_b = \rho \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=h} \quad (64)$$

A tensão de corte identificada toma valores muito reduzidos fora da película de fronteira podendo ser desprezada.

De acordo com a teoria linear da película de fronteira [Lamb, 1932] e considerando uma excitação apresentado características sinusoidais,  $\tau_b$  toma o valor de  $\pi/4$  fora de fase com a componente horizontal de velocidade do fluido em qualquer ponto do domínio do amortecedor de líquido sintonizado, mesmo fora da película de fronteira,  $u_b$ .

Usando o conceito de equivalência de perda de energia por ciclo, a variável  $\tau_b$  toma o valor apresentado na equação (65):

$$\tau_b = \rho \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \nu} u_b \quad (65)$$

no qual  $1/\sqrt{2}$  corresponde a um factor de equivalência devido ao desfasamento de  $\pi/4$  e  $\omega$  é a frequência angular do fenómeno que ocorre no interior do fluido em movimento (sloshing).

Dado que na grande maioria dos casos conhecidos os dispositivos amortecedores de liquido sintonizado correspondem a situações em que a altura do fluido é assumida como rasa (Tabela 1) e que os fenómenos que surgem ao nível do fluido correspondem precisamente aos fenómenos que em engenharia costeira se associam a ondas de águas rasas (*shallow water waves*), assume-se que  $u_b=u(\eta)$ . Desta forma torna-se possível obter simplificações para as equações (63) e (65) definidas, respectivamente, por:

$$\frac{\nu}{(\eta+h)} \int_{-h_0}^{-(h_0-h_b)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = -\frac{1}{(\eta+h)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \nu} u(\eta) \quad (66)$$

$$\tau_b = \rho \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \nu} u(\eta) \quad (67)$$

No entanto, convém não esquecer que, a equação (66) contabiliza apenas o efeito do amortecimento associado à película de fronteira e aos fenómenos que nela ocorrem.

Em meados da década de 60, alguns estudos [Vandorn, 1966] [Miles, 1967] permitiram descrever que, com base em resultados obtidos de programas experimentais desenvolvidos, o amortecimento do fluido no interior de tanques não depende somente da película de fronteira junto do fundo.

No primeiro caso [Vandorn, 1966], as considerações efectuadas no que respeita apenas à película de fronteira e a sua contraposição com resultados experimentais permitiram concluir que o amortecimento do movimento de um líquido no interior de um tanque é superior ao calculado contabilizando apenas a película de fronteira inferior ( $h_b$ ), tendo surgido a firme convicção de que, com base nos pressupostos iniciais, teriam sido omitidas outras componentes.

No segundo caso [Miles, 1967] foi estudado o amortecimento de uma onda de superfície em bacias fechadas de dimensões reduzidas. Dos resultados obtidos foi sugerido que o termo dissipativo deveria ser multiplicado por um termo:

$$\left(1 + \left(\frac{2h_0}{b}\right) + S\right) \quad (68)$$

em que  $b$  corresponde à largura do tanque, para contabilização da fricção na parede lateral e contaminação da superfície do líquido.

Com base nos resultados obtidos do programa experimental referido [Miles, 1967] foi possível observar que a fricção da película de fronteira das paredes laterais é mesma que na película de fronteira de fundo;  $2h/b$  traduz um coeficiente equivalente associado ao efeito do amortecimento por unidade de largura devido à película de fronteira da parede lateral.  $S$  é um factor de contaminação de superfície que contabiliza o amortecimento devido ao efeito da alteração da forma na superfície do líquido contaminada com eventuais impurezas (por exemplo no caso dos amortecedores de líquido sintonizado podem ser introduzidas algumas diferenças associadas com o facto destes estarem ou não tapados).

O factor  $S$  pode variar teoricamente entre 0 e 2 [Miles, 1967]. Na grande maioria dos estudos este factor surge como unitário, à semelhança do proposto por diversos estudos anteriores [Miles, 1967] [Lepelletier e Raichlen, 1988]. A consideração deste valor unitário corresponde a assumir que se trata de uma superfície livre completamente contaminada.

Com base no referido no parágrafo anterior é possível concluir que o termo dissipativo, explicitado pela equação (66), considerando a inclusão do efeito do amortecimento associado às paredes laterais do amortecedor de líquido sintonizado e à superfície livre do fluido toma a forma definida pela equação (69):

$$\frac{\nu}{(\eta + h_0)} \int_{-h}^{-(h-h_b)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = -\frac{1}{(\eta + h_0)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \nu} \left(1 + \frac{2h_0}{b} + S\right) u(\eta) = -\lambda u(\eta) \quad (69)$$

em que o amortecimento,  $\lambda$ , é considerado como tomando o valor definido:

$$\lambda = \frac{1}{(\eta + h_0)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \nu} \left(1 + \frac{2h_0}{b} + S\right) \quad (70)$$

Atendendo às características do fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado, a pressão pode ser expressa com base na equação (25) como:

$$\frac{1}{\rho} (p - p_0) = g \left( \eta \frac{\cosh(k(z + h_0))}{\cosh(kh_0)} - z \right) \quad (71)$$

Integrando a equação anterior relativamente à direcção vertical,  $z$ , a pressão horizontal total  $P$ , correspondente à força actuante nas paredes de topo do amortecedor de líquido sintonizado pode ser calculada.

Desprezando as fricções das paredes laterais e de fundo a força de corte na base,  $F \equiv F(t)$ , do tanque devido ao movimento do fluido é definida de acordo com o apresentado na equação (72):

$$F = P_n + P_0 \quad (72)$$

com  $P_n$  e  $P_0$  correspondentes às forças horizontais totais induzidas pelo fluido (pressões totais) nas paredes esquerda e direita do recipiente, respectivamente (Figura 4). Estes valores são função da elevação da superfície do fluido nas paredes de topo do tanque, podendo ser concretizados da seguinte forma:

$$F = \frac{1}{2} \gamma g b [(h_0 + \eta_n)^2 - (h_0 - \eta_0)^2] \quad (73)$$

com  $\gamma$  correspondente ao peso específico do líquido,  $g$  a aceleração da gravidade,  $b$  a largura do tanque,  $h_0$  a altura de água no interior do tanque,  $\eta_n$  e elevação numa das paredes de topo do tanque e  $\eta_0$  a elevação na outra parede de topo do tanque (de acordo com o esquematizado na (Figura 4):

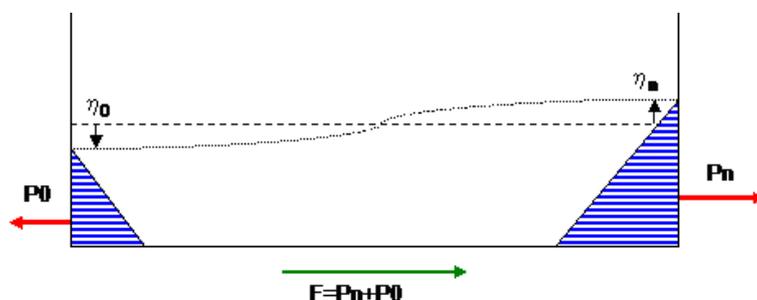


Figura 4 - Força de corte basal devido ao movimento horizontal [adaptado de Sun, 1991].

### 3.3. Linearização do modelo analítico não-linear (baseado nas shallow water wave equations)

Considerando o modelo analítico não linear identificado e apresentado de uma forma sumária em 3.2. é possível definir-se uma linearização do mesmo considerando

determinadas simplificações base o que permitirá a sua implementação em simulações numéricas de uma forma mais simples e expedita

Admitindo um amortecedor de líquido sintonizado com fluido em movimento dinâmico horizontal na direcção  $x$ . Admitindo um sistema de eixos local  $Oxz$  sobre a superfície livre do fluido em repouso com origem na parede lateral esquerda do recipiente, como se pode observar na Figura 5.

O amortecedor de líquido sintonizado apresenta um comprimento característico  $L$ , no caso de geometria rectangular, ou diâmetro característico  $R$ , no caso de geometria circular cilíndrica de paredes verticais planas, e uma altura do fluido em repouso de  $h_0$ .

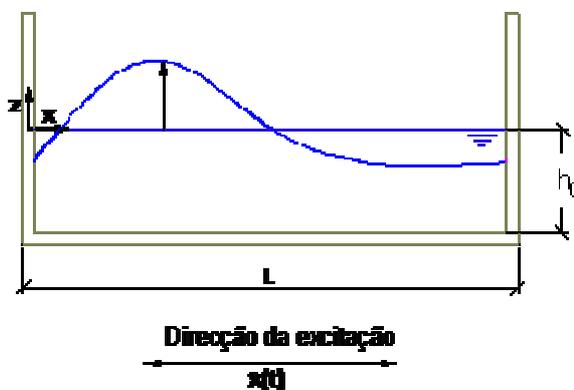


Figura 5- TLD sujeito a excitação horizontal dinâmica

O movimento do fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado, na sua forma unidireccional, é expresso por duas equações diferenciais parciais na forma dimensional [Lepelletier e Raichlen, 1988]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [(h_f + \eta) \cdot u]}{\partial x} = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{3} \cdot h_l^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h_l} \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot \omega_f}{2}} \cdot u + \ddot{x} = 0 \quad (75)$$

em que  $\eta = \eta(x,t)$  corresponde à elevação da superfície livre do fluido acima da cota de repouso (Figura 5);  $u = u(x,t)$  é a velocidade média horizontal da partícula do fluido na direcção  $x$ ;  $h_0$  é a altura do fluido em repouso;  $g$  é a aceleração da gravidade;  $\nu$  é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido, que, de uma forma muito simplificada, corresponde à resistência que o fluido oferece à deformação;  $\omega_f$  é a frequência angular característica de oscilação do fluido no interior do recipiente e  $\ddot{x}$  corresponde à aceleração imposta na base do amortecedor de líquido sintonizado.

No início do movimento, o fluido parte do repouso ( $t=0$ ), como tal as condições iniciais do problema são as definidas pelas equações (76) e (77):

$$\eta(x,0) = 0 \quad (76)$$

$$u(x,0) = 0 \quad (77)$$

As condições de impenetrabilidade das paredes do reservatório ( $x=0$  e  $x=L$ ) podem ser expressas pelas condições de fronteira que se identificam de acordo com as equações (78) e (79):

$$u(0,t) = 0 \quad (78)$$

$$u(L,t) = 0 \quad (79)$$

Por uma questão de simplificação ao nível dos cálculos podem-se tornar as variáveis envolvidas no modelo adimensionais por meio das relações (80) a (83):

$$\eta^* = \frac{A \cdot L}{g} \cdot \eta \quad (80)$$

$$x^* = L \cdot x \quad (81)$$

$$t^* = \frac{L}{\sqrt{g \cdot h_0}} \cdot t \quad (82)$$

$$u^* = \frac{A \cdot L}{\sqrt{g \cdot h}} \cdot u \quad (83)$$

em que A corresponde à amplitude da aceleração imposta ao dispositivo amortecedor de líquido sintonizado.

Por substituição das variáveis dimensionais por variáveis adimensionais, as equações (74) e (75) podem ser reescritas na forma adimensional, de acordo com o indicado nas equações (84) e (85):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [u(1 + \alpha' \cdot \eta)]}{\partial x} = 0 \quad (84)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha' \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \cdot \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + f^\circ \cdot (\sigma' \cdot t) + \zeta_f \cdot u = 0 \quad (85)$$

Analogamente ao identificado anteriormente, para as equações do movimento, as condições iniciais e de fronteira podem ser também colocadas na sua forma adimensional (equações (86) e (87)):

$$\eta(x,0) = u(x,0) = 0 \quad (86)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (87)$$

O sistema de equações adimensional (equações (84) e (85) ), é função de quatro parâmetros adimensionais que se explicitam nas equações (88) a (91):

$$\text{Não-linearidade:} \quad \alpha' = \frac{A \cdot L}{g \cdot h_0} \quad (88)$$

$$\text{Dispersão:} \quad \beta = \frac{h_0^2}{L^2} \quad (89)$$

$$\text{Frequência:} \quad \sigma = \frac{\omega_f \cdot L}{\sqrt{g \cdot h_0}} \quad (90)$$

$$\text{Coeficiente de amortecimento do fluido:} \quad \zeta_f = \sqrt{\frac{v_f \cdot \omega_f}{2}} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{2 \cdot h_0}{b} \right) + S \right] \cdot \frac{L}{h_0 \cdot \sqrt{g \cdot h_0}} \quad (91)$$

O coeficiente de amortecimento também pode ser determinado a partir da relação

$$\text{Coeficiente de amortecimento do fluido} \quad \zeta_f = \frac{C}{c_{\text{crit}}} \quad (92)$$

em que:

$$\text{Amortecimento crítico} \quad c_{\text{crit}} = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m} \quad (93)$$

No parâmetro de amortecimento do fluido, como já foi mencionado em 4.4.2., o termo  $(1 + S + 2hf/B)$  definido na equação (68) foi sugerido por Miles [Miles, 1967], e é utilizado para contabilizar o amortecimento devido ao atrito do fluido nas paredes laterais de topo e parede de fundo do amortecedor de líquido sintonizado e a contaminação ao nível da superfície livre do fluido. O termo  $2hf/B$  corresponde a um coeficiente equivalente ao efeito do amortecimento por unidade de largura devido ao contorno das paredes laterais de topo do amortecedor de líquido sintonizado. O parâmetro  $S$  é um factor de contaminação de superfície do fluido que varia entre 0 e 2. De acordo com outros estudos efectuados [Lepelletier e Raichlen, 1988] e já mencionados na secção anterior, considera-se numa primeira abordagem que  $S=1$  corresponde à superfície totalmente contaminada, no entanto será objecto de futuras publicações um estudo analítico experimental no sentido de calibrar este parâmetro.

De acordo com a linearização proposta para o modelo não linear baseado nas equações de águas rasas (*shallow water equations*), as frequências naturais dos fenómenos de *sloshing* que ocorrem no interior de amortecedores de líquido sintonizado sujeitos a excitações laterais impostas podem ser definidas de acordo com o indicado na equação (94):

$$\omega_f = \frac{\sqrt{g \cdot h_0}}{L} \cdot (2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot \left[ 1 - \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot n + 1)^2 \cdot \pi^2 \cdot \left( \frac{h_0}{L} \right)^2 \right] \quad (94)$$

em que  $n=0, 1, 2, \dots$  representa cada um dos modos de vibração que surgem durante o movimento do fluido no interior do recipiente.

Considerando que o fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado vibra fundamentalmente segundo um determinado modo, é possível estimar a frequência fundamental do fenómeno de *sloshing* associado ao 1º modo de vibração com base na relação definida pela equação (95) [Fujino et. al, 1992]:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{\pi \cdot g}{L} \cdot \tanh\left(\frac{\pi \cdot h_0}{L}\right)} \quad (95)$$

A linearização das equações (84) e (85) associada à eliminação da variável  $u(x,t)$ , permite obter uma expressão no domínio dos números complexos que define a elevação da superfície livre do fluido como uma função da posição das partículas de fluido segundo a direcção  $x$  e do instante temporal,  $t$ :

$$\eta(x,t) = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin \left[ \kappa \cdot \left( x - \frac{1}{2} \right) \right]}{\cos \left( \frac{k}{2} \right)} e^{i \cdot \sigma \cdot t} \right\} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \left[ a_n \cdot \left( x - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \operatorname{Re} \left[ f_n \cdot e^{S_n \cdot t} \right] \quad (96)$$

com as variáveis  $i$ ,  $\kappa$ ,  $a_n$  e  $f_n$  definidas de acordo com as equações (97) a (101), respectivamente:

$$i = \sqrt{-1} \quad (97)$$

$$\kappa = \frac{\sigma'}{\sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \beta \cdot \sigma'^2}} \cdot \left( 1 - \frac{i \cdot \zeta_f}{2 \cdot \sigma'} \right) \quad (98)$$

$$a_n = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi \quad (99)$$

$$f_n = 4 \cdot \frac{S_n}{S_n^2 + S^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot \beta \cdot S_n^2}{2 \cdot S_n + \zeta_f \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \beta \cdot S_n^2\right)} \quad (100)$$

$$S_n = \frac{-\zeta_f - 2 \cdot i \cdot a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \beta \cdot a_n^2\right)}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \beta \cdot a_n^2\right)} \quad (101)$$

Para que as equações anteriormente apresentadas sejam válidas deve-se garantir que  $\beta \ll 1$  e  $\zeta_f \ll 1$  [Lepelletier e Raichlen, 1988] [Sun et. al, 1992] [Fujino et. al, 1992] e ainda verificar a seguinte condição:

$$\sigma' < \sqrt{\frac{3}{\beta}} \quad (102)$$

A elevação de superfície  $\eta(x,t)$ , referida na equação (96), pode ser descrita como a resposta de um sistema dinâmico amortecido de um grau de liberdade, composta por:

- a) uma parcela harmónica com frequência de excitação, representada pela parcela permanente da resposta;
- b) uma combinação linear de todos os modos de oscilação do fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado, que representa a parte transitória da resposta.

Uma vez calculada a elevação da superfície livre do fluido,  $\eta(x,t)$ , a força hidrodinâmica induzida pelo movimento do fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado é obtida com base na equação definida na secção anterior para o modelo não-linear (equação (73)).

### 3.4. Modelos não-lineares com fenómenos de quebra de onda (*breaking waves*)

Esta situação traduz a particularização de qualquer dos modelos apresentados anteriormente nas secções 3.1 a 3.3. para determinadas condições em que ocorram fenómenos altamente não-lineares, como os de quebra de onda (*breaking waves*).

De facto, de acordo com as teorias de Engenharia Costeira [Ochi, 1998] em que se baseiam estes modelos matemáticos para amortecedores de líquido

sintonizado, quando a amplitude de excitação é de tal ordem que a altura de onda formada na superfície livre do fluido é superior à altura do fluido em repouso, prevê-se a ocorrência de um fenómeno altamente não-linear denominado quebra de onda, ou na denominação anglo-saxónica *breaking waves*.

Outra circunstância em que o fenómeno de quebra de onda pode ocorrer com grande frequência e intensidade corresponde às situações em que se utilizam alturas demasiado reduzidas de fluido (*very shallow water waves*) no interior dos dispositivos amortecedores de líquido sintonizado.

Quando a onda quebra maior quantidade de energia vai ser dissipada na superfície livre do líquido indicando que os fenómenos que ocorrem no fluido apresentam maior amortecimento. Para além do amortecimento, o fenómeno de quebra de onda vai também modificar a velocidade da fase de onda

Os modelos lineares propostos para amortecedores de líquido sintonizado não são válidos para situações em que ocorra o fenómeno de quebra de ondas (*breaking waves*) por causa de nestes modelos se assumir continuidade da superfície livre, o que não sucede durante a quebra de onda.

Para contabilizar o fenómeno de quebra de onda nos modelos linear ou não-linear linearizado apresentados nas secções 3.1. a 3.3, respectivamente, a equação do movimento pode ser modificada por meio da introdução de dois coeficientes empíricos,  $C_{da}$  e  $C_{fr}$ , de acordo com o apresentado na equação (103).

$$\frac{\partial u(\eta)}{\partial t} + (1 - T_H^2)u(\eta) \frac{\partial u(\eta)}{\partial x} + C_{fr}^2 g \frac{\partial \eta}{\partial x} + gh\sigma\phi \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -C_{da} \lambda u(\eta) - \ddot{x}_s \quad (103)$$

em que  $C_{da}$  e  $C_{fr}$  foram introduzidos com o objectivo de ajustar os níveis de amortecimento do fluido e a frequência natural do movimento de *sloshing*, resultantes das não-linearidades que surgem associadas ao fenómeno de quebra de onda. São denominados coeficiente de amortecimento e coeficiente de mudança de frequência, respectivamente.

Os coeficientes atrás mencionados foram identificados pela primeira vez por meio de ensaios harmónicos em plataforma sísmica [Sun, 1995], sendo assumidos como unitários quando se trata do modelo linear ou do modelo não-linear linearizado.

A resolução das equações do movimento para situações em que ocorra sloshing com fenómeno de quebra de onda (*breaking waves*) associado pode ser efectuada com recurso a determinadas estratégias numéricas [Nichols et. al, 1980]. Refere-se a estratégia SOLA-VOF [Nichols et. al, 1980], apresentada de uma forma resumida no ANEXO, como uma das mais adequadas para simular os efeitos das não-linearidades patentes no fenómeno de quebra de onda.

### **3.5. Modelos mecânicos lineares baseados na analogia com o Tuned Mass Damper equivalente – Modelos de Housner 1957 e Housner 1963**

É sabido, de investigações anteriores que os amortecedores de líquido sintonizado funcionam sob os mesmos princípios básicos, de relação massa-rigidez-amortecimento, que os amortecedores de massa sintonizados.

Como tal em certos casos, e por uma questão de simplificação, os amortecedores de líquido sintonizado podem ser idealizados usando um modelo mecânico simplificado, ou seja, uma analogia com amortecedores de massa sintonizados equivalentes. Um amortecedor de massa sintonizado apresenta um comportamento perfeitamente não-linear podendo ser simplificado em um sistema simples massa-mola-amortecedor.

No caso dos amortecedores líquido sintonizado todos os parâmetros massa (elemento massa), rigidez (elemento mola) e amortecimento (elemento amortecedor) são fornecidos pelo movimento de *sloshing* do fluido no seu interior sendo a acção de restituição a acção gravítica. Os parâmetros desta analogia dependem directamente da amplitude e da frequência de excitação [Sun et al., 1995].

O movimento do sistema amortecedor de Líquido sintonizado encontra-se confinado aos limites do recipiente contrariamente ao que acontece ao nível dos amortecedores de massa sintonizados em que o movimento se processa muito para além dos limites de confinamento da massa.

Um amortecedor de líquido sintonizado, à semelhança do que acontece com reservatórios excitados por acções dinâmicas, vai ter o seu conteúdo (fluido) excitado sendo a amplitude do fenómeno que surge (*sloshing* linear ou não-linear) uma função altamente dependente da intensidade e magnitude da solicitação que lhe é imposta.

Admitindo um determinado fluido em repouso no interior de um dispositivo amortecedor de líquido sintonizado (Figura 6) sujeito a uma determinada solicitação de base (aceleração ou velocidade ou deslocamento).

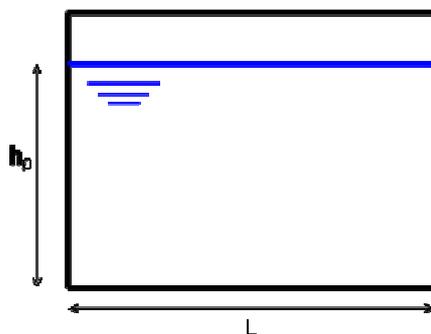


Figura 6 – Esquematização de amortecedor de líquido sintonizado com fluido em repouso

Após a imposição do referido movimento as forças que surgem no interior do dispositivo como resultado do movimento do fluido apresentam-se como sendo de dois tipos distintos:

- a. Quando as paredes do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado se deslocam alternadamente em direcções opostas uma pequena fracção do fluido é forçada a participar neste movimento, o que impõe uma força reactiva no recipiente, sendo esta a mesma que seria imposta por uma dada massa  $M_0$ , denominada de massa estática impulsiva e definida de acordo com as equações (104) e (109) para amortecedores de líquido sintonizado rectangulares e circulares, respectivamente. A referida massa  $M_0$ , considera-se rigidamente ligada ao próprio dispositivo a uma determinada altura, de acordo com as equações (106) e (111) para dispositivos rectangulares e circulares, respectivamente. A massa  $M_0$  encontra-se ligada a uma altura  $H_0$  (Figura 7) de tal forma que a força horizontal resultante seja colinear com a força resultante exercida pela porção de fluido equivalente;
- b. O próprio movimento das paredes do amortecedor de líquido sintonizado excita o fluido num movimento oscilatório que se traduz em uma força oscilatória exercida nas paredes do recipiente. Esta força oscilatória corresponde a uma força exercida por uma massa  $M_1$ , denominada por massa dinâmica ou convectiva, que oscila horizontalmente contra uma mola de rigidez  $k$  conforme o patente na Figura 7.

A massa  $M_1$  corresponde ao modo fundamental de oscilação do fluido, que corresponde ao modo preponderante na maioria dos problemas envolvendo a utilização de dispositivos amortecedores de líquido sintonizado.

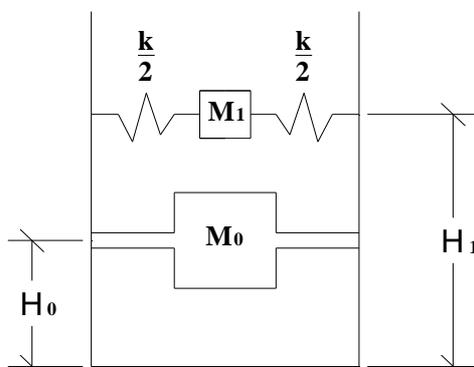


Figura 7 - Modelo equivalente com identificação das massas estática ( $M_0$ ) e dinâmica ( $M_1$ ) e da rigidez elástica linear ( $k_1$ ), adaptado de [Newmark e Rosenblueth, 1971]

Pode-se considerar que a parcela de fluido estático ou parcela impulsiva, situada junto da base do tanque, se move conjuntamente com as paredes do próprio amortecedor de líquido sintonizado, enquanto que a parcela dinâmica ou convectiva corresponde ao movimento da superfície livre do fluido onde ocorrem os fenômenos de sloshing característicos deste tipo de dispositivos.

Em amortecedores de líquido sintonizado em que se observe a relação  $H/L=0.2$  (retangulares) ou  $H/R=0.1$  (circulares), metade do líquido é impulsivo e metade do líquido é convectivo. Em amortecedores de líquido sintonizado que apresentem uma altura reduzida de fluido ( $H/L < 0.2$  em dispositivos retangulares e  $H/R < 0.1$  em dispositivos circulares) está-se presente na situação em que há mais fluido convectivo do que impulsivo, enquanto que para tanques apresentando altura de fluido mais elevada ( $H/L > 0.2$  em dispositivos retangulares e  $H/R > 0.1$  em dispositivos circulares) existe mais fluido impulsivo do que fluido convectivo.

Se o sistema equivalente massa-mola-amortecedor indicado na Figura 7 se encontrar sujeito a excitações dinâmicas de base,  $a_s$ , então as forças exercidas no amortecedor de líquido sintonizado pelo conjunto de massas discretas equivalentes,  $M_0$  e  $M_1$  serão as mesmas que as exercidas pelo fluido em movimento no recipiente apresentado na Figura 6.

À medida que a amplitude de excitação vai aumentando, uma maior massa de fluido se vai tornando eficiente, sendo denominada de massa efectiva contrariamente

ao que acontece nos amortecedores de massa sintonizada em que a massa efectiva mobilizada é sempre a mesma.

As massas teóricas não-efectiva e efectiva,  $M_0$  e  $M_1$  respectivamente, as alturas correspondentes,  $H_0$  e  $H_1$ , e a rigidez,  $k_1$ , para um modelo simplificado massa-mola-amortecedor de um amortecedor de líquido sintonizado (ALS) rectangular podem ser calculada com recurso ao modelo proposto e ajustado por Housner [Housner, 1957] [Housner, 1963].

$$M_0 = M_w \frac{\tanh\left(1.7 \frac{L}{2h_0}\right)}{1.7 \frac{L}{2h_0}} \quad (104)$$

$$M_1 = M_w \frac{0.83 \tanh\left(1.6 \frac{2h_0}{L}\right)}{1.6 \frac{2h_0}{L}} \quad (105)$$

$$H_0 = \frac{3}{8} h_0 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{M_w}{M_1} \left( \frac{L}{2h_0} \right)^2 - 1 \right) \right] \quad (106)$$

$$H_1 = h_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{M_w}{M_1} \left( \frac{L}{2h_0} \right)^2 + 0.63 \beta \frac{a}{h_0} \sqrt{0.28 \left( \frac{M_w L}{2M_1 h_0} \right)^2 - 1} \right] \quad (107)$$

$$k_1 = \frac{3gM_1^2 h_0}{M_w \left( \frac{L}{2} \right)^2} \quad (108)$$

em que  $M_w$  corresponde à massa de água total no interior do amortecedor de líquido sintonizado,  $M_0$  a massa de água não-efectiva,  $M_1$  a massa de água que contribui para o 1º modo de vibração,  $h_0$  a altura de fluido em repouso e  $L$  correspondente ao comprimento do reservatório.  $H_0$ ,  $H_1$  e  $K$  correspondem à posição de colocação de  $M_0$  acima do fundo do reservatório, posição de colocação da massa  $M_1$  acima do fundo do reservatório e a rigidez da mola que liga  $M_1$ , respectivamente. A massa remanescente corresponde a um número de massas ligadas ao tanque por meio de molas lineares, cada conjunto massa+mola associado aos modos de vibração superiores.

Relativamente aos reservatórios cilíndricos rígidos, sujeitos também a movimentos de translação horizontal, Housner propôs um modelo também constituído por conjunto massa, mola linear e amortecedor [Housner, 1957] [Housner, 1963].

Para calcular a força resultante imposta pelo fluido no tanque e o correspondente momento de derrubamento, à semelhança do identificado para os amortecedores de líquido sintonizado rectangulares, o fluido pode ser substituído por uma massa  $M_0$  rigidamente ligada ao recipiente a uma altura  $H_0$  acima da cota do fundo, mais uma massa  $M_1$  ligada por meio de molas de rigidez total  $K$  a uma altura  $H_1$  do fundo do reservatório. Estes parâmetros são definidos pelas equações (109) a (113):

$$M_0 = M_w \frac{\tanh\left(1.7 \frac{R}{h_f}\right)}{1.7 \frac{R}{h_f}} \quad (109)$$

$$M_1 = M_w \frac{0.6 \tanh\left(1.8 \frac{h_f}{R}\right)}{1.8 \frac{h_f}{R}} \quad (110)$$

$$h_0 = \frac{3}{8} h_f \left[ 1 + \alpha \left( \frac{M_w}{M_1} \left( \frac{R}{h_f} \right)^2 - 1 \right) \right] \quad (111)$$

$$h_1 = h_f \left[ 1 - 0.185 \frac{M_w}{M_1} \left( \frac{R}{h_f} \right)^2 + 0.56 \beta \frac{R}{h_f} \sqrt{\left( \frac{M_w R}{3M_1 h_f} \right)^2 - 1} \right] \quad (112)$$

$$k_1 = \frac{5.4 g M_1^2 h_f}{M_w R^2} \quad (113)$$

Os parâmetros apresentam dependência da dimensão característica do amortecedor de líquido sintonizado. Assim, para o modelo usado em dispositivos rectangulares é usado o comprimento na direcção da solicitação dinâmica ( $L$ ), enquanto que para dispositivos circulares a dimensão característica corresponde ao raio ( $R$ ).

Tanto para recipientes rectangulares como para recipientes circulares se admite que o período de vibração pode ser aproximado por uma expressão do tipo:

$$T_\omega = 2\pi \sqrt{\frac{M_1}{k_1}} \quad (114)$$

Para ambas as configurações de amortecedores de líquido sintonizado admite-se, nas expressões (106), (107), (111) e (112), que  $\alpha=1.33$  e  $\beta=2.0$  se for considerado

nos cálculos o momento hidrodinâmico na base do recipiente, enquanto que se considera  $\alpha=0$  e  $\beta=1.0$  se apenas interessarem os efeitos das pressões hidrodinâmicas nas paredes do recipiente.

A amplitude da altura das ondas definidas pela vibração pode ser tomada como igual ao produto da amplitude do deslocamento horizontal da massa  $M_1$ ,  $x$ , pelos factores apresentados nas equações (115) e (116) para amortecedores de líquido sintonizado rectangulares e circulares, respectivamente:

$$\eta = \frac{0.84x \frac{k_1 L}{2M_1 g}}{1 - \left(\frac{2x}{L}\right) \left(\frac{k_1 L}{2M_1 g}\right)^2} \quad (115)$$

$$\eta = \frac{0.63x \frac{k_1 R}{M_1 g}}{1 - 0.85 \left(\frac{x}{R}\right) \left(\frac{k_1 R}{M_1 g}\right)^2} \quad (116)$$

Ambas as relações dadas pelas equações (115) e (116) são bastante satisfatórias desde que  $\eta x$  não exceda os valores  $0.1L$ ,  $0.2R$  ou  $0.02h_0$ . Para além destes limites os fenómenos não-lineares tornam-se extremamente importantes [Newmark & Rosenblueth, 1971] não devendo ser esquecidos.

As expressões (104) a (108), para amortecedores de líquido sintonizado rectangulares, e as expressões (109) a (113), para amortecedores de líquido sintonizado circulares, a foram objecto de trabalhos subsequentes ao proposto [Housner, 1957] [Housner, 1963], tendo sido posteriormente revistas e corrigidas [Newmark e Rosenblueth, 1971].

Em trabalhos mais recentes têm sido utilizadas as correcções propostas por Newmark e Rosenblueth [Newmark e Rosenblueth, 1971] por, desta forma, ser possível considerar os modos de vibração mais elevados, muito embora não sejam estes os mais condicionantes. As equações (117) e (122) traduzem, para Amortecedores de Líquido Sintonizado rectangulares, a correspondência com as equações (104) a (108) e (115) do modelo de Housner. Relativamente a Amortecedores de Líquido Sintonizado circulares é possível afirmar que as adaptações das equações (109) a (113) e (116) propostas por Newmark e Rosenblueth [Newmark e Rosenblueth, 1971] são dadas pelas equações (123) a (128).

$$M_0 = M_w \frac{\tanh\left(1.7 \frac{a}{h_f}\right)}{1.7 \frac{a}{h_f}} \quad (117)$$

$$M_1 = M_w \frac{0.83 \tanh\left(1.6 \frac{h_f}{a}\right)}{1.6 \frac{h_f}{a}} \quad (118)$$

$$h_0 = 0.38h_f \left[1 + \alpha \left(\frac{M_w}{M_0} - 1\right)\right] \quad (119)$$

$$h_1 = h_f \left[1 - 0.33 \frac{M_w}{M_1} \left(\frac{a}{h_f}\right)^2 + 0.63\beta \frac{a}{h_f} \sqrt{0.28 \left(\frac{M_w a}{M_1 h_f}\right)^2 - 1}\right] \quad (120)$$

$$k_1 = \frac{3gM_1^2 h_f}{M_w a^2} \quad (121)$$

$$\eta = \frac{0.84x \frac{k_1 a}{M_1 g}}{1 - \left(\frac{x}{a}\right) \left(\frac{k_f a}{M_1 g}\right)^2} \quad (122)$$

$$M_0 = M_w \frac{\tanh\left(1.7 \frac{R}{h_f}\right)}{1.7 \frac{R}{h_f}} \quad (123)$$

$$M_1 = M_w \frac{0.71 \tanh\left(1.8 \frac{h_f}{R}\right)}{1.8 \frac{h_f}{R}} \quad (124)$$

$$h_0 = 0.38h_f \left[1 + \alpha \left(\frac{M_w}{M_0} - 1\right)\right] \quad (125)$$

$$h_1 = h_f \left[1 - 0.28 \frac{M_w}{M_1} \left(\frac{R}{h_f}\right)^2 + 0.55\beta \frac{R}{h_f} \sqrt{0.15 \left(\frac{M_w R}{M_1 h_f}\right)^2 - 1}\right] \quad (126)$$

$$k_1 = \frac{4.75gM_1^2 h_f}{M_w R^2} \quad (127)$$

$$\eta = \frac{0.69x \frac{k_1 R}{M_1 g}}{1 - 0.92 \left( \frac{x}{R} \right) \left( \frac{k_1 R}{M_1 g} \right)^2} \quad (128)$$

A massa de fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado reage ao movimento da estrutura de uma maneira análoga ao observado para a massa de um amortecedor de massa sintonizado colocado sobre a mesma estrutura.

O amortecedor de líquido sintonizado apresenta necessariamente características de rigidez e amortecimento inerentes à qualidade dos fenómenos que ocorrem no seu interior (*sloshing linear*, *sloshing não-linear* e *breaking waves*). Após a quantificação da sua rigidez e amortecimento, o dispositivo poderá ser modelado como uma massa com rigidez e amortecimento ligada a uma massa inerte

As propriedades determinadas em concordância com a formulação apresentada na presente secção permitem a definição de um macro-elemento que pode ser implementado num programa de cálculo automático de elementos finitos, como por exemplo SAP2000 [SAP2000NL, 2003], para análise de estruturas com dispositivos amortecedores de líquido sintonizado incluídos.

Tendo em conta um modelo plano, isto é, para o qual a solicitação se considera fundamentalmente numa direcção e em que se verifica a existência de uma frequência fundamental bem definida nessa mesma direcção, por exemplo em amortecedores de líquido sintonizado rectangulares, o procedimento a que se deve obedecer para modelação dos dissipadores em programas de cálculo automático segue o proposto em seguida:

- a. Definição de um elemento *link*, do tipo *damper*, em que se assume concentrado todo o amortecimento do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado,  $c$ , com as propriedades indicadas pela expressão (91);
- b. Consideração da rigidez estimada para o dissipador,  $k$ , concentrada no elemento central tipo *damper* é dada por (121) para dispositivos rectangulares e por (127) para dispositivos circulares;
- c. Massa estática,  $M_0$ , associada ao dispositivo, determinada com recurso às expressões (117) para amortecedores de líquido sintonizado rectangulares e (123) para amortecedores de líquido sintonizado circulares, considerada nos nós de extremidade do macro-modelo;

- d. Massa dinâmica,  $M_1$ , determinada com recurso às expressões (118) para dispositivos rectangulares e (124) para dispositivos circulares, modelada no macro-elemento.

A representação esquemática do macro modelo plano proposto para um amortecedor de líquido sintonizado é apresentada na Figura 8.

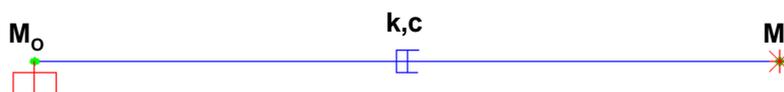


Figura 8 - Macro-modelo plano proposto para implementação de amortecedores de líquido sintonizado com geometria rectangular em programas de cálculo automático de estruturas

A consideração de vários dispositivos para implementação em estruturas reais pode ser conseguida por meio da multiplicação de cada um dos parâmetros pelo número efectivo de dispositivos,  $n$ .

Considerando um modelo espacial, isto é, para o qual a solicitação se considera em ambas as direcções e em que se verifica a existência de conjuntos de frequências em direcções perpendiculares acopladas, por exemplo como sucede para amortecedores de líquido sintonizado circulares, o procedimento a que se deve obedecer para modelação dos dissipadores em programas de cálculo automático comerciais segue o disposto anteriormente, de i) a iv) para ambas as direcções.

A representação esquemática do macro modelo bidireccional proposto para um dispositivo circular é apresentada na Figura 9.

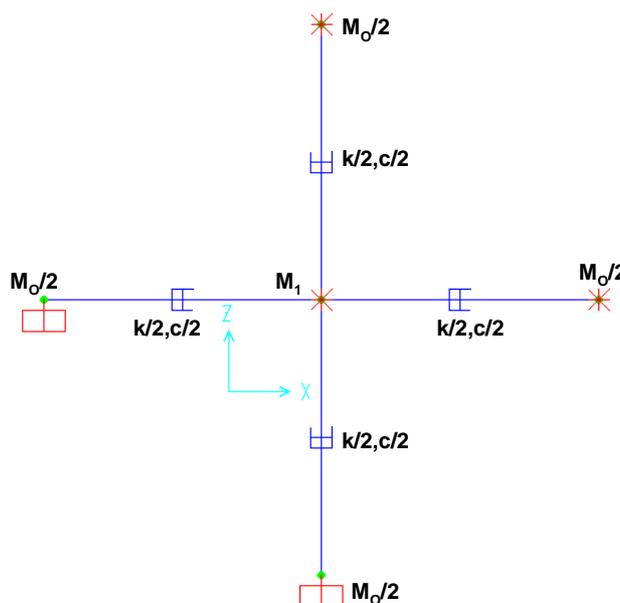


Figura 9 - Macro-modelo bidireccional proposto para implementação de amortecedores de líquido sintonizado com geometria circular em programas de cálculo automático de estruturas

A consideração de vários dispositivos,  $n$ , para implementação em estruturas reais pode ser conseguida, à semelhança do referido anteriormente, por meio produto de cada um dos parâmetros determinados pelo número efectivo de dispositivos.

Estes macro-modelos mecânicos massa-mola-amortecedor propostos com base nos estudos de Housner [Housner, 1957] [Housner, 1963] modificados por Newmark e Rosenblueth [Newmark e Rosenblueth, 1971] serviram de base para estudos efectuados no âmbito de uma tese de doutoramento [Falcão Silva, 2010].

São de referir ainda as investigações de Novo [Novo, 2008] e de Coelho [Coelho, 2010] no âmbito do estudo do comportamento dinâmico de ALS rectangulares e circulares, respectivamente.

### **3.6. Modelo não-linear baseado na analogia com o amortecedor de massa sintonizado equivalente – Extensão dos modelos de Housner 1957 e Housner 1963**

O comportamento de amortecedores de massa sintonizada passivos tem sido amplamente investigado [McNamara, 1977] [Warburton, 1980] [Warburton, 1981] [Warburton, 1982].

A utilização de um modelo de amortecedor de massa sintonizada equivalente para representar o funcionamento de dispositivos amortecedores de líquido sintonizado é bastante atractiva devido principalmente às semelhanças evidenciadas entre o comportamento de os dois tipos de dispositivo, muito embora os amortecedores de líquido sintonizado a partir de determinadas condições evidenciem a ocorrência de fenómenos altamente não-lineares observados de estudos anteriores, nomeadamente a partir de ensaios experimentais em protótipos.

Como já foi referido na secção 3.5., o comportamento de um amortecedor de líquido sintonizado pode ser aproximado com base no funcionamento de um amortecedor de massa sintonizado de características análogas (Figura 10).

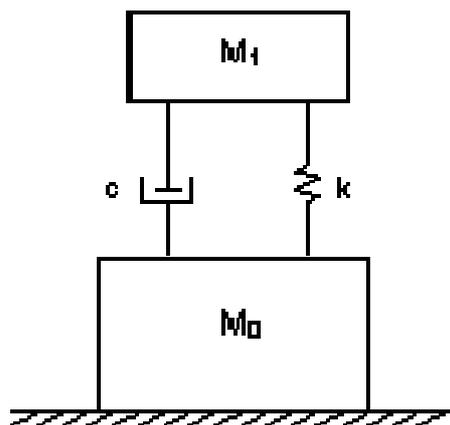


Figura 10 – Modelo do amortecedor de massa sintonizado equivalente

Para incorporar a rigidez não linear e as características de amortecimento, também variáveis com a excitação imposta, foi desenvolvido e proposto, com base em resultados experimentais, um modelo de amortecedor de massa sintonizada equivalente.

Neste modelo, conhecido como modelo NSD (*Non-linear Stiffness and Damping*), são incorporadas as características não-lineares de rigidez e amortecimento. Para além do mencionado, e com o mesmo objectivo de quantificar as não-linearidades presentes nos fenómenos que ocorrem no interior de amortecedores de massa sintonizada sujeitos a solicitações dinâmicas impostas, foi proposto um modelo de escoamento baseado nas equações de águas rasas (*shallow water waves*), muito aplicadas em oceanografia e engenharia costeira, usando o modelo RCM (*Random Choice Method*) proposto por Gardarsson e Yeh [Gardarsson e Yeh, 1994]. Os modelos NSD e RCM apresentam-se descritos, de uma forma sumária, no ANEXO.

A rigidez e amortecimento do modelo NSD são determinados, para que a força de corte na base, ou força de amortecimento, associada ao movimento do fluido no interior do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado,  $F_w$ , e a força correspondente no modelo NSD,  $F_d$ , sejam equivalentes, para uma mesma excitação de base [Yu, 1997]. A força de amortecimento é caracterizada pela sua amplitude e fase.

Em alternativa, o parâmetro da dissipação de energia por ciclo,  $E_d$ , pode ser usado para estabelecer a correspondência entre o amortecedor de líquido sintonizado e o amortecedor de massa sintonizada de características lineares equivalentes. A dissipação de energia por ciclo pode ser definida pela área dentro do ciclo definido pela força de amortecimento,  $F_w$ , e pelo deslocamento de base observado no dispositivo,  $x_s$ :

$$E_w = \int_{T_s} F_w dx_s \quad (129)$$

com  $T_s$  correspondente ao período da excitação imposta,  $F_w$  à força de corte basal e  $x_s$  ao deslocamento imposto durante a ocorrência da solitação. A quantidade definida pela equação (129) representa os efeitos combinados da amplitude e da fase da força de amortecimento no movimento estrutural durante um determinado período de tempo (um ciclo).

Na determinação dos parâmetros dos modelos equivalentes para amortecedores de líquido sintonizado, a comparação em termos energéticos apresenta algumas vantagens relativamente à comparação directa das forças de amortecimento dos dois sistemas amortecedores de líquido sintonizado e de massa sintonizada.

Como tal, é possível afirmar-se que a comparação de um escalar, como seja a energia dissipada,  $E_w$ , se torna mais apelativa e, em segundo lugar, os efeitos de modos superiores de *sloshing* do fluido na energia dissipada são negligenciáveis [Yu, 1997].

Para além do indicado para rigidez e amortecimento, verificou-se também, com base em resultados de programas experimentais desenvolvidos, que a massa equivalente do sistema pode apresentar algumas alterações, em função da frequência de excitação e da relação entre frequência de excitação e frequência de vibração do próprio fluido no interior do dispositivo.

Assim, as características não-lineares da massa podem ser contornadas, a partir da determinação de uma massa equivalente,  $M_{eq}$ , calculada a partir da equação (130):

$$M_{eq} = (M_0 + M_1) + \left( \frac{M_1 \Omega^2}{1 - \Omega^2 + 2i\zeta\Omega} \right) \quad (130)$$

em que  $M_0$  traduz a massa de fluido não-efectiva,  $M_1$  é a massa efectiva de fluido,  $\Omega$  a razão entre a frequência de excitação e a frequência natural de *sloshing* do fluido em movimento no interior do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado e  $\zeta$  a razão de amortecimento dada pela equação (91).

As massas de fluido não-efectivo ou impulsivo,  $M_0$ , e a massa de fluido efectiva ou convectivo,  $M_1$ , são determinadas de acordo com as fórmulas propostas por Housner [Housner, 1957] [Housner, 1963] corrigidas por Newmark e Rosenblueth [Newmark e Rosenblueth, 1971] e apresentadas na secção 3.5.

### 3.7. Modelo de massa múltipla [Tokarczyk, 1997]

Este modelo matemático linear foi proposto no final da década de 90 [Tokarczyk, 1997] e permite a representação das forças geradas por um amortecedor de líquido sintonizado, podendo ser usado em conjunto com o método de integração Newmark Beta para as equações do movimento de um sistema estrutural não-linear.

De uma forma muito sumária admite que as forças geradas pelo reservatório com o fluido em movimento podem ser aproximadas por um modelo mecânico equivalente de massas e molas. Os coeficientes associados ao modelo mecânico foram determinados e simplificados como expressões dependentes do líquido presente no interior do dispositivo. A avaliação dos coeficientes pode ser efectuada de uma forma rápida e eficiente para que o modelo matemático do sistema mecânico possa ser facilmente incluído como sistema secundário num modelo dinâmico [Tokarczyk, 1997].

Este modelo permite a obtenção das forças geradas pelo *sloshing* do fluido no domínio do tempo. Adianta-se ainda que o modelo do sistema secundário pode ser replicado com sucesso num número de localizações ao nível do modelo estrutural da estrutura em que o dispositivo amortecedor de líquido sintonizado se encontra incluído e avaliado o seu desempenho em tempo real.

O modelo mecânico do dispositivo permite uma panóplia de estudos paramétricos, na medida em que os parâmetros envolvidos podem ser alterados com o objectivo de simular uma gama alargada de arranjos ao nível do sistema de líquido.

O modelo matemático desenvolvido apresenta-se como semelhante aos modelos preliminares de Housner [Housner, 1957], aos estudos de Vandiver e Mitone [Vandiver e Mitone, 1978], ao trabalho de Kareem e Sun [Kareem e Sun, 1987] e às simulações propostas por Wakahara, Ohyama e Fujii [Wakahara et. al., 1992]. O referido modelo foi desenvolvido no domínio do tempo e permite estimar a força produzida pelo fluido no interior de um dispositivo amortecedor de líquido sintonizado, quando este se encontra sujeito a uma excitação dinâmica arbitrária, como por exemplo uma excitação semelhante a uma acção sísmica.

Para este modelo apresentam-se modelo mecânico capaz de simular as forças de sloshing e o modelo matemático desenvolvido com base no modelo mecânico indicado.

Os métodos de análise possível para o modelo matemático correspondem ao método Newmark Beta e ao integral de Duhamel. O método Newmark Beta é apresentado de uma forma sumária no ANEXO enquanto que o integral de Duhamel é descrito em mais detalhe mais adiante na secção 4.3.

### 3.7.1. Modelo mecânico equivalente para simulação das forças de sloshing

O modelo matemático usado para a determinação das forças de *sloshing* fornece uma representação mecânica (Figura 11) intuitiva das contribuições modais do *sloshing* do fluido no interior do recipiente confinado, ou seja do amortecedor de líquido sintonizado.

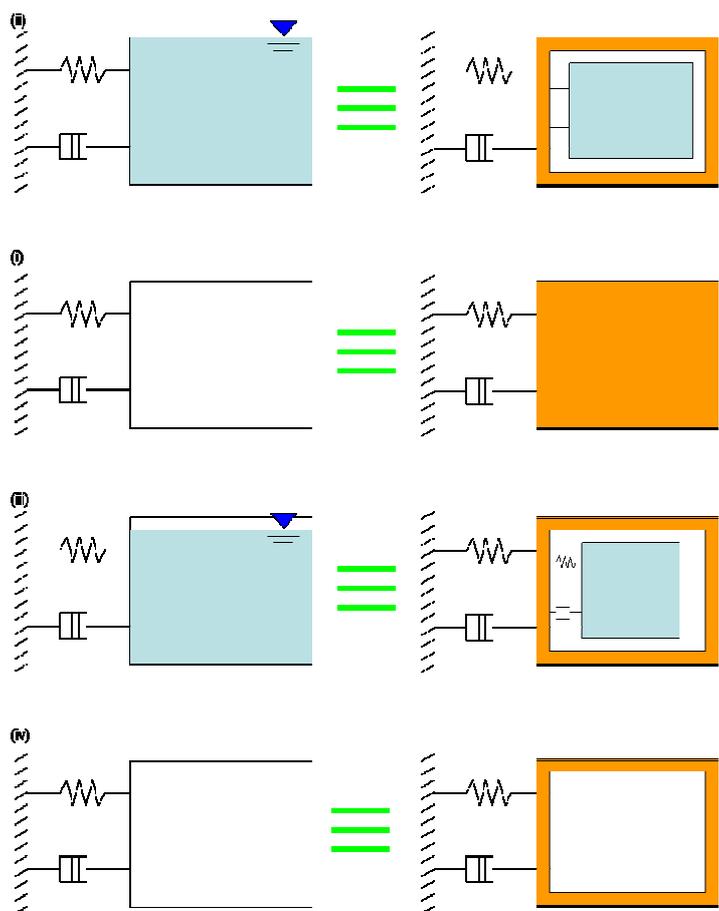


Figura 11- Modelos mecânicos para (i) sistema de massa, (ii) tanque cheio de líquido, (iii) tanque parcialmente cheio de líquido e iv) tanque vazio, adaptado de [Tokarczyk, 1997]

O modelo físico da relação recipiente-fluido consiste numa séries de ligações massa-mola, cada uma delas com uma determinada razão amortecimento associada. Este modelo não é mais do que a particularização de um modelo oscilatório de amortecedor de massa sintonizado (AMS) (Figura 11 (i)). O desenvolvimento de um modelo simplificado que represente as forças geradas pelo sloshing do fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado (TLD) tem por base o modelo identificado na Figura 11 (iii).

Cada sistema massa-mola corresponde ao modo de vibração da resposta do sistema recipiente-fluido (por exemplo estudado num determinado programa experimental).

Este sistema mecânico foi desenvolvido como um modelo matemático separado que pode facilmente ser ligado ao modelo de uma dada estrutura de transmissão, qualquer que seja a localização da colocação do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado numa estrutura principal [Tokarczyk, 1997].

A expansão de o modelo simplificado esquemático para  $n$  modos de vibração encontra-se na Figura 12:

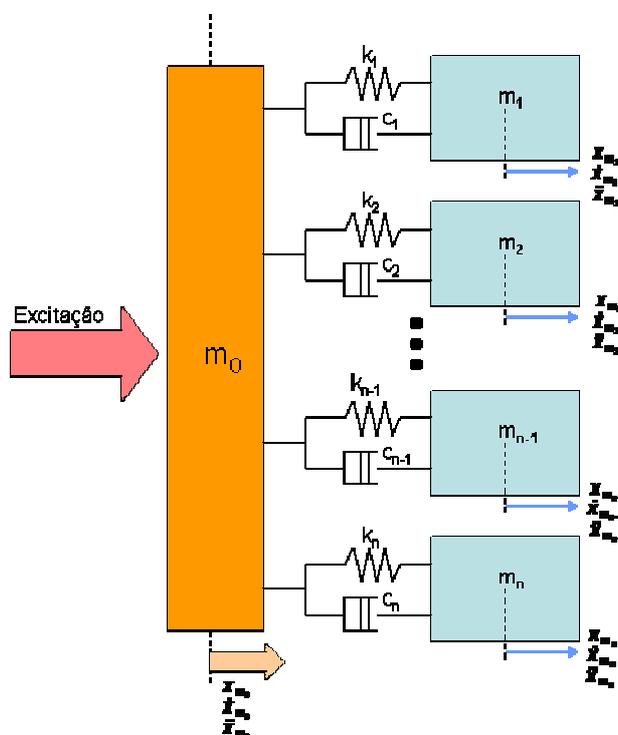


Figura 12- Modelos mecânicos simplificado simulando vários modos de vibração, adaptado de [Tokarczyk, 1997]

Torna-se ainda importante reforçar que mesmo sendo o modelo matemático muito intuitivo e apelativo, tem grandes fundamentos matemáticos. Em particular, pode

ser comprovado que, para níveis de amortecimento nulos, está em perfeita concordância com as equações desenvolvidas por Lui e Lou [Lui e Lou, 1990] com base na teoria linear de onda para fluidos invíscidos e incompressíveis.

No modelo proposto [Tokarczyk, 1997] admitiu-se que as forças de *sloshing* do fluido foram modeladas como bidimensionais: ao longo do eixo de *sloshing* (eixo horizontal de excitação) e do eixo gravítico (eixo vertical).

Para a concretização deste modelo foi admitido um recipiente de geometria quadrada (caso particular de reservatórios rectangulares em que  $L/b=1$ ) cujo dimensionamento incorporou uma tampa cujo principal objectivo era impedir derramamentos e salpicos de fluido durante eventuais solicitações dinâmicas. No entanto foi considerado um espaço livre entre a tampa e a superfície da água o que permitiu um efeito de superfície livre totalmente desimpedida. O recipiente foi organizado para que o alinhamento do eixo fundamental de *sloshing* e o eixo do movimento estivessem concordantes entre si e com o eixo de excitação do equipamento laboratorial. À semelhança de outros modelos existentes na literatura admitiu-se que o fluido no interior do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado estudado se tratava de água isenta de impurezas [Tokarczyk, 1997].

Esta concretização permite identificar um modelo para a simulação das forças do fluido que é análogo ao modelo teórico proposto para determinar os efeitos de amortecedores múltiplos de massa sintonizada [MuTMDs]. Este modelo foi estudado no domínio da frequência [Igusa e Xu, 1990] [Igusa e Xu, 1991] [Xu e Igusa, 1992].

Outros modelos no domínio da frequência [Yamaguchi e Harpornchar, 1993] foram igualmente estudados no sentido de determinar o que será eventualmente afectado ou alterado por consideração de vários conjuntos massa-mola em vez de um só conjunto massa-mola, isto é o que é alterado por consideração de vários modos de vibração ao nível do *sloshing* do líquido no interior de dispositivos do tipo amortecedores de líquido sintonizado.

### **3.7.2. Modelo matemático desenvolvido a partir do modelo mecânico equivalente**

Admitindo o sistema mecânico referido na Figura 12, tem-se que as forças geradas pelo conjunto das massas e molas (desprezando o amortecimento do

sistema) quando estas são excitadas por uma harmónica podem ser representadas por [Tokarczyk, 1997]:

$$F_0 = -\omega^2 x_0 \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \left( \frac{q_j}{\alpha_j^2 \frac{L}{2}} + \frac{r_j - q_j \omega_j^2}{\alpha_j^2 \frac{L}{2} (\omega_j^2 - \omega^2)} \right) \quad (131)$$

em que  $x_0$  representa uma dada excitação harmónica e  $L$  corresponde ao comprimento do amortecedor de líquido sintonizado.

Admitindo que o fluido no interior do dispositivo supramencionado apresenta uma altura de  $h_0$ , então os termos  $q_j$ ,  $r_j$ ,  $\omega_j^2$  presentes na equação (131) são definidos como:

$$q_j = 4\rho b \left( h_0 - \frac{\tanh(\alpha_j h_0)}{\alpha_j} \right) \quad (132)$$

$$r_j = 4\rho g \alpha_j \tanh(\alpha_j h_0) \quad (133)$$

$$\omega_j^2 = g \alpha_j \tanh(\alpha_j h_0) \quad (134)$$

$$\alpha_j = \frac{j\pi}{L} \quad (135)$$

Os coeficientes do modelo mecânico para a massa estática,  $M_0$ , a massa oscilante do  $j$ -ésimo modo,  $M_j$ , e a rigidez associada com essa mesma massa oscilante,  $k_j$  podem ser representadas pelas equações que a seguir se apresentam:

$$M_0 = \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \left( \frac{q_j}{\alpha_j^2 \frac{L}{2}} \right) \quad (136)$$

$$M_j = \frac{k_j}{\omega_j^2} \quad (137)$$

$$k_j = \frac{r_j - q_j \omega_j^2}{\alpha_j^2 \frac{L}{2}} \quad (138)$$

Admitindo a relação de força (131) para o fenómeno de *sloshing* que surge durante a excitação dinâmica imposta, então os coeficientes do modelo mecânico, neste caso representados pelas equações (136) a (138) podem ser escritos de forma a dependerem de parâmetros físicos relacionados com as características do amortecedor de líquido sintonizado ou mais especificamente, a forma do fluido estático

no que respeita a comprimento,  $L$ , largura,  $b$ , e altura do fluido em repouso,  $h_0$ . A relação de força identificada em (131) depende ainda da densidade do fluido utilizado na Amortecedor de Líquido Sintonizado,  $\rho_f$ , da aceleração da gravidade,  $g$ , e da variável  $\pi$ .

Obtêm-se então a simplificação para o termo de massa estático,  $M_0$ , o termo de massa do  $j$ -ésimo modo,  $M_j$ , e a rigidez associada à massa do  $i$ -ésimo modo,  $k_j$ , respectivamente [Tokarczyk, 1997]:

$$M_0 = \frac{16\rho \frac{L}{2}bh_f}{\pi^2} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j^2} \left( 1 - \frac{\tanh\left(\frac{j\pi}{L}h_f\right)}{\frac{j\pi}{L}h_f} \right) \quad (139)$$

$$M_j = \frac{32\rho b \left(\frac{L}{2}\right)^2 \tanh\left(\frac{j\pi}{2a}h_f\right)}{j^3\pi^3} \quad (140)$$

$$k_j = \frac{16\rho gb \frac{L}{2} \tanh^2\left(\frac{j\pi}{L}h_f\right)}{j^2\pi^2} \quad (141)$$

Considerando este tipo de modelação existirá um termo  $M_0$  por modelo de fluido, mas o número de termos  $M_j$  e  $k_j$  deverá ser definido pelo utilizador com base no nível de detalhe desejado na resposta dinâmica.

O termo de ordem  $j$  deverá ser um termo ímpar (1, 3, 5, ...), representando cada termo o grau de liberdade seguinte ao nível do modelo, por exemplo, para  $j=1$  analisa-se o comportamento do primeiro grau de liberdade e o peso dos fenómenos a ele associados, para  $j=3$  avalia-se o segundo grau de liberdade e assim sucessivamente [Tokarczyk, 1997].

### 3.8. Modelo do amortecedor sloshing-slamming ( $S^2$ ) [Kareem e Ayala, 1999]

Este modelo baseado na analogia *sloshing-slamming* ( $S^2$ ) corresponde a uma combinação de dois modelos, o modelo linear de *sloshing* e o modelo de um amortecedor de impacto (*slamming*), e foi desenvolvido por Kareem e Yalla em 1999 [Yalla e Kareem, 1999] tendo sido posteriormente actualizado no âmbito da tese de Doutoramento de Yalla [Yalla, 2001].

### 3.8.1. Modelação do *sloshing* do fluido

O modelo simplificado do *sloshing* do fluido no interior de um amortecedor de líquido sintonizado rectangular baseia-se na analogia com um modelo mecânico equivalente usando um conjunto de massas, molas e amortecedores para a descrição do fenómeno de *sloshing* que ocorre no fluido animado de uma determinada socitação dinâmica imposta. Os parâmetros do conjunto são determinados com base na teoria linear de onda [Lamb, 1932]. O modelo mecânico equivalente apresenta-se esquematizado na figura Figura 13:

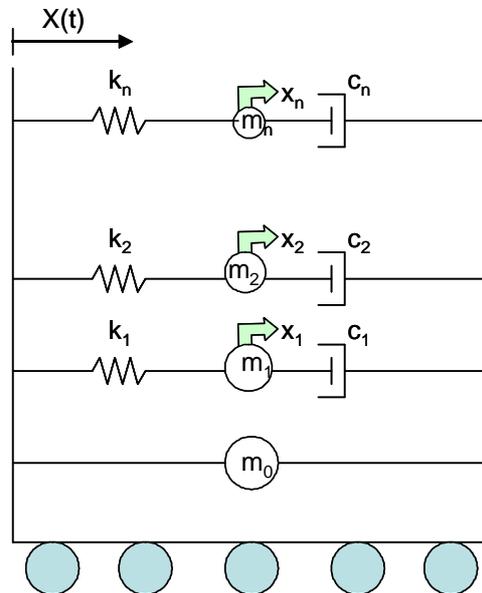


Figura 13 - Modelo mecânico equivalente para o *sloshing* do fluido no interior de Amortecedores de Líquido Sintonizados rectangulares, adaptado de [Yalla, 2001]

Os dois parâmetros fundamentais associados a este modelo simplificado são dados pelas equações (142) e (143):

$$m_n = Ml \left( \frac{8 \tanh\{(2n-1)\pi r\}}{\pi^3 r (2n-1)} \right) \quad (142)$$

$$\omega_n^2 = \frac{g(2n-1)\pi \tanh\{(2n-1)\pi r\}}{L} \quad (143)$$

em que  $n$  corresponde ao modo de *sloshing* em questão ( $n=1,2,\dots$ ),  $m_n$  a massa de fluido mobilizada pelo modo de vibração  $n$ ,  $w_n$  a frequência de *sloshing* correspondente ao modo de vibração,  $r=h_0/L$  com  $h_0$  correspondente à altura de fluido em repouso e  $L$  o comprimento do recipiente na direcção da excitação imposta,  $M_l$  a

massa total de fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado. A massa que não participa no fenómeno de *sloshing* denomina-se massa inactiva ou impulsiva e é dada pela seguinte relação definida pela equação (144):

$$m_0 = M_l - \sum_{n=1}^{\infty} m_n \quad (144)$$

Na grande maioria das situações analisadas considera-se apenas o modo fundamental do *sloshing* do fluido (isto é,  $n=1$ ) por se verificar que, de facto, este corresponde ao modo fundamental e preponderante.

Este modelo funciona bem para pequenas amplitudes de excitação, em que a quebra de onda e as não-linearidades não influenciam a resposta global de forma significativa. Trata-se de um óptimo modelo que pode igualmente ser utilizado como pressuposto inicial em situações de dimensionamento [Yalla, 2001].

### 3.8.2. Determinação do impacto (*slamming*) do fluido

O modelo propõe uma analogia entre o impacto (*slamming*) do fluido nas paredes laterais de topo do amortecedor de líquido sintonizado e o modelo de um amortecedor de impacto simples [Yalla, 2001].

O modelo de um amortecedor de impacto é definido por uma pequena massa rígida colocada num recipiente rigidamente ligado ao sistema primário, de acordo com o apresentado na Figura 14 [Masri e Caughey, 1966] [Semercigil et. al., 1992].

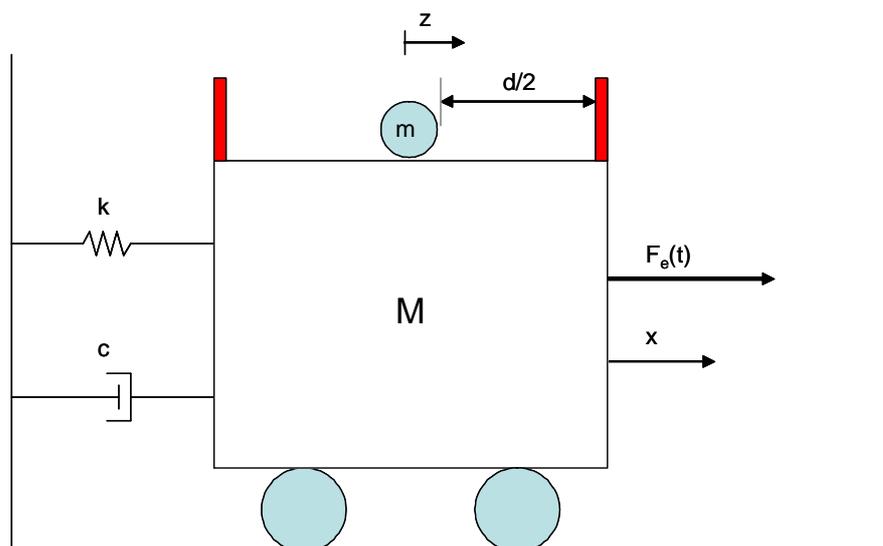


Figura 14 - Modelo mecânico equivalente para o amortecedor de impacto (*slamming*), adaptado de [Yalla, 2001]

Este modelo assume um espaço entre o recipiente e o amortecedor de impacto, identificado como com a dimensão  $d$ , e mantido no dimensionamento do dispositivo para que as colisões/choques ocorram ininterruptamente assim que o deslocamento do sistema primário exceda um valor indicativo de referência [Yalla, 2001].

O choque produz a dissipação de energia pretendida assim como a alternância de momento. A fonte principal da atenuação do movimento no sistema principal será devida precisamente à alternância de momento referida, que contraria a direcção do movimento da massa de impacto. Assim torna-se possível obter a equação do movimento entre impactos sucessivos:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_e(t) \quad (145)$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad (146)$$

A velocidade do sistema primário após a colisão/impacto é dada por [Masri e Caughey, 1966]:

$$\dot{x}_{dc} = \frac{(1 - \mu e)}{(1 + \mu)} \dot{x}_{ac} + \frac{\mu(1 + e)}{(1 + \mu)} \dot{z}_{ac} \quad (147)$$

em que  $e$  corresponde ao coeficiente de restituição dos materiais envolvidos na colisão,  $\mu = m/M$  é a razão de massas,  $x$  e  $z$  correspondem respectivamente aos deslocamentos dos sistemas primário e secundário e os índices  $dc$  e  $ac$  referem-se ao estado das variáveis depois da colisão e antes da colisão. A velocidade do impacto é invertida após cada colisão.

### 3.8.3. Analogia sloshing-slamming (S2)

O trabalho experimental desenvolvido no sentido de estimar as características do *sloshing* observado no interior de amortecedores de líquido sintonizado foi relatado por vários autores [Sun, 1991] [Fujino et. al, 1992] [Gardarsson, 1997] [Tokarczyk, 1997] [Reed et. al, 1998a] [Reed et. al, 1998b] [Yu et. al, 1999] [Yalla, 2001]. Os resultados chave deste tipo de ensaios apresentam-se sob a forma de uma relação entre amplitude de excitação adimensional e frequência de salto (na denominação

anglo-saxónica *jump frequency*) e razão de amortecimento (na denominação anglo-saxónica *damping ratio*) [Yalla, 2001].

O fenómeno de salto (*jump phenomenon*) é característico de sistemas não-lineares nos quais a resposta apresenta uma queda lenta para além da frequência conhecida e denominada de frequência de salto.

Os resultados que se apresentam (Figura 15 e Figura 16), foram adaptados dos estudos de Yu [Yu et. al, 1999] em que se representou o aumento do amortecimento e as alterações observadas ao nível da frequência em função de uma amplitude adimensional obtida por relação entre a amplitude de excitação real e o comprimento do tanque na direcção da excitação (L no caso de amortecedores de líquido sintonizado rectangulares) [Yalla, 2001].

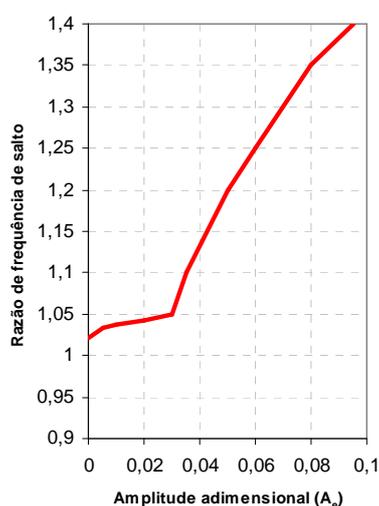


Figura 15 - Variação da frequência de salto com a amplitude adimensional de excitação de base, adaptado de [Yu et. al, 1999]

A figura anterior mostra um aumento na frequência de salto ( $k$ ) para amplitudes de excitação mais elevadas e considerando relações entre frequências ( $\gamma_f = \omega_e / \omega_f$ ) superiores à unidade, o que sugere um efeito de endurecimento (na denominação anglo-saxónica *hardening effect*), em que  $\omega_e$  corresponde à frequência da excitação e  $\omega_f$  corresponde à frequência do amortecedor de líquido sintonizado.

É de referir ainda que à medida que a amplitude de excitação aumenta, a dissipação de energia ocorre numa gama de frequências limite, o que abona em favor da robustez e eficácia dos dispositivos do tipo amortecedor de líquido sintonizado [Yalla, 2001]

O sistema acoplado estrutura principal + amortecedor de líquido sintonizado apresenta características não-lineares com o aumento da amplitude de excitação. Os estudos experimentais indicados sugerem que a resposta em frequência de um amortecedor de líquido sintonizado, contrariamente ao que acontece para os amortecedores de massa sintonizada lineares, apresenta uma forte dependência da amplitude de excitação.

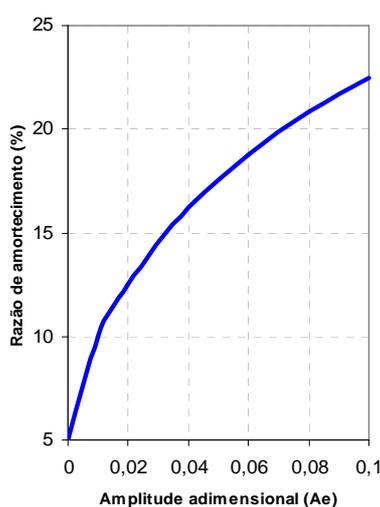


Figura 16 - Variação da razão de amortecimento com a amplitude adimensional de excitação de base, adaptado de [Yu et. al, 1999]

O aumento do amortecimento, introduzido por fenómenos não-lineares como a quebra de onda (*wave breaking*) e o impacto (*slamming*) dá origem a uma mudança no aspecto esperado da função de resposta em frequência.

Assim, os dois picos esperados na função de resposta em frequência associados aos modos do fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado e da estrutura principal, para a ocorrência de fenómenos lineares, são transformados em apenas um pico, quando ocorrem fenómenos altamente não-lineares, como as referidas quebra de onda e impacto. Esta situação tem vindo a ser demonstrada experimentalmente por vários investigadores, salientando-se, entre outros, os trabalhos de Sun e Fujino datados de meados da década de 90 [Sun e Fujino, 1994].

De facto, para amplitudes de excitação mais elevadas o movimento do fluido é caracterizado pelo impacto violento (na denominação anglo-saxónica *slamming*) das massas de fluido contra as paredes laterais de topo do amortecedor de líquido sintonizado.

De acordo com o que pode ser observado na sequência de imagens apresentada na Figura 17 é perceptível que parte do fluido se move como se tratasse de uma massa concentrada batendo violentamente contra as paredes do recipiente.

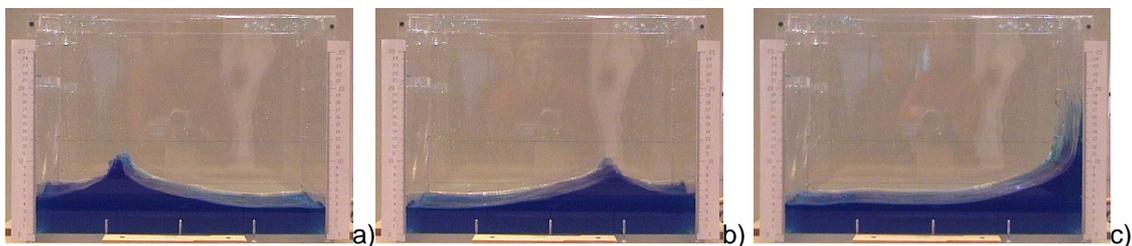


Figura 17 - Impacto no interior de um amortecedor de líquido sintonizado para amplitudes de excitação elevadas

Como já mencionado, nos fenômenos observados, para além do *sloshing* linear, incluem-se fenômenos de quebra de onda e de impacto periódico de uma porção de massa de fluido (massa concentrada convectiva) nas paredes do amortecedor de líquido sintonizado (Figura 17a e Figura 17b).

Considera-se que uma parcela significativa da energia é dissipada no movimento ascendente do fluido ao longo das paredes do amortecedor de líquido sintonizado. O modelo mecânico simplificado que traduz estes fenômenos encontra-se ilustrado de uma forma esquemática na Figura 18.

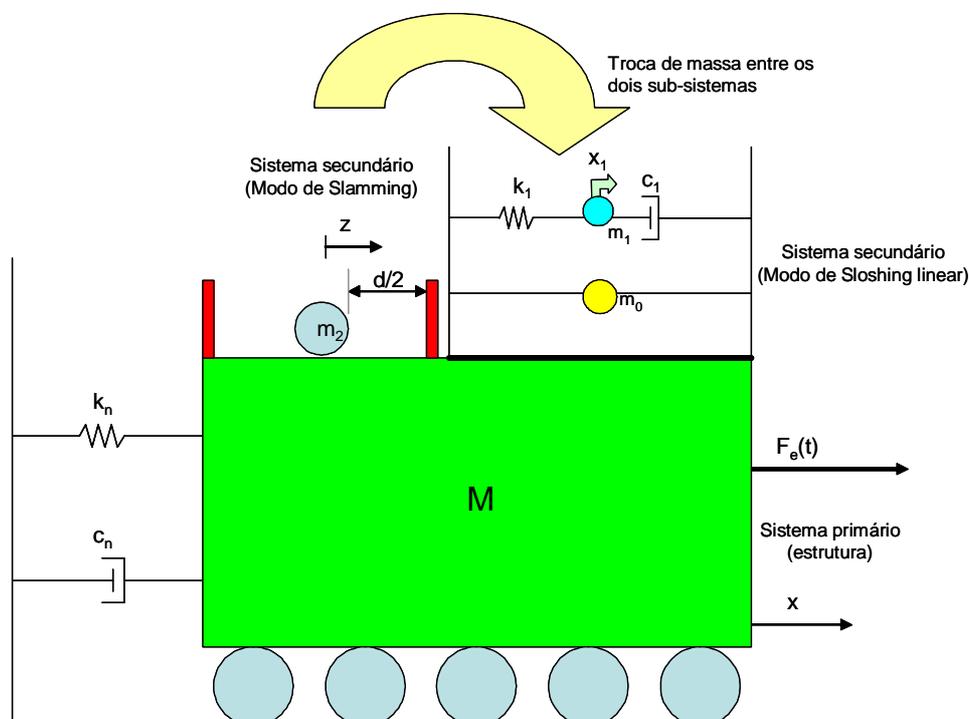


Figura 18 - Esquemática do modelo sloshing-slamming ( $S^2$ ) equivalente, adaptado de [Yalla, 2001]

O princípio fundamental subjacente a este modelo mecânico baseia-se na alternância entre a massa de *sloshing* e a massa concentrada convectiva que está relacionada com o impacto nas paredes do amortecedor de líquido sintonizado. Isto significa que, para amplitudes de excitação mais elevadas uma determinada quantidade da massa  $m_1$  associada ao fenómeno de *sloshing* linear é transformada em massa  $m_2$  também denominada de massa de impacto. Esta alternância entre as massas resulta numa acção combinada, a que foi atribuída a denominação *sloshing-slamming* [Yalla, 2001].

Neste modelo é introduzido também um parâmetro,  $\Omega$ , denominado parâmetro de alternância de massa, que é um indicador da porção de massa,  $m_1$ , actuante no modo linear (*sloshing*). Uma vez que toda a massa é conservada, esta situação implica que o resto da massa do sistema actua no modo de impacto (*slamming*). A título meramente exemplificativo se  $\Omega$  tomar o valor unitário corresponde à situação em que toda a massa  $m_1$  se encontra a actuar no modo linear de *sloshing*.

Após se ter observado alternância ao nível dos fenómenos que ocorrem no interior do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado, as massas actualizadas,  $m_{\sim 1}$  e  $m_{\sim 2}$ , associadas, respectivamente, ao fenómeno de *sloshing* linear e ao fenómeno de impacto (*slamming*) não-linear são determinadas de acordo com o indicado nas equações (148) e (149):

$$m_{\sim 1} = \Omega m_1 \quad (148)$$

$$m_{\sim 2} = m_2 + (1 - \Omega)m_1 \quad (149)$$

Em presença de amplitudes de excitação reduzidas não ocorre praticamente nenhuma troca ao nível das massas, sendo a teoria do *sloshing* linear prevalecente. No entanto, à medida que as amplitudes de excitação vão aumentando a massa de impacto (*slamming*) aumenta concomitantemente. Para além disso, e uma vez que a massa  $m_1$  vai diminuindo, a frequência de *sloshing* aumenta, o que explica o efeito de endurecimento (*hardening*) mencionado [Yalla, 2001].

O parâmetro de alternância de massa, pode ser relacionado de uma forma directa com a denominada frequência de salto (*jump frequency*). As relações empíricas propostas [Yalla e Kareem, 1999] [Yalla 2001] permitiram a obtenção de resultados bastante adequados para a simulação dos fenómenos que ocorrem no

interior de dispositivos de protecção passiva do tipo amortecedores de líquido sintonizado.

A equação do movimento para o sistema proposto (Figura 18) pode ser definida da seguinte forma:

$$M\ddot{X} + (C + c_1)\dot{X} + (K + k_1)X - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 = F_0 \sin(\omega_e t) \quad (150)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 - c_1\dot{X} - k_1X = 0 \quad (151)$$

$$m_2\ddot{z} = 0 \quad (152)$$

em que  $F_0 = MA\omega_e^2$ .

Após cada impacto nas paredes laterais de topo do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado, a velocidade do fluido convectivo é alterada de acordo com a equação (147).

#### 3.8.4. Modelação do impacto

Como referido na secção anterior o fenómeno de *sloshing* que ocorre em amortecedores de líquido sintonizado exhibe um fenómeno de salto (*jump phenomenon*) concomitante com o aumento da amplitude de excitação dinâmica. Este fenómeno é característico da maioria dos sistemas não-lineares, apresentando-se na Figura 19 a esquematização de uma função de transferência típica.

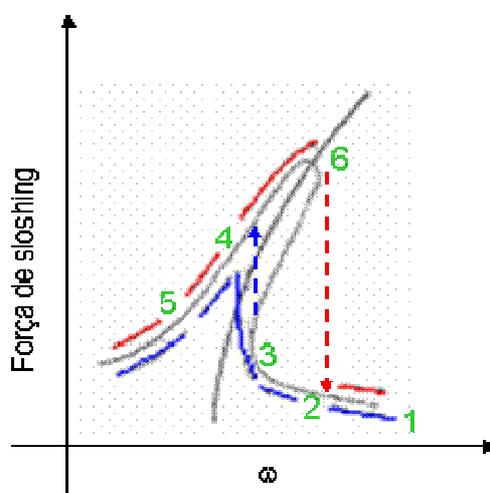


Figura 19 - Fenómeno de salto em sistemas não-lineares, adaptado de [Yalla, 2001]

A ocorrência do fenómeno de salto (*jump phenomenon*) e aumento de rigidez (*hardening effect*) pode ser comprovada com base em trabalhos analítico-experimentais desenvolvidos [Fujino et. al, 1992] [Yalla, 2001].

Para além disso a gama de frequência em que os amortecedores de líquido sintonizado são eficazes aumenta também com o aumento das amplitudes de excitação na base.

A analogia *sloshing-slamming* ( $S^2$ ) proposta por Yalla [Yalla, 2001] não pode ser aplicada de uma forma directa a amortecedores de líquido sintonizado isolados devido à forma como é conceptualizada, uma vez que, para se determinar a velocidade após o impacto na parede do reservatório, é necessário conhecer adequadamente as características dinâmicas do sistema primário em que o próprio dispositivo se encontra incluído.

Como tal, e com o objectivo de estabelecer as bases da formulação de um modelo simplificado que explique os resultados experimentais tanto para as características do amortecedor de líquido sintonizado como para as características do sistema acoplado estrutura primária + amortecedor de líquido sintonizado, é possível usar determinadas características que descrevem os efeitos das não-linearidades impostas pela massa de impacto (*slamming*).

Quando ocorrem impactos repetidos como parte integrante do movimento de vibração de um sistema linear, o movimento torna-se não-linear. Uma vez feito este reconhecimento torna-se possível identificar as funções características de impacto que melhor se adequam a cada caso e que produzam as mesmas não-linearidades [Yalla, 2001].

Numa abordagem muito preliminar [Yalla e Kareem, 1999] o impacto foi modelado como uma colisão entre a massa de impacto (*slamming*) e a parede do dispositivo sendo reproduzido por função descontínua. No entanto, tendo por base trabalhos anteriores na área dos sistemas de vibrações de impacto [Pilipchuk e Ibrahim, 1997], foi possível constatar que o modelo dinâmico em questão correspondia a uma situação limite observada em determinados tipos de sistemas não lineares, nomeadamente os sistemas que apresentam um efeito de endurecimento (*hardening effect*) [Yalla, 2001].

De facto, um modelo muito simples pode ser fenomenologicamente descrito como a interacção da massa de fluido e a parede do recipiente que o contém por meio

de uma função não-linear. Tendo sido reconhecido este facto, torna-se possível procurar por tais funções características de impacto que possam eventualmente traduzir o mesmo efeito que as soluções de equações diferenciais propostas nos modelos matemáticos propostos em secções anteriores. Esta equivalência foi demonstrada tanto para excitações harmónicas como para excitações aleatórias [Masri e Caughey, 1966]. No entanto, neste último caso, será mais difícil efectuar uma distinção clara e objectiva entre a massa de fluido pertencente à massa de impacto não-linear e a massa de fluido associada à massa de *sloshing* linear. Assim, por uma questão de simplificação, o modelo não-linear foi desenvolvido para a totalidade da massa de fluido, independentemente dos fenómenos mais directamente associados.

Considerando o modelo de um oscilador definido pela equação (153):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + m\Phi(x, \dot{x}) = F_0 \sin(\omega_e t) \quad (153)$$

em que a função  $\Phi(x, \dot{x})$  traduz as características de impacto do sistema;  $x$  corresponde ao deslocamento da massa concentrada;  $\dot{x}$  a velocidade da massa concentrada;  $m$ ,  $c$  e  $k$  traduzem os termos de massa, de amortecimento e de rigidez do oscilador;  $F_0$  a amplitude de excitação dada por:

$$F_0 = m\omega_e^2 A_e \quad (154)$$

Assumindo que as características do fenómeno de impacto podem ser obtidas pela combinação de funções não lineares de deslocamento e de velocidade, foi apresentado um modelo que inclui as características não-lineares do impacto [Hunt e Crossley, 1975] definido em concordância com o proposto na equação (155):

$$\Phi(x, \dot{x}) = b_1 x^{p_1} \dot{x} + b_2 x^{p_2} \quad (155)$$

em que  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são os parâmetros do modelo.

No entanto, com o objectivo de garantir uma maior simplicidade do modelo, Yalla [Yalla e Kareem, 1999] [Yalla, 2001] assumiram as características do impacto dependentes apenas do deslocamento do sistema ( $\Phi(x, \dot{x}) \equiv \Phi(x)$ ) e mantiveram o amortecimento com uma dependência não-linear da amplitude de excitação dinâmica. Obteve-se assim uma representação mais simplificada da equação (153):

$$\ddot{x} + 2\omega_f \zeta(A_e) \dot{x} + \Phi(x) = \omega_e^2 A_e \sin(\omega_e t) \quad (156)$$

em que  $\omega_f$  corresponde à frequência do fenómeno de *sloshing* linear que ocorre no interior do fluido e  $\zeta(A)$  é o amortecimento não linear do amortecedor de líquido sintonizado dependente da amplitude da excitação.

Yalla e Kareem [Yalla e Kareem, 1999] [Yalla, 2001] estudaram de uma forma exaustiva o comportamento dos dispositivos amortecedores de líquido sintonizado de águas rasas (*shallow water*), de acordo com o definido na Tabela 1.

Os referidos autores [Yalla e Kareem, 1999] [Yalla, 2001] consideraram várias funções na modelação das características do impacto (senos hiperbólicos, funções de potência e funções de endurecimento do tipo bi-lineares). A força de interacção foi descrita como função do deslocamento da massa associada ao fenómeno de *sloshing* linear:

$$F_{eff}(x) = F_{lin} + F_{n\grave{a}o-linear} \quad (157)$$

$$F_{eff}(x) = k_{eff}(x)x = m\omega_f^2 [1 + \varphi(A_e)x^{2(\eta-1)}]x \quad (158)$$

em que  $\varphi(A)$  e  $\eta$  traduzem os parâmetros da função característica de impacto,  $\Phi(x)$ .

A Figura 20 apresenta uma função tipo usada na modelação das características do impacto [Yalla e Kareem, 1999] [Yalla, 2001]. Esta função em particular permite a obtenção de um valor finito de força de interacção entre o amortecedor de líquido sintonizado e a estrutura em que se encontra incluído) ao nível das fronteiras de parede lateral de topo do recipiente, isto é para  $x=\pm L/2$ .

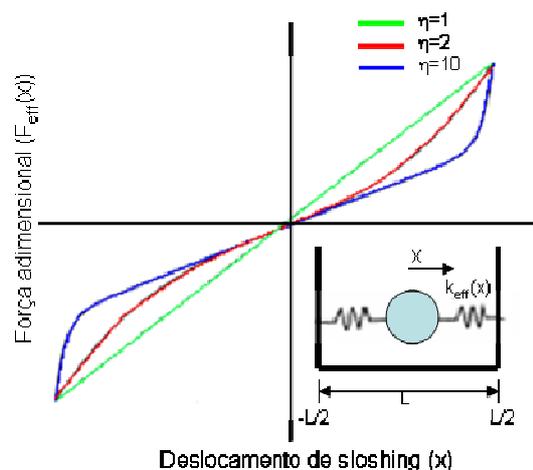


Figura 20 - Curvas de força adimensional para diferentes valores de  $\eta$ , adaptado de [Ayala, 2001]

### 3.8.5. Modelos lineares equivalentes

Geralmente os modelos lineares equivalentes são extremamente úteis para a determinação de uma aproximação inicial da solução periódica em sistemas não-lineares.

Considerando tanto, solicitações harmónicas como solicitações aleatórias, as características não-lineares do impacto observado no interior dos amortecedores de líquido sintonizado podem ser linearizadas de acordo com [Yalla, 2001]:

$$\Phi(x, \dot{x}) = \lambda + vx + \psi\dot{x}^2 \quad (159)$$

A ideia principal é definir, em primeiro lugar, uma função de erro e minimizá-la (erro quadrático) num intervalo tão grande quando possível (no sentido matemático num intervalo a tender para infinito). No caso de um amortecedor de líquido sintonizado sujeito a solicitações harmónicas obtêm-se:

$$\Theta(\lambda, v, \psi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{\Phi(x, \dot{x}) - \lambda - vx - \psi\dot{x}^2\}^2 dt \quad (160)$$

Conhecendo o erro e admitindo que o deslocamento e velocidade apresentam a forma apresentada nas equações (161) e (162), respectivamente:

$$x(t) = a_x \cos(\omega t) \quad (161)$$

$$\dot{x}(t) = -a_x \omega \sin(\omega t) \quad (162)$$

Torna-se possível obter as equações (163) a (165) para cada um dos termos da solução linearizada [Yalla, 2001]:

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(x, \dot{x}) dt \quad (163)$$

$$v = \frac{1}{\sigma_x^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(x, \dot{x}) x(t) dt \quad (164)$$

$$\psi = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(x, \dot{x}) \dot{x}(t) dt \quad (165)$$

com  $\sigma_x = a_x / \sqrt{2}$  e  $\sigma_{\dot{x}} = (a_x \omega) / \sqrt{2}$

No caso de se estar em presença de um amortecedor de líquido sintonizado sujeito a solicitações aleatória (por exemplo ruído branco ou uma excitação sísmica) é possível obter-se a função de erro apresentada na equação (166):

$$\Theta(\lambda, v, \psi) = E\left\{\Phi(x, \dot{x}) - \lambda - vx - \psi\dot{x}\right\}^2 \quad (166)$$

em que  $E(g(x, \dot{x}))$  representa o valor esperado da função da variável aleatória  $g(x, \dot{x})$ .

Usando um procedimento análogo ao apresentado para solicitações harmónicas e reconhecendo que  $E(x\dot{x}) = 0$ ,  $E(x^2) = \sigma_x^2$  e  $E(\dot{x}^2) = \sigma_{\dot{x}}^2$  é possível obterem-se, para excitações aleatórias, as equações (167) a (169) para cada um dos termos,  $\lambda$ ,  $v$  e  $\psi$  da equação (159), respectivamente:

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) w(u) du \quad (167)$$

$$v = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} u \Phi(u) w(u) du \quad (168)$$

$$\psi = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u} \Phi(\dot{u}) w(\dot{u}) d\dot{u} \quad (169)$$

em que se assume que  $x$  e  $\dot{x}$  são processos gaussianos independentes com uma função de distribuição de probabilidade definida por:

$$w(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma_u^2}\right) \quad (170)$$

e uma função não linear possível pode ser representada da seguinte forma:

$$\Phi(x, \dot{x}) = \Phi(x) + \Phi(\dot{x}) \quad (171)$$

Por exemplo, se se considerar à semelhança de outros autores [Yalla e Kareem, 1999] [Yalla, 2001] a não-linearidade por meio de uma função de potência do tipo:

$$\Phi(x) = x^{2\eta-1} \quad (172)$$

então, é possível obterem-se coeficientes equivalentes de linearização para solicitações do tipo harmónico (equações (173) a (175)) bem como para solicitações aleatórias (equações (176) a (178)):

$$\lambda = \left(\frac{\eta}{2} - 1\right) a_x^{2\eta-1} \quad (173)$$

$$v = \left(\frac{\eta}{2}\right) a_x^{2\eta-1} \quad (174)$$

$$\psi = 0 \quad (175)$$

$$\lambda = 0 \quad (176)$$

$$v = \sigma_x^{2\eta} \prod_{k=1}^{\eta} (2\eta - (2k - 1)) \quad (177)$$

$$\psi = 0 \quad (178)$$

Em jeito de resumo refere-se que a analogia *sloshing-slamming* ( $S^2$ ) apresentada ao longo de toda a presente secção reproduz de uma forma bastante adequada os fenómenos subjacentes ao comportamento dinâmico dos dispositivos amortecedores de líquido sintonizado tanto em situações de baixa amplitude de excitação como em situações de amplitudes de excitação elevadas.

Em circunstâncias em que se verifiquem amplitudes de excitação reduzidas este modelo  $S^2$  traduz o funcionamento de um amortecedor de *sloshing* linear convencional. Pelo contrário se se observarem amplitudes de excitação mais elevadas o modelo contabiliza o embate periódico da massa concentrada de impacto (*slamming*) nas paredes do recipiente, caracterizando tanto o fenómeno de endurecimento (*hardening*) como o aumento observado ao nível do amortecimento [Yalla, 2001].

Assim, compreendendo os fenómenos de *sloshing* e impacto (*slamming*) é possível introduzir as características explicitamente associadas a cada um deles nas equações do movimento com o objectivo de se obter um modelo mecânico consideravelmente mais simplificado.

As não-linearidades necessárias para definir o sistema são, pois, introduzidas por meio das características de impacto obtidas da analogia  $S^2$ . Os modelos mecânicos assim obtidos são de grande utilidade para o dimensionamento, análise e implementação de sistemas do tipo amortecedores de líquido sintonizado em estruturas novas ou pré-existentes [Falcão Silva, 2010].

## 4. Modelo de interacção entre amortecedores de líquido sintonizado e sistemas estruturais com um grau de liberdade (SDOF)

O modelo de interacção mais simples e mais correntemente utilizado consiste numa estrutura de 1 grau de liberdade (SDOF) com um amortecedor de líquido sintonizado acoplado.

Este modelo serviu de base à maioria dos cálculos simplificados usados na ferramenta de cálculo desenvolvida no âmbito de uma tese de doutoramento [Falcão Silva, 2010].

Para melhor compreender e contextualizar este problema, convém recordar alguns conceitos teóricos importantes e que passam a ser apresentados, de forma resumida, nas secções seguintes.

### 4.1. Características de sistemas com um grau de liberdade (SDOF)

A resposta de um sistema com um grau de liberdade (SDOF), quando sujeito a uma determinada acção, depende da lei de comportamento que o rege, isto é, das características de rigidez, que podem ser definidas pela relação entre uma determinada força,  $F$ , e um determinado deslocamento,  $x$ .

A lei de comportamento, como se pode verificar na Figura 21, é variável, se se estiver em presença de um sistema que apresente um comportamento linear (1) ou de um sistema que apresente um comportamento fundamentalmente não-linear (2).

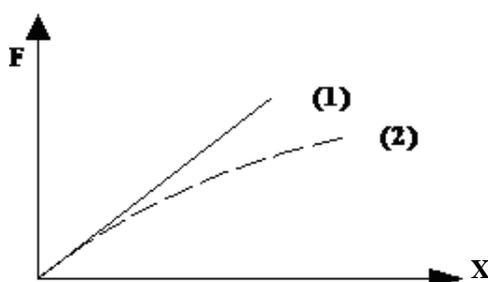


Figura 21- Resposta de um sistema de um grau de liberdade apresentando comportamento linear (1) e comportamento não-linear (2), adaptado de [Novo, 2008]

No primeiro caso a relação entre força e deslocamento depende linearmente da rigidez do sistema sendo descrita por uma equação do tipo:

$$F = kx \quad (179)$$

Para o segundo caso a dependência entre força e deslocamento surge como não linear, sendo esta dependência expressa de acordo com a equação (180):

$$dF = k(x)dx \quad (180)$$

No domínio elástico, um sistema estrutural consegue armazenar toda a energia que lhe é imposta na forma de energia potencial elástica. Quando se pretende proteger estas estruturas elásticas podem ser-lhes associados mecanismos de amortecimento que lhes permitam dissipar uma parte da energia introduzida por uma dada acção exterior (vento, sismo).

A caracterização do amortecimento associado a um sistema estrutural deste tipo, pode ser efectuada com recurso a um amortecedor com comportamento linear viscoso [Delgado e Arêde, 2000].

#### **4.2. Formulação das equações do movimento de SDOF excitados por movimento da base (acção sísmica)**

A formulação da equação de movimento dinâmico de um sistema linear excitado por um movimento de base genérico pode ser obtida através da aplicação da segunda Lei de Newton, do princípio de Hamilton, impondo o equilíbrio dinâmico através do princípio d'Alembert, ou pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais.

Qualquer uma das metodologias referidas pode ser utilizada na formulação das equações diferenciais de movimento dinâmico de sistemas mecânicos simples, ou seja, constituídos por corpos rígidos interligados entre si por meio de conexões do tipo mecânico, molas e amortecedores.

Na determinação da equação de movimento dinâmico de um sistema estrutural, idealiza-se esse mesmo sistema como sendo definido por uma estrutura equivalente de um grau de liberdade, considerando um sistema massa–mola–amortecedor (Figura 22).

Admite-se que este sistema simplificado apresenta todas as propriedades associadas a qualquer sistema dinâmico com massa ( $m$ ), amortecimento linear viscoso ( $c$ ), rigidez elástica linear ( $k$ ) e se encontra sujeito a uma fonte de excitação exterior  $\ddot{x}_g(t)$ .

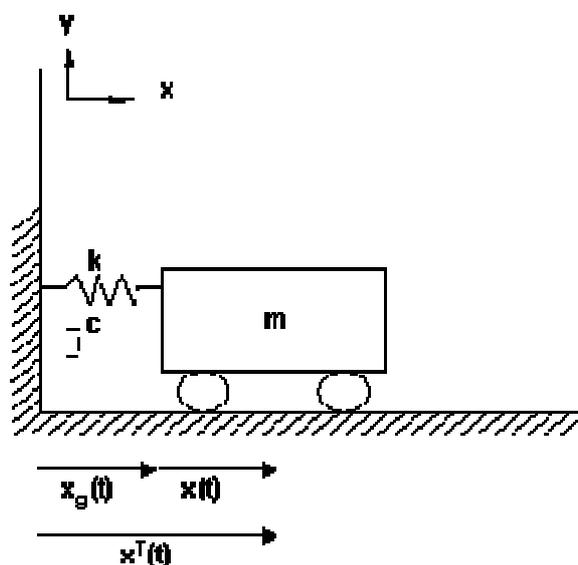


Figura 22- Sistema estrutural equivalente de um grau de liberdade (SDOF)

Considerando que o sistema se encontra numa situação de equilíbrio dinâmico, então a equação geral do movimento em coordenadas absolutas, para uma solicitação imposta à base (acção sísmica) é dada por:

$$m\ddot{x}^T(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (181)$$

em que  $\ddot{x}^T(t)$  corresponde à aceleração absoluta dada pela soma da aceleração do solo,  $\ddot{x}_g(t)$ , com a aceleração relativa do sistema,  $\ddot{x}(t)$ . A equação anterior traduz uma equação diferencial linear de 2ª ordem, com coeficientes constantes correspondente à Equação Fundamental da Dinâmica dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_g(t) \quad (182)$$

em que o deslocamento no instante inicial,  $x(0)$ , e a velocidade no instante inicial,  $\dot{x}(0)$ , devem ser especificadas por forma a permitir a completa definição do problema. Tipicamente, as estruturas encontram-se imobilizadas antes de ter início uma determinada acção dinâmica imposta à base, razão pela qual o deslocamento e velocidade correspondentes são necessariamente nulos.

As acções que actuam sobre o sistema equivalente (Figura 23), ao longo do tempo, são equivalentes a: (i) força externa  $f_{ext}(t) = m\ddot{x}_g(t)$ ; (ii) força elástica,  $f_e(t)$ , associada à componente de rigidez,  $k$ , do sistema estrutural; (iii) força de inércia  $f_i(t)$ , associada à massa,  $m$ , do sistema estrutural e, finalmente, (iv) a força de amortecimento  $f_a(t)$ , associada ao amortecedor,  $c$ , do sistema estrutural.

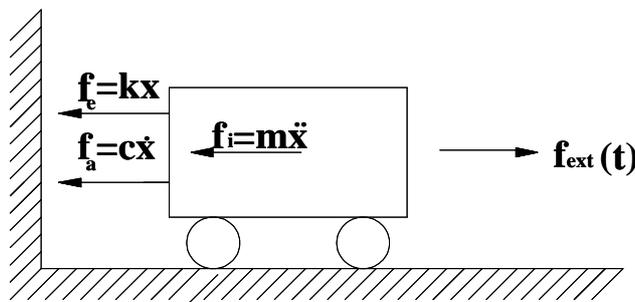


Figura 23- Equilíbrio de forças para um sistema estrutural equivalente com um grau de liberdade (SDOF) sujeito a acções dinâmicas na base

Admitindo que o sistema estrutural equivalente de um grau de liberdade se encontra em equilíbrio, obtém-se a seguinte equação:

$$-f_a(t) - f_e(t) - f_i(t) + f_{ext}(t) = 0 \quad (183)$$

Esta formulação vai permitir a integração directa da componente dependente da força hidrodinâmica, também denominada de força induzida.

A resolução da equação (181) pode ser efectuada com recurso a: i) solução clássica; ii) integral de Duhamel; iii) métodos transformados ou iv) métodos numéricos. No caso da tese de doutoramento [Falcão Silva, 2010] desenvolvida no âmbito do PIP Protecção Sísmica de Estruturas: Reabilitação, reforço e sistemas inteligentes (Proc. 0305/11/17713), optou-se por se proceder à resolução da equação fundamental da dinâmica por intermédio do integral de Duhamel, cuja formulação se expõe em seguida. No entanto, e uma vez que qualquer uma das outras abordagens é pertinente, far-se-á, no ANEXO a descrição de cada uma delas, de uma forma resumida, com vista a futuras aplicações.

### 4.3. Integral de Duhamel

Uma excelente forma de aproximar a solução de equações diferenciais lineares de 2ª ordem, como a equação do movimento de sistemas SDOF, baseia-se na

representação das forças aplicadas como uma sequência de pequenos impulsos infinitesimais. A resposta de um sistema dinâmico linear a cada um desses pequenos impulsos é dada por:

$$dx(t) = [p(\tau)d\tau]h(t - \tau) \quad t > \tau \quad (184)$$

A resposta do sistema a uma força aplicada no instante  $t$ ,  $p(t)$ , é obtida por adição das respostas de todos os pequenos impulsos até ao referido instante  $t$  e denominada integral de convolução (185). Trata-se de um resultado generalista e aplicável a qualquer sistema dinâmico linear.

$$x(t) = \int_0^t p(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (185)$$

Em sistemas dinâmicos não amortecidos, o resultado da equação anterior pode ser desenvolvido da seguinte forma:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau)\sin[\omega_n(t - \tau)]d\tau \quad (186)$$

A acção aplicada, pode ser definida de uma forma aproximada por:

$$p(t) = p_{0r} + p_0 \frac{t}{t_r} \quad (187)$$

o que conduz à simplificação da equação (186):

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \frac{p_0}{t_r} \tau \sin[\omega_n(t - \tau)]d\tau \quad (188)$$

A avaliação numérica da resposta dinâmica de um sistema linear pode ser efectuada por meio de diversos métodos: i) métodos temporais (*time stepping methods*); ii) métodos baseados na interpolação da excitação e iii) método das diferenças centrais ou método de Newmark. Para implementação nas rotinas desenvolvidas no âmbito da tese de doutoramento já referida [Falcão Silva, 2010], foram usados métodos baseados na interpolação da excitação. A descrição sumária dos restantes métodos é parte integrante do ANEXO.

Os métodos baseados na interpolação da excitação correspondem a procedimentos numéricos altamente eficazes, desenvolvidos para sistemas lineares, tendo por base a interpolação da solicitação em cada intervalo de tempo e a consequente obtenção da solução exacta por meio do integral de Duhamel.

Assim, se os intervalos de tempo forem curtos, a interpolação traduz resultados muito satisfatórios. Para um intervalo de tempo,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ , em que a função da excitação é dada:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (189)$$

em que:

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i \quad (190)$$

e a variável  $\tau$  varia de 0 a  $\Delta t_i$ . O termo colocado do lado direito da equação do movimento (182) pode então ser substituído pela equação definida em (189). A resposta,  $x(\tau)$ , definida num intervalo  $0 \leq \tau \leq \Delta t_i$  corresponde à soma de três parcelas independentes: i) vibração livre devido ao deslocamento,  $x(0)$ , e velocidade iniciais,  $\dot{x}(0)$ , no instante  $\tau=0$ ; ii) força  $p_i$  com condições iniciais nulas e iii) variação do termo forçante,  $(\Delta p_i / \Delta t_i) \tau$ , também com condições iniciais nulas. Combinando as soluções disponíveis na literatura, obtêm-se [Chopra, 1995]:

$$x_{i+1} = Ax_i + B\dot{x}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (191)$$

$$\dot{x}_{i+1} = A'x_i + B'\dot{x}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (192)$$

com os coeficientes A, B, C, D, A', B', C' e D', dependentes dos parâmetros  $\omega_n$ , k e  $\zeta$  do sistema estrutural principal definidos pelas expressões (193) a (200).

$$A = e^{-\zeta\omega_n\Delta t} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D\Delta t + \cos \omega_D\Delta t \right) \quad (193)$$

$$B = e^{-\zeta\omega_n\Delta t} \left( \frac{1}{\omega_D} \sin \omega_D\Delta t + \cos \omega_D\Delta t \right) \quad (194)$$

$$C = \frac{1}{k} \left\{ \frac{2\zeta}{\omega_n\Delta t} + e^{-\zeta\omega_n\Delta t} \left[ \left( \frac{1-2\zeta^2}{\omega_D\Delta t} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_D\Delta t - \left( 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n\Delta t} \right) \cos \omega_D\Delta t \right] \right\} \quad (195)$$

$$D = \frac{1}{k} \left\{ \left[ 1 - \frac{2\zeta}{\omega_n\Delta t} + e^{-\zeta\omega_n\Delta t} \left( \frac{2\zeta^2-1}{\omega_D\Delta t} \sin \omega_D\Delta t \right) + \frac{2\zeta}{\omega_n\Delta t} \cos \omega_D\Delta t \right] \right\} \quad (196)$$

$$A' = e^{-\zeta\omega_n\Delta t} \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D\Delta t \right) \quad (197)$$

$$B' = e^{-\zeta\omega_n\Delta t} \left( \cos \omega_D\Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D\Delta t \right) \quad (198)$$

$$C' = \frac{1}{k} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} + e^{-\zeta\omega_n\Delta t} \left[ \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t} \cos \omega_D\Delta t \right] \right\} \quad (199)$$

$$D' = \frac{1}{k\Delta t} \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n\Delta t} \left[ \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D\Delta t + \cos \omega_D\Delta t \right] \right\} \quad (200)$$

Dado que as fórmulas definidas pelas equações (191) e (192) derivam da solução exacta da equação do movimento, a única restrição ao nível do tamanho do intervalo de tempo é que este permita uma boa aproximação à função de excitação e que forneça resultados em intervalos próximos e igualmente espaçados, de forma a que não se percam valores de pico da resposta.

Este procedimento numérico é especialmente útil, quando a excitação é definida em intervalos de tempo pequenos – como é o caso da aceleração sísmica – traduzindo uma interpolação linear perfeita. Se o intervalo de tempo em que é definida a excitação for constante, os coeficientes definidos pelas equações (193) a (200) necessitam de ser calculados somente uma vez.

O integral de Duhamel fornece um resultado globalmente bom para avaliar a resposta de um sistema de um grau de liberdade (SDOF) linear a qualquer força arbitrária. Convém não esquecer que se trata de um método exclusivo para implementação em sistemas lineares, visto que se baseia na sobreposição modal.

Com efeito trata-se de um método não aplicável a estruturas que se deformem para além do seu limite elástico linear. No entanto, dado que se pretende que a implementação de amortecedores de líquido sintonizado melhore o comportamento das estruturas em que se encontram incluídos, em termos de deslocamentos e acelerações, supõe-se que essa melhoria traduzirá um funcionamento da estrutura principal sempre em regime linear.

Esta formulação é extensível a sistemas de vários graus de liberdade (MDOF) desde que a sua resposta em regime linear seja obtida por sobreposição modal das respostas.

Deste modo, mais adiante no presente capítulo, quando da definição da resposta em sistemas MDOF, será apenas apresentada a teoria subjacente à sobreposição modal, uma vez que método de resolução com recurso ao integral de Duhamel já foi descrito na presente secção.

#### 4.4. Força hidrodinâmica no equilíbrio do sistema de um grau de liberdade (SDOF)

A força hidrodinâmica resultante no interior do amortecedor de líquido sintonizado é conceptualizada no sistema equivalente de um grau de liberdade (SDOF) que representa a estrutura como se tratasse de uma ligação rígida a este sistema.

Nesta situação, verifica-se a compatibilidade de deslocamentos entre o sistema estrutural (SDOF) e a base do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado. O efeito do movimento dinâmico do fluido no interior do referido dispositivo é representado por uma força induzida,  $f_{ind}(t)$ , actuando directamente sobre o sistema estrutural.

O esquema de interacção simplificado entre o dispositivo amortecedor de líquido sintonizado e o sistema estrutural principal equivalente, simulado por um conjunto massa-mola-amortecedor sujeito a um determinado movimento dinâmico de base (acção sísmica), encontra-se representado na Figura 24:

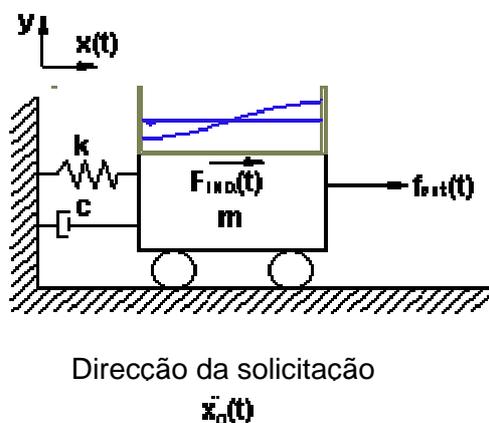


Figura 24- Interação de um amortecedor de líquido sintonizado com o sistema estrutural equivalente com um grau de liberdade (SDOF)

Considerando uma abordagem matemática, o dispositivo amortecedor de líquido sintonizado com o fluido em movimento deverá ser representado pela força equivalente exercida por ele sobre a estrutura,  $F_{ind}(t)$ , como se tratando de uma força externa aplicada ao sistema. A equação fundamental da dinâmica (183) pode ser reescrita de acordo com:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_{IND}(t) - m\ddot{x}_g(t) \quad (201)$$

A força induzida,  $F_{ind}(t)$ , resulta do movimento oscilatório do fluido, provocado pela excitação dinâmica que chega à base do dispositivo e, como já previamente referido, é calculada por intermédio da equação (73), estando dependente da elevação da superfície livre do fluido ( $\eta$ ), que, por sua vez, surge como dependente de duas variáveis: i) espaço ( $x$ ) e ii) tempo ( $t$ ).

Simplificando a equação (201), obtêm-se:

$$\ddot{x}(t) + 2\omega\zeta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_{IND}(t)}{m} - \ddot{x}_g(t) \quad (202)$$

em que  $x(t)$  corresponde ao deslocamento da estrutura,  $\omega$  à frequência angular não amortecida da estrutura dada pela expressão (203),  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento dado pela expressão (204),  $m$  é a massa da estrutura,  $k$  a rigidez da estrutura e  $c$  o amortecimento da estrutura.

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (203)$$

$$\zeta = c/(2m\omega) \quad (204)$$

Tendo como objectivo a resolução da equação do movimento atrás descrita para sistemas SDOF, é possível desenvolverem-se rotinas específicas para posterior ligação e extensão a rotinas baseadas em modelos matemáticos que permitam estimar por via numérica o comportamento/desempenho de amortecedores de líquido sintonizado quando incluídos nos referidos sistemas.

A abordagem deste tema encontra-se patente numa tese de doutoramento [Falcão Silva, 2010] sendo ainda objecto de futuros desenvolvimentos e publicações de cariz técnico-científico.

## **5. Modelo de interacção entre amortecedores de líquido sintonizado e sistemas estruturais com vários graus de liberdade (MDOF)**

Na literatura [Chopra, 1995] as equações do movimento são desenvolvidas, numa primeira fase, para sistemas lineares simples e, posteriormente, o seu âmbito de aplicação estendido de uma forma geral a sistemas de vários graus de liberdade sujeitos a forças externas ou à acção sísmica.

A formulação geral é aplicada no desenvolvimento de equações de movimento para estruturas de vários pisos (vários modos), simétricas e assimétricas em planta, sujeitas a acções invariáveis no espaço.

A análise da resposta sísmica é extensível a sistemas de vários graus de liberdade que se encontrem sujeitos a movimentos do solo variáveis no espaço, bem como a sistemas inelásticos.

### **5.1. Características de sistemas com vários graus de liberdade (MDOF)**

No caso de sistemas em que são identificados vários graus de liberdade, as equações do movimento podem ser extensíveis, a partir da formulação apresentada para sistemas de um grau de liberdade (SDOF).

A massa, muito embora distribuída de forma uniforme em toda a estrutura, é idealizada como concentrada ao nível dos vários níveis ou pisos. Esta hipótese é, sem dúvida, adequada em edifícios com vários pisos, dado que a maioria da massa dos edifícios se encontra efectivamente localizada ao nível dos pisos.

O número de graus de liberdade traduz o número de deslocamentos independentes necessários à correcta definição da posição de todas as massas relativamente à sua posição de equilíbrio original.

Tal como em sistemas de um grau de liberdade, assume-se que um mecanismo de amortecimento linear viscoso traduz o termo de dissipação de energia na estrutura [Chopra, 1995].

## 5.2. Formulação das equações do movimento

Uma estrutura reticulada pode ser idealizada como um conjunto de elementos – vigas, colunas, paredes – interligados por meio de pontos nodais. Os deslocamentos nos nós ou deslocamentos nodais correspondem aos graus de liberdade do sistema estrutural. Geralmente, um nó em estruturas bidimensionais planas apresenta três graus de liberdade correspondentes a duas translações perpendiculares entre si (segundo os sistemas de eixos  $x$  e  $y$ ) e a uma rotação ( $z$ ).

Quando se trata de estruturas tridimensionais, surgem em cada nó seis graus de liberdade correspondentes a três translações perpendiculares entre si, segundo cada um dos eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e a três rotações em torno dos mesmos eixos coordenados.

Assume-se que a deformação axial das vigas pode ser negligenciada nas análises efectuadas à maioria dos edifícios e, ainda, que a deformação axial dos pilares não necessita de ser considerada em edifícios de pequeno porte.

Em primeiro lugar, definem-se três tipos de forças num sistema de vários graus de liberdade: i) forças de inércia; ii) forças elásticas e iii) forças de amortecimento. Em regime linear, o referido sistema pode ser conceptualizado como uma combinação dessas três componentes puras: i) com massa sem qualquer amortecimento ou rigidez; ii) com rigidez sem qualquer componente de amortecimento ou massa e iii) com amortecimento sem rigidez ou massa.

Assim, as forças na componente de massa ou forças de inércia,  $f_i$ , encontram-se associadas a acelerações, as forças na componente de rigidez,  $f_s$ , referem-se a deslocamentos e as forças na componente de amortecimento,  $f_D$ , estão relacionadas com velocidades. É possível concluir que as forças externas aplicadas à estrutura ou resultantes da imposição de solicitações de carácter dinâmico na base devem igualar o somatório das componentes de massa, rigidez e amortecimento atrás definidas.

A componente de rigidez das forças relaciona-se, como já mencionado, com o deslocamento observado na estrutura. Em sistemas lineares, esta relação pode ser obtida pelo método da sobreposição e pelo conceito da influência do coeficiente de rigidez.

Por aplicação de um deslocamento unitário, segundo qualquer um dos graus de liberdade, mantendo os restantes nulos, surge uma força de resposta na estrutura.

Esta força  $f_{si}$  no grau de liberdade  $i$ , associada a cada deslocamento  $u_j$ , para  $j=1 \dots N$ , é obtida por sobreposição da equação que, a seguir, se indica e que existe para cada  $i=1 \dots N$ :

$$f_{si} = k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + \dots + k_{ij}x_j + \dots + k_{iN}x_N \quad (205)$$

O conjunto de  $N$  equações obtidas a partir do desenvolvimento da equação (205) pode ser escrito na forma matricial para sistemas de vários graus de liberdade (MDOF):

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{SN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{22} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nj} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \quad (206)$$

ou de uma forma simplificada:

$$f_s = Kx \quad (207)$$

em que  $K$  corresponde à matriz de rigidez da estrutura, determinada por métodos disponíveis na literatura [Chopra, 1995].

O mecanismo pelo qual a energia de vibração de uma estrutura é dissipada pode ser idealizado por meio do amortecimento viscoso equivalente. A componente de amortecimento das forças relaciona-se, como já mencionado, com a velocidade registada na estrutura.

Por aplicação de uma velocidade unitária segundo qualquer um dos graus de liberdade, mantendo nulas as velocidades associadas a todos os restantes graus de liberdade, surge uma força de resposta na estrutura. Esta força  $f_{Di}$  no grau de liberdade  $i$  associada a cada velocidade  $\dot{x}_j$ , para  $j=1 \dots N$ , é obtida por sobreposição da equação que a seguir se indica e que existe para cada  $i=1 \dots N$ :

$$f_{Di} = c_{i1}\dot{x}_1 + c_{i2}\dot{x}_2 + \dots + c_{ij}\dot{x}_j + \dots + c_{iN}\dot{x}_N \quad (208)$$

O conjunto de  $N$  equações obtidas a partir de (208) pode ser definido sob a forma matricial para sistemas de vários graus de liberdade (MDOF):

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{22} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (209)$$

ou:

$$f_D = C\dot{x} \quad (210)$$

em que C traduz a matriz de amortecimento da estrutura.

A componente de inércia das forças relaciona-se com a aceleração no sistema estrutural. Admitindo uma aceleração unitária segundo qualquer um dos graus de liberdade, mantendo nulas as acelerações associadas aos restantes graus de liberdade, aparece necessariamente uma força de resposta ao nível da estrutura.

Cada força  $f_{ij}$  no grau de liberdade  $i$  associada a cada aceleração  $\ddot{u}_i$ , para  $j=1 \dots N$  obtêm-se por sobreposição da equação:

$$f_{ii} = m_{i1}\ddot{x}_1 + m_{i2}\ddot{x}_2 + \dots + m_{ij}\ddot{x}_j + \dots + m_{iN}\ddot{x}_N \quad (211)$$

O conjunto de N equações obtidas a partir de (211) pode ser definido matricialmente em sistemas de vários graus de liberdade (MDOF):

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{22} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{Nj} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \quad (212)$$

ou:

$$f_I = M\ddot{x} \quad (213)$$

em que M corresponde à matriz de massa da estrutura que, tal como a matriz de rigidez,  $k$ , surge como simétrica.

Como já referido, a massa é distribuída ao longo de uma estrutura, mas pode ser idealizada como concentrada nos nós em que a estrutura se encontra discretizada.

A massa concentrada em cada nó pode ser determinada a partir da porção de peso da estrutura, que pode ser razoavelmente associada ao nó e corresponde à soma das contribuições de massa de todos os elementos estruturais que convergem

no nó. Uma vez calculados os valores das massas concentradas,  $m_{ij}$ , a matriz de massa da estrutura pode ser facilmente obtida.

A representação de massa para estruturas de vários pisos pode ser simplificada, tendo em conta os efeitos de restrição das lajes e diafragmas de pisos. Cada diafragma é assumido como perfeitamente rígido no próprio plano mas flexível na direcção perpendicular ao seu plano, o que corresponde, de facto, a uma representação real de alguns tipos de sistemas estruturais de piso.

O facto de se considerarem diafragmas rígidos implica que os deslocamentos de translação de todos os nós a cada nível podem ser relacionados com os três graus de liberdade do diafragma de piso no seu plano.

A idealização da massa para edifícios de vários pisos torna-se complicada se, por qualquer razão, o diafragma de piso não puder ser assumido como rígido no seu próprio plano. A flexibilidade do diafragma deve ser reconhecida na formulação das propriedades de rigidez da estrutura, pelo que o método dos elementos finitos pode em determinadas circunstâncias ser uma forma eficaz de idealizar a referida flexibilidade.

Face ao exposto nas equações (205) a (213), torna-se possível escrever a equação do movimento para sistemas de vários graus de liberdade (MDOF):

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = p_{ef}(t) \quad (214)$$

em que  $M$ ,  $C$  e  $K$  correspondem às matrizes atrás mencionadas e  $p_{ef}(t)$  toma o valor:

$$p_{ef}(t) = -M \cdot \iota \cdot \ddot{x}_g(t) \quad (215)$$

com  $\iota$  e  $\ddot{x}_g(t)$  correspondentes ao vector de incidências e à aceleração na base ao longo do tempo, respectivamente. O vector de incidências é um vector que transforma os movimentos  $x_g(t)$  de base rígida em movimentos ao nível dos graus de liberdade da estrutura.

O produto matricial  $-M\iota$  traduz a parcela da inércia total da estrutura que é mobilizada pela aceleração ao nível da base,  $\ddot{x}_g(t)$ . O campo de deslocamentos a que o sistema estrutural fica sujeito como resultado de um movimento unitário de base define os valores do vector de incidências  $\iota$ .

A equação (214) corresponde a um sistema de N equações diferenciais ordinárias que regem o deslocamento,  $x(t)$ , que surge na estrutura MDOF, em virtude da aplicação de solicitações externas ao nível da base, como por exemplo acções sísmicas. A referida equação traduz a equivalência, para sistemas MDOF, da equação (182) apresentada na secção correspondente para sistemas SDOF, em que cada termo escalar da equação (182) é transformado num vector ou numa matriz de ordem N correspondente ao número de graus de liberdade do sistema MDOF [Chopra, 1995].

No ANEXO apresentam-se as equações do movimento para diversos sistemas MDOF sujeitos a excitações sísmicas, em que se incluem i) sistemas planos sujeitos a movimentos de translação e rotação do solo e ii) edifícios simétricos em planta sujeitos a excitações de translação e de torção.

### 5.3. Frequências naturais e modos de vibração

O problema subjacente à identificação das frequências naturais de vibração de um sistema particular é passível de resolução, tendo por base uma análise do movimento em regime livre e não amortecido.

De facto, tendo em conta estas suposições, a referida vibração pode ser descrita sob uma forma matemática, tendo em conta uma separação de variáveis no tempo e no espaço:

$$x(t) = q_n(t)\phi_n \quad (216)$$

em que  $\phi_n$  traduz a configuração deformada da estrutura invariável no tempo. A variabilidade dos deslocamentos no tempo é descrita por uma função harmónica simples, cuja fórmula geral é dada pela equação (217).

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (217)$$

em que  $A_n$  e  $B_n$  correspondem a constantes de integração determinadas, tendo por base as condições iniciais que promovem o início do movimento. Da combinação das equações definidas por (216) e (217), obtém-se a fórmula geral que permite a definição da resposta do sistema estrutural para cada grau de liberdade considerado:

$$x(t) = [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t]\phi_n \quad (218)$$

em que  $\omega_n$  e  $\phi_n$  são variáveis cujo valor é desconhecido à priori. Por substituição de  $x(t)$  na forma apresentada em (218), na equação geral para um regime livre não amortecido (219) e conseqüente simplificação obtém-se a equação matricial de valores ( $\omega_n$ ) e vectores próprios ( $\phi_n$ ), dada por (220).

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (219)$$

$$[-\omega_n^2 m \phi_n + k \phi_n] q_n(t) = 0 \quad (220)$$

Para que o sistema de equações definido pela equação (220) apresente uma solução não trivial, é necessário que:

$$\|k - \omega_n^2 m\| = 0 \quad (221)$$

O polinómio de ordem N em  $\omega_n^2 = \lambda_n$  resultante do desenvolvimento do determinante definido em (221) denomina-se equação característica ou equação de frequência. As N soluções  $\lambda_n$  traduzem aos valores próprios e correspondentes frequências angulares,  $\omega_n^2$ , ou frequências próprias do sistema estrutural.

Desta forma, a determinação de frequência de modos de vibração origina um problema tradicional de cálculo de valores e vectores próprios, em que, como já mencionado, os valores próprios representam as frequências e os vectores próprios os modos de vibração.

Os vectores que correspondem aos modos de vibração apresentam um conjunto de propriedades designadas por condições de ortogonalidade relativamente à matriz de massa (222) e relativamente à matriz de rigidez (223):

$$\phi_n^T M \phi_r = 0 \quad (222)$$

$$\phi_n^T K \phi_r = 0 \quad (223)$$

para n e r diferentes. Quando n e r são iguais, as expressões (222) e (223) tomam valores não nulos. As propriedades de ortogonalidade apresentadas permitem desacoplar o sistema inicial de N graus de liberdade em N sistemas desacoplados com um grau de liberdade.

A ortogonalidade dos modos naturais implica a existência de matrizes diagonais, cujos elementos da diagonal principal verificam:

$$M_n = \phi_n^T M \phi_n \quad (224)$$

$$K_n = \phi_n^T K \phi_n \quad (225)$$

em que  $M_n$  e  $K_n$  se relacionam da seguinte forma:

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (226)$$

Os modos de vibração representam apenas a deformada do sistema estrutural, quando este vibra com uma determinada frequência. Como tal, e por existirem inúmeras representações possíveis do mesmo modo de vibração, o valor absoluto das componentes que constituem o vector modo de vibração não apresenta qualquer significância, sendo importante apenas a relação definida entre eles.

Face ao exposto, é usual proceder-se à representação dos modos de vibração com recurso a uma determinada norma que facilite a interpretação e a comparação entre os modos. Se todas as componentes,  $\phi_{jn}$ , do modo de vibração em causa forem divididas pela respectiva massa generalizada,  $M_n$ , o modo diz-se normalizado em relação à matriz de massa do sistema estrutural. Esta normalização consiste em considerar os modos de vibração definidos de maneira a que se verifique a relação explicitada:

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (227)$$

Quando os modos são normalizados em relação à massa, então a equação (225) passa a tomar a forma:

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad (228)$$

O sistema de equações de equilíbrio dinâmico, que corresponde à equação (214), traduz um conjunto de equações que apresentam um grau de dependência entre si, uma vez que, de uma forma geral, a matriz de rigidez  $K$  apresenta termos fora da diagonal principal e nada obriga a que a matriz de massa,  $M$ , seja uma matriz diagonal [Guerreiro, 1999].

No entanto, e tendo por base uma mudança de referencial, é possível representar o mesmo sistema de equações diferenciais de maneira a que estas sejam

independentes entre si. Assim, o conjunto de vectores modais ortogonais surge como a base de um espaço vectorial de denominador N, em que todos os vectores possíveis de deslocamento,  $u$ , dos graus de liberdade do sistema estrutural podem ser expressos por meio de combinações lineares dos vectores da base referida [Campos Costa, 2005]:

$$x = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r = \Phi q \quad (229)$$

sendo  $q_r$  as coordenadas modais do sistema estrutural. A transformação das coordenadas generalizadas  $u$  relativas a cada um dos N graus de liberdade do sistema para as referidas coordenadas modais é definida por:

$$q_n = \frac{\phi_n^T M u}{\phi_n^T M \phi_n} = \frac{\phi_n^T M u}{M_n} \quad (230)$$

#### 5.4. Resposta dinâmica de sistemas lineares MDOF com base em sobreposição modal

Tendo em conta a transformação de coordenadas definida na secção anterior, a equação geral do movimento em sistemas lineares MDOF pode ser reescrita em termos de coordenadas modais. Como tal, as equações modais assim obtidas serão perfeitamente desacopladas, se o sistema estrutural apresentar amortecimento clássico. Para estes sistemas [Chopra, 1995] a equação geral do movimento definida (214) reduz-se à seguinte forma:

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = P_n(t) \quad (231)$$

em que  $q_n(t)$ ,  $\dot{q}_n(t)$  e  $\ddot{q}_n(t)$  correspondem às respostas modais em termos de deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente. Assim, esta equação, que governa a resposta de um sistema estrutural de um grau de liberdade (SDOF), pode ser dividida por  $M_n$ :

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n(t)} \quad (232)$$

A distribuição de forças definidas por (215) pode ser expandida como um somatório da distribuição modal de forças de inércia de acordo com o proposto em [Chopra, 1995]:

$$m_I = \sum_{n=1}^N \Gamma_n M \phi_n \quad (233)$$

em que  $\Gamma_n$  designa os factores de participação modal de cada modo  $n$  na resposta do sistema à excitação pré-definida, definido na sua forma geral por:

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T m_I}{\phi_n^T m \phi_n} \quad (234)$$

Estes factores de participação são tanto mais elevados quanto maior for a contribuição do modo respectivo para a resposta global do sistema.

Caso um determinado modo seja ortogonal ao termo  $m_I$ , a sua contribuição para a resposta do sistema é nula [Campos Costa, 2005]. Substituindo (233) e (234) em (232), obtém-se:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t) \quad (235)$$

Nesta situação, as respostas modais,  $q_n(t)$ , são obtidas calculando as respostas para SDOF sujeitos a  $-\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$ . Em alternativa, pode-se determinar a resposta  $D_n(t)$  de SDOF actuados por  $\ddot{u}_g(t)$ , em que  $q_n(t)$  são obtidos pelo produto de  $D_n(t)$  pelo factor de participação modal definido na equação (234). Neste último caso, a equação geral do movimento para sistemas amortecidos toma a seguinte forma:

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = -\ddot{u}_g(t) \quad (236)$$

A sobreposição das respostas de cada modo  $q_n(t)$  às solicitações dinâmicas definidas permite o cálculo da resposta, em termos das  $N$  coordenadas  $u(t)$  do sistema. Este procedimento designa-se método da sobreposição modal e restringe-se a sistemas estruturais com comportamento linear e amortecimento proporcional (equação (229)).

$$x(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_n D_n(t) \quad (237)$$

Os esforços internos a cada instante  $t$  podem ser determinados, procedendo a uma análise estática da estrutura para forças dinâmicas externas, dadas por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) = \sum_{n=1}^N K x_n(t) = \sum_{n=1}^N \omega_n^2 M \phi_n q_n \quad (238)$$

que é equivalente a:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \ddot{q}_n(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_n [\omega_n^2 D_n(t)] \quad (239)$$

A formulação agora descrita pode ser aplicada a sistemas estruturais SDOF e MDOF, simétricos ou assimétricos em planta sujeitos a solicitações dinâmicas de translação e de rotação, de acordo com o proposto em [Chopra, 1995].

## 5.5. Forças hidrodinâmicas no equilíbrio do sistema MDOF

O efeito do movimento dinâmico do fluido no interior do amortecedor de líquido sintonizado para ambas as direcções de solicitação é representado por forças induzidas,  $F_{ind}(t)x$  e  $F_{ind}(t)z$ , actuando directa e simultaneamente sobre o sistema estrutural.

Estas forças induzidas resultam da oscilação do fluido no interior do recipiente que o contém, provocado pela excitação dinâmica que chega à sua base e, como já previamente referido, podem ser independentemente determinadas com recurso à equação (73) apresentada numa secção anterior.

Numa abordagem matemática, o amortecedor de líquido sintonizado com o fluido em movimento em cada uma das direcções independentes deverá ser representado pelas forças equivalentes exercidas por ele sobre a estrutura, como se tratando de forças externas aplicadas ao sistema estrutural, podendo-se rescrever a equação fundamental da dinâmica (182).

Em sistemas estruturais discretizados em vários graus de liberdade, por exemplo de acordo com o Método de Elementos Finitos (MEF), a força hidrodinâmica pode ser considerada de uma forma análoga ao que é concretizado para um sistema com um grau de liberdade, como uma força exterior.

Desta forma, a força induzida pelo movimento do fluido para cada um dos graus de liberdade “i”, pode ser escrita na forma [Clough e Penzien, 1993] [Hughes, 1987] [Bathe, 1996]:

$$F_f(t) = L_f \cdot F_{ind}(t) \quad (240)$$

em que  $L_f$  corresponde a uma matriz quadrada com coeficientes iguais a 1 na(s) posições relativa(s) ao(s) grau(s) de liberdade “i”, onde se aplica a força induzida na

estrutura, e com coeficientes iguais a zero em todos os graus de liberdade remanescentes.

Nesta situação, a força hidrodinâmica total gerada pelo movimento oscilatório do fluido em cada direcção corresponde, como supramencionado, a  $F_{ind}(t)_x$  e  $F_{ind}(t)_y$ . Adicionando  $F_f(t)_x$  e  $F_f(t)_y$  obtêm-se equações fundamentais da dinâmica para as direcções de solicitação dinâmica, admitindo um sistema discretizado em N graus de liberdade e sujeito a solicitações bidireccionais:

$$M \cdot \ddot{x}_x(t) + C \cdot \dot{x}_x(t) + K \cdot x_x(t) = F_f(t)_x + f_{ext}(t)_x \quad (241)$$

$$M \cdot \ddot{x}_y(t) + C \cdot \dot{x}_y(t) + K \cdot x_y(t) = F_f(t)_y + f_{ext}(t)_y \quad (242)$$

Tendo como objectivo a resolução das equações do movimento (241) e (242) para sistemas com N graus de liberdade, foram desenvolvidas rotinas específicas, para posterior ligação e extensão ao conjunto de rotinas de base CLAWPACK 2D [LeVeque, 2002], permitindo a simulação de estruturas MDOF sujeitos a solicitações dinâmicas bidireccionais.

## 6. Considerações finais

No presente relatório foram apresentados os principais modelos matemáticos e mecânicos usados para simular o comportamento dinâmico de dispositivos passivos do tipo amortecedores de líquido sintonizado quando sujeitos a excitações dinâmicas laterais segundo um eixo horizontal.

O levantamento dos modelos disponíveis na literatura permitiu que se distinguíssem dois tipos de modelações distintas para posterior implementação: uma puramente matemática e outra puramente mecânica.

Em presença de uma determinada massa de fluido em movimento sobre uma superfície plana e de pouca profundidade (amortecedor de líquido sintonizado – ALS) surgem não-linearidades. Os modelos não-lineares, que tem por fundamento a teoria linear de ondas de águas rasas (*shallow water wave theory*), e que são baseados em equações parcialmente diferenciáveis, obtidas a partir das equações de continuidade e das equações bidimensionais de Navier-Stokes [Fujino et. al, 1992] [Lepelletier e Raichlen, 1988] [Sun et. al, 1992], sob determinadas condições iniciais e de fronteira, e

resolvidas de uma forma aproximada por meio de processos numéricos (ANEXO) podem apresentar uma grande instabilidade numérica e conseqüentemente uma dificuldade considerável de resolução.

Assim, considerando uma implementação em estruturas reais ou em estruturas representativas de estruturas reais, assume-se como um bom exemplo de modelo matemático um modelo analítico linearizado, no qual a solução linear para o movimento do fluido no interior dos dispositivos amortecedores de líquido sintonizado é simulada a partir de uma teoria de equações de onda longa do problema não-linear dispersivo e dissipativo, desenvolvida com técnicas de integração, obtendo-se uma expressão para a função de transferência com forma analítica suficientemente simples [Lepelletier e Raichlen, 1988] [Sun et. al, 1992] [Faltinsen, 1974] [Shimizu e Hayama, 1987].

O referido modelo matemático que simula o comportamento dinâmico no interior de amortecedores de líquido sintonizado, definido com base em equações hiperbólicas, pode ser facilmente integrado em rotinas de cálculo numérico (CLAWPACK) desenvolvidas pela Universidade de Washington [LeVeque, 2002]. A aplicação e adaptação das referidas rotinas a determinados casos específicos pré-definidos foram objecto de uma tese de doutoramento [Falcão da Silva, 2010]. Alguns resultados mais detalhados das simulações numéricas obtidas serão objecto de publicações técnico-científicas futuras.

No que refere a modelos mecânicos apresentados foi possível identificar-se que os modelos propostos são bastante adequados para serem usados em simulações numéricas simplificadas do comportamento dinâmico de amortecedores de líquido sintonizado. Como foi possível identificar, os parâmetros necessários para definir uma boa aproximação do modelo são:

- i. massa dinâmica ou convectiva ( $M_1$ );
- ii. rigidez ( $k_1$ );
- iii. amortecimento ( $c$ )

Os parâmetros referidos podem ser directamente integrados em software comercial de elementos finitos, por exemplo, o programa de cálculo automático SAP2000 [SAP2000NL, 2003], e obtidos resultados muito aproximados do comportamento dinâmico de amortecedores de líquido sintonizado obtido tanto por

meio de simulações numéricas com recurso aos modelos matemáticos mencionados no parágrafo anterior como por meio de um programa experimental extenso.

Relativamente a sistemas conjuntos amortecedores de líquido sintonizado + estrutura principal (SDOF) pode-se afirmar que, tendo por base a formulação apresentada no presente relatório, este pode ser descrito tanto com recurso a uma extensão dos modelos matemáticos usados para o amortecedor de líquido sintonizado isolado integrados no software CLAWPACK ou usando um modelo mecânico integrado num software comercial. Nas simulações deverão ser usados parâmetros de dimensionamento:

- i. razão de massas,  $\mu$ , que corresponde à massa efectiva do fluido [Housner, 1963] dividida pela massa da estrutura;
- ii. frequência natural de sloshing do fluido  $f_w$ ;
- iii. amortecimento introduzido ao conjunto pelo dispositivo amortecedor de líquido sintonizado [Tait et. al., 2005].

Tipicamente os valores de  $\mu$  óptimo situam-se entre 1 e 5 %, devendo o amortecedor de líquido sintonizado estar ajustado de maneira que a frequência fundamental de *sloshing* seja praticamente coincidente com a frequência fundamental da estrutura cujas vibrações se pretende mitigar.

A extensão dos modelos referidos a estruturas de vários graus de liberdade (MDOF), por exemplo estruturas de edifícios existentes no parque habitacional português, com dispositivos amortecedores de líquido sintonizado incluídos, é igualmente possível, tendo por base a formulação também apresentada no presente relatório. Convém não esquecer os parâmetros de dimensionamento referidos, que são igualmente extensíveis a situações de sistemas conjuntos amortecedores de líquido sintonizado + estrutura principal (MDOF)

Tendo por base as formulações apresentadas, é sem dúvida possível simular por via numérica o comportamento real ou muito aproximado do fluido no interior de amortecedores de líquido sintonizado, conforme já foi verificado [Falcão Silva, 2010] e será apresentado com detalhe em publicações futuras.

## **7. Agradecimentos**

A investigação incluída neste documento foi financiada pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) no âmbito da Bolsa Individual de Doutoramento SFRH/BD/14340/2003 e pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC).

Os autores agradecem reconhecidamente as valiosas sugestões do Professor Luís Guerreiro do Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.



## BIBLIOGRAFIA

ABRAMSON, H.N., (1961), *Theoretical and experimental studies of liquid sloshing in rigid cylindrical tanks*, Technical Report (Final report), SwRI, Maio.

ABRAMSON, H.N., (1966), *The dynamic behaviour of liquid in moving containers*, NASA SP 106.

BOUSSINESQ, J., (1878), *Journal of Mathematic Pures. Application*, Volume 4, pp. 335.

CHEN, W., HAROUN, M. A., LIU, F., (1996), *Large amplitude liquid sloshing in seismically excited tanks*, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, 653-669.

CHOPRA, A. K., (1974), *Earthquake analysis of complex structures*, *Applied Mechanics in Earthquake Engineering*, ASME, AM-8, 163-204.

CHOPRA, A. K., (1980), *Dynamics of Structures*, A Primer. EERI, Berkeley, California.

CHOPRA, A. K., (1995), *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, ISBN 0-13-855214-2

CLOUGH R.W., PENZIEN J., (1993), *Dynamics of Structures*, 2nd Edition – McGraw-Hill.

COELHO, P., (2010), *Avaliação sísmica do Edifício Solmar com recurso a TLD's*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Universidade Católica Portuguesa.

DELGADO, R, ARÊDE, A, (2000), *Apontamentos da disciplina de dinâmica de estruturas da licenciatura em Engenharia Civil*, Secção de Estruturas, departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

FALCÃO SILVA, M.J., (2010), *Sistemas passivos para protecção sísmica de estruturas: Uma abordagem baseada no desempenho de amortecedores de líquido sintonizado*, Tese de outoramento, Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal.

FALCÃO SILVA, M.J., CAMPOS COSTA, A., (2011), *Modelos de comportamento dinâmico para fluidos no interior de reservatórios*, Relatório LNEC nº ....., DE-NESDE, Março.

FALTINSEN, O. M., (1974), *A nonlinear theory of sloshing in rectangular tank*, *Journal of Ship Research*, v. 18, n. 4, pp. 224-241, December 1974.

FALTINSEN, O.M., (1978), *A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two dimensional flow*, *Journal of Ship Research*, Vol. 22, No. 3, Sept., pp. 193-202.

FALTINSEN, O.M., ROGNEBAKKE, O.F., (1999), *Sloshing and slamming in tanks*, Hydronav'99-Manouvering'99, Gdansk-Ostrada, Poland.

FOX, L., GOODWIN, E. T., (1949), *Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 45, 373-388.

FUJINO Y., SUN, L. M., PACHECO, B. M., AND CHAISERI, P., (1992), *Tuned liquid damper (TLD) for Suppressing horizontal motion of structures*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 118(10) - pp. 2017-2030.

GARDARSSON, S., (1997), *Shallow-water sloshing*, Tese de Doutorado, Universidade de Washington (em inglês), USA, 160pp.

GARDARSSON, S., YEH, H., (1997), *Hysteresis in shallow water sloshing*, Report

GERADIN, M., RIXEN, D., (1994). *Mechanical vibrations - Theory and application to Structural Dynamics*, Wiley and Sons, New York.

HAROUN, (1980), *Dynamic analysis of liquid storage tanks*, PhD dissertation, Caltech, Pasadena, CA.

HAROUN e HOUSNER, (1981a), *Earthquake response of deformable liquid storage tanks*, American Society of Mechanical Engineering, Journal of Applied Mechanics, 48, pp. 411-418

HAROUN e HOUSNER, (1981b), *Dynamic interaction of liquid storage tanks and foundation soil*, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> ASCE/EMD Specialty Conference on the Dynamic Response of Structures, Atlanta Georgia.

HAROUN e HOUSNER, (1982), *Complications in free vibration analysis of tanks*, American Society of Civil Engineering, Journal of Engineering Mechanics Division, 108(EM5), pp. 801-818.

HOUSNER; G.W., (1957), *Dynamic pressure on accelerated fluid containers*, Bulletin of the seismological society of America, Volume 47, pp 15-35.

HOUSNER, G.W. (1963), *The dynamic behavior of water tanks*, Bulletin of the Seismological American Society, Volume 53, Issue 2, pp. 381-387.

HOUSNER, G. W., HAROUN, M. A., (1979), *Vibration tests of full-scale liquid storage tanks*, Proceedings of the Second U. S. National Conference on Earthquake Engineering, EERI, Berkeley, California, pp. 137-145.

HOUSNER, G. W., HAROUN, M. A., (1980), *Dynamic analyses of liquid storage tanks*, Proceedings of the Seventh World Conference on Earthquake Engineering, TNCEE, Istanbul, Turkey, 8, pp. 431-438.

HSIEH, C.C., KAREEM. A., WILLIAMS, A.N., (1988), *Wave phase effects on dynamic response of offshore platforms*, Proceedings of the Offshore Mechanics and Arctic Engineering , ASME, Houston, Texas.

HUMAR, J. L., (1990), *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

HUNT, K.M., CROSSLEY, F.R.E., (1975), *Coefficient of restitution interpreted as damping in vibro-impact*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (ASME), Journal of Applied Mechanics, pp. 440-444.

IBRAHIM, R., (2005), *Liquid sloshing dynamics: Theory and Application*, Cambridge University Press.

IGUSA, T., XU, K., (1990), *Wide-band response characteristics of multiple sub-systems with high modal density*, Proceedings of the Second International Conference on Stochastic Structural Dynamics, Wiley and Sons, New York, New York.

IGUSA, T., XU, K., (1991), *Vibration reduction characteristics of distributed Tuned Mass Dampers*, Structural Dynamics, Recent Advances, Proceedings of the Fourth International Conference, Elsevier Applied Science, New York, New York, pp. 596-605.

JONSSON, I.G., (1966), *Wave boundary layer and friction factors*, Proceedings of the 10<sup>th</sup> Conference on Earthquake Engineering, American Society of Civil Engineering, pp. 127-148.

KAREEM, A., SUN, W.J., (1987), *Stochastic response of structure with fluid-containing appendages*, Journal of Sound and Vibration, Volume 119, Issue 3, pp. 348-361.

KIM, Y. (2001), *Numerical simulation of sloshing flows with impact loads*, Applied Ocean Research, Volume 23, pp. 53-62.

LAMB H., (1945), *Hydrodynamics*, Cambridge, Cambridge University Press.

LEPELLETIER, T.G., RAICHLEN, F., (1988) *Nonlinear oscillations in rectangular tanks*, Journal of Engineering Mechanics, Volume 114, Issue 1, American Society of Civil Engineering, pp. 1-23, Janeiro.

LEVEQUE, R., (2002), *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge, University Press.

LEVY, S., KROLL, W. D., (1951), *Errors introduced by step-by-step integration of dynamic response*, National Bureau of Standards Report, National Bureau of Standards, New York, Fevereiro.

LUI, P. C., LOU, J. Y. K., (1990), *Dynamic coupling of a liquid-tank system under transient excitations*, International Journal of Ocean Engineering, ASCE, Volume 17, Issue 3, pp. 263-277.

MACNAMARA, R.J., (1977), *Tuned mass dampers for buildings*, Journal of Structural Division, American Society of Civil Engineering, Vol 103, pp. 1785-1798.

MASRI, S.F., CAUGHEY, T.K., (1966), *On the stability of the Impact Damper*, Transactions of the ASME, pp. 586-592, Setembro

MILES, J.W., (1967), *Nonlinear surface waves in closed basins*, Journal of Fluids Mechanics, Vol. 75, pp. 419-448.

MILES, J.W., (1984a), *Resonantly forced surface waves in a circular cylinder*, Journal of Fluid Mechanics, Volume 149, pp. 15-31

MILES, J.W., (1984b), *Internally resonance surface waves in a circular cylinder*, Journal of Fluid Mechanics, Volume 149, pp. 1-14.

NEWMARK, N. M., (1952), *Computation of dynamic response in the range approaching failure*, Proceedings of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, EERI, Berkeley, California, 134.

NEWMARK, N. M., (1959), *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, Volume 85, Issue 3, pp. 67-94.

NEWMARK, N.M., ROSENBLUETH, E., (1971), *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, N.W. Newmark e W.J. Hall Editors, Prentice-Hall Inc.

NICHOLS, B.D., HIRT, C.W., HOTCHKISS, R.S., (1980), *SOLA-VOF: A solution Algorithm for transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries*, Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-8355.

NOVO, T, (2008), *Melhoramento da resposta sísmica de edifícios com recurso a TLDs*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Julho 2008, 121pp.

OCHI, M.K., (1998), *Ocean waves: The stochastic approach*, Ocean Technology, Series 6, Cambridge University Press, ISBN 0-521-56378-X, 319pp.

OKAMOTO, T, KAWAHARA, M., (1992), *Two dimensional sloshing analysis by the arbitrary Lagrangian-Eulerian finite method*, JSCE, Structural Engineering/Earthquake Engineering, Vol. 8, Nº 4, 207-216.

PAZ, M. (1985). *Structural dynamics - Theory and computation*, Second Edition. Van Nostrand Reinhold, New York.

PILIPCHUK, V.N., e IBRAHIM, R.A., (1997), *The dynamics of a nonlinear system simulating liquid sloshing impact in moving structures*, Journal of sound and Vibration, Volume 205, Issue 5, pp. 593-615.

REED D., YEH H., YU J., GARDARSSON S., (1998a), *Tuned liquid dampers under large amplitude excitation*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics; 74-76, pp. 923-930.

REED D., YEH H., YU J., GARDARSSON S., (1998b), *Investigation of tuned liquid dampers under large amplitude excitation*, Journal of Engineering Mechanics, April.

ROE, P., (1981), Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference scheme, Journal of Computational Physics 43.

SAP2000NL, (2003), *SAP2000NL Release 8.3.3.*, Structural Analysis Program, Computers and Structures Inc., Berkeley, California.

SEMERCIGIL, S.E., LAMMERS, D., YING, Z., (1992), *A new tuned vibration absorber for wide-band excitations*, Journal of Sound and Vibration, Volume 156, Issue 3, pp. 445-459.

SHIMIZU, T., HAYAMA, S., (1987), *Nonlinear responses of sloshing based on the shallow water theory*, JSME International Journal, v. 30, n.263, pp. 806-813, Dezembro.

SUN, L.M., (1991), *Semi-analytical modelling of tuned liquid damper (TLD) with emphasis on damping of liquid sloshing*, Tese de Doutoramento, Universidade de Tokyo.

SUN, L.M., FUJINO; Y., (1994), *A semi-analytical model for tuned liquid dampers (TLD) with wave breaking*, Journal of Fluids and Structures, Volume 8, Issue 5, pp. 471-488, Elsevier, Julho.

SUN, L.M., FUJINO; Y., CHAISERI; P., PACHECO, B.M., (1995), *The properties of tuned liquid dampers using a TMD analogy*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 24, pp 967-976.

SUN L.M., FUJINO Y., PACHECO B.M., CHAISERI P., (1992), *Modeling of tuned liquid damper (TLD)*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics; 41-44:1883-1894.

TIMOSHENKO, S. P., (1928). *Vibration Problems in Engineering*, First Edition. Van Nostrand Publishing Company, New York.

TOKARCZYK, B., (1997), *The mathematical modelling of a tuned liquid damper*, Tese de Doutorado, Texas A&M University, pp. 297.

VANDIVER, J. K., MITONE, S., (1978). *Effect of liquid storage tanks on the dynamic response of offshore platforms*, Applications, Ocean Research., Volume 1, pp. 67-74.

VANDORN, W.G., (1966), *Boundary dissipation of oscillatory waves*, Journal of Fluid Mechanics, Volume 24, part 4, pp. 769-779.

WAKAHARA T., OHYAMA, T., FUJII, K., (1992), *Suppression of Wind-induced vibration of a tall building using tuned liquid damper*, Journal of Wind Engineering Industrial Aerodynamics, Volume 41-44, pp. 1895-1906.

WARBURTON, G.B., (1980), *Optimal absorber parameters for simple systems*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 8, pp. 197-217.

WARBURTON, G.B., (1981), *Optimal absorber parameters for minimizing vibration response*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 9, 251-262.

WARBURTON, G.B., (1982), *Optimal absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pp. 381-401.

WARNITCHAI P, PINKAEW T., (1998), *Modeling of Liquid Sloshing in rectangular tanks with flow dampening devices*, Engineering Structures Volume 20, No.7.

WHITAM, G.B, (1973), *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, Inc.

WU, G.X., MA, Q.W., TAYLOR, E.R., (1998), *Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a Finite Element Method*, Applied Ocean Research, 20, 337-355.

XU, K., IGUSA, T., (1992), *Dynamic characteristics of multiple substructures with closely spaced frequencies*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 21, pp. 1059-1070.

YALLA, S. K., (2001), *Liquid dampers for mitigation of structural response: Theoretical development and experimental validation*, PhD thesis, University of Notre Dame, Indiana, USA, 193pp.

YALLA, S.K, KAREEM, (1999), *Modelling tuned liquid dampers as sloshing-slammng dampers*, Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Wind Engineering, Copenhagen, Dinamarca, pp. 1569-1575, Junho.

YAMAGUCHI, H., HARPORNCHAR, N., (1993), *Fundamental characteristics of multiple tuned mass dampers for suppressing harmonically forced oscillations*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 22, 51-62.

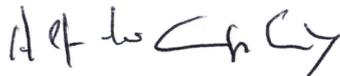
YU, J.K., (1997), *Non-linear characteristics of tuned liquid dampers*, Tese de Doutorado, University of Washington, 133 pp (em inglês).

YU, J.K., WAKAHARA, T., REED, D.A., (1999), *A non-linear numerical model of the tuned liquid damper*, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Volume 28, Issue 6, pp. 671-686, Wiley.

VISTOS

AUTORIA

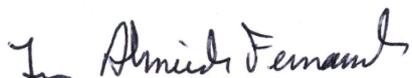
p/O Chefe do Núcleo de Engenharia Sísmica e  
Dinâmica de Estruturas



Ama Coelho  
**A. Campos Costa**  
Investigador Principal

O Director

do Departamento de Estruturas



João Almeida Fernandes

Maria João Falcão Silva  
Maria João Falcão Silva

Bolsreira de Pós-Doutoramento



Alfredo Campos Costa

Investigador Principal



# **ANEXOS**



## I.1. Soluções numéricas pelo Método Runge-Kutta-Gill

A resolução das equações diferenciais propostas no modelo não-linear baseado na teoria linear de onda rasa pode ser efectuada com recurso a determinadas estratégias numéricas. Refere-se como a mais frequente o método de Runge-Kutta-Gill que a seguir se passa a apresentar de uma forma sumária.

As equações básicas referidas são tornadas adimensionais e discretizadas no que respeita a  $x$  em  $n$  divisões (malhas) em equações diferenciais, podendo ser resolvidas numericamente. As variáveis presentes em cada uma das equações básicas são adimensionalizáveis da forma que se segue:

$$x' = \frac{x}{a} \quad (I.1)$$

$$z' = \frac{z}{h} \quad (I.2)$$

$$\eta' = \frac{\eta}{h} \quad (I.3)$$

$$\varepsilon = \frac{h}{a} \quad (I.4)$$

$$u' = \frac{u}{C_0} \quad (I.5)$$

$$t' = \frac{t}{t_0} \quad (I.6)$$

$$k' = ka \quad (I.7)$$

$$x_s' = \frac{t_0^2}{a} x_s \quad (I.8)$$

$$\omega' = \omega t_0 \quad (I.9)$$

em que  $C_0 = \sqrt{gh}$  corresponde à velocidade de onda e  $t_0 = \frac{a}{C_0}$ . As variáveis que aparecem representadas com plica correspondem a variáveis adimensionais.

Substituindo as equações (I.1) a (I.9) nas equações básicas e considerando as condições fronteira correspondentes, obtêm-se as equações básicas e condições de fronteira adimensionais, respectivamente.

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \sigma \frac{\partial \phi(u'(\eta'))}{\partial x'} = 0 \quad (I.10)$$

$$\frac{\partial u'(\eta)}{\partial t'} + (1 - T_H^2) u'(\eta) \frac{\partial u'(\eta)}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \sigma \phi \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = -\lambda' u'(\eta) - \ddot{x}_s' \quad (I.11)$$

$$u'(\eta) = 0 \quad \text{na parede de fundo} \quad (x = \pm 1) \quad (I.12)$$

O coeficiente de amortecimento adimensional,  $\lambda'$ , presente na equação (I.12) corresponde a:

$$\lambda' = \frac{1}{\eta + 1} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon C_0}} \sqrt{\omega \nu} \left( 1 + \frac{2h}{b} + S \right) \quad (I.13)$$

As ondas de superfície livre do fluido possuem um carácter dispersivo. É por isso de notar que a relação de dispersão das equações básicas (sejam elas adimensionais ou não) seja substituída pelo seguinte procedimento devido à discretização do domínio na direcção da solicitação imposta (no caso plano estudado no presente trabalho corresponde à direcção segundo o eixo coordenado  $x$ ) escolhendo adequadamente o número de divisões,  $n$ .

Considerando o primeiro modo de *sloshing* do fluido, ao qual corresponde um número de onda adimensional tomado como:

$$k' = \frac{\pi}{2} \quad (I.14)$$

Tendo sempre presente a ideia de que são os valores de frequência em torno da frequência natural fundamental, o que corresponde à ocorrência de fenómenos de ressonância, os que introduzem maiores preocupações; podem-se então escrever as equações básicas adimensionais (equações (I.10) e (I.11)) na forma que a seguir se identifica:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \sigma \frac{\partial \phi(u'(\eta))}{\partial x'} = 0 \quad (I.15)$$

$$\frac{\partial u'(\eta)}{\partial t'} + H \frac{\partial K}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + C \frac{\partial I}{\partial x'} = -\lambda' u'(\eta) - \ddot{x}_s' \quad (I.16)$$

em que:

$$H = \frac{1}{2} (1 - T_H^2) \quad (I.17)$$

$$K = u'^2 \quad (I.18)$$

$$C = \sigma \phi \varepsilon^2 \quad (I.19)$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{\partial \eta'^2}{\partial x'} \quad (1.20)$$

Discretizando o comprimento do tanque como identificado na Figura I. 1, as equações básicas diferenciais tomam a forma que a seguir se indica.

$$\frac{\partial \eta'_i}{\partial t'} = \frac{\sigma}{\Delta x'} (\phi_i u'(\eta)_i - \phi_{i-1} u''(\eta)_{i-1}) \quad (i = 1 - (n - 1)) \quad (1.21)$$

$$\frac{d\eta'_0}{dt'} = -\frac{2\sigma}{\Delta x'} \phi_1 u'(\eta)_1 \quad (1.22)$$

$$\frac{d\eta'_n}{dt'} = -\frac{2\sigma}{\Delta x'} \phi_n u'(\eta)_n \quad (1.23)$$

$$\frac{du'_n}{dt'} = \frac{1}{\Delta x'} (\eta'_{i-1} - \eta'_i + H_i (K_{i-1} - K_i) + C_i (I_{i-1} - I_i)) - \lambda'_i u'_i - \sigma \ddot{x}'_s \quad (1.24)$$

com:

$$\Delta x' = \frac{2}{n} \quad (1.25)$$

$$\phi_i = \frac{\tanh\left(k' \varepsilon \left(1 + \frac{(\eta'_{i-1} + \eta'_i)}{2}\right)\right)}{\tanh(k' \varepsilon)} \quad (i = 1 - n) \quad (1.26)$$

$$H_i = \left(1 - (\phi_i \tanh(k' \varepsilon))^2\right) \quad (i = 1 - n) \quad (1.27)$$

$$K_i = \left(\frac{(u'_i - u'_{i+1})}{2}\right)^2 \quad (i = 1 - (n - 1)) \quad (1.28)$$

$$I_i = \frac{\left(\frac{(\eta'_{i+1} + \eta'_{i-1})}{(2\Delta x')}\right)^2}{2} \quad (i = 1 - (n - 1)) \quad (1.29)$$

e

$$\lambda'_i = \frac{1}{1 + \frac{(\eta'_{i+1} + \eta'_i)}{2}} \frac{\sqrt{\omega v} (1 + 2h)}{\sqrt{2\varepsilon C_0} b + S} \quad (1.30)$$

Nesta condição em particular consideram-se as condições de fronteira indicadas nas equações (I.31) e (I.32):

$$K_0 = K_n = 0 \quad (1.31)$$

$$I_0 = I_n = 0 \quad (1.32)$$

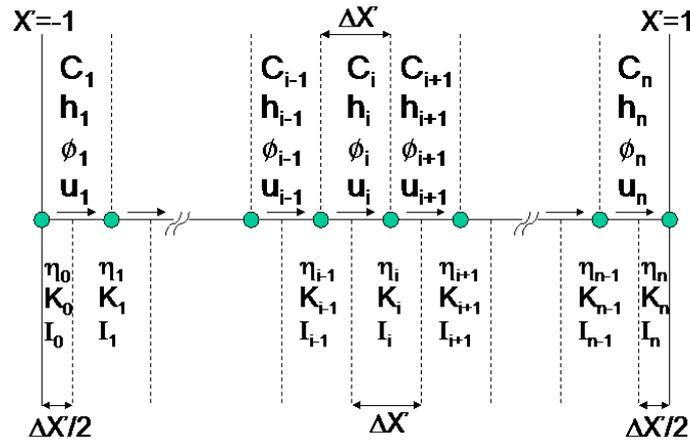


Figura 1.1 - Discretização relativa ao domínio em  $x$

No sentido de substituir a relação de dispersão das equações básicas, tendo em conta a discretização considerada, o número de divisão é determinado com recurso à formulação definida por Shimizu e Hayama [Shimizu e Hayama, 1987].

$$n = \frac{\pi}{\left( 2 \arccos \left( \sqrt{\frac{\tanh(\pi \varepsilon)}{2 \tanh\left(\frac{\pi \varepsilon}{2}\right)}} \right) \right)} \quad (1.33)$$

Após determinação do número de divisões  $n$  e com a condição de fronteira correspondente, as equações básicas diferenciais podem ser resolvidas numericamente usando o método de Runge-Kutta-Gill. Desta forma obtêm-se de uma forma expedita os valores de  $u(\eta)$  e de  $\eta$

$$u(\eta) = 0 \quad (x = \pm a) \quad (1.34)$$

As equações básicas diferenciais (1.21) a (1.24) podem ser expressa na forma vectorial de acordo com o expresso pelas equações (1.35) e (1.36):

$$\frac{d\eta}{dt} = f(t, \eta, u) \quad (1.35)$$

$$\frac{du}{dt} = g(t, \eta, u) \quad (1.36)$$

onde se considera:

$$\eta = (\eta'_0, \eta'_1, \dots, \eta'_i, \dots, \eta'_n) \quad (1.37)$$

$$u = (u'_0, u'_1, \dots, u'_i, \dots, u'_n) \quad (1.38)$$

Tomando como condições iniciais (Equações (1.39) e (1.40)) e considerando o índice como correspondente ao instante de tempo é possível usarem-se as fórmulas comuns do método de Runge-Kutta-Gill (Equações (1.41) e (1.42)) na resolução das equações básicas diferenciais.

$$\eta_0 = 0 \quad (t = 0) \quad (1.39)$$

$$u_0 = 0 \quad (t = 0) \quad (1.40)$$

$$\eta_{m+1} = \eta_m + \frac{\Delta t}{6} (K_1 + (2 - \sqrt{2})K_2 + (2 + \sqrt{2})K_3 + K_4) \quad (1.41)$$

$$u_{m+1} = u_m + \frac{\Delta t}{6} (L_1 + (2 - \sqrt{2})L_2 + (2 + \sqrt{2})L_3 + L_4) \quad (1.42)$$

Nas equações (1.41) e (1.42) considera-se  $\Delta t$  como um incremento de tempo  $t$  e os factores correspondentes definidos pelas equações (1.43) a (1.50):

$$K_1 = f(t_m, \eta_m, u_m) \quad (1.43)$$

$$L_1 = g(t_m, \eta_m, u_m) \quad (1.44)$$

$$K_2 = f\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, \eta_m + \frac{\Delta t}{2} K_1, u_m + \frac{\Delta t}{2} L_1\right) \quad (1.45)$$

$$L_2 = g\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, \eta_m + \frac{\Delta t}{2} K_1, u_m + \frac{\Delta t}{2} L_1\right) \quad (1.46)$$

$$K_3 = f\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, \eta_m + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Delta t K_1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Delta t K_2, u_m + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Delta t L_1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Delta t L_2\right) \quad (1.47)$$

$$L_3 = g\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, \eta_m + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Delta t K_1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Delta t K_2, u_m + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Delta t L_1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Delta t L_2\right) \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned}
K_4 = & f\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, \eta_m + \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta t K_2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Delta t K_3, u_m + \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta t L_2 + \right. \\
& \left. + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Delta t L_3\right)
\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}
L_4 = & g\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, \eta_m + \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta t K_2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Delta t K_3, u_m + \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta t L_2 + \right. \\
& \left. + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Delta t L_3\right)
\end{aligned} \tag{1.50}$$

## I.2. Soluções numéricas pelo Método SOLA-VOF (Solution Algorithm-Volume of Function)

Este método corresponde a um método de diferenças finitas. A metodologia de volume fraccional de fluido (VOF) corresponde à base do denominado código SOLA-VOF utilizado para obtenção de soluções numéricas para algumas das situações expostas ao longo do presente relatório.

As técnicas VOF fornecem um meio de seguir/acompanhar determinadas regiões fluidas através de uma malha euleriana de células estacionárias rectangulares de tamanho variável (Figura I. 2). As variáveis dependentes, incluindo o volume fraccional do fluido encontram-se devidamente identificadas na referida figura

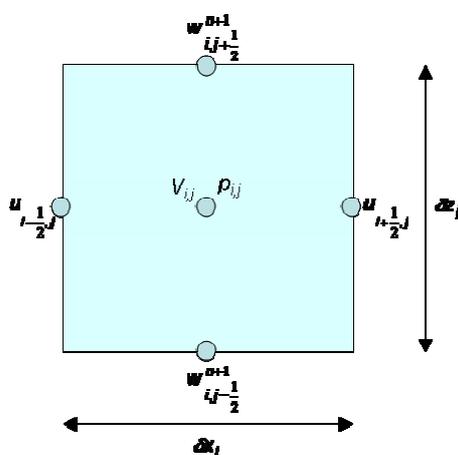


Figura I. 2 – Localização das variáveis para um elemento de malha típico

De facto, em princípio, a metodologia VOF poderá ser usada com o objectivo de identificar qualquer superfície de descontinuidade no fluido, ao nível da velocidade tangencial em qualquer ponto ou qualquer outra propriedade [Sun, 1991].

O código SOLA-VOF possui um conjunto de técnicas de auto-ajuste ciclo a ciclo que podem, de certa forma, justificar de uma forma automática o fluxo de escoamento, mesmo que a equação de continuidade não seja satisfeita no domínio temporal. A utilização deste método pode ser proposta para a resolução das equações indicadas para a circunstância em que ocorre o fenómeno altamente não-linear de quebra de onda (*breaking waves*).

As bases deste modelo são explicadas de uma forma sucinta. No entanto, é conveniente mencionar que em determinadas situações tem sido registados alguns problemas [Sun, 1991], pelo que é possível concluir que, de facto, não se trata de uma técnica amplamente difundida em todos os domínios da engenharia.

Na técnica em questão, define-se uma função  $V(x,z,t)$  que toma o valor unitário em qualquer ponto ocupado por fluido e se anula nos restantes pontos. O valor médio de  $V$  numa célula é precisamente igual ao volume fraccional da célula ocupada por fluido. Particularizando e traduzindo o que foi indicado, um valor unitário de  $V$  corresponde a uma célula completamente preenchida por fluido enquanto que um valor nulo de  $V$  corresponde a uma célula que não contenha qualquer fluido. Células que apresentem valores de  $V$  entre 0 e 1 corresponde a células que contenham superfície livre [Sun, 1991].

As equações a serem resolvidas correspondem às equações de continuidade e de Navier-Stokes. A função de volume de fluido,  $V$ , é utilizada com o objectivo de identificar células da malha que contenham fluido de densidade  $\rho_f$ . Uma célula  $(i,j)$  denominada de superfície livre é definida como contendo um valor de  $V$  não nulo e pelo menos uma célula na sua vizinhança  $(i\pm 1,j)$  ou  $(i,j\pm 1)$  que contenha um valor nulo de  $V$ . As células da malha que apresentem um valor nulo para  $V$  encontram-se vazias, isto é, sem qualquer tipo de fluido no seu interior [Sun, 1991].

A formulação genérica para a aproximação de Navier-Stokes é dada pelas equações (1.51) e (1.52), admitindo que  $Q_{i,j}$  corresponde ao valor  $Q(x,z,t)$  no instante  $n\delta t$  e no ponto  $(i,j)$ , e que os índices meio inteiros  $(1/2)$  se referem à localização de células de fronteira [Sun, 1991]

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^n + \delta t \left[ -\frac{(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1})}{\delta \rho x_{i+\frac{1}{2}}} + \ddot{x}_s - FUX - FUZ - VISX \right] \quad (1.51)$$

$$w_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = w_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \delta t \left[ -\frac{(p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1})}{\delta \rho z_{j+\frac{1}{2}}} + g - FWX - FWZ - VISZ \right] \quad (1.52)$$

em que:

$$\delta \rho x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \{ [\rho_c + (\rho - \rho_c)V_{i,j}] \delta x_{i+1} + [\rho_c + (\rho - \rho_c)V_{i+1,j}] \delta x_i \} \quad (1.53)$$

$$\delta \rho z_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \{ [\rho_c + (\rho - \rho_c)V_{i,j}] \delta z_{j+1} + [\rho_c + (\rho - \rho_c)V_{i,j+1}] \delta z_j \} \quad (1.54)$$

Os termos advectivos e de aceleração viscosa tem um significado óbvio, assim,  $FUX$  corresponde ao fluxo advectivo da variável  $u$  na direcção  $x$ ,  $FUZ$  corresponde ao

fluxo advectivo da variável  $u$  na direcção  $z$ , FWX corresponde ao fluxo advectivo da variável  $w$  na direcção  $x$ , FWZ corresponde ao fluxo advectivo da variável  $w$  na direcção  $z$ , VISX o termo de aceleração viscosa segundo a direcção  $X$  e VISZ o termo de aceleração viscosa segundo a direcção  $Z$  [Sun, 1991].

As velocidades obtidas a partir das equações (I.51) e (I.52) devem satisfazer a equação de continuidade. Para o efeito, as pressões (e velocidades) deverão ser ajustadas em cada célula ocupada por fluido.

Assumindo que a introdução de velocidades  $\tilde{u}$  e  $\tilde{w}$  determinadas com base nas equações (I.51) e (I.52) se repercute no aparecimento de um erro  $\Delta S$  dependente da pressão do fluido que, para um adequado funcionamento do método SOLA-VOF, deverá ser considerado como nulo:

$$\Delta S(p + \delta p) = 0 \quad (I.55)$$

Resolvendo a equação (I.55) em ordem a  $\delta p$  por meio de uma expansão de Taylor e omitindo os termos de ordem mais elevada é possível obter-se o uma nova estimativa da pressão na célula definida (i,j):

$$\delta p = - \frac{\Delta S}{\frac{\partial \Delta S}{\partial p}} \quad (I.56)$$

$$p_{i,j} + \delta p \quad (I.57)$$

As novas estimativas das velocidades nas várias faces da célula definida (i,j) são dadas pelas equações (I.58) a (I.61):

$$u_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\delta t \delta p}{\delta \rho x_{i+\frac{1}{2}}} \quad (I.58)$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{\delta t \delta p}{\delta \rho x_{i-\frac{1}{2}}} \quad (I.59)$$

$$w_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta t \delta p}{\delta \rho z_{i+\frac{1}{2}}} \quad (I.60)$$

$$w_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{\delta t \delta p}{\delta \rho z_{i-\frac{1}{2}}} \quad (I.61)$$

De uma forma muito resumida, o procedimento básico para obter uma solução para incrementos de tempo de  $\delta t$  é definido em três passos [Nichols et al, 1980]:

- 1) Usam-se aproximações semi-implícitas das equações (1.51) e (1.52) na resolução da primeira iteração para determinar as velocidades num novo instante temporal com base nas condições iniciais do problema ou em valores de instantes temporais anteriores. Este passo é efectuado para toda a pressão advectiva e acelerações viscosas;
- 2) Para satisfazer a equação de continuidade, as pressões são ajustadas de uma forma iterativa em cada célula e as mudanças de velocidade induzidas por cada alteração de pressão são adicionadas às velocidades calculadas com base no passo (1). É necessário um processo iterativo uma vez que as mudanças verificadas ao nível da pressão numa célula, e que satisfaçam a equação (1.55) irão necessariamente perturbar o balanço nas quatro células que lhe são adjacentes;
- 3) Finalmente, a função  $V$ , que define as regiões de fluido analisadas, deverá ser actualizada no sentido de fornecer a nova configuração do fluido no novo instante de tempo.

Os passos indicados atrás deverão ser repetidos para fazer avançar a solução através de qualquer intervalo de tempo desejado. É obvio que, a cada passo (instante de tempo), devem ser impostas a toda a malha e à superfície livre as condições de fronteira adequadas [Nichols et. al, 1980]

### I.3. Soluções numéricas pelo Método NSD (Non-Linear Stiffness and Damping)

O Método NSD ou na denominação anglo-saxónica *Non-Linear Stiffness and Damping* corresponde a um modelo de um amortecedor de massa sintonizado equivalente desenvolvido tendo por base determinados resultados experimentais existentes [Yu, 1997].

Este modelo, contrariamente ao indicado para o modelo mecânico simplista de Housner [Housner, 1957] [Housner, 1963] incorpora características não-lineares de rigidez e amortecimento associadas ao amortecedor de líquido sintonizado.

A massa dinâmica de água no interior do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado reage ao movimento estrutural imposto de uma maneira muito semelhante ao observado para amortecedores de massa sintonizada, no entanto o amortecedor de líquido sintonizado exibe as suas características de amortecimento e rigidez inerentes devido aos fenómenos que ocorrem no seu interior, nomeadamente o fenómeno de sloshing linear e não-linear.

Após o amortecimento e rigidez do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado serem quantificadas, o dispositivo pode ser modelado como um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade (SDOF).

A Figura I. 3 ilustra um amortecedor de líquido sintonizado e o modelo do amortecedor de massa sintonizado equivalente que compreende um sistema SDOF com parâmetros de rigidez,  $k_d$ , e amortecimento,  $c_d$ .

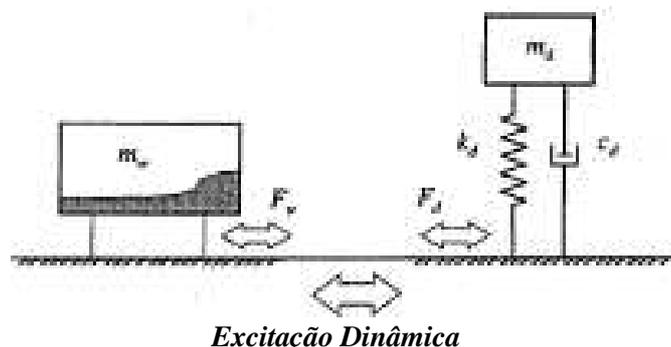


Figura I. 3 – Equivalência entre um amortecedor de líquido sintonizado e o correspondente modelo NSD, adaptado de [Yu, 1997]

No entanto, contrariamente aos amortecedores de líquido sintonizado que são sistemas claramente lineares, os amortecedores de líquido sintonizado possuem fortes características não lineares, como observado em ensaios experimentais em mesa

sísmica efectuados anteriormente [Sun, 1991] [Yu, 1997] (Gardarsson, 1997) [Tokarczyk, 1997] [Yalla, 2001]. Por esta razão os amortecedores de líquido sintonizado são sistemas que devem ser modelados tendo em conta as suas características não-lineares.

No método NSD a rigidez e o amortecimento são determinados de forma a que, para uma mesma excitação de base, a força de corte basal, ou força de amortecimento, associada ao amortecedor de líquido sintonizado,  $F_w$ , seja equivalente à força correspondente no modelo NSD,  $F_d$ . A força de amortecimento é caracterizada pela sua amplitude e fase.

Alternativamente, o parâmetro dissipação de energia por ciclo,  $E_d$ , pode ser usado para estabelecer uma relação directa entre as propriedades de um amortecedor de líquido sintonizado com a representação do amortecedor de massa sintonizado equivalente.

A dissipação de energia por ciclo é definida como a área no interior de um ciclo definido pela relação entre força de amortecimento e o deslocamento imposto na base do dispositivo. Esta quantidade representa o efeito combinado da amplitude e da fase da força de amortecimento no movimento estrutural durante o período de um ciclo.

Na determinação das propriedades de um modelo NSD, uma comparação baseada em critérios energéticos apresenta vantagens sobre uma comparação baseada em forças de amortecimento resultantes.

Em primeiro lugar a comparação de um valor escalar apresenta vantagens claras, enquanto que trabalhos anteriores [Yu, 1997] permitiram concluir que o efeito de modos superiores nos fenómenos de *sloshing* que ocorrem no interior de amortecedores de líquido sintonizado é negligenciável na quantidade de energia dissipada.

A dissipação de energia adimensional para um dado amortecedor de líquido sintonizado é calculada tendo por base os registos de ensaios em plataforma sísmica e de acordo com o proposto pelas expressões seguintes:

$$E_w = \int_{T_s} F_w dx_s \quad (1.62)$$

$$E'_w = \frac{E_w}{\frac{1}{2} m_w v^2} \quad (1.63)$$

em que  $F_w$  corresponde à força de corte basal, ou de amortecimento, registada durante a ocorrência do ensaio,  $x_s$  é o deslocamento registado na base do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado, ou o deslocamento registado na plataforma sísmica quando o dispositivo se encontra rigidamente ligado à plataforma sísmica e  $\frac{1}{2}m_w v^2$  corresponde à energia cinética máxima da massa de água tratada como uma massa sólida.

A dissipação de energia adimensional calculada para o modelo NSD correspondente é determinada usando o procedimento que a seguir se explicita.

Supondo que um sistema SDOF análogo ao apresentado na Figura I. 3b sujeito a uma excitação harmónica de base. A força de amortecimento,  $F_d$ , que é definida como a força resistente a uma determinada excitação de base é expressa por:

$$F_d = -(c\dot{x} + kx) \quad (I.64)$$

No entanto, tendo por base a equação do movimento,  $F_d$  pode também ser determinada por:

$$F_d = m\ddot{x} = -m\omega^2 x = -m\omega^2 z_0 \left| H_{\frac{x}{2}} \right| e^{i(\omega t + \phi)} \quad (I.65)$$

o que dividido por  $-m\omega^2 z_0$  permite obter a amplitude adimensional da força de amortecimento do modelo,  $F_d'$

$$\left| F_d' \right| = \left| H_{\frac{x}{2}} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad (I.66)$$

A energia dissipada pelo amortecedor,  $E_d$ , é definida como a quantidade de trabalho efectuado pela força de amortecimento,  $F_d$ , durante um ciclo da excitação de base e determinada por:

$$E_d = \int_T F_d \dot{z} dt = -m\omega^3 z_0^2 \left| H_{\frac{x}{2}} \right| \int_0^T (e^{i(\omega t - \phi)} (ie^{i\omega t})) dt \quad (I.67)$$

Assumindo, por exemplo uma solicitação sinusoidal, a equação anterior pode ser reescrita:

$$E_d = -m\omega^2 z_0^2 \pi \left| H_{\frac{x}{2}} \right| \sin \phi \quad (I.68)$$

o que dividido por  $-\frac{1}{2}m(\omega x_0)^2$  resulta no valor da dissipação de energia adimensional por ciclo:

$$E'_d = 2\pi |F'_d| \sin \phi \quad (I.69)$$

No modelo NSD são usados parâmetros que a seguir se enunciam:

- $f_e$ , indica a frequência de excitação;
- $f_w$ , indica a frequência fundamental linear do amortecedor de líquido sintonizado;
- $\omega_w$ , indica a frequência angular fundamental linear do amortecedor de líquido sintonizado definida como  $2\pi f_w$ ;
- $\beta$  é a razão entre a frequência da solicitação imposta e a frequência fundamental linear do fenómeno de *sloshing* que ocorre no interior do dispositivo ALS;
- $m_w$ , indica a massa de água no interior do reservatório;
- $k_w$ , indica a a rigidez fundamental linear definida como  $m_w \omega_w^2$ ;
- $m_d$ ,  $k_d$ ,  $c_d$ , são, respectivamente massa, coeficiente de rigidez e coeficiente de amortecimento do modelo NSD correspondente.

Para além disso convém não esquecer de definir o amortecimento crítico, como  $2m_w \omega_w$ , a relação de amortecimento para o modelo do amortecedor de massa sintonizado equivalente,  $\zeta$ , pela expressão (I.70), a relação entre rigidezes,  $\kappa$ , pela expressão (I.71) e a relação entre frequências,  $\xi$ , pela expressão (I.72) :

$$\zeta = \frac{c_d}{c_{cr}} \quad (I.70)$$

$$\kappa = \frac{k_d}{k_w} \quad (I.71)$$

$$\xi = \frac{f_d}{f_w} \quad (I.72)$$

Se o modelo NSD definido na Figura I. 3b for sujeito a excitações de base harmónicas com uma relação entre frequências de excitação e do fluido,  $\beta$ , a amplitude

e a fase da força de amortecimento correspondente são expressas na forma adimensional como se mostra em seguida:

$$|F_d'| = \frac{\sqrt{(1 + (4\zeta^2 - 1)\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^6}}{1 + (4\zeta^2 - 2)\beta^2 + \beta^4} \quad (1.73)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\beta^3}{-1 + (1 - 4\zeta^2)\beta^2}\right) \quad (1.74)$$

A dissipação de energia adimensional quando em cada frequência de excitação é atingido um estado estacionário é dada pela expressão (1.69).

Os valores adimensionais da energia dissipada no amortecedor de líquido sintonizado,  $E_w'$ , e no modelo NSD,  $E_d'$ , são ajustados pelo método dos mínimos quadrados na gama de frequências analisadas. De uma forma geral este ajuste acompanha cerca de 70% do valor de pico da energia dissipada. Assim, admitindo pequenas amplitudes de excitação, a representação da energia dissipada adimensional calculada com base em resultados experimentais,  $E_w'$ , torna-se mais elevada e estreita, o que corresponde a um modelo com pouca rigidez e amortecimento. À medida que a amplitude de excitação aumenta a representação correspondente em termos de energia dissipada diminui em amplitude e alarga, o que conduz a um modelo com maior rigidez e amortecimento.

O amortecimento associado ao movimento de *sloshing* de águas rasas é de muito difícil determinação por via analítica, especialmente para as situações em que se verifica a ocorrência do fenómeno não-linear de quebra de onda. No entanto durante a década de 80 [Milles, 1984a] [Miles, 1984b] foi definida uma excelente aproximação do amortecimento utilizada posteriormente em outros trabalhos de referência [Sun, 1991].

Para o modelo NSD assume-se que os coeficientes de rigidez e amortecimento são função de três parâmetros,  $A$ ,  $L$  e  $h$ , correspondentes à amplitude de excitação, comprimento do reservatório na direcção da solicitação imposta e altura do fluido em repouso.

Na determinação da contribuição de cada parâmetro para as não-linearidades verificadas no amortecedor de líquido sintonizado, os coeficientes de rigidez e de amortecimento foram representados como função de diferentes combinações dos três parâmetros atrás referidos. A combinação dos três parâmetros para a qual os dados

se encontravam melhor correlacionados corresponde ao melhor parâmetro que representa as características não-lineares do amortecedor de líquido sintonizado.

A amplitude de excitação adimensional para ambos os coeficientes de rigidez,  $\kappa$ , e de amortecimento,  $\zeta$ , foi determinada tendo por base uma investigação extensa [Yu, 1997]:

$$\Lambda = \frac{A}{L} \quad (1.75)$$

O amortecimento do modelo NSD encontra-se correlacionado com  $\Lambda$  numa gama alargada de amplitudes de excitação. Tendo por base investigações anteriores [Yu, 1997] o melhor ajuste para o amortecimento usando o método dos mínimos quadrados é dado por:

$$\zeta = 0.52\Lambda^{0.35} \quad (1.76)$$

Para o coeficiente de rigidez, investigações anteriores [Yu, 1997] permitiram definir duas regiões distintas, separadas por  $\Lambda=0.03$  para as quais se observavam diferentes comportamentos do fluido no interior do dispositivo amortecedor de líquido sintonizado. Assim abaixo do limite definido observava-se uma quebra de onda ligeira enquanto que acima do referido limite se observava uma quebra de onda muito forte e violenta. O melhor ajuste para o coeficiente de rigidez para as duas zonas referidas foi obtido pelo método dos mínimos quadrados:

$$\kappa = 1.075\Lambda^{0.007} \quad \text{para} \quad \Lambda < 0.03 \quad (1.77)$$

$$\kappa = 2.52\Lambda^{0.25} \quad \text{para} \quad \Lambda > 0.03 \quad (1.78)$$

Tendo em conta que a relação entre  $\xi$  e  $\kappa$  pode ser definida por [Yu, 1997]:

$$\xi = \sqrt{\kappa} \quad (1.79)$$

Então a relação entre  $\xi$  e  $\Lambda$  foi definida [Yu, 1997]

$$\xi = 1.038\Lambda^{0.0034} \quad \text{para} \quad \Lambda < 0.03 \quad (1.80)$$

$$\xi = 1.59\Lambda^{0.125} \quad \text{para} \quad \Lambda > 0.03 \quad (1.81)$$

#### I.4. Soluções numéricas pelo RCM (Random Choice Method)

O Random Choice Method é um esquema numérico que resolve as equações de águas rasas (*shallow water equations*). Este método permite resolver problemas em que há mudança espaciais abruptas ou choques nas condições de escoamento do fluido. Desta forma o fenómeno de quebra de onda (*breaking waves*) pode ser modelado como um choque sem qualquer tratamento especial para as instabilidades que surgem na frente de quebra [Gardarsson, 1997]

A solução é obtida para cada instante temporal por uma série de operações que incluem a resolução de um problema de Riemann em cada ponto de grelha que define o domínio. O problema de Riemann corresponde a uma resolução computacionalmente exigente, sendo necessário dispendir um esforço considerável na optimização do procedimento que visa a obtenção da solução [Gardarsson, 1997].

No Random Choice Method (RCM) o domínio do fluido é dividido numa grelha em  $n$  intervalos. Num determinado instante,  $t_j$ , o problema de Riemann é resolvido em cada par de pontos da grelha  $i$  e  $i+1$ , em que  $i$  corresponde a um inteiro. O problema de Riemann em ondas de águas rasas (*shallow water waves*) é também denominado problema “*dam break*”, em que uma descontinuidade fictícia se encontra inicialmente localizada num ponto médio entre os pontos  $i$  e  $i+1$  da grelha e o problema é resolvido para condições de escoamento no instante  $\Delta t/2$  após o “*dam breakage*” [Gardarsson, 1997].

A Figura I. 4 mostra um exemplo de parte de um domínio de cálculo utilizado e considerado um dado instante  $t=t_j$ . A discretização da superfície da água é vista como uma série de problemas de Riemann ( $R_i$ ) com valores de altura de fluido e velocidade em cada ponto de grelha que funcionam como as condições iniciais no instante de tempo  $t_j$  para a solução no instante  $t_{j+1}$

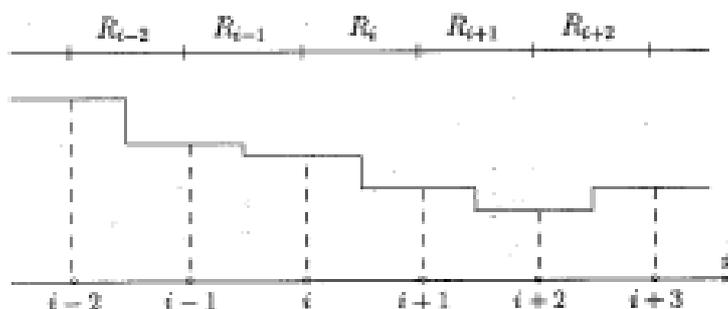


Figura I. 4 – Detalhe do domínio de cálculo utilizado pelo Random Choice Method, adaptado de [Gardarsson, 1997]

Neste esquema numérico a notação  $w_{i,j}$  será usada para identificar a solução do problema de Riemann num ponto da grelha  $i$  para o instante de tempo  $t_j$ . A partir da solução  $w_{i,j}(x, \Delta t/2)$  apenas um ponto entre  $x=i\Delta x$  e  $x=(i+1)\Delta x$  é amostrado de uma forma aleatória como  $x=x^*$  e o valor amostrado  $w_{i,j}(x=x^*, \Delta t/2)$  é associado ao ponto de grelha  $i+1/2$ .

O processo é repetido para a metade seguinte do passo de tempo com o objectivo de obter uma solução para o ponto de grelha  $i$  no instante de tempo  $t_j=t_{j+1}$ . O procedimento para a amostragem é baseado numa variável pseudo-aleatória uniformemente distribuída  $\theta_j \in [-1/2, 1/2]$  que é gerada a cada metade do passo de tempo [Chorin, 1977].

Os movimentos de onda baseados nas equações de ondas de águas rasas (*shallow water wave equations*) são, como já indicado anteriormente, não-dispersivos e apresentam não-linearidades consideráveis, principalmente para amplitudes de excitação dinâmica significativas.

Admitindo amortecedores de líquido sintonizado de fundo horizontal plano, então as equações de ondas de águas rasas podem ser rescritas na forma simplificada que se apresenta em seguida:

$$h_t + m_x = 0 \tag{I.82}$$

$$m_t + \left( \frac{m^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = 0 \tag{I.83}$$

o que corresponde à forma vectorial

$$q_t + f(q)_x = 0 \tag{I.84}$$

ou

$$q_t + f'(q)q_x = 0 \tag{I.85}$$

em que:

$$q = \begin{bmatrix} h \\ m \end{bmatrix} \tag{I.86}$$

$$f(q) = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix} \tag{I.87}$$

$$m = hu \tag{I.88}$$

Nas expressões (I.82) a (I.88)  $h=h(x,t)$  corresponde à altura de fluido,  $u=u(x,t)$  corresponde à velocidade do fluido,  $g$  a aceleração da gravidade e  $f'(q)$  a matriz Jacobiana (Jacobiano), de acordo com:

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{h^2} + gh & \frac{2m}{h} \end{bmatrix} \quad (I.89)$$

Este sistema é não-linear porque  $f'(q)$  não traduz uma matriz constante mas uma função dependente da variável  $q$ . Os valores próprios do jacobiano são dados pelas equações (I.90) e (I.91).

Adianta-se ainda que a matriz apresentada na equação (I.89) apresenta valores próprios reais distintos e um conjunto completo de dois vectores próprios linearmente independentes, para que o sistema obtido seja definido com estritamente hiperbólico.

$$\lambda_1(q) = \frac{m}{h} - \sqrt{gh} \quad (I.90)$$

$$\lambda_2(q) = \frac{m}{h} + \sqrt{gh} \quad (I.91)$$

em que  $\lambda_1(q) < \lambda_2(q)$ . Os vectores próprios correspondentes são definidos pelas equações (I.92) e (I.93):

$$r_1(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{m}{h} - \sqrt{gh} \end{bmatrix} \quad (I.92)$$

$$r_2(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{m}{h} + \sqrt{gh} \end{bmatrix} \quad (I.93)$$

Uma descontinuidade (por exemplo quando ocorrem fenómenos não-lineares) a propagar-se com uma velocidade  $s$  com um valor  $\tilde{q}$  numa extremidade e  $\hat{q}$  na outra extremidade devem obedecer às condições de salto de Rankine-Hugoniot [LeVeque, 1992]:

$$f(\tilde{q}) - f(\hat{q}) = s(\tilde{q} - \hat{q}) \quad (I.94)$$

em que  $q \in \mathbb{R}^n$ . A equação (I.94) fornece  $n$  equações com  $n+1$  variáveis desconhecidas que correspondem precisamente às  $n$  componentes de  $\tilde{q}$  e à velocidade,  $s$ . Parametrizando as curvas da solução por  $\tilde{q}_p(\xi, \hat{q})$  com  $\tilde{q}_p(0, \hat{q}) = \hat{q}$  e

permitindo que  $\tilde{s}_p(\xi, \hat{q})$  seja a correspondente velocidade de choque do fenómeno não-linear que surge durante o movimento dinâmico do fluido. Efectuando as devidas substituições destes parâmetros na equação (I.94) e diferenciando a expressão obtida relativamente a  $\xi$  e definindo  $\xi$  como 0, obtêm-se [Gardarsson, 1997]:

$$f'(\hat{q})\tilde{q}'_p(0, \hat{q}) = \tilde{s}_p(0, \hat{q})\tilde{q}'_p(0, \hat{q}) \quad (I.95)$$

Os princípios definidos nos parágrafos são aplicáveis às equações de onda de águas rasas (*shallow water wave equations*) definidas pela equação (I.83). Assim, de acordo com o apresentado na equação (I.82) é possível identificarem-se duas variáveis independentes,  $h$  e  $m$ . O índice  $p$  traduz o número de ondas que constituem a solução encontrada (por exemplo: se  $p=2$ , ter-se-á uma solução que consiste em duas ondas e se  $p=1$  surgirá apenas uma onda durante o movimento dinâmico do fluido)

Por aplicação da condição de Rankine-Hugoniot, definida pela expressão (I.94) obtêm-se as seguintes equações:

$$\tilde{m} - \hat{m} = s(\tilde{h} - \hat{h}) \quad (I.96)$$

$$\left( \frac{\tilde{m}^2}{\tilde{h}} + \frac{1}{2} g \tilde{h}^2 \right) - \left( \frac{\hat{m}^2}{\hat{h}} + \frac{1}{2} g \hat{h}^2 \right) = s(\tilde{m} - \hat{m}) \quad (I.97)$$

As equações (I.96) e (I.97) fornecem 3 variáveis  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{m}$  e  $s$ . Resolvendo o sistema de equações obtido para  $\tilde{m}$  e  $s$ , em ordem a  $\tilde{h}$ , obtêm-se:

$$\tilde{m}(\tilde{h}) = \tilde{h} \frac{\hat{m}}{\hat{h}} \pm (\tilde{h} - \hat{h}) \sqrt{\frac{g\tilde{h}}{\hat{h}} \frac{(\tilde{h} + \hat{h})}{2}} \quad (I.98)$$

$$s(\tilde{h}) = \frac{\hat{m}}{\hat{h}} \pm \sqrt{\frac{g\tilde{h}}{\hat{h}} \frac{(\tilde{h} + \hat{h})}{2}} \quad (I.99)$$

As equações (I.98) e (I.99) correspondem a duas soluções, uma para cada onda. Para melhor determinar que solução melhor descreve o movimento das ondas formadas efectua-se uma parametrização [Gardarsson, 1997]:

$$\tilde{h}_p = \hat{h}(1 + \xi) \quad p=1,2 \quad (I.100)$$

o que permite obter a seguinte formulação matricial:

$$\tilde{q}_1(\xi, \hat{q}) = \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{m} \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{m} - \hat{h} \sqrt{\frac{1}{2} g \hat{h} (\xi + 1) (\xi + 2)} \end{bmatrix} \quad (I.101)$$

$$\tilde{q}_2(\xi, \hat{q}) = \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{m} \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{m} + \hat{h} \sqrt{\frac{1}{2} g \hat{h} (\xi + 1) (\xi + 2)} \end{bmatrix} \quad (I.102)$$

$$s_1(\xi, \hat{q}) = \frac{\hat{m}}{\hat{h}} - \sqrt{\frac{1}{2} g \hat{h} (\xi + 1) (\xi + 2)} \quad (I.103)$$

$$s_2(\xi, \hat{q}) = \frac{\hat{m}}{\hat{h}} + \sqrt{\frac{1}{2} g \hat{h} (\xi + 1) (\xi + 2)} \quad (I.104)$$

Assim, concretizando as equações anteriores para os tipos de ondas identificados durante as solicitações dinâmicas obtêm-se que na ocorrência de uma onda solitária ( $p=1$ ) a solução apresenta o sinal negativo, enquanto que para a ocorrência de duas ondas ( $p=2$ ) a solução surge com o sinal positivo. Adianta-se ainda que o conjunto de equações que tem sido desenvolvidas é apenas válido para  $\xi \geq -1$ , o que significa basicamente que não é possível que existam alturas de fluido negativas

Então, para as equações de ondas de águas rasas (shallow water wave equations) as expressões obtidas das equações (I.92) e (I.93) são substituídos no conjunto de equações anteriores ((I.101) a (I.104)). Para uma onda solitária ( $p=1$ ):

$$h'(\xi) + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{h(\xi)}{g}} = 0 \quad h(\xi_1) = h_1 \quad (I.105)$$

$$m'(\xi) + \frac{2}{3} \frac{m(\xi)}{\sqrt{gh(\xi)}} - \frac{2}{3} h(\xi) = 0 \quad m(\xi_1) = m_1 \quad (I.106)$$

Este sistema de duas equações (I.105) e (I.106) apresenta as seguintes soluções:

$$h(\xi) = \frac{(3\alpha_1 \sqrt{gh_1} - (\xi - \xi_1))^2}{9g} \quad (I.107)$$

$$m(\xi) = (3\alpha_1 \sqrt{gh_1} - (\xi - \xi_1))^2 \frac{(3m_1 + 2h_1(\xi - \xi_1))}{27gh_1} \quad (I.108)$$

Com base nas equações (I.107) e (I.108) é possível definir  $m(h)$  de acordo com a equação (I.109):

$$m(h) = \frac{h}{h_1} (m_1 + 2h_1(\alpha_2 \sqrt{gh} + \alpha_1 \sqrt{gh_1})) \quad (I.109)$$

A equação (I.109) deve satisfazer  $m'(h) = \lambda |q|$ , tendo sido também demonstrado [Lax, 1972] que  $m''(h) = m''HL$ . Com base no descrito verifica-se que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tomam o valor +1 ou -1 [Gardarsson, 1997].

Finalmente pode-se afirmar que as equações (I.107), (I.108) e (I.109) podem ser simplificadas:

$$h(\xi) = \frac{(3\sqrt{gh_l} - (\xi - \xi_1))^2}{9g} \quad (I.110)$$

$$m(\xi) = (3\alpha_1\sqrt{gh_l} - (\xi - \xi_1))^2 \frac{(3m_l + 2h_l(\xi - \xi_1))}{27gh_l} \quad (I.111)$$

$$m(h) = \frac{h}{h_l} (m_l + 2h_l(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_l})) \quad (I.112)$$

A solução para a ocorrência de 2 ondas pode ser obtida de uma forma análoga:

$$m(h) = \frac{h}{h_r} (m_r + 2h_r(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_r})) \quad (I.113)$$

A solução para o problema de Riemann para as equações de ondas de águas rasas (*shallow water wave equations*) consiste numa das quatro combinações entre choques e rarefacções, de acordo com o apresentado nas seguintes condições:

$$\frac{m_l}{h_l} - \sqrt{gh_l} \geq \frac{m_m}{h_m} - \sqrt{gh_m} \quad \text{onda esquerda é um choque} \quad (I.114)$$

$$\frac{m_l}{h_l} - \sqrt{gh_l} \leq \frac{m_m}{h_m} - \sqrt{gh_m} \quad \text{onda esquerda é uma rarefacção} \quad (I.115)$$

$$\frac{m_m}{h_m} - \sqrt{gh_m} \geq \frac{m_r}{h_r} - \sqrt{gh_r} \quad \text{onda direita é um choque} \quad (I.116)$$

$$\frac{m_l}{h_l} - \sqrt{gh_l} \leq \frac{m_r}{h_r} - \sqrt{gh_r} \quad \text{onda direita é uma rarefacção} \quad (I.117)$$

Assim, a solução do problema de Riemann é obtida por resolução de uma das quatro equações apresentadas em seguida para os casos possíveis:

- i) ambas as ondas (esquerda e direita) correspondem a choques (equação (I.118));
- ii) ambas as ondas correspondem a rarefacções;

- iii) a onda esquerda é uma rarefacção e a onda direita é um choque;
- iv) a onda esquerda é um choque e a onda direita é uma rarefacção.

$$h_m \frac{m_l}{h_l} - (h_m - h_l) \sqrt{\frac{gh_m (h_m + h_l)}{2}} = h_m \frac{m_r}{h_r} + (h_m - h_r) \sqrt{\frac{gh_m (h_m + h_r)}{2}} \quad (I.118)$$

$$\frac{h_m}{h_l} (m_l - 2h_l (\sqrt{gh_m} - \sqrt{gh_l})) = \frac{h_m}{h_r} (m_r - 2h_r (\sqrt{gh_m} - \sqrt{gh_r})) \quad (I.119)$$

$$\frac{h_m}{h_l} (m_l - 2h_l (\sqrt{gh_m} - \sqrt{gh_l})) = h_m \frac{m_r}{h_r} + (h_m - h_r) \sqrt{\frac{gh_m (h_m + h_r)}{2}} \quad (I.120)$$

$$h_m \frac{m_l}{h_l} - (h_m - h_l) \sqrt{\frac{gh_m (h_m + h_l)}{2}} = \frac{h_m}{h_r} (m_r + 2h_r (\sqrt{gh_m} - \sqrt{gh_r})) \quad (I.121)$$

Das equações anteriores a única que é possível resolver de uma forma explícita corresponde à equação (I.119), que traduz uma solução para  $h_m$  dada por:

$$h_m = \frac{\left[ \frac{1}{4} \left( \frac{m_l}{h_l} - \frac{m_r}{h_r} + 2(\sqrt{gh_l} + \sqrt{gh_r}) \right) \right]^2}{g} \quad (I.122)$$

$$m_m = \frac{1}{2} h_m \left( \frac{m_l}{h_l} + \frac{m_r}{h_r} + \sqrt{gh_l} - \sqrt{gh_r} \right) \quad (I.123)$$

Para os restantes casos não é possível obter uma solução explícita, pelo que se torna necessário resolvê-las por meio de esquemas de integração numérica (por exemplo: Método de Newton Raphson).

No entanto, os esquemas iterativos que resolvem as equações (I.118) a (I.121) são computacionalmente exigentes [Gardarsson, 1997]. Para contornar este problema é possível utilizar um “solver” de Riemann, baseado num esquema derivado para as equações de Euler [Roe, 1981], ajustado às equações de ondas de águas rasas (*shallow water waves equations*) que definem o movimento de um fluido no interior de amortecedores de líquido sintonizado.

A ideia subjacente à formulação proposta pelo método de Riemann é transformar um sistema de equações não-lineares num sistema de equações lineares equivalente, que se apresenta como muito mais simples de resolver. Desta forma as

equações de ondas de águas rasas podem ser escritas de acordo com a equação (I.124):

$$q_t + A(q)q_x = 0 \quad (I.124)$$

em que:

$$q = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix} \quad (I.125)$$

$$f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (I.126)$$

$$A(q) = f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{h^2} + gh & \frac{2m}{h} \end{bmatrix} \quad (I.127)$$

$$m = hu \quad (I.128)$$

O sistema definido pela equação (I.124) é não-linear porque  $A(q)$  corresponde a uma matriz que é não constante, pelo que deverá ser rescrito numa forma mais simples:

$$\hat{q}_t + \hat{A}(q_l, q_r)\hat{q}_x = 0 \quad (I.129)$$

em que  $\hat{A}(q_l, q_r)$  traduz uma matriz constante. Esta matriz pode ser resolvida por imposição de determinadas condições [Roe, 1981]:

- i)  $\hat{A}(q_l, q_r)(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l)$ , o que garante que a solução obtida é conservativa;
- ii)  $\hat{A}(q_l, q_r)$  é diagonalizável com valores próprios reais, o que garante que o problema é hiperbólico e resolúvel;
- iii)  $\hat{A}(q_l, q_r) \rightarrow f'(\bar{q})$  de uma forma suave e gradual quando  $q_l, q_r \rightarrow \bar{q}$

A matriz  $\hat{A}(q_l, q_r)$  que obedece às três condições definidas pode ser determinada [Gardarsson, 1977], obtendo-se:

$$\hat{A}(q_l, q_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\bar{h} - \bar{v}^2 & 2\bar{v} \end{bmatrix} \quad (\text{I.130})$$

em que:

$$\bar{h} = \frac{1}{2}(h_l + h_r) \quad (\text{I.131})$$

$$\bar{v} = \frac{h_l^{\frac{1}{2}}u_l + h_r^{\frac{1}{2}}u_r}{h_l^{\frac{1}{2}} + h_r^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.132})$$

A solução da equação (I.129) é obtida decompondo:

$$q_r - q_l = \alpha_1 \hat{r}_1 + \alpha_2 \hat{r}_2 \quad (\text{I.133})$$

As constantes presentes na equação (I.133) são dadas pelas igualdades que a seguir se apresentam:

$$\alpha_1 = \Delta q_1 - \alpha_2 \quad (\text{I.134})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\bar{c}}(-\Delta q_1(\bar{v} - \bar{c}) + \Delta q_2) \quad (\text{I.135})$$

$$\bar{c} = \sqrt{g\bar{h}} \quad (\text{I.136})$$

$$\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_l - h_r \\ m_l - m_r \end{bmatrix} \quad (\text{I.137})$$

O Random Choice Method é estável se não existe qualquer interacção entre as soluções do problema de Riemann em cada um dos instantes de tempo. Isto significa que a onda não pode atingir as fronteiras de uma determinada célula em que se encontra dividido o domínio.

Tendo por base a caracterização efectuada anteriormente no que refere a choque e rarefacção em ondas (equações (I.114) a (I.121) torna-se possível definir uma condição de estabilidade para o método (equação (I.138)):

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \begin{cases} \max(|s_l|, |s_r|) \\ \max\left(|s_l|, \left|\frac{m_r}{h_r} + \sqrt{gh_r}\right|\right) \\ \max\left(\left|\frac{m_l}{h_l} - \sqrt{gh_l}\right|, |s_r|\right) \\ \max\left(\left|\frac{m_l}{h_l} - \sqrt{gh_l}\right|, \left|\frac{m_r}{h_r} + \sqrt{gh_r}\right|\right) \end{cases} \quad (I.138)$$

em que  $s_l$  e  $s_r$  correspondem, respectivamente, às velocidades da onda de choque à esquerda e à direita em cada ponto da discretização do domínio do fluido.

No entanto, existem algumas situações especiais em que alguns efeitos adicionais são incorporados no sistema de base, resultando num termo de fonte ao nível do lado direito do sistema de equações hiperbólicas que definem as equações de ondas de águas rasas (*shallow water waves equations*) para o movimento do fluido no interior de dispositivos amortecedores de líquido sintonizado. Por exemplo pode-se referir a influência da consideração de sistemas de coordenadas móveis na introdução de um  $t$

Resolvendo as equações hiperbólicas apresentadas anteriormente, para ondas de águas rasas resultantes da imposição de um movimento sinusoidal, em termos de coordenadas a moverem-se conjuntamente com o recipiente e definindo  $\xi$  (equação (I.139)),  $\tau$  (equação (I.140)),  $v(\xi, \tau)$  (equação (I.141)):

$$\xi = x + X(t) \quad (I.139)$$

$$\tau = t \quad (I.140)$$

$$v(\xi, \tau) = u(x, t) + \dot{X}(t) \quad (I.141)$$

Admitindo que  $\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ , então a transformação de coordenadas toma a forma apresentada na expressão (I.141):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (I.142)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \dot{X}(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (I.143)$$

Substituindo as equações (I.142) e (I.143) nas equações (I.82) e (I.83), obtêm-se:

$$h_\tau + (hv)_x = 0 \quad (I.144)$$

$$(hv)_\tau + \left( hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_\xi = h\ddot{X} \quad (I.145)$$

As equações assim obtidas ((I.144) e (I.145)) correspondem às equações de ondas de águas rasas (*shallow water waves equations*) relativamente a um sistema de eixos acelerados. De facto a única diferença relativamente às equações de ondas de águas rasas (*shallow water waves equations*) determinadas relativamente a um sistema de eixos estacionário surge como um termo extra no lado direito da equação (I.145).

As equações de ondas de águas rasas (*shallow water waves equations*) calculadas relativamente a um sistema de eixos acelerados conduzem a um sistema hiperbólico com um termo de fonte do lado direito. Muitos têm sido os métodos desenvolvidos com o objectivo de resolver este tipo de sistemas hiperbólicos.

Um dos métodos frequentemente utilizados corresponde a uma técnica de separação (*splitting*) que alterna entre a resolução do sistema homogéneo definido pela equação (I.83) e a resolução de uma equação diferencial ordinária de forma:

$$q(t) = X(q) \quad (I.146)$$

em que  $X(q)$  corresponde ao termo de fonte. Para as equações de ondas de águas rasas (*shallow water waves equations*) o sistema homogéneo é resolvido com recurso ao Random Choice Method no instante de tempo  $t_j$ , o que conduz à resolução das equações:

$$h_t = 0 \quad (I.147)$$

$$m_t = gh\ddot{X}(t) \quad (I.148)$$

A equação (I.148) é definida admitindo um sistema de eixos coordenados acelerados e pode ser rescrita:

$$\int_{m^*}^{m_i^{j+1}} dm = \int_{t_j}^{t_j + \Delta t} h_i^{j+1} \ddot{X}(t) dt \quad (I.149)$$

A integração da equação (I.149), para cada h mantido constante durante o passo de separação (*splitting*), conduz a:

$$m_i^{j+1} = m^* + h_i^{j+1} (\dot{X}(t_j + \Delta t) - \dot{X}(t_j)) \quad (I.150)$$

Para além do referido nos parágrafos anteriores, as equações de Boussinesq introduzem um termo dispersivo ao nível das equações de ondas de águas rasas (*shallow water waves equations*) [Whitham, 1973]. O sistema definido pelas equações (I.82) e (I.83) é então simplificado:

$$h_t + m_x = 0 \quad (I.151)$$

$$m_t + \left( \frac{m}{h} + \frac{1}{2} gh \right)_x = \frac{1}{3} h_0^2 h u_{xxt} \quad (I.152)$$

em que  $m=hu$ . Num sistema de eixos coordenados acelerados então as equações de ondas de águas rasas (*shallow water waves equations*) tomam a forma definida por :

$$h_\tau + (uh)_\xi = 0 \quad (I.153)$$

$$m_\tau + \left( \frac{m^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 \right)_\xi = \frac{1}{3} h_0^2 h (\dot{X} u_{\xi\xi\xi} + u_{\xi\xi\tau}) + h \ddot{X} \quad (I.154)$$

O passo de separação (*splitting*) toma o valor:

$$u_\tau = \frac{1}{3} h_0^2 \left[ (u_{\xi\xi})_\tau + \dot{X} (u_{\xi\xi})_\xi \right] + \ddot{X} \quad (I.155)$$

o que é traduzido na seguinte discretização entre dois instantes consecutivos:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{3} h_0^2 \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + \\ &\frac{1}{3} h_0^2 \dot{X} \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}}{2(\Delta x)^3} + \frac{u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{2(\Delta x)^3} \right] + \\ &\ddot{X}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (I.156)$$

A expressão anterior encontra-se definida para  $i=1,2,\dots, N$ .

## **I.5. Soluções numéricas pelo método de análise Newmark-Beta**

O método de Newmark de cálculo iterativo da resposta de um sistema dinâmico foi apresentado pela primeira vez numa conferência em 1952 e subseqüentemente feito parte integrante dos proceedings da mesma [Newmark, 1952]. O procedimento de cálculo foi posteriormente publicado de uma maneira mais formal em 1959 [Newmark, 1959].

No entanto não devem ser esquecidos procedimentos semelhantes que já tinham sido apresentados e propostos desde o final da década de 20 [Timoshenko, 1928] [Fox e Goodwin, 1949] [Levy e Kroll, 1951], embora com um carácter menos generalista do que o apresentado por Newmark nos seus trabalhos. Newmark refere-se a uma família de métodos iterativos com diferenças no que refere à selecção de dois parâmetros denominados  $\gamma$  e  $\beta$ . O termo  $\gamma$  normalmente é assumido como sendo constante enquanto que o termo  $\beta$  é usado com o objectivo de seleccionar uma variação consistente na aceleração de excitação durante o intervalo de tempo da solitação.

Newmark nos seus estudos apresenta e discute as diferenças específicas resultantes de quatro escolhas possíveis do termo  $\beta$ , cada uma delas aproximando a variação da aceleração imposta de uma forma separada. Devido aos efeitos importantes que a escolha do termo  $\beta$  tem sobre a resposta resultante, a convergência e estabilidade do método, esta família de métodos é geralmente denominada como métodos de integração numérica Newmark Beta [Tokarczyk, 1997].

Muitos autores se têm vindo a debruçar sobre estes processos iterativos da família Newmark Beta podendo-se encontrar na estudos extensos na bibliografia científica da área [Chopra, 1980] [Paz, 1985] [Humar, 1990] [Clough e Penzien, 1993] [Geradin e Rixen, 1994] [Chopra, 1995] tendo sido efectuadas algumas revisões ao método inicial em numerosas publicações de dinâmica e engenharia sísmica [Chopra, 1974].

A teoria subjacente a estes métodos pode apresentar algumas diferenças no caso de sistemas de um grau de liberdade (SDOF) e no caso de sistemas de vários graus de liberdade (MDOF).

No caso de sistemas de um grau de liberdade, Newmark desenvolveu um conjunto de fórmulas de integração numérica que permitem a modelação matemática

da resposta variável no tempo de um sistema sujeito a uma dada acção dinâmica. Considerando o termo associado à velocidade:

$$\dot{y}_{t+\Delta t} = a_1 \dot{y}_t + a_2 \ddot{y}_t + a_3 \ddot{y}_{t+\Delta t} \quad (I.157)$$

em que  $\dot{y}_{t+\Delta t}$  corresponde à velocidade no instante  $t+\Delta t$ . As constantes podem no entanto ser resolvidas deixando o termo da velocidade na forma que a seguir se apresenta:

$$\dot{y}_{t+\Delta t} = \dot{y}_t + \Delta t(1-\gamma)\ddot{y}_t + \Delta t\gamma\ddot{y}_{t+\Delta t} + R \quad (I.158)$$

com R representando o termo associado ao limite superior do erro. O mesmo procedimento pode ser usado na determinação do termo de deslocamento de Newmark:

$$y_{t+\Delta t} = a_4 y_t + a_5 \dot{y}_t + a_6 \ddot{y}_t + a_7 \ddot{y}_{t+\Delta t} \quad (I.159)$$

$$y_{t+\Delta t} = y_t + \Delta t \dot{y}_t + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{y}_t + \Delta t^2 \beta \ddot{y}_{t+\Delta t} + R \quad (I.160)$$

Os métodos de Newmark são diferenciados pela escolha dos termos  $\gamma$  e  $\beta$ , como já foi previamente referido. A estabilidade do método, o decaimento da amplitude e o período podem ser afectados com a escolha destes dois termos. A estabilidade do algoritmo de Newmark pode ser alcançada por meio da escolha adequada das variáveis  $\gamma$  e  $\beta$ , como se pode verificar pela Figura I. 5, [Tokarczyk, 1997] [Geradine Rixen, 1994], onde se encontram presentes e convenientemente identificadas as regiões de instabilidade e estabilidade condicionada e não condicionada.

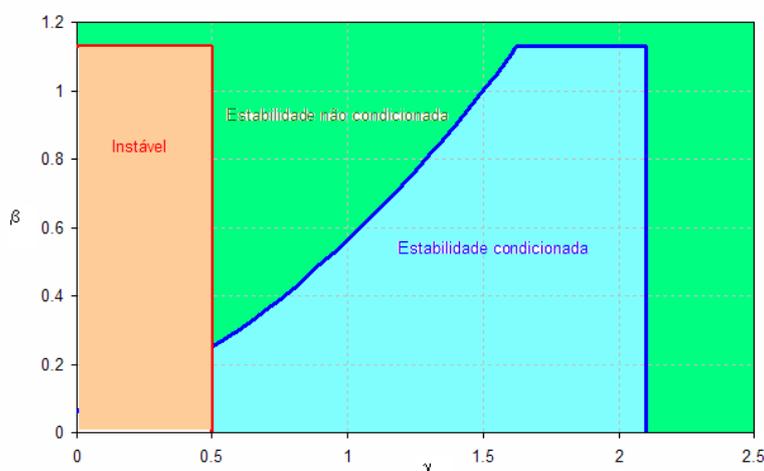


Figura I. 5 - Dependência entre os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  do Modelo de Newmark Beta

A separação entre estas últimas duas últimas regiões é concretizada por meio da função:

$$\beta = \frac{1}{16} + \frac{\gamma^2 + \gamma}{4} \quad (I.161)$$

O método é idêntico ao método de integração da aceleração média desde que o  $\gamma$  e o  $\beta$  sejam admitidos como tendo os valores de  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$  respectivamente. Neste caso as equações de Newmark de velocidade e aceleração tomam a forma:

$$\dot{y}_{t+\Delta t} = \dot{y}_t + \frac{\Delta t}{2} \left( \ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t} \right) \quad (I.162)$$

$$y_{t+\Delta t} = y_t + \Delta t \dot{y}_t + \frac{\Delta t^2}{4} \left( \ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t} \right) \quad (I.163)$$

A aproximação da aceleração pelo método da aceleração média encontra-se ilustrada na Figura I. 6.

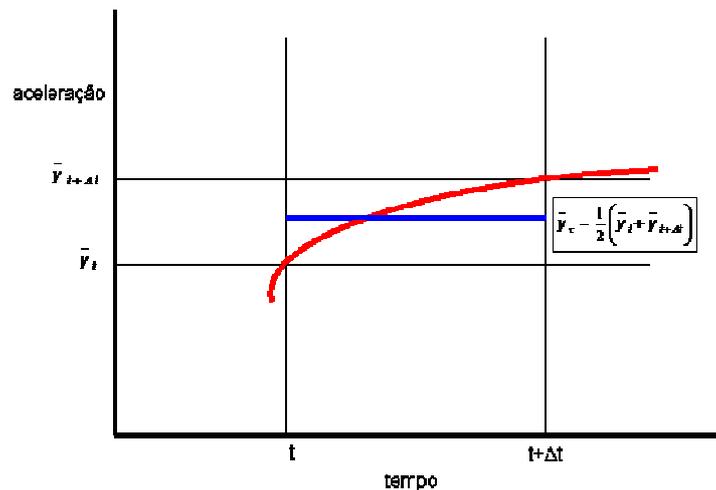


Figura I. 6 - Método da aceleração média, particularização do método de Newmark Beta para  $\gamma=1/2$  e  $\beta=1/4$

O termo de aceleração para um dado intervalo,  $\bar{y}_\tau$ , é obtido a partir da “média” dos dois valores de aceleração ao longo do passo de tempo, ou seja:

$$\bar{y}_\tau = \frac{1}{2} \left( \ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t} \right) \quad (I.164)$$

Considerando  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ , obtêm-se:

$$\dot{y}_\tau = \dot{y}_t + \frac{\tau - t}{2} \left( \ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t} \right) \quad (I.165)$$

$$y_{\tau} = y_t + (\tau - t)\dot{y}_t + \frac{(\tau - t)^2}{4} \left( \ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t} \right) \quad (I.166)$$

Permitindo nas expressões anteriores que  $\tau = t + \Delta t$  e dando um novo arranjo aos termos podem-se obter as seguintes expressões na forma de Newmark:

$$\ddot{y}_{t+\Delta t} = \frac{4}{\Delta t^2} \left( y_{t+\Delta t} - y_t - \Delta t \dot{y}_t \right) - \ddot{y}_t \quad (I.167)$$

$$\dot{y}_{t+\Delta t} = -\dot{y}_t + \frac{2}{\Delta t} (y_{t+\Delta t} - y_t) \quad (I.168)$$

Com o termo de deslocamento derivado a partir da equação do movimento para sistemas de um grau de liberdade (SDOF)

$$m \ddot{y}_{t+\Delta t} + c \dot{y}_{t+\Delta t} + k y_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} \quad (I.169)$$

Substituindo os termos de aceleração e velocidade na equação do movimento obtêm-se:

$$\left( \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k \right) y_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} + m \left( \frac{4}{\Delta t^2} y_t + \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_t + \ddot{y}_t \right) + c \left( \frac{2}{\Delta t} y_t + \dot{y}_t \right) \quad (I.170)$$

Resolvendo em ordem a  $y_{t+\Delta t}$  obtêm-se a expressão do Método da aceleração média para o deslocamento:

$$y_{t+\Delta t} = \frac{f_{t+\Delta t} + m \left( \frac{4}{\Delta t^2} y_t + \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_t + \ddot{y}_t \right) + c \left( \frac{2}{\Delta t} y_t + \dot{y}_t \right)}{\left( \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k \right)} \quad (I.171)$$

Podem-se desenvolver demonstrações análogas para o método da aceleração linear, que se verifica ser idêntico ao obtido pelas fórmulas de Newmark quando  $\gamma$  e  $\beta$  tomam valores de  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{6}$ , respectivamente. A substituição destes coeficientes fornece as seguintes equações de Newmark para velocidade e deslocamento:

$$\dot{y}_{t+\Delta t} = \dot{y}_t + \frac{\Delta t}{2} \left( \ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t} \right) \quad (I.172)$$

$$y_{t+\Delta t} = y_t + \Delta t \dot{y}_t + \frac{\Delta t^2}{6} \left( 2\ddot{y}_t + \ddot{y}_{t+\Delta t} \right) \quad (I.173)$$

A aproximação do termo de aceleração para um dado intervalo de tempo,  $\ddot{y}_{\tau}$ , pelo método da aceleração linear encontra-se ilustrada na Figura I.7, sendo obtida a partir da linha de tendência “linear” entre os dois valores de aceleração de extremidade do passo de tempo, ou seja:

$$\ddot{y}_\tau = \ddot{y}_t + \frac{\tau - t}{\Delta t} \left( \ddot{y}_{t+\Delta t} - \ddot{y}_t \right) \quad (1.174)$$

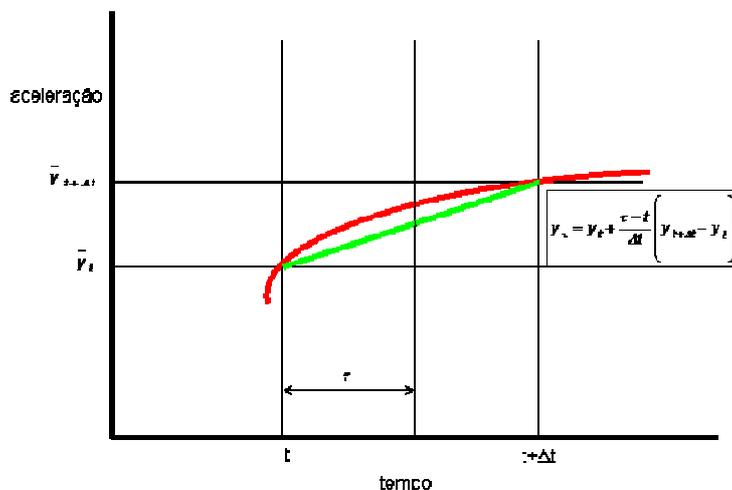


Figura 1.7 - Método da aceleração linear, particularização do método de Newmark Beta para  $\gamma=1/2$  e  $\beta=1/6$

Considerando  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ , obtêm-se:

$$\dot{y}_\tau = \dot{y}_t + \ddot{y}_t (\tau - t) + \frac{(\tau - t)^2}{2\Delta t} \left( \ddot{y}_{t+\Delta t} - \ddot{y}_t \right) \quad (1.175)$$

$$y_\tau = y_t + (\tau - t)\dot{y}_t + \ddot{y}_t \frac{(\tau - t)^2}{2} + \frac{(\tau - t)}{6\Delta t} \left( \ddot{y}_{t+\Delta t} - \ddot{y}_t \right) \quad (1.176)$$

À semelhança do considerado para o método da aceleração média toma-se  $\tau = t + \Delta t$ , obtendo-se assim a forma de Newmark para esta situação (método da aceleração linear) em termos de velocidades e acelerações:

$$\ddot{y}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\Delta t^2} \left( y_{t+\Delta t} - y_t - \Delta t \dot{y}_t \right) - 2\ddot{y}_t \quad (1.177)$$

$$\dot{y}_{t+\Delta t} = -2\dot{y}_t + \frac{3}{\Delta t} (y_{t+\Delta t} - y_t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{y}_t \quad (1.178)$$

Com o termo de deslocamento obtido da equação do movimento para sistemas de um grau de liberdade (SDOF), como anteriormente mencionado para o método da aceleração média.

Da substituição dos valores de aceleração e velocidade pelas expressões de Newmark respectivas obtêm-se:

$$\left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k\right)y_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} + m\left(\frac{6}{\Delta t^2}y_t + \frac{6}{\Delta t}\dot{y}_t + 2\ddot{y}_t\right) + c\left(\frac{3}{\Delta t}y_t + 2\dot{y}_t + \frac{\Delta t}{2}\ddot{y}_t\right) \quad (1.179)$$

Resolvendo em ordem a  $y_{t+\Delta t}$  obtêm-se a expressão do método da aceleração linear para o deslocamento:

$$y_{t+\Delta t} = \frac{f_{t+\Delta t} + m\left(\frac{6}{\Delta t^2}y_t + \frac{6}{\Delta t}\dot{y}_t + 2\ddot{y}_t\right) + c\left(\frac{3}{\Delta t}y_t + 2\dot{y}_t + \frac{\Delta t}{2}\ddot{y}_t\right)}{\left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k\right)} \quad (1.180)$$

No trabalho de Tokarczyk [Tokarczyk, 1991] foi utilizado o método de aceleração linear na integração numérica. O valor de  $\beta$  poderá ser sempre modificado com o objectivo de alterar o método de Newmark usado e de efectuar comparações entre si.

A teoria subjacente às equações apresentadas para os casos particulares do método de Newmark identificados, métodos da aceleração média e da aceleração linear, refere-se a sistemas de um grau de liberdade.

Pode-se, no entanto transformá-las nas equações homólogas para sistemas de vários graus de liberdade (MDOF), tendo em conta que acelerações, velocidades, deslocamentos, massa, rigidez e amortecimento passam a aparecer na forma matricial. Desta forma para acelerações e velocidades obtêm-se:

$$\dot{Y}_{t+\Delta t} = \dot{Y}_t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{Y}_t + \Delta t\gamma\ddot{Y}_{t+\Delta t} + R \quad (1.181)$$

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + \Delta t\dot{Y}_t + \Delta t^2\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{Y}_t + \Delta t^2\beta\ddot{Y}_{t+\Delta t} + R \quad (1.182)$$

Para sistemas de vários graus de liberdade a equação do movimento toma a forma:

$$M\ddot{Y}_{t+\Delta t} + C\dot{Y}_{t+\Delta t} + KY_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \quad (1.183)$$

em que M, C, K, F são apresentados na sua forma matricial tendo em conta o número de graus de liberdade do sistema em estudo.

As equações de Newmark são simplificadas da seguinte forma para o método da aceleração média (onde os termos  $\gamma$  e  $\beta$  tomam os valores de  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$ , respectivamente)

$$\ddot{Y}_{t+\Delta t} = \frac{4}{\Delta t^2} \left( Y_{t+\Delta t} - Y_t - \Delta t \dot{Y}_t \right) - \ddot{Y}_t \quad (1.184)$$

$$\dot{Y}_{t+\Delta t} = -\dot{Y}_t + \frac{2}{\Delta t} (Y_{t+\Delta t} - Y_t) \quad (1.185)$$

A semelhança do efectuado para sistemas de um grau de liberdade o termo de deslocamento é determinado por substituição das equações de Newmark para aceleração e velocidade na equação do movimento:

$$\left( \frac{4M}{\Delta t^2} + \frac{2C}{\Delta t} + K \right) Y_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + M \left( \frac{4}{\Delta t^2} Y_t + \frac{4}{\Delta t} \dot{Y}_t + \ddot{Y}_t \right) + C \left( \frac{2}{\Delta t} Y_t + \dot{Y}_t \right) \quad (1.186)$$

De forma análoga podem-se obter para o Método da Aceleração Linear, onde se concretizam  $\gamma$  e  $\beta$  com os valores  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{6}$ , como já foi referido anteriormente, as seguintes relações para aceleração e velocidade:

$$\ddot{Y}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\Delta t^2} \left( Y_{t+\Delta t} - Y_t - \Delta t \dot{Y}_t \right) - 2\ddot{Y}_t \quad (1.187)$$

$$\dot{Y}_{t+\Delta t} = -2\dot{Y}_t + \frac{3}{\Delta t} (Y_{t+\Delta t} - Y_t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{Y}_t \quad (1.188)$$

sendo o termo de deslocamento calculado da seguinte forma:

$$\left( \frac{6M}{\Delta t^2} + \frac{3C}{\Delta t} + K \right) Y_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + M \left( \frac{6}{\Delta t^2} Y_t + \frac{6}{\Delta t} \dot{Y}_t + 2\ddot{Y}_t \right) + C \left( \frac{3}{\Delta t} Y_t + 2\dot{Y}_t + \frac{\Delta t}{2} \ddot{Y}_t \right) \quad (1.189)$$

Num sistema não-linear, como se apresenta o caso dos dispositivos amortecedores de líquido sintonizado, não é possível desacoplar as equações do movimento por meio de análise modal devendo ser tratadas na sua forma original.

Os métodos dependentes do tempo usados na maioria das soluções não lineares, como o método de Newmark usam de facto os princípios subjacentes a métodos lineares desde que considerado um intervalo de tempo de excitação curto. O sistema não linear passa a ser tratado nesse curto intervalo de tempo como se de um sistema linear se tratasse. Entre pequenos intervalos de tempo, os parâmetros do modelo linear podem ser ajustados no sentido de contabilizar as características da resposta não-linear associadas com uma estrutura não-linear real.

A resposta global obtida deste sistema dinâmico apresenta-se como não-linear devido à manipulação de parâmetros entre intervalos de tempo, permitindo que a resposta estrutural inelástica seja adequadamente contabilizada e modelada de uma forma sistemática [Tokarczyk, 1997].

## I.6. Métodos de resolução de equações diferenciais

### I.6.1. Solução clássica

A resolução completa da equação diferencial linear do movimento consiste na soma da solução complementar,  $u_c(t)$ , e da solução particular,  $u_p(t)$ :

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \quad (I.190)$$

Dado que a equação diferencial do movimento é de 2ª ordem, estão envolvidas duas constantes de integração que surgem na função complementar e são avaliadas a partir do conhecimento prévio das condições iniciais-

A solução clássica surge como o principal método utilizado na resolução de equações diferenciais para vibrações livres e para excitações, que podem ser descritas analiticamente como harmónicas, step, e forças de impulso [Chopra, 1995].

### I.6.2. Métodos transformados

As transformadas de Laplace e de Fourier fornecem ferramentas poderosas para a resolução de equações diferenciais, em particular a equação do movimento para um sistema linear. Dada a semelhança entre os conceitos subjacentes aos dois métodos desenvolve-se em seguida o método transformado de Fourier, que conduz ao método de análise dinâmica no domínio da frequência. A transformada de Fourier,  $\hat{p}(i\omega)$ , de uma determinada função de excitação conhecida é definida por:

$$\hat{p}(i\omega) = F[p(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} p(t) dt \quad (I.191)$$

Na resolução da equação do movimento pela transformada de Fourier, o primeiro passo é transformar a equação diferencial na variável  $t$  numa equação algébrica na variável imaginária  $i\omega$ . Então a equação algébrica é resolvida de uma forma rápida para  $\hat{u}(i\omega)$ , a transformada de  $u(t)$ .

Finalmente a solução  $u(t)$  da equação diferencial é determinada por meio da transformação inversa de  $\hat{u}(i\omega)$ . O processo da transformação inversa é simbolizado por:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) \hat{p}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (I.192)$$

em que a função de resposta em frequência complexa,  $H(i\omega)$ , descreve a resposta do sistema a excitações harmónicas.

Para sistemas SDOF o integral da equação (I.192) é avaliado pela integração no contorno usando o teorema residual da análise complexa. Podem ser obtidos resultados da equação do movimento na forma aproximada se  $p(t)$  corresponder a uma função simples. Até há alguns anos, enquanto não se encontravam disponíveis computadores de alta resolução, a aplicação do método transformado de Fourier encontrava-se restringida a funções  $p(t)$  simples.

O método transformado de Fourier é actualmente bastante adequado para a análise dinâmica de sistemas dinâmicos sujeitos a excitações complexas  $p(t)$  ou  $\ddot{u}_g(t)$  que se encontrem definidas na sua forma numérica. Nestas situações, o integral de ambas as expressões definidas em (I.191) e (I.192) são avaliadas numericamente pelo algoritmo da transformada discreta de Fourier (DFFT) desenvolvido em meados da década de 60 [Chopra, 1995].

O método no domínio da frequência para análise dinâmica de um sistema de equações diferenciais é definido por (I.191) e (I.192). A primeira equação fornece as amplitudes,  $\hat{p}(i\omega)$ , de todas as componentes harmónicas que compõem a excitação  $p(t)$ .

A segunda equação permite avaliar a resposta do sistema a cada componente da excitação e então sobrepor as respostas harmónicas no sentido de obter a resposta  $u(t)$ .

Este método no domínio de frequência, que surge como uma alternativa ao método no domínio do tempo simbolizado pelo integral de Duhamel, descrito atrás.

### **I.6.3. Métodos numéricos no tempo**

Os métodos atrás descritos no presente anexo e o método pelo integral de Duhamel encontram-se restringidos a sistemas lineares, não permitindo a consideração do comportamento inelástico de estruturas previsto durante a ocorrência de sismos em que o movimento do solo seja intenso.

A única aproximação prática para este tipo de sistemas envolve métodos numéricos no tempo (*time-stepping methods*). Estes métodos são igualmente uteis para avaliar a resposta de sistemas lineares face a excitações – força aplicada  $p(t)$  ou movimento do solo  $\ddot{u}_g(t)$  - que surjam como demasiado complicadas para ser definidas analiticamente e tenham que ser decritas apenas por via numérica.

## I.7. Equações do movimento para sistemas estruturais planos sujeitos a translação

Admitindo o deslocamento do solo,  $u_g$ , o deslocamento total (ou absoluto) de cada massa,  $m_j$ , definido por  $u_j^t$  e o deslocamento relativo entre a referida massa e o solo,  $u_j$ . Em cada instante de tempo estes deslocamentos são facilmente relacionados por meio de :

$$u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t) \quad (I.193)$$

o que conduz, para todas as massas  $N$  do sistema de  $N$  graus de liberdade, à forma vectorial expressa pela equação (I.194):

$$u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t)1 \quad (I.194)$$

em que 1 corresponde ao vector de ordem  $N$  com cada elemento igual à unidade.

A equação de equilíbrio dinâmico definida para sistemas MDOF permanece válida, exceptuando que  $p(t)=0$ , uma vez que não estão aplicadas quaisquer forças externas. Desta forma:

$$f_I + f_D + f_S = 0 \quad (I.195)$$

No entanto, apenas os movimentos relativos entre as massas e a base do sistema estrutural MDOF resultantes das deformações estruturais produzem forças elásticas e de amortecimento.

Assim, admitindo sistemas lineares, as equações (207) e (210) definidas permanecem válidas. No que refere a forças de inércia, uma vez que estas se encontram intimamente relacionadas com as acelerações totais das massas associadas a cada um dos  $N$  graus de liberdade, é possível afirmar que a equação (213) toma a forma:

$$f_I = m\ddot{u}^t \quad (I.196)$$

Por substituição das equações (207), (210) e (I.195) em (I.194) e utilizando a equação definida em (I.193) obtêm-se:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (I.197)$$

A equação assim definida compreende  $N$  equações diferenciais governativas dos deslocamentos relativos,  $u_j(t)$ , em sistemas lineares elásticos MDOF sujeitos a

acelerações do solo,  $\ddot{u}_g(t)$ . A matriz de rigidez,  $k$ , presente na equação (I.197), refere-se a deslocamentos horizontais,  $u_j$ , sendo obtida pelo método da condensação estática definido na literatura [Chopra, 1995] o que permite eliminar os graus de liberdade verticais e de rotação nos nós. A matriz  $k$  surge como denominada Matriz de Rigidez Lateral.

Por comparação da equação (I.197) com a equação (214) apresentada atrás verifica-se que existe correspondência com as equações do movimento para estruturas sujeitas a duas excitação em separado, isto é, a aceleração do solo e a forças externas. O movimento do solo pode então ser substituído pelas Forças Sísmicas Efectivas, de acordo com o exposto em [Chopra, 1995].

Tendo por base uma abordagem geral dos deslocamentos associados a cada massa observa-se que os deslocamentos totais são expressos a partir de um termo correspondente à aplicação estática do movimento do solo,  $u_j^s$ , adicionado de um deslocamento dinâmico,  $u_j$ , relativo ao deslocamento quasi-estático.

$$u^t(t) = u(t) + u^s(t) \quad (I.198)$$

Este deslocamento quasi-estático pode ser expresso por  $u^s(t) = u_g(t)$ , em que  $\tau$  corresponde ao vector de influência, representa os deslocamentos das massas resultantes da aplicação estática de um deslocamento unitário ao nível do solo. Nestas circunstâncias a equação (I.198) surge como:

$$u^t(t) = u(t) + u_g(t) \quad (I.199)$$

o que substituído na equação geral do movimento definida em 5 traduz:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (I.200)$$

## I.8. Equações do movimento para sistemas estruturais planos sujeitos a rotação

Em virtude das componentes de rotação do movimento do solo não serem directamente mensuráveis durante a ocorrência de acções sísmicas, podem ser estimadas a partir das componentes de translação medidas, sendo conveniente aplicar os conceitos definidos atrás a este tipo de excitação.

No deslocamento total,  $u^t$ , das massas concentradas distinguem-se dois termos: i) componente de deslocamento,  $u$ , associado a deformações estruturais e ii) componente de deslocamento de corpo rígido,  $u^s(t) = l\theta_g(t)$ , derivada da aplicação estática da rotação do solo,  $\theta_g$ ,

$$u^t(t) = u(t) + l\theta_g(t) \quad (I.201)$$

As equações (I.195) e (I.196) mantêm-se válidas, mas a aceleração total,  $\ddot{u}^t(t)$ , deverá ser determinada com base na equação (I.201).

A conjugação das equações referidas permite obter a equação do movimento para sistemas estruturais planos sujeitos a rotação, de acordo com o explicitado em seguida:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -ml\ddot{\theta}_g(t) \quad (I.202)$$

## I.9. Equações do movimento para edifícios simétricos em planta sujeitos a translação

Considerando um sistema simétrico em planta de N graus de liberdade que apresente diafragmas de piso rígidos e vários pórticos em cada uma das direcções x e y, assume-se [Chopra, 1995] que a estrutura pode ser analisada independentemente para cada direcção. Nesta situação verifica-se que a distribuição de massa e rigidez em planta é simétrica relativamente aos eixos referidos.

O movimento do sistema estrutural devido ao movimento do solo ao longo de cada um dos dois eixos principais é definido pela equação (I.197) com a adequada interpretação de cada um dos termos m e k.

A matriz de massa é uma matriz diagonal com elementos na diagonal principal,  $m_{jj}=m_j$ , em que  $m_j$  corresponde à massa total concentrada ao nível do j-ésimo diafragma de piso.

A matriz de rigidez, k, corresponde à matriz de rigidez lateral da estrutura para o movimento em cada uma das direcções principais de vibração do sistema estrutural. A matriz de rigidez lateral de um sistema estrutural pode ser determinada a partir das matrizes de rigidez laterais obtidas para os pórticos individuais integrantes da estrutura.

A título de exemplo para a direcção x o procedimento inclui em primeiro lugar a determinação da matriz de rigidez lateral do i-ésimo pórtico,  $k_{xi}$ , orientado na direcção x por meio da condensação estática [Chopra, 1995].

A rigidez lateral assim obtida fornece uma relação entre as forças laterais,  $f_{Si}$ , no i-ésimo pórtico e o deslocamento lateral do pórtico correspondente,  $u_{xi}$ :

$$f_{Si} = k_{xi} u_{xi} \quad (I.203)$$

Atendendo a que os diafragmas de piso são assumidos como rígidos, todos os pórticos numa determinada direcção apresentam os mesmos deslocamentos laterais

$$u_{xi} = u_x \quad (I.204)$$

em que  $u_x^T = \langle u_{1x}, u_{2x}, \dots, u_{jx}, \dots, u_{Nx} \rangle$  correspondem aos deslocamentos laterais dos pisos definidos ao nível dos seus centros de massa.

Por substituição de (I.204) em (I.203) e considerando a contribuição de todos os pórticos em que foi dividida a estrutura na direcção x obtêm-se:

$$f_s = k_x u_x \quad (I.205)$$

em que  $f_s = \sum_i f_{si}$  corresponde ao vector de forças laterais no centro de massa de cada piso e  $k_x = \sum_i k_{xi}$  é uma matriz de ordem N para edifícios de N graus de liberdade e traduz a rigidez lateral global do edifício.

A equação (I.197) com  $k=k_x$  governa o movimento de translação lateral em x de um sistema de vários pisos sujeito a um movimento do solo na direcção x [Chopra, 1995]. Tudo o que foi definido e exposto para uma direcção (por exemplo para a direcção x) é extensível à direcção que lhe é perpendicular (por exemplo a direcção y).

## I.10. Equações do movimento para edifícios simétricos em planta sujeitos a rotação

Considerando um sistema estrutural de vários pisos simétrico em planta em torno dos eixos  $x$  e  $y$  sujeito a uma excitação de base correspondente a uma aceleração rotacional,  $\ddot{u}_{g\theta}(t)$ , em torno de um eixo vertical ( $z$ ). A excitação considerada causará torção do sistema estrutural, mesmo sem qualquer movimento lateral associado.

As equações que governam o movimento de torção atrás referido podem ser escritas de acordo com o definido na literatura [Chopra, 1995]:

$$r^2 m \ddot{u}_\theta + k_{\theta\theta} u_\theta = -r^2 m \ddot{u}_{g\theta}(t) \quad (I.206)$$

em que, para além das variáveis cujo significado já é conhecido,  $r$  corresponde ao raio de giração dos diafragmas de piso e  $k_{\theta\theta}$  é dado por

$$k_{\theta\theta} = \sum_i (x_i^2 k_{y_i} + y_i^2 k_{x_i}) \quad (I.207)$$

com as variáveis  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $k_{x_i}$  e  $k_{y_i}$  com o significado definido em secções anteriores.

