

EQUAÇÃO NÃO LINEAR DE DECLIVE SUAVE DEPENDENTE DO TEMPO COM INCLUSÃO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA POR REBENTAÇÃO

Ana C. Zózimo¹ e Conceição Juana Fortes²

1: Laboratório Nacional de Engenharia Civil/WW – Consultores de Hidráulica e Obras Marítimas, SA
Av. do Brasil 101, Lisboa, Portugal,
e-mail: catarina.zozimo@wwsa.pt

2: Laboratório Nacional de Engenharia Civil
Av. do Brasil 101, Lisboa, Portugal,
e-mail: jfortes@lnec.pt

Palavras-chave: Rebentação das ondas, Equação não linear de declive suave dependente do tempo incluindo a rebentação das ondas, Modelação numérica, Critérios de rebentação

Resumo. *As equações não lineares de declive suave dependente do tempo são estendidas de forma a incluírem dissipação de energia por rebentação, através da consideração das tensões de Reynolds na equação da conservação da quantidade de movimento e da dedução de uma nova equação não linear de declive suave dependente do tempo. O modelo apresentado neste trabalho é aplicado a um conjunto de ensaios em modelo físico, referentes à propagação e rebentação das ondas em praias de declive constante. Os testes efectuados permitiram seleccionar o critério de rebentação e definir regras para a determinação dos valores para as condições críticas de início e de fim da rebentação, calibrar o valor a atribuir à constante dos termos dissipativos e definir regras para a sua definição, assim como para avaliar o desempenho do modelo. Foram obtidos bons resultados, embora o empolamento da onda tenha sido subestimado. Verificou-se uma estreita relação entre o valor a utilizar para a condição crítica de início da rebentação e a declividade da onda à entrada do domínio de cálculo, e entre o valor da constante dos termos dissipativos e o número de Ursell à entrada do domínio.*

1 INTRODUÇÃO

A propagação de ondas em zonas de profundidade variável pode ser bem descrita pela equação linear de declive suave apresentada por [1]. Esta equação tem em conta os efeitos combinados da refração, difracção e reflexão de ondas de pequena amplitude ($H/h \ll 1$, sendo H a altura da onda e h a profundidade de água) propagando-se em fundos de declive suave. [2] demonstraram que esta equação é válida para fundos de inclinação até 1:3, permitindo a sua utilização na generalidade dos domínios costeiros.

A equação de declive suave tem vindo a ser alvo de várias extensões de forma a poder modelar outros fenómenos - efeitos das correntes na propagação das ondas [3], a dissipação de energia (por atrito de fundo ou por rebentação) - e a poder ser utilizada em fundos de inclinação não suave e em zonas onde as hipóteses da teoria linear deixam de ser válidas ([4], [5]). Mais recentemente, [6], através de fronteiras absorventes numéricas (*sponge layers*), implementaram num modelo baseado nas equações de declive suave, as características absorventes de um sistema de aproveitamento de energia das ondas (*Wave Energy Converter*) do tipo galgável, e estudaram a redução da altura da onda a jusante desse sistema para ondas uni e multi-direccionais.

No entanto, apesar destas extensões, a equação de declive suave apresenta limitações na simulação da propagação de ondas e à medida que a onda se aproxima de águas cada vez menos profundas, estas teorias deixam de ser válidas, pois os efeitos não lineares tornam-se mais importantes.

De forma a ultrapassar as limitações, tanto da equação linear de declive suave em águas pouco profundas, como das equações de Boussinesq em águas profundas, [7], [8], [10], [11] e [12]) desenvolveram as equações não lineares de declive suave. Na formulação dessas equações, a estrutura vertical do campo de velocidades é representada de acordo com a solução da equação de Laplace, que lhe dá uma forma hiperbólica, pelo que não têm restrições relativamente às profundidades em que podem ser aplicadas. Em segundo lugar, ao contrário das equações clássicas de declive suave, que utilizam uma única representação do campo de velocidades, esta formulação é baseada numa técnica designada por acoplamento de termos múltiplos. As equações assim deduzidas descrevem a transformação de ondas não lineares, cujo espectro em frequência é de banda larga, propagando-se sobre fundos de profundidade variável. Da versão totalmente não linear das equações ([7]), foram deduzidas versões fracamente não lineares, em que todas as contribuições não lineares de pequena ordem são retidas, pelo que são considerados os efeitos não lineares tanto em águas de pequenas como de grandes profundidades ([10], [11] e [12]). Seleccionou-se a equação não linear de declive suave dependente do tempo para a inclusão da dissipação da energia por rebentação das ondas pois, ao propagar apenas uma componente de onda, requer um tempo de cálculo bastante inferior ao do conjunto de equações que consideram todas as componentes, embora mantendo a capacidade de propagar um espectro estreito em frequência.

A inclusão da dissipação de energia por rebentação é efectuada através da consideração das tensões de Reynolds na equação da conservação da quantidade de movimento, mas em que o

coeficiente de viscosidade turbulenta é função da coordenada vertical, z , de forma a contabilizar os gradientes verticais.

Para a solução numérica da referida equação, foi modificado o modelo desenvolvido por [10], NLMSE. Esse modelo utiliza o método das diferenças finitas para a discretização espacial e temporal. As condições de fronteira implementadas no modelo são a condição de geração na fronteira de entrada e as condições de reflexão total e de radiação associadas às fronteiras laterais e de saída, respectivamente.

Após esta introdução, nas secções seguintes são apresentados a formulação teórica da dedução da equação não linear de declive suave com rebentação, a discretização numérica do modelo desenvolvido e, por fim, são descritos os testes efectuados para o caso de teste de uma praia de declive constante, utilizados para uma primeira validação do modelo.

2 EQUAÇÃO NÃO LINEAR DE DECLIVE SUAVE DEPENDENTE DO TEMPO COM REBENTAÇÃO

Nesta secção é apresentada primeiramente a formulação teórica da equação não linear de declive suave dependente do tempo sem rebentação, pois esta será a base para a dedução da versão que contempla a dissipação de energia por rebentação.

2.1 Versão da equação sem rebentação

Após a dedução de uma forma alternativa da equação da conservação da quantidade de movimento Eq. (2) [9], essa equação, em conjunto com a equação da continuidade, Eq. (1), **descrevem a propagação de um campo de ondas totalmente dispersivo e fracamente não linear**. A dispersão total de um espectro de banda larga pode ser obtida considerando um pequeno número de termos, $N=2$ ou 3.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left[\left(\frac{\omega_m^2}{gk_m^2} + \eta \right) \vec{U}_m \right] = 0 \quad (1)$$

em que $\vec{U}_m = \vec{U}_m(\vec{x}, t)$ é vector velocidade, η é a elevação da superfície livre, k é numero de onda, g aceleração da gravidade e ω a frequência angular. Por simplificação, o operador gradiente horizontal é designado por $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

$$\sum_{m=1}^N A_{nm} \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial t} + B_n \nabla \left[g\eta + \eta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0 + w_0^2) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^N C_{nm} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}_m) + \vec{D}_{nm} (\nabla \cdot \vec{U}_m) \quad (2)$$

onde

$$A_{nm} = g \int_{-h}^0 F_n F_m dz = \frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{k_n^2 - k_m^2}, \quad A_{nn} = g \int_{-h}^0 F_n^2 dz = \frac{\omega_n^2 + h(gk_n^2 - \omega_n^4/g)}{2k_n^2}, \quad B_n = g \int_{-h}^0 F_n dz = \frac{\omega_n^2}{k_n^2}$$

$$C_{nm} = (B_n - A_{nm})/k_m^2, \quad \vec{D}_{nm} = \nabla C_{nm}$$

$$\bar{D}_{nm} = \frac{4}{(k_m^2 - k_n^2)} \left\{ \frac{\nabla k_m}{k_m} [A_{nm} - (k_m^2 - k_n^2) C_{nm}] + \frac{\nabla h}{h} [(A_{nm} - B_n/2)(A_{mm} - B_m/2)]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3)$$

sendo $\vec{u}_0 = \sum_{m=1}^N \vec{U}_m$ e w_0 a componente vertical da velocidade obtida através de Eq. (4) para $z=0$.

$$w(\vec{x}, z, t) = - \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left[\frac{\sinh k_m (h+z)}{k_m \cosh k_m h} \vec{U}_m(\vec{x}, t) \right] \quad (4)$$

Um caso especial deste conjunto de equações é o obtido com apenas uma componente, ou seja, uma representação singular de \vec{u} e w :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_p^2}{g} + \eta \right) \vec{u}_0 \right] = 0 \quad (5)$$

$$C_p C_g \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} + C_p^2 \nabla \cdot \left[g \eta + \eta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0 + w_0^2) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}_0) + \nabla \left[\frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \right] (\nabla \cdot \vec{u}_0) \right\} \quad (6)$$

onde C_p e C_g são a celeridade de fase e de grupo, respectivamente, obtidas através da teoria linear para uma frequência dominante ω e uma profundidade local h e $\vec{u}_0 = \vec{U}_1$ na profundidade $z=0$.

Embora considerando apenas uma componente, [10] demonstraram que o conjunto de equações dados pelas Eq. (5) e Eq. (6) tem a capacidade de descrever a propagação de um espectro de ondas estreito fracamente não linear.

Através da combinação de (5) e (6) numa única equação, e utilizando as relações de primeira ordem na manipulação dos termos não lineares, obtém-se a **equação não linear de declive suave dependente do tempo** que descreve a evolução da elevação da superfície livre no tempo e no espaço:

$$C_g \eta_{tt} - C_p^3 \nabla^2 \eta - \underbrace{\frac{(C_p - C_g)}{k^2} \nabla^2 \eta}_{\text{termo dispersivo}} - \underbrace{C_p \nabla (C_p C_g) \cdot \nabla \eta}_{\text{termo do empolamento linear}} - \underbrace{\frac{3}{2} g C_p \left(3 - 2 \frac{C_g}{C_p} - \frac{k^2 C_p^4}{g^2} \right) \nabla^2 (\eta^2)}_{\text{termo não linear}} = 0 \quad (7)$$

Esta equação descreve os efeitos combinados da refração e difração não lineares para um dado campo de ondas incidente à medida que este se propaga em zonas de declive suave, que poderão variar desde águas infinitamente profundas até profundidades próximas de zero ([10]).

O modelo de diferenças finitas desenvolvido para a solução da Eq. (7) foi aplicado por [10] ao caso de teste do baixio elíptico de [14], tendo sido obtidos resultados razoáveis. O modelo desenvolvido para a versão unidireccional (que não contempla a componente reflectida da onda) da Eq. (7) foi aplicado aos casos de teste de ondas de Stokes de 2.^a ordem, de ondas cnoidais e do empolamento linear. Para o teste de ondas cnoidais a versão unidireccional deu excelentes resultados. No caso de teste de ondas de Stokes, os resultados também foram bastante bons embora se tenham verificado pequenas discrepâncias na fase, devido à

utilização de ondas de Stokes de terceira ordem experimentais para comparação com a solução numérica. O teste de empolamento linear demonstrou uma concordância quase perfeita entre a solução analítica e os resultados numéricos obtidos com a versão linear do modelo unidireccional.

Em [15] foi desenvolvido um modelo de elementos finitos para resolver a equação não linear de declive suave dependente do tempo, nas suas versões unidimensional, unidireccional, e bidimensional. As versões unidimensional e unidireccional foram aplicadas aos casos de teste de propagação de ondas de Stokes e de ondas cnoidais em fundos de profundidade constante, e de propagação de ondas lineares em fundos de declive constante. A versão bidimensional foi também aplicada ao caso de teste de ondas de Stokes e de propagação de ondas lineares num fundo de declive constante e ainda ao caso de teste do baixio elíptico de [14]. Na aplicação do modelo unidimensional para o caso de teste de ondas de Stokes verificaram-se problemas de instabilidade não linear no modelo. A forma de ultrapassar esses problemas foi a utilização de filtros. Verificou-se também que o modelo unidimensional foi “sensível” à escolha da condição inicial, do tempo total de cálculo e das condições de fronteira a impor, o que dificulta a sua aplicação generalizada a novos casos de teste.

2.2 Inclusão da dissipação de energia por rebentação

Para incluir a rebentação na equação de declive de suave dependente do tempo, foram consideradas as tensões de Reynolds na equação original da conservação da quantidade de movimento, e foi efectuada a dedução de uma nova equação da conservação da quantidade de movimento.

A dedução da equação da conservação da quantidade de movimento com a inclusão de dissipação de energia por rebentação foi efectuada recorrendo às mesmas transformações e hipóteses simplificativas que as utilizadas por [9].

É de realçar que o que se pretende utilizar nesta abordagem é o conceito de viscosidade turbulenta porque o modelo que se pretende desenvolver é potencial, não é turbulento. Apenas se vai aproveitar a semelhança existente entre a rebentação e o movimento turbulento, de forma a se poder recorrer ao conceito da viscosidade turbulenta para a modelação da rebentação. Não se pretende reproduzir a rebentação, mas sim simular o seu efeito na variação da superfície livre através de uma dissipação. A premissa desta abordagem é a de que embora a turbulência tenha um papel muito importante na rebentação, para uma grande parte das aplicações em engenharia, o mais importante é o efeito médio da turbulência e não a sua flutuação instantânea ([17]).

Na próxima secção apresentam-se os passos principais da dedução da nova equação de declive suave dependente do tempo com dissipação de energia por rebentação.

2.2.1 Dedução teórica

Para a equação da conservação da quantidade de movimento para o escoamento médio, o termo a ser adicionado é a correlação entre as flutuações de velocidade, que é o denominado tensor de radiação de Reynolds.

As tensões de Reynolds são dadas por, segundo o conceito da viscosidade turbulenta ([18]):

$$R_{ij} = -\overline{\rho u_i' u_j'} = \overline{\rho} N(j) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{\rho} N(i) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \quad (8)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$, $N(i) = N_h$ se $j \neq 3$ e $N(j) = N_z$ se $j = 3$. Assume-se que N_h varia em x e em y e que N_z apenas varia em z .

Considerando o conceito da viscosidade turbulenta para a definição das tensões de Reynolds, as equações da conservação da quantidade de movimento unidimensionais a ter em conta serão:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - N_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial N_h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{Termos dissipativos}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(N_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - N_h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial N_h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{Termos dissipativos}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (10)$$

Para a dedução da nova equação da conservação da quantidade de movimento com dissipação de energia por rebentação, introduz-se a hipótese simplificativa de que a viscosidade turbulenta vertical é o termo principal na dissipação de energia. Esta hipótese é plausível, pois a viscosidade turbulenta vertical é a que está associada ao termo uw que, como [15] verificaram através de ensaios unidimensionais para rebentação progressiva, é o principal contribuidor para as tensões de Reynolds. Também segundo [19], a velocidade do escoamento médio e a intensidade da turbulência variam com a distância à superfície na rebentação progressiva, embora as variações verticais não sejam tão evidentes na rebentação mergulhante. Mais recentemente, [20] verificaram que as distribuições verticais das velocidades turbulentas $\overline{u'w'}$ são significativas apenas perto da zona de rebentação.

Ao considerar que a viscosidade turbulenta vertical é o termo principal na dissipação de energia, N_h pode ser desprezado. Consequentemente, começa-se-á a partir das seguintes equações de conservação da quantidade de movimento, em que se fez uso da condição de irrotacionalidade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{\text{Termos dissipativos}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(N_z \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{Termos dissipativos}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (12)$$

Segundo o procedimento referido em [10], efectua-se a dedução de uma forma alternativa da equação da conservação da quantidade de movimento, que na sua forma final é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[g\eta + \eta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (u_0 u_0 + w_0^2) \right] + \\
 & \underbrace{\frac{\partial N_z}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \right) u \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\}}_{\text{termo C}} + \underbrace{(N_z)_\eta \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}}_{\text{termo B}} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1-F}{k^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

onde u_0 é a velocidade horizontal em $z=0$.

O próximo passo consiste em multiplicar a Eq. (13) por gF e integrar a equação resultante entre $-h(x)$ e a superfície linearizada: $z=0$. Também por simplicidade, $-h(x)$ será designado apenas por $-h$. Os termos que terão que ser resolvidos são os designados por B e por C na Eq. (13).

Para o termo B obtém-se:

$$g \int_{-h}^0 F(B) dz = g \int_{-h}^0 F(N_z)_\eta \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz = (N_z)_\eta \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} g \int_{-h}^0 F dz = (N_z)_\eta C_p^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad (14)$$

Para o termo C tem-se:

$$g \int_{-h}^0 F(C) dz = g \int_{-h}^0 F \frac{\partial N_z}{\partial z} \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \right) u \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\}}_{\text{termo D}} dz \quad (15)$$

Neste momento, apenas o termo D da Eq. (15), que não pertence à equação original, tem que ser resolvido

$$\begin{aligned}
 & g \int_{-h}^0 F \frac{\partial N_z}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \right) u \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} dz = \\
 & = g \int_{-h}^0 F \frac{\partial N_z}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \right) u + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} dz \quad (16)
 \end{aligned}$$

Para a solução deste integral, como foi assumido que N_z variava em z , este tem que ser definido. Como uma primeira aproximação, essa definição será efectuada como sugerido por , considerando que N_z é proporcional à variação vertical da velocidade horizontal das partículas, pelo que $N_z = \alpha F$, sendo α um parâmetro a calibrar de dimensões m^2/s , à semelhança dos coeficientes de viscosidade turbulenta. Portanto, tem-se que:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} = \alpha \frac{k}{\cosh kh} \sinh k(h+z) \quad (17)$$

Após a substituição das soluções dos integrais, e juntando as suas contribuições à equação original, obtém-se a **equação da conservação da quantidade de movimento com dissipação de energia por rebentação**, equivalente à Eq. (6):

$$\begin{aligned}
 & C_p C_g \frac{\partial u_0}{\partial t} + C_p^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[g\eta + \eta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (u_0 u_0 + w_0^2) \right] + \\
 & \underbrace{\alpha HA \frac{\partial C_p}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x}}_{\text{termo E}} + \underbrace{\frac{\alpha k^2 C_p^6}{3g^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}}_{\text{termo F}} + \underbrace{(N_z)_\eta C_p^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}}_{\text{termo G}} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \right] \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 HA = & \frac{2gh}{3[C_p - 2(C_p - C_g)]} - \frac{2C_p}{3 \cosh kh} - \frac{2[C_p - 2(C_p - C_g)]}{3 \cosh kh} + \\
 & + \frac{2k^2 C_p^5}{9g^2} + \frac{2C_p^2 [C_p - 2(C_p - C_g)]}{3gh} + \frac{2k^2 C_p^5}{3g^2} - \frac{2hk^4 C_p^8}{3g^3 [C_p - 2(C_p - C_g)]} \quad (19)
 \end{aligned}$$

A equação da continuidade é dada pela versão unidimensional da Eq. (5):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{C_p^2}{g} + \eta \right) u_0 \right] = 0 \quad (20)$$

Continuando com a dedução, a equação da continuidade e a equação da conservação da quantidade de movimento são combinadas numa única equação que, após várias manipulações, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & C_g \eta_{tt} - C_p^3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{(C_p - C_g)}{k^2} \frac{\partial^2 \eta_{tt}}{\partial x^2}}_{\text{termo dispersivo}} - \underbrace{C_p \frac{\partial}{\partial x} (C_p C_g) \frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{termo do empolamento linear}} - \\
 & - \underbrace{\frac{3}{2} g C_p \left(3 - 2 \frac{C_g}{C_p} - \frac{k^2 C_p^4}{g^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta^2)}_{\text{termo não linear}} + \frac{2\alpha}{3} (E - 2) \frac{\partial C_p}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \\
 & - \alpha \frac{k C_p^5}{g^2} \left((F - 2) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{k C_p}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) - (N_z)_\eta \left[C_g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_p^2}{C_g} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \omega^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 0 \quad (21)
 \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 E - 2 = & \frac{1}{\cosh kh} [C_p + (C_p - 2(C_p - C_g))] - \frac{k^2 C_p^5}{3g^2} + \frac{hk^4 C_p^7}{g^3 (2n - 1)} - \\
 & - \frac{hg}{C_p (2n - 1)} - \frac{k^2 C_p^5}{g^2} - \frac{C_p^2 [C_p - 2(C_p - C_g)]}{gh} \\
 F - 2 = & \frac{2C_p}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + 2k \frac{\partial C_p}{\partial x} - \frac{k C_p}{3C_g} \frac{\partial C_g}{\partial x} \quad (N_z)_\eta = (\alpha F)_\eta = \alpha \left(\frac{\cosh k(h + \eta)}{\cosh kh} \right) \quad (22)
 \end{aligned}$$

onde α é uma constante a definir de dimensões m^2/s , cujo valor terá que ser calibrado. A Eq. (21) é a **equação não linear de declive suave dependente do tempo com dissipação de energia por rebentação**.

Como o modelo a desenvolver se trata de um modelo de resolução da fase, foi necessário

optar por um de entre os critérios de rebentação apresentados na bibliografia para modelos que resolvem a fase da onda. Como critérios de rebentação a implementar no modelo de ondas, seleccionaram-se os critérios de [21] e de [22].

2.2.2 Critério de rebentação de Schäffer et al. 1993

Em [22] introduziu-se o método da face frontal da onda, em associação com o modelo dissipativo do rolo de superfície. O parâmetro deste método é o ângulo, ϕ , do declive local da parte frontal da onda, que é controlado por três parâmetros: a condição do início da rebentação da onda, ϕ_b , a condição de término, ϕ_0 e o tempo de duração da formação do rolo, t^* (também referido em alguns trabalhos como $t_{1/2}$, embora não tenha sido utilizado neste trabalho). Quando o valor de ϕ em qualquer ponto da parte frontal da onda excede ϕ_b , é activado o início da rebentação. Os valores destes coeficientes têm que ser calibrados de acordo com a batimetria e com o tipo de rebentação.

Os valores dados por [22] são $(\phi_b, \phi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$, embora para alguns testes efectuados, $\phi_b = 18^\circ$ tenha dado melhores resultados. Os testes para os quais foi necessária uma diminuição do valor de ϕ_b dizem respeito a rebentações do tipo mergulhante, enquanto os casos de teste associados a $(\phi_b, \phi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$ são referentes a rebentações progressivas.

Em [23] considerou-se o par de valores $(\phi_b, \phi_0) = (14^\circ, 7^\circ)$ para uma rebentação progressiva num perfil barra-fossa. Em [24] melhoraram-se as características dispersivas do modelo de Boussinesq utilizado e o par de ângulos foi novamente alterado, para $(\phi_b, \phi_0) = (32^\circ, 10^\circ)$. O declive local máximo para a onda cnoidal sugere que $\tan \phi_b = 0.5$, pelo que $\phi_b = 26.6^\circ$ ([22]). Perto do ponto de rebentação, as condições são altamente não lineares e equações apenas fracamente não lineares, podem subestimar o declive máximo local. Consequentemente, é necessário um valor inferior de $\tan \phi$ de forma a reproduzir correctamente o ponto de rebentação ([22]).

2.2.3 Critério de rebentação de Kennedy et al. 2000

Segundo este critério, a rebentação começa quando a derivada temporal da elevação da superfície livre, η_t , excede um determinado valor, η_t^* . A utilização da derivada temporal da elevação da superfície livre, η_t , assegura que a dissipação está concentrada na face frontal da onda, como ocorre na natureza ([21]).

Em [21] considerou-se $\eta_t^{(I)} = b\sqrt{gh}$ para o início da rebentação da onda e $\eta_t^{(F)} = d\sqrt{gh}$ para o término da rebentação. Os valores dos coeficientes b e d foram escolhidos de forma a obter concordância entre os resultados das equações de [25] e [26] e resultados experimentais, onde $b = 0.35$ foi adoptado para uma praia barra-fossa, $b = 0.65$ para uma praia de declive monotónico e $d = 0.15$ ([27] e [21]). Tal como no critério de [22], os dois coeficientes (b e d) têm que ser calibrados.

2.3 Discretização numérica e condições de fronteira

As resoluções espacial e temporal da equação não linear de declive suave com dissipação de energia por rebentação são efectuadas através do método das diferenças finitas. Seguindo um procedimento idêntico ao descrito em [10], a Eq. (21) é discretizada por diferenças finitas centrais de 2.^a ordem, para um espaçamento em x (Δx) e um passo temporal (Δt) constantes:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{p}{\Delta x^2} \eta_{i-1}^{k+1} + \left(n + 2 \frac{p}{\Delta x^2} \right) \eta_i^{k+1} - \frac{p}{\Delta x^2} \eta_{i+1}^{k+1} = \\
 & = \frac{p}{\Delta x^2} \left[(\eta_{i+1}^{k-1} - 2\eta_i^{k-1} + \eta_{i-1}^{k-1}) - 2(\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k) \right] - n(\eta_i^{k-1} - 2\eta_i^k) + \\
 & + C_p^2 t_x^2 (\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k) - \frac{1}{4} t_x^2 \left[(nC_p^2)_{i+1} - (nC_p^2)_{i-1} \right] (\eta_{i+1}^k - \eta_{i-1}^k) + \\
 & + \frac{q}{6} t_x^2 \left[(\eta_{i+2}^k + \eta_{i+1}^k + \eta_i^k)(\eta_{i+2}^k - \eta_i^k) - (\eta_i^k + \eta_{i-1}^k + \eta_{i-2}^k)(\eta_i^k - \eta_{i-2}^k) \right] - \\
 & - \frac{\alpha}{3\Delta x^3} DD1 (C_{p_{i+1}} - C_{p_{i-1}}) (\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k) + \frac{\alpha k C_p^4}{g^2} [DD2 - DD3] + DD4 \tag{23}
 \end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned}
 DD1 & = \left[\frac{2n}{\cosh kh} - \frac{k^2 C_p^4}{3g^2} + \frac{hk^4 C_p^6}{g^3(2n-1)} - \frac{hg}{C_p^2(2n-1)} - \frac{k^2 C_p^4}{g^2} - \frac{C_p(C_p - 2(C_p - nC_p))}{gh} \right] \\
 DD2 & = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{1C_p}{3\Delta x} (K_{i+1} - K_{i-1}) + \frac{k}{2\Delta x} (C_{p_{i+1}} - C_{p_{i-1}}) - \right. \\
 & \left. - \frac{k}{6n\Delta x} \left((nC_p)_{i+1} - (nC_p)_{i-1} \right) \right] (\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k) \\
 DD3 & = \frac{k^3 C_p}{6\Delta x} (\eta_{i+1}^k - \eta_{i-1}^k) \\
 DD4 & = \alpha \frac{\cosh k(h + \eta)}{\cosh kh} \left[\frac{n}{2\Delta x^3} \left(\left(\frac{C_p}{n} \right)_{i+1} - \left(\frac{C_p}{n} \right)_{i-1} \right) (\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k) + \frac{k^2 C_p}{2\Delta x} (\eta_{i+1}^k - \eta_{i-1}^k) \right] \tag{24}
 \end{aligned}$$

As condições de fronteira do modelo são a fronteira de radiação de Sommerfeld, da condição de geração de Dirichlet e também a fronteira de geração-radiação.

O modelo de diferenças finitas desenvolvido para a solução da Eq. (7) foi adaptado para resolver a Eq. (21) e deu origem ao modelo NLMSE_1D_BR, [29].

É de referir que testes preliminares demonstraram que o modelo numérico na sua forma actual é bastante sensível ao instante de tempo em que são activados os termos dissipativos da equação. Efectivamente, a activação dos termos dissipativos conduzia muitas vezes à interrupção dos cálculos, dependendo do instante de tempo em que se procedia à sua activação. Como, nesta fase, o objectivo principal do desenvolvimento do modelo numérico é o de verificar a validade dos novos termos, optou-se por efectuar um procedimento iterativo.

Tal consiste numa primeira corrida do modelo numérico, sem dissipação de energia, para a definição dos pontos da malha em que devem ser activados os termos dissipativos e, posteriormente, com essa informação, efectua-se a corrida do modelo já com os termos dissipativos activos. A eliminação deste procedimento iterativo é um trabalho futuro.

3 Testes efectuados ao modelo desenvolvido

Para a validação do modelo NLMSE_1D_BR, foi efectuada a sua aplicação ao caso de teste de [28], de propagação de ondas sinusoidais sobre um fundo de profundidade monotonicamente decrescente. Os objectivos principais foram:

- Verificar qual o critério de rebentação mais adequado, [21] ou [22] e quais os valores que deverão ser atribuídos à respectiva condição crítica para o início da rebentação;
- Efectuar uma primeira análise de sensibilidade aos valores a atribuir ao critério de rebentação com o intuito de estabelecer uma metodologia para a sua definição consoante as características de cada caso de teste;
- Verificar se o tipo de fronteira de entrada tem uma influência significativa no critério de rebentação a seleccionar, assim como nos seus valores óptimos e no valor de α ;
- Avaliar o desempenho do modelo relativamente a dados de ensaios em modelo físico em praias de declive constante.

3.1 Caso de Teste de Hansen e Svendsen

3.1.1 Condições de cálculo

A batimetria utilizada para os cálculos com o modelo para o teste de [28] é apresentada na Figura 1. A profundidade na zona de profundidade constante é igual a 0.36 m e a rampa tem um declive de 1:34.26. Após a rampa, foi introduzida uma zona de profundidade constante num comprimento de, aproximadamente, 23 m de forma a minorar possíveis influências da fronteira de saída nos cálculos com o modelo numérico.

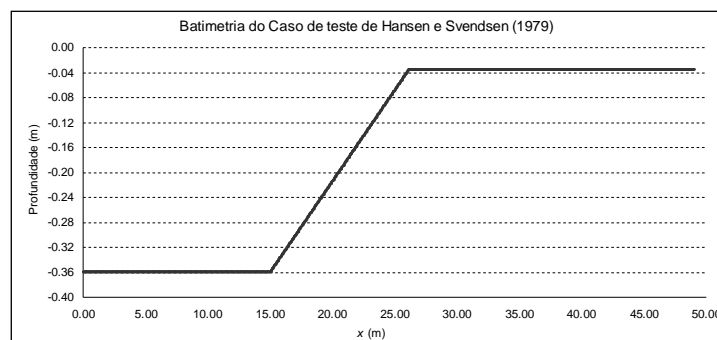


Figura 1: Batimetria para uma profundidade mínima de 0.035 m.

Dos ensaios em modelo físico realizados por [28] foram seleccionados quatro, cujas características são apresentadas na Tabela 1, em que H_e , L_e e h_{min} são a altura de onda e o comprimento de onda à entrada do domínio de cálculo e a profundidade mínima, respectivamente, x_b é a localização da rebentação em x , h_b é a profundidade no local da rebentação, H_b é a altura de onda imediatamente antes da rebentação (considerada como o valor mais elevado de H), $NPCO_b$ e $NPCO_{min}$ são o número de pontos por comprimento de onda na profundidade de rebentação e na menor profundidade do domínio, respectivamente, e ξ_b é o parâmetro *Iribarren inshore*. Para os cálculos com o modelo numérico, a profundidade mínima variou consoante o caso de teste (ver Tabela 1).

Tabela 1. Características dos casos de teste.

<i>Caso de teste</i>	h_{min}	T (s)	H_e (m)	L_e (m)	x_b (m)	h_b (m)	H_b (m)	C_0 (m/s)	Δt (s)	$NPCO_b$	$NPCO_{min}$	ξ_b
051041	0.035	2.00	0.036	3.530	25.08	0.066	0.074	3.22	0.0090	40	31	0.27
061071	0.035	1.67	0.067	2.865	23.40	0.114	0.104	2.60	0.0093	43	26	0.19
031041	0.039	3.33	0.043	6.118	24.32	0.088	0.094	5.20	0.0044	77	52	0.40
A10112	0.039	1.00	0.067	1.435	24.32	0.088	0.077	1.56	0.0110	22	15	0.13

O tipo de rebentação é do tipo progressivo, embora o caso de teste 031041 já se encontre no limite da rebentação mergulhante.

O valor a atribuir ao número de Courant e ao espaçamento em x foi seleccionado após a comparação dos resultados do modelo NLMSE_1D_BR com os dados dos ensaios em modelo físico para o caso de teste 051041, e para um valor de α igual a 0.14.

O espaçamento que conduziu a melhores concordâncias, independentemente do valor atribuído ao número de Courant foi o de 0.04 m. Quanto ao valor a atribuir ao número de Courant, em testes preliminares ao comportamento do modelo verificou-se uma relação inversa entre o número de Courant e o valor a atribuir ao parâmetro α . Consequentemente, seleccionou-se o valor de 0.4 para o número de Courant de forma a permitir a utilização de valores superiores de α , excepto para o caso de teste 031041, em que um número de Courant igual a 0.2 conduziu a melhores resultados.

3.1.2 *Análise do comportamento dos critérios de rebentação e do parâmetro de início de rebentação*

Para os quatro ensaios e para os dois tipos de fronteira de entrada: geração e geração-radiação, foram efectuados cálculos para verificar o comportamento dos dois critérios de rebentação: [21] (daqui em diante denominado de K2000) e [22] (daqui em diante denominado S1993).

Para o critério de rebentação K2000 foram testados valores do parâmetro b dentro da gama 0.050-1.0, com um intervalo de 0.005. Para o critério de rebentação S1993 foram testados valores do ângulo ϕ_b entre 1.0° e 35.0°, com um intervalo de 0.1°.

Os resultados obtidos foram avaliados em termos das diferenças (em percentagem), Δx_{reb} (%), entre a localização da rebentação calculada pelo modelo ($x_{b\text{ estimado}}$) para cada valor testado para a condição crítica, e a localização da rebentação nos dados dos

ensaios em modelo físico ($x_{b \text{ dados}}$):

$$\Delta x_{reb} (\%) = \left(\frac{x_{b \text{ estimado}} - x_{b \text{ dados}}}{x_{b \text{ dados}}} \right) * 100 \quad (25)$$

A fronteira de entrada do tipo geração é indicada pela sigla G e a do tipo geração-radiação é indicada pela sigla GR.

Tabela 2. Teste de Hansen e Svendsen (1979). Valores dos parâmetros dos dois critérios de rebentação que conduziram aos melhores resultados. A sigla N.A. representa a gama de valores que não deverão ser utilizados.

Caso de teste	Fronteira	K2000		S1993	
		Condição 1	Condição 2	Condição 1	Condição 2
051041	GR	$b=0.095/0.100$ $\Delta x_{reb} = 0.160\%$	$b=0.085$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$	$\phi_b = 5.600^\circ/5.700^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. $\leq 2.300^\circ$)	$\phi_b = 5.000^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. $\leq 2.400^\circ$)
	G	$b=0.100$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$	$b=0.090$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$	$\phi_b = 5.800^\circ/5.900^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. $\leq 2.300^\circ$)	$\phi_b = 5.200^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. $\leq 2.400^\circ$)
061071	GR	$b=0.130$ $\Delta x_{reb} = 0.340\%$ (N.A. ≤ 0.095)	$b=0.110$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. ≤ 0.105)	$\phi_b = 7.400^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. ≤ 5.900)	$\phi_b = 6.600$ $\Delta x_{reb} = 0.171\%$ (N.A. ≤ 6.500)
	G	$b=0.125$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. ≤ 0.090)	$b=0.110$ $\Delta x_{reb} = -0.171\%$ (N.A. ≤ 0.100)	$\phi_b = 7.300^\circ/7.400^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. $\leq 5.850^\circ$)	$\phi_b = 6.600^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.171\%$ (N.A. $\leq 6.400^\circ$)
031041	GR	$b=0.050/0.100$ $\Delta x_{reb} = 1.480\%$	$b=0.050$ $\Delta x_{reb} = 1.974\%$	$\phi_b = 2.200^\circ/2.300^\circ$ $\Delta x_{reb} =$ $-0.165\%/0.165\%$ (N.A. $\leq 1.800^\circ$)	$\phi_b = 2.00^\circ/2.10^\circ$ $\Delta x_{reb} =$ $-0.165\%/0.165\%$ (N.A. $\leq 1.800^\circ$)
	G	$b=0.050$ $\Delta x_{reb} = 1.316\%$	$b=0.050$ $\Delta x_{reb} = 1.645\%$	$\phi_b = 2.300^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.000\%$ (N.A. $\leq 1.800^\circ$)	$\phi_b = 2.10^\circ/2.20^\circ$ $\Delta x_{reb} =$ $-0.165\%/0.165\%$ (N.A. $\leq 1.900^\circ$)
A10112	GR	$b=0.130$ $\Delta x_{reb} = 1.809\%$ (N.A. ≤ 0.125)	$b=0.125$ $\Delta x_{reb} = 3.289\%$ (N.A. ≤ 0.120)	$\phi_b = 9.500^\circ$ $\Delta x_{reb} = 3.289\%$ (N.A. $\leq 9.400^\circ$)	$\phi_b = 12.200^\circ$ $\Delta x_{reb} = 4.276\%$ (N.A. $\leq 9.000^\circ$)
	G	$b=0.140/0.145$ $\Delta x_{reb} =$ $-0.165\%/0.165\%$ (N.A. ≤ 0.125)	$b=0.125$ $\Delta x_{reb} = 0.329\%$ (N.A. ≤ 0.120)	$\phi_b = 8.900^\circ$ $\Delta x_{reb} = 0.329\%$ (N.A. $\leq 8.800^\circ$)	$\phi_b = 9.300^\circ$ $\Delta x_{reb} = 2.632\%$ (N.A. $\leq 9.200^\circ$)

Da análise de resultados efectuada, denotam-se certas tendências de comportamento comuns a todos os casos de teste, e aos dois critérios de rebentação:

- Os resultados obtidos tendencialmente sobrestimam a localização da rebentação verificada nos dados;

- O critério S1993 foi o que conseguiu detectar o ponto de rebentação com mais sucesso, embora seja o critério que mais vezes deu origem a uma gama de valores que não deverão ser utilizados;
- Os valores óptimos a atribuir aos parâmetros do critério de rebentação para os quatro casos de teste apresentaram uma grande variabilidade;

O comportamento dos dois critérios de rebentação, K2000 e S1993, foi semelhante, tendo o caso de teste A10112 tido melhores resultados com os valores mais elevados dos parâmetros, seguido pelos casos de teste 061071, 051041 e 031041.

3.1.3 Definição do valor a atribuir à condição crítica de início da rebentação

De forma a estabelecer um padrão na grandeza dos valores a atribuir aos parâmetros dos critérios de rebentação consoante as características da onda de cada caso de teste (pois a batimetria mantém-se constante em todos os ensaios), foram calculadas, para a profundidade à entrada do domínio de cálculo, h_e , e para a profundidade no ponto de rebentação, h_b , uma série de grandezas cujos valores se apresentam na Tabela 3.

A ordem dos casos de teste na Tabela 3 é a do valor do parâmetro do critério de rebentação mais elevado (A10112) para o mais baixo (031041). Para a apresentação dos casos de teste na Tabela 3 foi atribuída uma escala de 1 a 4 referente ao valor dos parâmetros do critério de rebentação, em que 1 representa o valor mais elevado e 4 o mais baixo. Para todos os casos de teste, à entrada do domínio de cálculo a onda encontra-se em águas de profundidade intermédia ($0.05 \leq h/L < 0.5$).

Tabela 3. Características das ondas na profundidade da entrada do domínio de cálculo e do ponto de rebentação.

Caso de teste	L (m)		h/L		kh		H/L		H/h		Ursell		b, ϕ_b
	h_e	h_b	h_e	h_b	h_e	h_b	h_e	h_b	h_e	h_b	h_e	h_b	
A10112	1.44	0.87	0.25	0.10	1.57	0.87	0.05	0.09	0.19	0.88	2.96	86.21	1
061071	2.87	1.72	0.13	0.07	0.79	0.42	0.02	0.05	0.19	0.91	11.19	170.93	2
051041	3.53	1.59	0.10	0.04	0.64	0.26	0.01	0.05	0.10	1.13	9.61	658.01	3
031041	6.11	3.08	0.06	0.03	0.37	0.18	0.007	0.03	0.12	1.07	34.50	1300.38	4

O valor a atribuir ao parâmetro do critério de rebentação diminui com a diminuição da profundidade relativa (h/L) e de kh à entrada do domínio de cálculo, aumenta com a diminuição do número de Ursell no ponto de rebentação e diminui com a diminuição da declividade da onda (H/L) à entrada do domínio de cálculo e no ponto de rebentação.

Analisando a diminuição relativa dos valores a atribuir a ϕ_b para o critério S1993 com a diminuição relativa da declividade da onda à entrada do domínio de cálculo, verifica-se que essa relação é grosseiramente de cerca de 1 para 2 (i.e., uma determinada diminuição do valor da declividade da onda corresponde a uma diminuição de cerca de metade do valor do parâmetro). Note-se que o caso de teste 031041 corresponde a uma rebentação que já está no

limite para ser considerada como mergulhante, possuindo características diferentes das dos outros três casos de teste. Este facto também poderá ser responsável pelo tão baixo valor óptimo para o critério de rebentação.

3.1.4 Calibração do parâmetro α

Após a análise de sensibilidade aos critérios a utilizar para a definição do início da rebentação e da definição dos seus respectivos valores óptimos, segue-se a calibração do valor mais adequado a atribuir ao parâmetro α para cada caso de teste.

Para tal, foram utilizados os valores óptimos do parâmetro ϕ_b para cada caso de teste, e, para cada aplicação do modelo com diferentes valores de α , os seus resultados são comparados (em termos dos valores de H_{rms}) com os dados dos ensaios em modelo físico através do cálculo das variáveis *MAE* (*Mean Absolute Error*) e índice de concordância de Willmott.

O domínio de cálculo foi separado em duas secções para a comparação dos resultados do modelo com os dados dos ensaios em modelo físico. Para cada caso de teste, a Secção 1 corresponde à zona compreendida entre a entrada do domínio de cálculo e o ponto de rebentação (excluindo este último) e a Secção 2 corresponde à zona entre o ponto de rebentação (inclusive) e o último ponto do domínio de cálculo para o qual existem dados dos ensaios em modelo físico.

Na Tabela 4 referem-se os valores utilizados para o parâmetro ϕ_b para o critério S1993, Condição 1, a gama de valores de α testados e o número de Courant utilizado para cada caso de teste. São também referidas as localizações da rebentação, tanto nos dados, como no modelo, para os valores de ϕ_b utilizados. Quando essas localizações são diferentes consoante o tipo de fronteira de entrada do modelo, são referidas as duas localizações e é indicado entre parêntesis a que tipo de fronteira de entrada pertencem.

Tabela 4. Características dos testes efectuados e valores dos respectivos parâmetros para a calibração do parâmetro α .

Caso de teste	ϕ_b (°)		x_b Dados (m)	x_b Modelo (m)	Cour.	gama de valores de α (m ² /s)
	GR	G				
051041	5.60	5.80	25.08	25.08	0.40	0.05-0.20 ($\Delta = 0.01$)
061071	7.40	7.40	23.40	23.40	0.40	
031041	2.30	2.30	24.32	24.32 (G); 24.36 (GR)	0.20	
A10112	9.50	8.90	24.32	24.40 (G); 25.12 (GR)	0.40	

A título de exemplo, e para os ensaios 061071 e A10112, na Tabela 5 e na Tabela 6 são apresentados os valores da média, do desvio padrão, do MAE e do índice de concordância de Willmott para as diferenças entre os resultados numéricos e os valores experimentais para as duas secções do domínio, para a condição de geração, para os valores de α testados. O valor/valores do parâmetro α que conduzem às melhores concordâncias com os dados dos

ensaios em modelo físico são assinalados com a cor azul. Na avaliação da melhor concordância, é efectuado um balanço entre os resultados obtidos para as duas secções, e é tido em conta o andamento dos valores de H_{rms} obtidos com cada valor de α , pois, por vezes surgem algumas oscilações, que não são traduzidas nos resultados estatísticos.

Tabela 5. Caso de teste 061071. Fronteira de Geração. Valores da média, do desvio padrão, do *MAE* e do índice de concordância de Willmott para as diferenças entre os resultados numéricos e os valores experimentais para a Secção 1 e para a Secção 2.

Caso de teste 061071 – Fronteira de Geração								
Secção 1					Secção 2			
α (m ² /s)	Média ΔH_{rms} (m)	Desvio padrão ΔH_{rms} (m)	<i>MAE</i> (m)	Índice de Willmott	Média ΔH_{rms} (m)	Desvio padrão ΔH_{rms} (m)	<i>MAE</i> (m)	Índice de Willmott
0.05	0.00198	0.00338	0.00335	0.93969	0.01612	0.01421	0.01885	0.73521
0.06	0.00216	0.00380	0.00361	0.92194	0.01147	0.01130	0.01436	0.84497
0.07	0.00264	0.00320	0.00361	0.93480	0.00722	0.00891	0.01020	0.92535
0.08	0.00310	0.00305	0.00383	0.93190	0.00332	0.00711	0.00640	0.96825
0.09	0.00361	0.00323	0.00429	0.91737	-0.00034	0.00609	0.00493	0.98247
0.10	0.00427	0.00370	0.00503	0.88910	-0.00390	0.00567	0.00576	0.97912
0.11	0.00509	0.00432	0.00597	0.84908	-0.00731	0.00570	0.00811	0.96411

Para o caso de teste A10112, após alguns testes preliminares verificou-se que o valor mais baixo de α a testar teria que ser inferior a 0.05 m²/s, pelo que apenas para este teste foram também testados valores de α iguais a 0.03 m²/s e 0.04 m²/s.

Tabela 6. Caso de teste A10112. Fronteira de Geração. Valores da média, do desvio padrão, do *MAE* e do índice de concordância de Willmott para as diferenças entre os resultados numéricos e os valores experimentais para a Secção 1 e para a Secção 2.

Caso de teste A10112 – Fronteira de Geração								
Secção 1					Secção 2			
α (m ² /s)	Média ΔH_{rms} (m)	Desvio padrão ΔH_{rms} (m)	<i>MAE</i> (m)	Índice de Willmott	Média ΔH_{rms} (m)	Desvio padrão ΔH_{rms} (m)	<i>MAE</i> (m)	Índice de Willmott
0.03	-0.00044	0.00335	0.00276	0.73262	-0.00206	0.00254	0.00274	0.97846
0.04	-0.00036	0.00393	0.00331	0.71030	-0.00522	0.00307	0.00522	0.94473
0.05	-0.00044	0.00335	0.00276	0.73262	-0.00206	0.00254	0.00274	0.97846
0.06	-0.00036	0.00393	0.00331	0.71030	-0.01059	0.00770	0.01130	0.83720
0.07	-0.00044	0.00335	0.00276	0.73262	-0.01597	0.01136	0.01646	0.73335

Da análise dos resultados obtidos podem ser efectuadas algumas constatações gerais, nomeadamente:

- Para a Secção 1, a variabilidade das diferenças entre os resultados numéricos e os dados experimentais tende a aumentar com o aumento do valor atribuído ao parâmetro α ;
- Na Secção 2 a tendência é a oposta: a variabilidade das diferenças diminui com o aumento do valor de α . Uma excepção para a Secção 2 são os resultados obtidos para o caso de teste A10112 (ver Tabela 5 e Tabela 6), em que a variabilidade das diferenças aumentou com o aumento do valor de α .

Este comportamento ocorre uma vez que, a valores mais elevados de α correspondem dissipações de energia mais intensas, pelo que a solução numérica vai sofrer uma alteração mais marcada, provocando em alguns casos instabilidades na solução do modelo numérico, tendo como consequência que os problemas da fronteira de saída se tornem mais notórios.

Relativamente aos valores óptimos a atribuir ao parâmetro α para cada caso de teste, tal como foi referido, foram contabilizados, não só os valores de *MAE* nas duas secções, como também o andamento da solução numérica, devido a, como referido, por vezes valores mais elevados de α conduzirem a instabilidades na solução numérica. Os valores óptimos a atribuir ao parâmetro α estão discriminados na Tabela 7 para cada caso de teste.

Tabela 7. Gama de valores óptimos de α para cada caso de teste.

<i>Caso de teste</i>	<i>Gama de valores de α óptimos (m²/s)</i>
A10112	0.04-0.05
061071	0.08-0.09
051041	0.09-0.10
031041	0.18-0.20

É de realçar ainda que os valores de concordância para o caso de teste A10112 foram bastante inferiores aos dos outros casos de teste.

Analisando todos os resultados obtidos, podem-se colocar as hipóteses de que o valor a atribuir ao parâmetro α aumenta com a diminuição do valor de h/L à entrada do domínio de cálculo, com a diminuição de H/L no ponto de rebentação, com o aumento do número de Ursell à entrada do domínio de cálculo e com o aumento do valor do número de Iribarren *inshore*, ξ_b .

3.1.5 Comparação entre o andamento da solução numérica e dos dados experimentais

Da Figura 2 à Figura 3 são apresentados os valores experimentais e numéricos para todo o domínio de cálculo para os casos de teste 051041 e 031041, para a fronteira de entrada do tipo geração do modelo NLMSE_1D_BR, para a gama de valores de α óptimos para cada caso de teste.

Da análise do andamento das soluções numéricas pode-se concluir que existem algumas oscilações da solução numérica, principalmente na zona do domínio de cálculo anterior ao ponto de rebentação e que o modelo NLMSE_1D_BR não foi capaz de atingir a altura de onda verificada nos dados no ponto de rebentação. Tal deve-se ao facto de este ser um modelo apenas fracamente não linear.

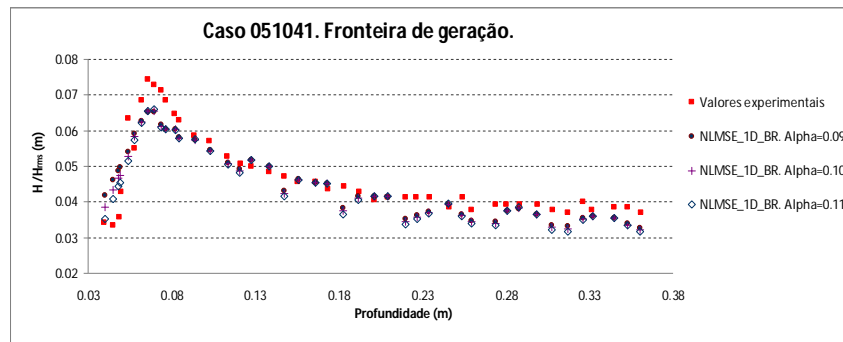


Figura 2. Caso de teste 051041. Fronteira de geração. Comparação dos resultados do modelo NLMSE_1D_BR para valores de $\alpha = 0.09, 0.10$ e $0.11 \text{ m}^2/\text{s}$ com os valores experimentais.

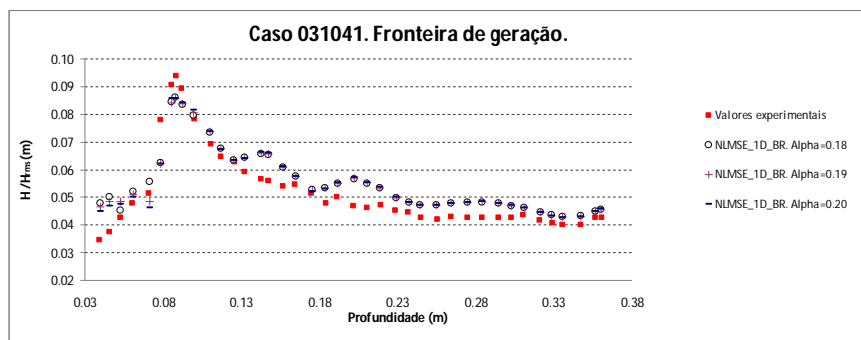


Figura 3. Caso de teste A031041. Comparação dos resultados do modelo NLMSE_1D_BR para valores de $\alpha = 0.18, 0.19$ e $0.20 \text{ m}^2/\text{s}$ com os valores experimentais.

4 CONCLUSÕES

Nesta comunicação, descreveu-se o modelo de diferenças finitas NLMSE_1D_BR que resolve a equação não linear de declive suave com rebentação, apresentada por [29]. O modelo foi aplicado na propagação de ondas lineares sobre um fundo de declive constante, para os quais os resultados do modelo foram comparados com resultados experimentais.

As principais conclusões dos testes do modelo NLMSE_1D_BR apresentados neste trabalho são:

- O modelo NLMSE_1D_BR não foi capaz de atingir a altura de onda verificada nos dados no ponto de rebentação por ser um modelo apenas fracamente não linear;
- No andamento dos valores das alturas de onda verificaram-se algumas oscilações da solução numérica, principalmente na zona do domínio de cálculo anterior ao ponto de rebentação;
- O modelo obteve bons resultados na sua comparação com os resultados dos ensaios em modelo físico para praias de declive constante;
- O critério de rebentação que conseguiu determinar com mais precisão o ponto de rebentação foi o de [22];

- A menores declividades de onda à entrada do domínio de cálculo corresponderam menores valores dos parâmetros de rebentação para a condição crítica de início da primeira rebentação;
- Um valor superior do número de Ursell à entrada do domínio de cálculo deu origem a um valor óptimo superior para o parâmetro dos termos dissipativos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Professor Serdar Beji a sua disponibilidade no esclarecimento de dúvidas e na cedência do código do modelo NLMSE_1D, e à FCT o seu financiamento através da Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/18183/2004 e do projecto PTDC/ECM/67411/2006.

REFERÊNCIAS

- [1] Berkhoff, J.C.W. 1972. “Computation of combined refraction-diffraction”, in *Proc. 13th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, Vol. 2, pp. 471-490.
- [2] Booij, N. 1981. *Gravity waves on water with non-uniform depth and current*, PhD Thesis, Technical University of Delft.
- [3] Kirby, J.T. 1984. “A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography”, in *Journal of Geophysical Research*, Vol. 89, C1, pp. 745-747.
- [4] Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. 1983. Propagation of weakly non-linear surface waves in the presence of varying depth and current”, in *Proc. of 20th International Association Hydraulic Research*, pp. 198-202.
- [5] Liu, P.L.-F., Tsay, T.-K. 1984. “Refraction-Diffraction model for weakly non-linear water waves”, in *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 141, pp. 265-274.
- [6] Beels, C., Troch, P., De Vish, K., Kofoed, J.P., De Backer, G. 2010. “Application of the time-dependent mild-slope equations for the simulation of wake effects in the lee of a farm of Wave Dragon wave energy converters”, in *Renewable Energy*, 35, pp. 1644-1661.
- [7] Nadaoka, K., Beji, S., Nakagawa, Y. 1994. “A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions”, in *Proc. of 24th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, pp. 427-441.
- [8] Nadaoka, K., Beji, S., Nakagawa, Y. 1997. “A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves”, in *Proc. Royal Society London A*, 453, pp. 303-319.
- [9] Beji, S., Nadaoka, K. 1997a. “A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves”, in *Proc. Royal Society London A*, Vol. 453, pp. 319-332.
- [10] Beji, S., Nadaoka, K. 1997b. *Modelling of Nonlinear-Dispersive waves over arbitrary depths*, Technical Report, N.º 56, Department of Civil Engineering, Tokyo Institute of Technology, 115 pp.
- [11] Beji, S., Nadaoka, K. 1997c. “Spectral modeling of nonlinear wave shoaling and breaking over arbitrary depths”, in *Proc. Coastal Dynamics’97*, pp. 285-294.
- [12] Beji, S., Nadaoka, K. 1999. “A spectral model for unidirectional nonlinear wave

- propagation over arbitrary depths”, in *Coastal Engineering*, 36, pp. 1-16.
- [13] Beji, S. 2009b. *Esclarecimento de dúvidas quanto à implementação da rebentação na equação não linear de declive suave dependente do tempo*, Comunicação pessoal.
- [14] Berkhoff, J.C.W., Booij, N., Radder, A. C. 1982. “Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear waves”, *Coast. Eng.*, 6, pp.255-279.
- [15] Nadaoka, K., Hino, M., Koyano, Y. 1989. “Structure of the turbulent flow field under breaking waves in the surf zone”, in *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 204, pp.359-387.
- [16] Fortes, C.J.E.M. 2001. *Transformações não-lineares de ondas marítimas em zonas portuárias. Análise pelo método dos Elementos Finitos*, PhD, IST/DEM.
- [17] Jaw, S.Y., Chen, C.J. 1998. “Present status of second order closure turbulence models. I: Overview”, in *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, Nº. 5, pp. 485-501.
- [18] Kowalik, Z., Murty, T.S. 1993. *Numerical modelling of ocean dynamics*, Advanced series on Ocean Engineering, Vol. 5, World Scientific, Singapore, 481 pp.
- [19] Ting, F.C.K., Kirby, J.T. 1994. “Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone”, in *Coastal Engineering*, 24, pp. 51-80.
- [20] De Serio, F., Mossa, M. 2006. “Experimental study on the hydrodynamics of regular breaking waves”, in *Coastal Engineering*, 53, pp. 99-113.
- [21] Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. 2000. “Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and run-up. I: 1D”, in *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 126, pp. 39-47.
- [22] Schäffer, H.A., Madsen, P.A., Deigaard, R. 1993. “A Boussinesq model for waves breaking in shallow water”, in *Coastal Engineering*, 20, pp. 185-202.
- [23] Madsen, P.A., Sørensen, O.R., Schäffer, H.A. 1997. “Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part 1. Model description and cross-shore motion of regular waves”, in *Coastal Engineering*, 32, pp. 255-287.
- [24] Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., Madsen, P.A. 1998. “Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model: Part III. Wave-induced horizontal nearshore circulations”, in *Coastal Engineering*, 33, pp. 155– 176.
- [25] Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R. 1995. “A fully non linear Boussinesq model for surface waves. I: highly non linear, unsteady waves”, in *Journal of Fluid Mechanics*, 294, pp. 71-92.
- [26] Nwogu, O. 1993. “Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation”, in *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 119(6), pp. 618-638.
- [27] Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A.B., Dalrymple, R.A., 1998. *FUNWAVE 1.0 Fully Nonlinear Boussinesq Wave Model Documentation and User’s Manual*, CACR-98-06, Center for Applied Coastal Research, University of Delaware.
- [28] Hansen, J.B., Svendsen, I.A. 1979. *Regular waves in shoaling water: experimental data*, Technical Report, ISVA, Series paper 21.
- [29] Zozimo, A.C. 2010. *Modelação Numérica da Rebentação das Ondas. Sistema Integrado de Modelação da Agitação Marítima*, Dissertação para a obtenção do grau de Doutor em Ciências de Engenharia pelo Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Novembro.