



LABORATÓRIO NACIONAL  
DE ENGENHARIA CIVIL

CENTRO DE INSTRUMENTAÇÃO CIENTÍFICA  
Núcleo de Qualidade Metrológica

Proc. 1104/551/01062

# **AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO NO LABORATÓRIO DE ENSAIOS DE MATERIAIS PARA PAVIMENTAÇÃO (LNEC/PAVMAT)**

## **Ensaio Marshall**

Estudo realizado por solicitação do Departamento  
de Transportes do LNEC

Lisboa • Junho de 2010

**I&D** INSTRUMENTAÇÃO CIENTÍFICA

**RELATÓRIO 221/2010 – NQM**



**Avaliação de Incertezas de Medição no  
Laboratório de Ensaios de Materiais para Pavimentação (LNEC/PAVMAT):  
Ensaio Marshall**

**Resumo**

Este relatório descreve o processo de avaliação de incertezas de medição do ensaio Marshall de misturas betuminosas realizado pelo Laboratório de Ensaios de Materiais para Pavimentação do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC/PAVMAT). O presente documento contém uma descrição sumária do ensaio estudado, apresentando as relações funcionais aplicadas e as tabelas de balanço de incertezas de medição obtidas com base na aplicação do método GUM.

**Evaluation of the Measurement Uncertainties at the  
Laboratório de Ensaios de Materiais para Pavimentação (LNEC/PAVMAT):  
Marshall Test**

**Abstract**

This report describes the measurement uncertainty evaluation procedure related with the Marshall test for bituminous mixtures performed at the Laboratório de Ensaios de Materiais para Pavimentação of the Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC/PAVMAT). The present document contains a brief description of the studied test, presents the applied functional relations and the measurement uncertainty budget tables obtained through the use of the GUM method.

**Évaluation des Incertudes de Mesure au  
Laboratório de Ensaios de Materiais para Pavimentação (LNEC/PAVMAT):  
Essai Marshall**

**Résumé**

Ce rapport décrit la procédure d'évaluation des incertudes de mesure de l'essai Marshall des mélanges bitumineux réalisé au Laboratório de Ensaios de Materiais para Pavimentação du Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC/PAVMAT). Le présent document contient une brève description de l'essai étudié, présent les relations fonctionnelles appliquées et les tableaux du bilan des incertitudes de mesure basé sur l'application de la méthode GUM.

# Índice de matérias

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>2. ENSAIO MARSHALL DE MISTURAS BETUMINOSAS.....</b>	<b>3</b>
<b>2.1 Descrição sumária do ensaio .....</b>	<b>3</b>
<b>2.2 Relações e diagramas funcionais.....</b>	<b>8</b>
<b>2.3 Tabelas de balanço de incertezas de medição .....</b>	<b>12</b>
2.3.1 Estágio inicial.....	12
2.3.2 Estágio intermédio .....	14
2.3.3 Estágio final .....	21
<b>3. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>24</b>
<b>4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>26</b>
<b>ANEXO A – MÉTODO GUM PARA AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO ..</b>	<b>28</b>
<b>A.1 Introdução.....</b>	<b>28</b>
<b>A.2 Fase de formulação.....</b>	<b>29</b>
<b>A.3 Fase de cálculo .....</b>	<b>30</b>
<b>A.4 Tabela de balanço de incertezas de medição.....</b>	<b>37</b>



## 1. INTRODUÇÃO

No Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) coexistem diversos laboratórios que desenvolvem uma significativa actividade experimental incorporando, nos ensaios desenvolvidos, a medição de grandezas mensuráveis e, conseqüentemente, os requisitos de qualidade para a expressão dos resultados dessa medição (as suas estimativas e as respectivas incertezas associadas).

O Núcleo de Qualidade Metrológica (NQM), inserido no Centro de Instrumentação Científica, é um sector do LNEC com competências apropriadas para promover estudos de caracterização metrológica quer relacionados com a calibração e ensaio de instrumentação científica quer com o desempenho dos sistemas de medição.

No que respeita aos ensaios desenvolvidos por outros sectores do LNEC, a colaboração entre o NQM e esses sectores é traduzida na concretização de estudos de caracterização metrológica onde se insere, com particular destaque, a avaliação das incertezas de medição associadas às grandezas de saída. O presente estudo, relacionado com o ensaio Marshall de misturas betuminosas executado pelo Laboratório de Ensaios de Materiais para Pavimentação (LNEC/PAVMAT), foi realizado por solicitação do Núcleo de Infra-estruturas Rodoviárias e Aeroportuárias do Departamento de Transportes do LNEC.

Atendendo a que este laboratório se encontra integrado no Sistema de Gestão da Qualidade do LNEC, este estudo permite, em particular, cumprir um requisito normativo que decorre da aplicação da norma de referência NP EN ISO/IEC 17025 [1], que indica o conjunto de requisitos gerais de competência que os laboratórios de calibração e de ensaio acreditados devem cumprir.

A declaração da incerteza de medição constitui um dos requisitos normativos aplicáveis aos ensaios laboratoriais, correspondendo a um elemento de quantificação da qualidade das medições realizadas. Faz-se notar que este parâmetro adquire uma relevância particular ao permitir a comparação entre medições obtidas em ensaios laboratoriais realizados por outras entidades.

Neste documento é descrito o processo de avaliação das incertezas de medição no ensaio Marshall de misturas betuminosas com base na actividade laboratorial desenvolvida pelo LNEC/PAVMAT no âmbito da caracterização experimental de materiais utilizados em

pavimentação de infra-estruturas rodoviárias e aeroportuárias. Deste modo, é promovida a continuidade do estudo metrológico de ensaios de misturas betuminosas [2], o qual constitui um elemento bibliográfico de suporte à avaliação de incertezas de medição descrita no presente documento.

A motivação para a realização de um estudo dedicado exclusivamente ao ensaio Marshall resulta, em parte, do substancial número de grandezas de interesse obtidas por via indirecta mediante o registo gráfico de duas grandezas de entrada: estabilidade e deformação. Acresce o facto de, no LNEC/PAVMAT, o cálculo das respectivas estimativas de grandezas de interesse ser suportado por uma aplicação computacional associada ao equipamento de ensaio utilizado (máquina de compressão uniaxial), na qual se desconhecem os algoritmos utilizados impedindo, deste modo, o estudo da propagação das incertezas de medição das grandezas de entrada até às grandezas de saída.

Tendo em vista a resolução do problema da determinação da qualidade da medição de grandezas de interesse no ensaio Marshall, a solução proposta pelo NQM consistiu no desenvolvimento de uma aplicação autónoma de suporte computacional<sup>1</sup> que se baseia nos mesmos dados provenientes do equipamento de ensaio e aplica algoritmos matemáticos conhecidos visando obter estimativas das grandezas (por via indirecta) e respectivas incertezas de medição. Desta forma, é possível garantir a robustez e a qualidade dos resultados obtidos e proceder a uma adequada validação da ferramenta computacional.

O Capítulo 2 do presente documento apresenta uma descrição sumária do ensaio estudado no que se refere ao seu objectivo, método e procedimento de ensaio adoptados. Menciona, igualmente, o conjunto de relações funcionais que se estabelecem entre as várias grandezas de entrada e saída, bem como, a caracterização probabilística que conduz à elaboração das respectivas tabelas de balanço de incertezas pelo método GUM [3], atendendo à reduzida não-linearidade associada aos modelos matemáticos representativos dos processos de medição. O Capítulo 3 é dedicado às considerações finais.

Com o intuito de facilitar a compreensão do processo de avaliação de incertezas de medição realizado para o ensaio laboratorial analisado, são descritos, no Anexo A, os aspectos fundamentais relacionados com a formulação e o cálculo de incertezas de medição pelo método GUM.

---

<sup>1</sup> Os aspectos de concepção, desenvolvimento, concretização e avaliação da aplicação computacional serão expostos em publicação dedicada. No presente documento apenas é descrito o processo de avaliação de incertezas de medição que será concretizado na referida aplicação computacional.



## 2. ENSAIO MARSHALL DE MISTURAS BETUMINOSAS

### 2.1 Descrição sumária do ensaio

O presente ensaio tem por objectivo a determinação das grandezas – estabilidade máxima corrigida, deformação, deformação tangencial e quociente Marshall – associadas a uma mistura betuminosa<sup>2</sup>, constituindo um dos vários ensaios experimentais realizados pelo LNEC/PAVMAT no âmbito da sua actividade laboratorial acreditada de caracterização de materiais utilizados na pavimentação de infra-estruturas rodoviárias e aeroportuárias.

Neste laboratório do LNEC, a concretização experimental do ensaio Marshall procura obedecer aos requisitos especificados na norma de referência EN 12697-34:2004+A1 [4] no que respeita ao equipamento, método e procedimento de ensaio adoptados. Da sua realização resulta a representação gráfica da curva de estabilidade<sup>3</sup> versus deformação relativa a um provete de ensaio sujeito a uma carga de compressão uniaxial usando um equipamento de ensaio dedicado. A Figura 2.1 ilustra uma representação esquemática da referida curva.

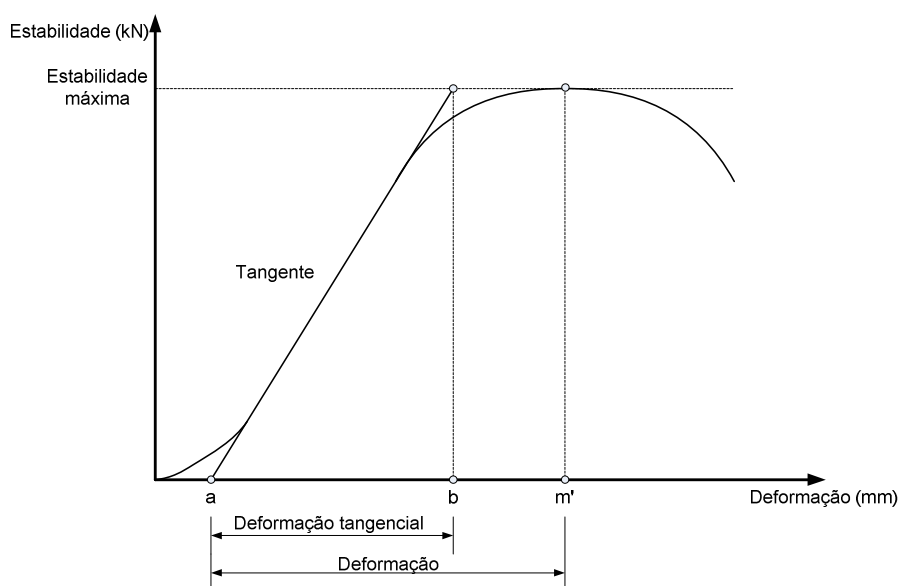


Figura 2.1: Curva típica de estabilidade versus deformação obtida num ensaio Marshall.

<sup>2</sup> Constituída por partículas de agregado (material granular de origem natural, artificial ou reciclado) aglomeradas por um ligante betuminoso (cujo constituinte principal é um hidrocarboneto contendo, igualmente, outras substâncias em menor quantidade como o oxigénio e o enxofre).

<sup>3</sup> Tendo em conta o enquadramento metrológico definido no Sistema Internacional de Unidades (SI), a grandeza *estabilidade* corresponde, efectivamente, à grandeza força. Por motivo de coerência com a nomenclatura estabelecida pela norma de referência, é mantida, no presente documento, a designação normativa *estabilidade*.

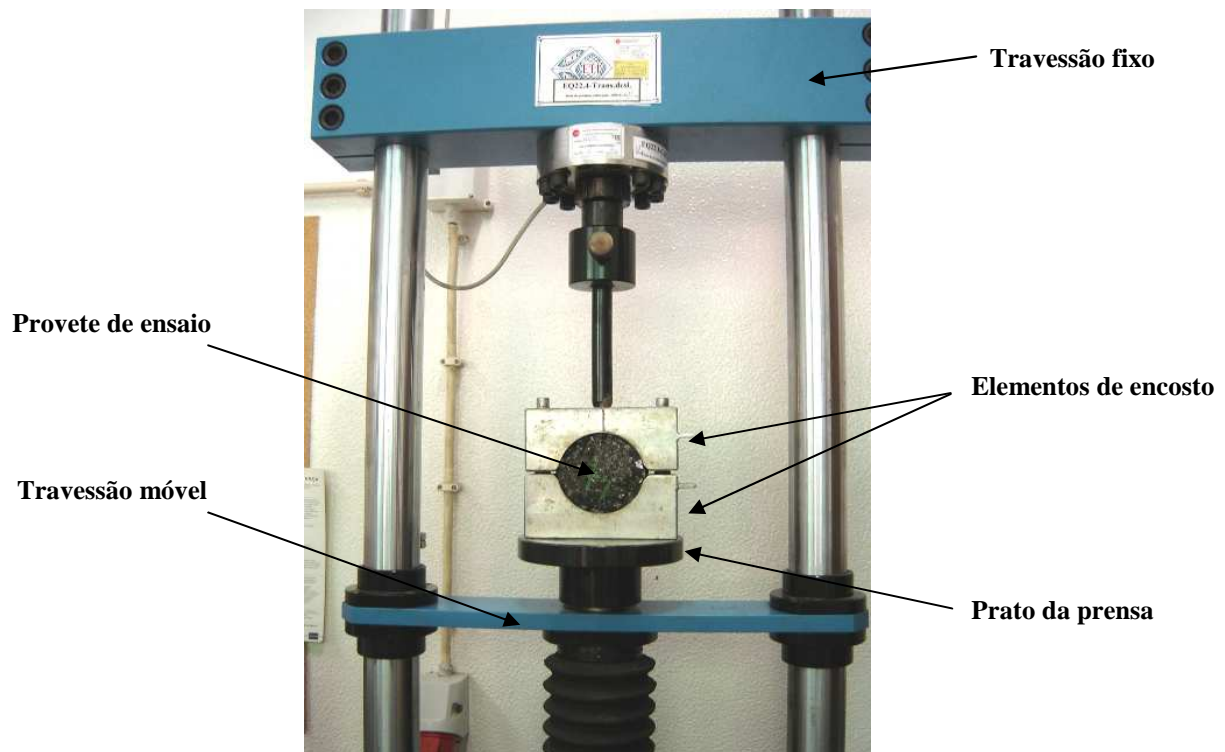
De acordo com a referida norma, as grandezas de interesse acima mencionadas apresentam as seguintes definições:

- estabilidade máxima corrigida – corresponde à carga máxima de compressão uniaxial observada durante o ensaio, sujeita a uma correcção associada à altura ou volume do provete ensaiado;
- deformação – diferença entre a deformação do provete registada para a situação de carga máxima e a deformação obtida por extrapolação da tangente ao gráfico para a situação de carga nula (pontos  $m'$  e  $a$ , respectivamente, no eixo das abcissas no gráfico da Figura 2.1);
- deformação tangencial – diferença entre a deformação obtida por extrapolação da tangente ao gráfico para a situação de carga máxima e a deformação obtida por extrapolação da tangente ao gráfico para a situação de carga nula (pontos  $b$  e  $a$ , respectivamente, no eixo das abcissas no gráfico da Figura 2.1);
- quociente Marshall – rácio entre as grandezas estabilidade máxima corrigida e deformação.

A norma de referência indica como requisito técnico para a concretização da carga de compressão uniaxial do provete de ensaio, a utilização de uma prensa (*vide* Figura 2.2) com uma capacidade de carga mínima de 28 kN, segundo uma taxa de compressão compreendida no intervalo  $(50 \pm 2)$  mm/min permitindo, no início do ensaio, a existência de um período transitório inferior a 20 % do tempo total de aplicação de carga sobre o provete. Salienta-se que os elementos estruturais de encosto e aplicação de carga de compressão no provete apresentam requisitos dimensionais e geométricos próprios que importa cumprir, dado constituírem grandezas de influência relevantes.

No ensaio Marshall é possível identificar duas cadeias de medição distintas dedicadas à medição das grandezas estabilidade e deformação do provete ensaiado. No caso do LNEC/PAVMAT, a máquina de compressão uniaxial utilizada incorpora ambas as cadeias de medição, as quais se encontram rastreadas a padrões primários de força e comprimento, respectivamente. Destacam-se como elementos sensoriais, a existência de um transdutor de força na cadeia de medição de estabilidade e de um transdutor de deslocamento na cadeia de medição de deformação. A aquisição, registo, processamento e indicação de valores lidos é

assegurada por uma aplicação computacional incorporada no equipamento de ensaio, da qual resulta o acesso apenas aos resultados finais.



*Figura 2.2: Máquina de compressão uniaxial utilizada pelo LNEC/PAVMAT.*

De acordo com a norma de referência mencionada [4], cada amostra laboratorial representativa de uma dada mistura betuminosa deverá permitir a preparação de quatro provetes de ensaio (idênticos ao apresentado na Figura 2.3), obtidos pela mistura e compactação por impacto dos seus componentes (agregado e ligante betuminoso) segundo processos experimentais normalizados [5] [6].



*Figura 2.3: Provede cilíndrico para ensaio Marshall.*

Cada provete preparado é previamente caracterizado mediante a realização de ensaio de determinação da baridade seguindo os requisitos e indicações presentes na norma aplicável EN 12697-6 [7] e cuja respectiva avaliação de incertezas de medição é apresentada em [2]. Deste ensaio resulta, igualmente, a quantificação da grandeza volume do provete de ensaio que constitui uma grandeza de entrada no ensaio Marshall, conforme será exposto na secção 2.2 – Relações e diagramas funcionais.

Concluídas as etapas acima mencionadas, o ensaio Marshall é antecedido pela imersão do provete de ensaio num banho de água cuja temperatura deve estar compreendida no intervalo  $(60 \pm 1) ^\circ\text{C}$ . Este período de imersão do provete, visando a sua uniformização térmica, deve possuir uma duração de 40 minutos a 60 minutos, constituindo a etapa final da fase de preparação (resumida esquematicamente na Figura 2.4).

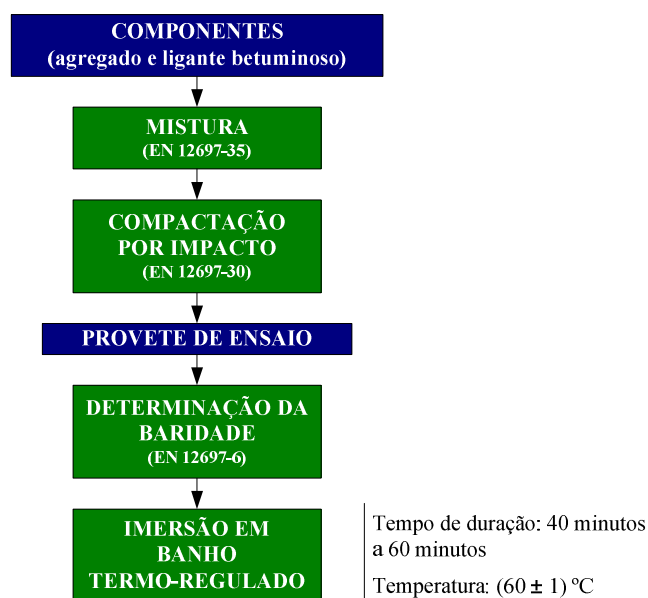


Figura 2.4: Representação esquemática da fase de preparação dos provetes de ensaio.

O procedimento de ensaio adoptado pelo LNEC/PAVMAT é suportado na norma de referência [4], sendo de destacar as seguintes etapas consecutivas de concretização experimental do ensaio:

1. limpeza das guias dos travessões da máquina de compressão uniaxial e dos elementos de encosto ao provete de ensaio;
2. aquecimento dos elementos de encosto em banho de água termo-regulado para uma temperatura de  $(60 \pm 1) ^\circ\text{C}$  durante um período mínimo de tempo de 30 minutos ou de uma hora, caso o aquecimento seja efectuado em forno;

3. remoção do provete de ensaio do banho termo-regulado e posterior posicionamento num dos elementos de encosto previamente aquecido (conforme previsto no ponto anterior);
4. montagem do conjunto elementos de encosto e provete de ensaio na máquina de compressão uniaxial;
5. aplicação de carga de compressão no provete de ensaio com respectivo registo numérico e gráfico das medições de estabilidade e deformação; as etapas 3, 4 e 5 do procedimento de ensaio devem ser executadas num intervalo de tempo inferior a 40 segundos; a aplicação de carga de compressão termina a partir do instante em que é atingida a carga máxima que o provete de ensaio consegue suportar;
6. repetição dos pontos anteriores para os restantes três provetes de ensaio obtidos da amostra de mistura betuminosa em estudo.

De acordo com a norma de referência [4], as estimativas das grandezas estabilidade máxima corrigida e deformação no conjunto dos quatro provetes ensaiados são sujeitas a um processo de validação no qual se definem os seguintes critérios de aceitação: a diferença percentual das estimativas individuais de estabilidade máxima corrigida e de deformação relativamente aos valores médios da amostra em questão deve ser inferior a 15 % e 20 %, respectivamente. O estabelecimento destes critérios visa assegurar uma repetibilidade aceitável tendo em conta a natureza do ensaio em questão.

Caso um ou mais provetes não cumpram o critério supracitado, o provete que apresente a maior diferença percentual deverá ser rejeitado sendo repetido o processo de validação para a nova amostra composta pelos resultados dos restantes três provetes. Caso se verifique, novamente, que existe algum provete que não cumpra os critérios de aceitação acima mencionados, os resultados obtidos são considerados inválidos impondo a realização do ensaio Marshall para uma nova amostra de quatro provetes representativos da mistura betuminosa em análise.

Na secção seguinte do presente documento, é promovida a descrição dos modelos matemáticos que suportam, por via indirecta, as medições de grandezas de interesse no ensaio Marshall. Neste âmbito, e tendo por objectivo facilitar a compreensão do relacionamento entre as grandezas envolvidas é, também, apresentado o respectivo diagrama funcional.

## 2.2 Relações e diagramas funcionais

A realização do ensaio Marshall de misturas betuminosas está centrada na obtenção do registo gráfico das grandezas de entrada estabilidade,  $S_i$ , e deformação,  $F_i$ , do provete de ensaio, conforme representado na Figura 2.5.

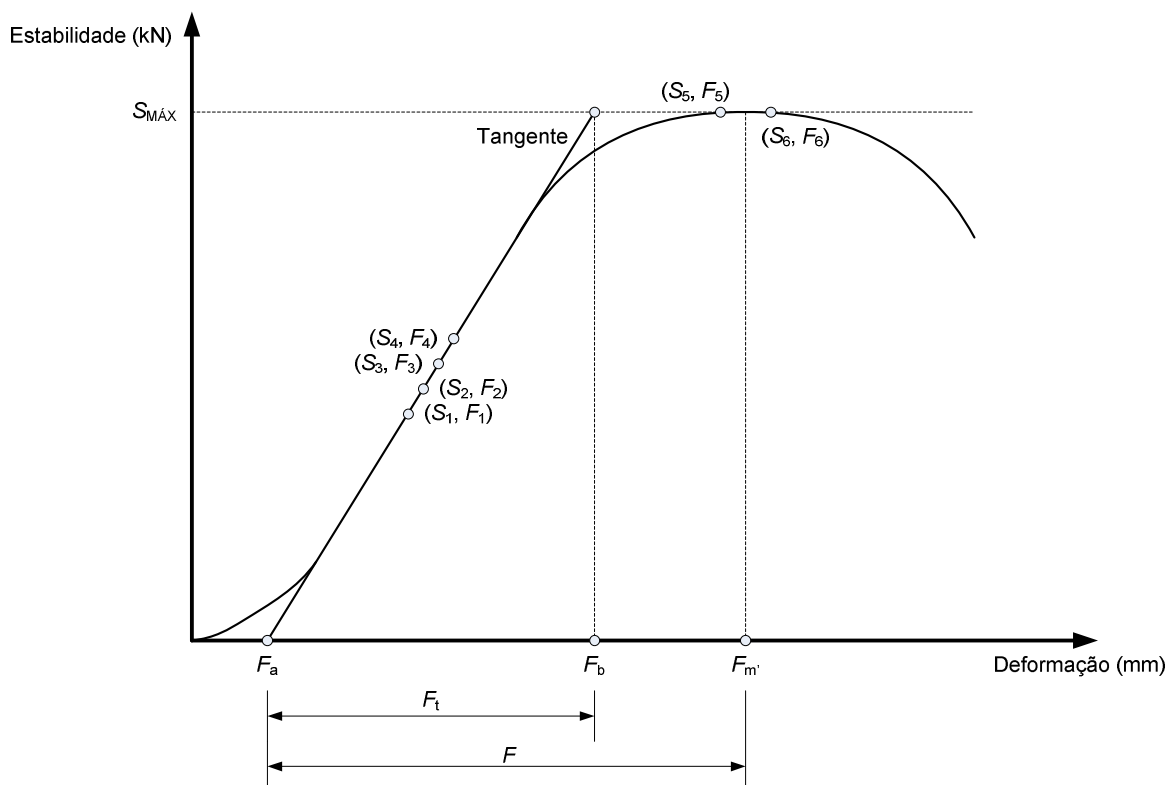


Figura 2.5: Pontos de interesse da curva estabilidade vs. deformação no ensaio Marshall.

Na curva obtida é possível destacar duas zonas com interesse para a caracterização mecânica da amostra de mistura betuminosa ensaiada quando sujeita a uma carga de compressão segundo uma taxa de deformação aproximadamente constante. Em primeiro lugar, a zona onde o provete de ensaio evidencia um comportamento linear, representado graficamente pela tangente e, em segundo lugar, a zona onde se verifica a ocorrência da carga de compressão máxima, na qual se dá a rotura do provete ensaiado.

Atendendo à natureza discreta dos elementos de curva de ensaio obtida (resultante da aquisição e processamento digital dos dados experimentais), importa definir quais os algoritmos que conduzem à determinação da tangente na zona de comportamento linear e do valor máximo de carga de compressão.

O NQM procedeu a um estudo comparativo das incertezas de medição associadas aos resultados obtidos por diferentes abordagens ao problema de determinação da recta tangente [8] que constitui um dos objectivos do ensaio. A adopção do método que a seguir se descreve resultou dessa análise.

A aplicação computacional proposta pelo NQM permite identificar quatro pontos experimentais da curva localizados em torno do ponto de inflexão (ponto no qual a segunda derivada da curva corresponde a zero). Mediante o recurso ao Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) [9], é possível proceder ao cálculo dos dois parâmetros – declive,  $m$ , e ordenada na origem,  $b$  – que definem a tangente, isto é,

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n [(S_i - \bar{S})(F_i - \bar{F})]}{\sum_{i=1}^n (F_i - \bar{F})^2}, \quad (2.1)$$

e

$$b = \bar{S} - m \cdot \bar{F}, \quad (2.2)$$

onde  $\bar{S}$  e  $\bar{F}$  correspondem, respectivamente, aos valores médios de estabilidade e deformação da amostra composta pelos quatro pontos experimentais.

O conhecimento de ambos os parâmetros da tangente representativa do comportamento linear do provete ensaiado permite proceder à determinação de duas deformações de interesse no ensaio Marshall, sendo ambas definidas a partir da extrapolação da tangente, uma para a situação de carga nula – deformação  $F_a$  – e a outra para a situação de carga máxima – deformação  $F_b$  – conforme apresentado na Figura 2.5. A quantificação destas grandezas é suportada pelas expressões

$$F_a = -\frac{b}{m}, \quad (2.3)$$

e

$$F_b = \frac{S_{\text{máx}} - b}{m}, \quad (2.4)$$

onde  $S_{\text{máx}}$  corresponde ao valor máximo de carga de compressão observada durante o ensaio.

Nesta abordagem, a determinação desta grandeza é apoiada na identificação de dois pontos experimentais entre os quais se verifica que a primeira derivada da curva é nula. Nesta situação quer o valor máximo de carga de compressão quer a deformação correspondente,  $F_{m'}$ , são definidos como as médias aritméticas das amostras em questão, ou seja,

$$S_{\text{máx}} = \frac{S_5 + S_6}{2}, \quad (2.5)$$

e

$$F_{m'} = \frac{F_5 + F_6}{2}. \quad (2.6)$$

Segundo a norma de referência [4], o valor máximo de carga de compressão obtido pela expressão (2.5) deverá ser corrigido de modo a exprimir adequadamente a sua relação com a estabilidade máxima que caracteriza o provete de ensaio. Com efeito, a estabilidade máxima corrigida,  $S$ , é dada pela expressão

$$S = c \cdot S_{\text{máx}}, \quad (2.7)$$

onde  $c$  constitui um factor de correcção determinado com base no volume do provete ensaiado,  $V$ , mediante o seguinte modelo matemático:

$$c = 5,24 \cdot \exp(-0,0032 \cdot V). \quad (2.8)$$

Por sua vez, o conhecimento da grandeza deformação em situação de carga máxima de compressão (obtida pela expressão 2.6) permite determinar a deformação  $F$  mediante a expressão

$$F = F_{m'} - F_a. \quad (2.9)$$

No que respeita às grandezas de saída do ensaio Marshall de um dado provete (deformação tangencial,  $F_{t_i}$ , e quociente Marshall,  $M_i$ ), as grandezas de entrada e intermédias anteriormente descritas nesta secção permitem que se proceda ao seu cálculo recorrendo às seguintes expressões:

$$F_{t_i} = F_b - F_a, \quad (2.10)$$

e



$$M_i = \frac{S}{F}. \quad (2.11)$$

O diagrama funcional respectivo é apresentado na Figura 2.6, ilustrando o conjunto de relações funcionais que se estabelecem entre as grandezas de entrada, intermédias e de saída intervenientes no ensaio Marshall.

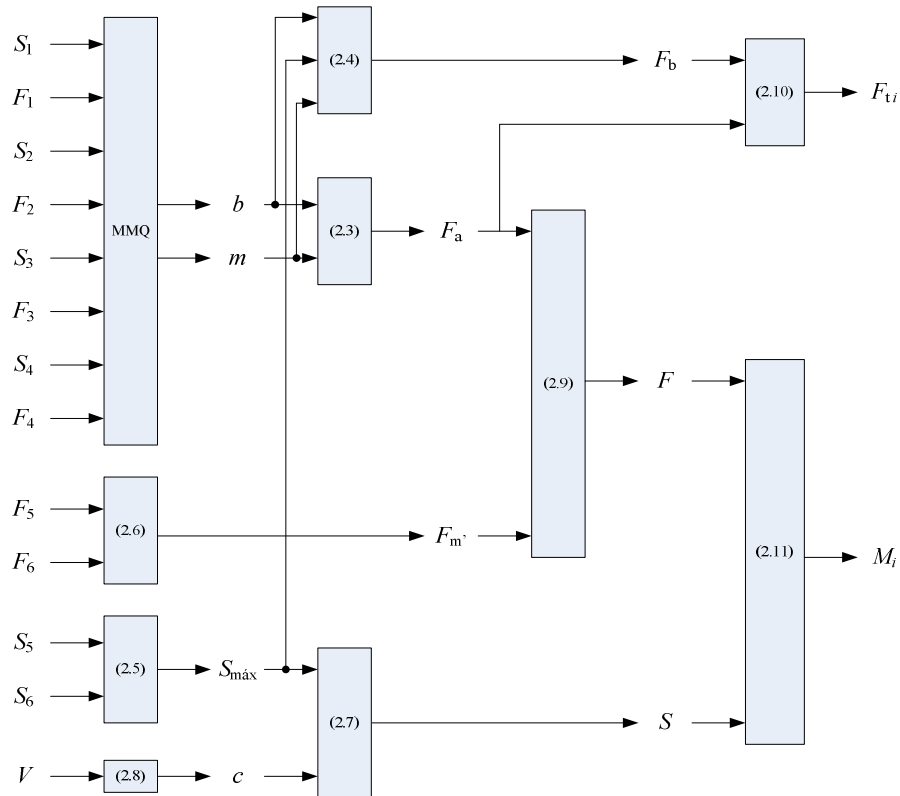


Figura 2.6: Diagrama funcional das grandezas de interesse no ensaio Marshall.

Salienta-se que, a norma de referência prevê que as estimativas das grandezas de saída (deformação tangencial e quociente Marshall) associadas a uma determinada amostra laboratorial de mistura betuminosa correspondam às respectivas médias aritméticas dos resultados obtidos para a amostra de provetes ensaiados, ou seja,

$$F_t = \frac{\sum_{i=1}^n F_{t_i}}{n}, \quad (2.12)$$

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{n}, \quad (2.13)$$

onde  $n$  corresponde à dimensão da amostra de provetes ensaiados, após a conclusão do processo de validação de resultados, conforme descrito anteriormente na secção 2.1, podendo  $n$  ser igual a três ou quatro.

Após a descrição das relações funcionais que suportam a realização do ensaio Marshall de misturas betuminosas procede-se, na secção seguinte, à definição das tabelas de balanço de incertezas de medição aplicáveis aos diferentes estágios de propagação de incertezas de medição.

## **2.3 Tabelas de balanço de incertezas de medição**

### **2.3.1 Estágio inicial**

No diagrama funcional apresentado na secção 2.2, é possível identificar as três grandezas de entrada do ensaio Marshall – volume, estabilidade e deformação do provete de ensaio. Estas grandezas compõem o estágio inicial da propagação de incertezas de medição pelas restantes grandezas intermédias e de saída, motivando a realização da sua caracterização probabilística, conforme exposto nos quadros seguintes.

No caso da grandeza volume do provete de ensaio, o estudo efectuado no âmbito do ensaio de determinação da baridade de misturas betuminosas (*vide* Capítulo 3 de [2]) permitiu concluir que, no LNEC/PAVMAT, a melhor incerteza de medição padrão (para um intervalo de confiança de 68 %) desta grandeza corresponde a  $\pm 0,20$  ml, tendo em conta a adopção de uma função densidade de probabilidade gaussiana, conforme mencionado no Quadro 2.1.

*Quadro 2.1: Caracterização probabilística da grandeza volume do provete de ensaio.*

<b>Componente de incerteza</b>	<b>Fonte de incerteza</b>	<b>Limites de variação</b>	<b>Função densidade de probabilidade</b>	<b>Fonte de informação</b>
$\delta V$	Volume do provete	$\pm 0,20$ ml	Gaussiana	Relatório LNEC [2]

No que respeita à grandeza estabilidade, o presente estudo permitiu identificar três componentes de incerteza de medição – calibração e linearidade do transdutor de força e correcções dos desvios de calibração – mediante a consulta do certificado de calibração e especificações técnicas do transdutor de força que integra a prensa utilizada pelo LNEC/PAVMAT no contexto da realização do ensaio Marshall. Os respectivos limites de variação e funções densidade de probabilidade adoptadas são apresentados no Quadro 2.2.

Quadro 2.2: Caracterização probabilística da grandeza estabilidade.

Componente de incerteza	Fonte de incerteza	Limites de variação	Função densidade de probabilidade	Fonte de informação
$\delta S_{i\text{cal}}$	Calibração do transdutor de força	$\pm (2,75 \cdot 10^{-3} \cdot S_i)$ kN	Gaussiana	Certificado de calibração
$\delta S_{i\text{corr}}$	Correcções dos desvios de calibração	$\pm 0,05$ kN	Rectangular	Certificado de calibração
$\delta S_{i\text{lin}}$	Linearidade do transdutor de força	$\pm(0,001 \cdot S)$ kN	Rectangular	Especificações técnicas

Note-se que, a aplicação computacional que integra a cadeia de medição da grandeza estabilidade, não permite que se proceda à correcção dos valores lidos, tendo em conta os resultados periódicos dos ensaios de calibração da cadeia de medição. Deste facto resulta a contabilização de uma componente de incerteza adicional, conforme mencionado no Quadro anterior cuja quantificação resultou da análise do certificado de calibração do transdutor de força da máquina de compressão uniaxial do LNEC/PAVMAT.

No caso da medição da grandeza deformação foram identificadas como componentes de incerteza: a calibração do transdutor de deslocamento que integra o equipamento de ensaio; as correcções dos desvios de calibração (pelo mesmo motivo referido anteriormente para a cadeia de medição de estabilidade); e a repetibilidade instrumental, conforme especificado em documentação do fabricante do equipamento de ensaio. O Quadro 2.3 resume os respectivos limites de variação e funções densidade de probabilidade adoptados neste âmbito.

Quadro 2.3: Caracterização probabilística da grandeza deformação.

Componente de incerteza	Fonte de incerteza	Limites de variação	Função densidade de probabilidade	Fonte de informação
$\delta F_{i\text{cal}}$	Calibração do transdutor de deslocamento	$\pm (0,003 + 4,6 \cdot 10^{-6} \cdot L)$ mm*	Gaussiana	Certificado de calibração
$\delta F_{i\text{corr}}$	Correcções dos desvios de calibração	$\pm 0,02$ mm	Rectangular	Certificado de calibração
$\delta F_{i\text{rep}}$	Repetibilidade instrumental	$\pm (0,002 \cdot F)$ mm	Gaussiana	Especificações técnicas

\*  $L$  em mm.

### 2.3.2 Estágio intermédio

O algoritmo proposto para determinação do valor de estabilidade máxima registado durante o ensaio Marshall, conforme referido na secção 2.2, permite identificar os dois pontos experimentais da curva estabilidade / deformação (pontos  $(S_5, F_5)$  e  $(S_6, F_6)$  da Figura 2.5), entre os quais se localiza a mensuranda pretendida. A quantificação das grandezas intermédias estabilidade máxima,  $S_{\text{máx}}$ , e deformação do provete em situação de estabilidade máxima,  $F_{\text{m'}}$ , é efectuada mediante o cálculo das respectivas médias aritméticas.

Para além das incertezas de medição combinadas associadas às estimativas das grandezas, é igualmente considerado o desvio-padrão experimental da amostra ( $d_{\text{pea}}$ ),  $s(S_i)$  ou  $s(F_i)$ , utilizada em ambos os casos e cuja dimensão é igual a dois. De acordo com a Lei de Propagação de Incertezas (LPI), a incerteza de medição padrão associada às estimativas de  $S_{\text{máx}}$  e  $F_{\text{m'}}$  corresponde, respectivamente, a

$$u(S_{\text{máx}}) = \sqrt{c_{S_5}^2 \cdot u^2(S_5) + c_{S_6}^2 \cdot u^2(S_6) + s^2(S_i)} , \quad (2.14)$$

e

$$u(F_{\text{m'}}) = \sqrt{c_{F_5}^2 \cdot u^2(F_5) + c_{F_6}^2 \cdot u^2(F_6) + s^2(F_i)} . \quad (2.15)$$

onde  $c_{S_5} = c_{S_6} = c_{F_5} = c_{F_6} = \frac{1}{2}$ .

Estas expressões permitem construir as respectivas tabelas de incertezas de medição (vide Quadros 2.4 e 2.5), conforme estabelecido no GUM [3].

Quadro 2.4: Tabela de balanço de incertezas da grandeza estabilidade máxima num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coeficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$S_5$	14,550 kN	$\pm 0,050$ kN	0,5	$\pm 0,025$ kN	96
$S_6$	14,551 kN	$\pm 0,050$ kN	0,5	$\pm 0,025$ kN	96
$\delta S_{dpea}$	0 kN	$\pm 0,000 7$ kN	1	$\pm 0,000 7$ kN	1
$S_{m\acute{a}x}$	14,551 kN	<b>Incerteza de medição padrão</b>		$\pm 0,035$ kN	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			192
		<b>Factor de expansão</b>			2,00
		<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>		$\pm 0,070$ kN	

Quadro 2.5: Tabela de balanço de incertezas da grandeza deformação do provete em situação de estabilidade máxima num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coeficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$F_5$	5,645 mm	$\pm 0,016$ mm	0,5	$\pm 0,008 2$ mm	106
$F_6$	5,748 mm	$\pm 0,017$ mm	0,5	$\pm 0,008 3$ mm	106
$\delta F_{dpea}$	0 kN	$\pm 0,073$ mm	1	$\pm 0,073$ mm	1
$F_m$	5,37 mm	<b>Incerteza de medição padrão</b>		$\pm 0,12$ mm	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			1
		<b>Factor de expansão</b>			12,71
		<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>		$\pm 1,53$ mm	

A caracterização probabilística da grandeza de entrada volume (apresentada no Quadro 2.1) e o conhecimento do modelo matemático dado pela expressão (2.8) permite que se proceda, mediante a aplicação da LPI, à determinação da incerteza de medição padrão do factor de correcção,  $c$ , da estabilidade máxima a que o provete de ensaio está sujeito. Neste caso, a expressão obtida corresponde a

$$u(c) = \sqrt{c_V^2 \cdot u^2(V)} , \quad (2.16)$$

onde  $c_V = -0,0167 \cdot \exp(-0,0032 \cdot V)$ . O Quadro 2.6 apresenta a tabela de balanço de incertezas aplicada à mensuranda em questão.

Quadro 2.6: Tabela de balanço de incertezas da grandeza factor de correcção num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
V	490,4 ml	± 0,20 ml	-0,003 5 ml <sup>-1</sup>	± 0,000 70	50
<b>Incerteza de medição padrão</b>				± 0,000 70	
<b>Graus de liberdade efectivos</b>					50
c	1,090 94		<b>Factor de expansão</b>		2,00
<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>				± 0,001 4	

A determinação da incerteza de medição das grandezas intermédias estabilidade máxima e factor de correcção (*vide* expressões 2.14 e 2.16, respectivamente) permite assegurar, por sua vez, a incerteza da medição da grandeza estabilidade máxima corrigida,  $S$ . Para além da propagação das incertezas de medição das grandezas intermédias citadas anteriormente, a avaliação efectuada inclui componentes de incerteza adicionais, nomeadamente, a repetibilidade,  $\delta S_{\text{repet}}$ , e reprodutibilidade,  $\delta S_{\text{repro}}$ , do ensaio (quantificadas mediante a realização de estudos dedicados por parte do LNEC/PAVMAT) e o arredondamento da estimativa,  $\delta S_{\text{arred}}$ , imposto pela norma de referência. Neste caso, a aplicação da LPI conduz à expressão

$$u(S) = \sqrt{c_c^2 \cdot u^2(c) + c_{S_{\text{máx}}}^2 \cdot u^2(S_{\text{máx}}) + c_{\delta S_{\text{repet}}}^2 \cdot u^2(\delta S_{\text{repet}}) + c_{\delta S_{\text{repro}}}^2 \cdot u^2(\delta S_{\text{repro}}) + c_{\delta S_{\text{arred}}}^2 \cdot u^2(\delta S_{\text{arred}})} \quad (2.17),$$

onde  $c_c = S_{\text{máx}}$ ,  $c_{S_{\text{máx}}} = c$  e  $c_{\delta S_{\text{repet}}} = c_{\delta S_{\text{repro}}} = c_{\delta S_{\text{arred}}} = 1$ .

O Quadro 2.7 constitui a tabela de balanço de incertezas aplicável a esta mensuranda de interesse no ensaio Marshall.

Quadro 2.7: Tabela de balanço de incertezas da grandeza estabilidade máxima corrigida num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$c$	1,090 94	$\pm 0,000 70$	14,551 kN	$\pm 0,010$ kN	50
$S_{\text{máx}}$	14,551 kN	$\pm 0,035$ kN	1,090 94	$\pm 0,039$ kN	192
$\delta S_{\text{repet}}$	0 kN	$\pm 0,33$ kN	1	$\pm 0,33$ kN	7
$\delta S_{\text{repro}}$	0 kN	$\pm 0,20$ kN	1	$\pm 0,20$ kN	7
$\delta S_{\text{arred}}$	0 kN	$\pm 0,029$ kN	1	$\pm 0,029$ kN	50
$S$	15,9 kN	<b>Incerteza de medição padrão</b>		$\pm 0,39$ kN	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			11
		<b>Factor de expansão</b>			2,20
		<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>		$\pm 0,86$ kN	

O recurso ao MMQ para determinação da tangente à curva estabilidade *versus* deformação requer a determinação da matriz variância-covariância para cálculo das incertezas de medição associadas à parametrização da tangente, nomeadamente, o seu declive,  $m$ , e a sua ordenada no origem,  $b$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \text{var}(b) & \text{cov}(b, m) \\ \text{cov}(b, m) & \text{var}(m) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

O algoritmo adoptado pelo LNEC/PAVMAT permite identificar quatro pontos experimentais da curva estabilidade *versus* deformação (pontos  $(S_1, F_1)$  a  $(S_4, F_4)$  da Figura 2.5), pelos quais se define a tangente representativa do comportamento linear do provete de ensaio quando sujeito a uma carga de compressão segundo uma taxa de deformação considerada, aproximadamente, constante. As expressões que determinam os elementos da matriz são as seguintes:

$$\text{var}(b) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (F_i - \bar{F})^2}, \quad (2.19)$$

$$\text{var}(m) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\bar{F}^2}{\sum_{i=1}^n (F_i - \bar{F})^2} \right], \quad (2.20)$$

$$\text{cov}(b, m) = \frac{-\sigma^2 \cdot \bar{F}}{\sum_{i=1}^n (F_i - \bar{F})^2}, \quad (2.21)$$

onde

$$\sigma^2 = \text{var}(\varepsilon_i) = \frac{\sum_{i=1}^n [S - S(F_i)]^2}{n - 2}, \quad (2.22)$$

em que  $\bar{S}$  e  $\bar{F}$  correspondem às médias aritméticas das amostras de valores de estabilidade e de deformação,  $\varepsilon_i$  representa os erros residuais da regressão linear efectuada e  $n$  é dimensão da amostra de pontos experimentais (neste caso, igual a quatro). Em seguida, é apresentado um conjunto de valores típicos de matriz de variância-covariância associada à parametrização da tangente à curva do ensaio Marshall:

$$\begin{bmatrix} 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^2 & -1,16 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^2 \cdot \text{mm}^{-1} \\ -1,16 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^2 \cdot \text{mm}^{-1} & 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^2 \cdot \text{mm}^{-2} \end{bmatrix}.$$

O conhecimento desta matriz permite que se efectue, posteriormente, a aplicação da LPI à grandeza intermédia deformação  $F_a$ , definida como a deformação do ponto de intersecção da tangente à curva com o eixo das abcissas do gráfico estabilidade *versus* deformação (*vide* Figura 2.5). Neste caso, usando a LPI, escreve-se a incerteza de medição da referida grandeza como

$$u(F_a) = \sqrt{c_b^2 \cdot u^2(b) + c_m^2 \cdot u^2(m) + 2 \cdot c_b \cdot c_m \cdot u(b) \cdot u(m) \cdot r(m, b)}, \quad (2.23)$$

onde  $c_b = -\frac{1}{m}$ ,  $c_m = \frac{b}{m^2}$  e  $r(m, b)$  corresponde ao coeficiente de correlação associado à parametrização da tangente, obtido por:

$$r(b, m) = \frac{\text{cov}(b, m)}{u(b) \cdot u(m)}. \quad (2.24)$$

A tabela de balanço de incertezas respectiva é apresentada no Quadro 2.8.



Quadro 2.8: Tabela de balanço de incertezas da grandeza deformação (no ponto a) num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$b$	-2,895 kN	$\pm 0,010$ kN	-0,16 kN <sup>-1</sup> ·mm	$\pm 0,0017$ mm	50
$m$	6,199 kN·mm <sup>-1</sup>	$\pm 0,011$ kN·mm <sup>-1</sup>	-0,08 kN <sup>-1</sup> ·mm <sup>2</sup>	$\pm 0,0009$ mm	50
$F_a$	0,467 mm	<b>Incerteza de medição padrão</b>		$\pm 0,0008$ mm	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			1
		<b>Factor de expansão</b>			12,71
		<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>		$\pm 0,010$ mm	

De igual modo, a aplicação da LPI à grandeza intermédia deformação  $F_b$ , definida como a deformação do ponto de intersecção da tangente à curva com o valor de estabilidade máxima registado no ensaio (vide Figura 2.5), resulta em:

$$u(F_b) = \sqrt{c_b^2 \cdot u^2(b) + c_m^2 \cdot u^2(m) + c_{S_{\max}}^2 \cdot u^2(S_{\max}) + 2 \cdot c_b \cdot c_m \cdot u(b) \cdot u(m) \cdot r(m,b)}, \quad (2.25)$$

em que  $c_b = -\frac{1}{m}$ ,  $c_m = -\frac{(S_{\max} - b)}{m^2}$  e  $c_{S_{\max}} = \frac{1}{m}$ .

O Quadro 2.9 constitui a tabela de balanço de incertezas aplicável, definida de acordo com a expressão (2.25).

Quadro 2.9: Tabela de balanço de incertezas da grandeza deformação (no ponto b) num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$b$	-2,895 kN	$\pm 0,010$ kN	-0,16 kN <sup>-1</sup> ·mm	$\pm 0,0017$ mm	50
$m$	6,199 kN·mm <sup>-1</sup>	$\pm 0,011$ kN·mm <sup>-1</sup>	-0,45 kN <sup>-1</sup> ·mm <sup>2</sup>	$\pm 0,0051$ mm	50
$S_{\max}$	14,551 kN	$\pm 0,035$ kN	0,16 kN <sup>-1</sup> ·mm	$\pm 0,0057$ mm	192
$F_b$	2,81 mm	<b>Incerteza de medição padrão</b>		$\pm 0,007$ mm	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			78
		<b>Factor de expansão</b>			2,00
		<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>		$\pm 0,014$ mm	

No que respeita à grandeza deformação  $F$  do provete de ensaio, para além da propagação das incertezas de medição das grandezas intermédias deformação  $F_a$  e  $F_{m'}$ , a avaliação efectuada inclui componentes de incerteza adicionais, nomeadamente, a repetibilidade,  $\delta F_{\text{repet}}$ , e reprodutibilidade,  $\delta F_{\text{repro}}$ , do ensaio obtidas pela a realização de estudos dedicados por parte do LNEC/PAVMAT. Acresce, ainda, o arredondamento da estimativa,  $\delta F_{\text{arred}}$ , requisito que decorre da norma de referência. Na presente grandeza, a aplicação da LPI conduz à expressão

$$u(F) = \sqrt{c_{F_{m'}}^2 \cdot u^2(F_{m'}) + c_{F_a}^2 \cdot u^2(F_a) + c_{\text{repet}}^2 \cdot u^2(\delta F_{\text{repet}}) + c_{\text{repro}}^2 \cdot u^2(\delta F_{\text{repro}}) + \dots + c_{\text{arred}}^2 \cdot u^2(\delta F_{\text{arred}}) + 2 \cdot c_{F_{m'}} \cdot c_{F_a} \cdot u(F_{m'}) \cdot u(F_a) \cdot r(F_{m'}, F_a)}, \quad (2.26)$$

em que  $c_{F_a} = -1$  e  $c_{F_{m'}} = c_{\delta F_{\text{repet}}} = c_{\delta F_{\text{repro}}} = c_{\delta F_{\text{arred}}} = 1$ .

Salienta-se, na expressão anterior, o termo representativo da correlação existente entre  $F_{m'}$  e  $F_a$ . Atendendo à definição destas grandezas (*vide* Figura 2.5), verifica-se que o coeficiente de correlação apresenta um valor negativo. Para efeito de majoração da incerteza de medição da deformação  $F$ , é assumido que  $r(F_{m'}, F_a) = -1$ , atendendo ao sinal negativo do coeficiente de sensibilidade  $c_{F_a}$ . A tabela de balanço de incertezas aplicável a esta mensuranda de interesse é, portanto, a que se apresenta no Quadro 2.10.

Quadro 2.10: Tabela de balanço de incertezas da grandeza deformação num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incetezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão, $u_i(y)$	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$		$\nu_i$
$F_{m'}$	5,37 mm	± 0,12 mm	1	± 0,12 mm	1
$F_a$	0,467 mm	± 0,000 8 mm	-1	± 0,000 8 mm	1
$\delta F_{\text{repet}}$	0 mm	± 0,13 mm	1	± 0,13 mm	7
$\delta F_{\text{repro}}$	0 mm	± 0,09 mm	1	± 0,09 mm	7
$\delta F_{\text{arred}}$	0 mm	± 0,029 mm	1	± 0,029 mm	50
		<b>Incetenza de medição padrão</b>		± 0,18 mm	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			12
		<b>Factor de expansão</b>			2,18
		<b>Incetenza de medição expandida (95 %)</b>		± 0,39 mm	

### 2.3.3 Estágio final

No estágio final de propagação de incertezas de medição do ensaio Marshall identificam-se duas grandezas de saída associadas ao provete ensaiado: a deformação tangencial,  $F_{t_i}$ , e o quociente Marshall,  $M_i$ .

No caso da primeira grandeza mencionada, para além da propagação das incertezas de medição das grandezas de entrada  $F_a$  e  $F_b$ , encontra-se a contribuição de uma componente de incerteza resultante do arredondamento da estimativa,  $\delta F_{t_i \text{ arred}}$ , requisito que decorre da norma de referência. Deste modo, a LPI escreve-se como:

$$u(F_{t_i}) = \sqrt{c_{F_b}^2 \cdot u^2(F_b) + c_{F_a}^2 \cdot u^2(F_a) + c_{\delta F_{t_i \text{ arred}}}^2 \cdot u^2(\delta F_{t_i \text{ arred}}) + 2 \cdot c_{F_b} \cdot c_{F_a} \cdot u(F_b) \cdot u(F_a) \cdot r(F_b, F_a)}$$

onde  $c_{F_b} = c_{\delta F_{t_i \text{ arred}}} = 1$  e  $c_{F_a} = -1$ . (2.27)

Mais uma vez salienta-se, na expressão anterior, o termo representativo da correlação existente entre  $F_b$  e  $F_a$ . Tal como no caso anterior, atendendo à definição destas grandezas (vide Figura 2.5), verifica-se que o coeficiente de correlação apresenta um valor negativo. Para efeito de majoração da incerteza de medição da deformação  $F_{t_i}$ , assume-se que  $r(F_b, F_a) = -1$ , atendendo ao sinal negativo do coeficiente de sensibilidade  $c_{F_a}$ . O Quadro 2.11 resume a tabela de balanço de incertezas aplicável a esta grandeza.

Quadro 2.11: Tabela de balanço de incertezas da grandeza deformação tangencial num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$F_b$	2,81 mm	± 0,007 mm	1	± 0,007 mm	78
$F_a$	0,467 mm	± 0,000 8 mm	-1	± 0,000 8 mm	1
$\delta F_{t_i \text{ arred}}$	0 mm	± 0,029 mm	1	± 0,029 mm	50
		<b>Incerteza de medição padrão</b>		± 0,03 mm	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			56
		<b>Factor de expansão</b>			2,00
		<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>		± 0,06 mm	

No caso da grandeza quociente Marshall, a aplicação da LPI permite obter a expressão

$$u(M_i) = \sqrt{c_S^2 \cdot u^2(S) + c_F^2 \cdot u^2(F) + c_{\delta M_{i_{\text{arred}}}}^2 \cdot u^2(\delta M_{i_{\text{arred}}})}, \quad (2.28)$$

onde  $c_S = \frac{1}{F}$  e  $c_F = -\frac{S}{F^2}$ .

Note-se a existência de uma componente de incerteza adicional,  $\delta M_{i_{\text{arred}}}$ , relativa ao arredondamento da estimativa de acordo com o requisito inerente à norma de referência aplicável. O Quadro 2.12 resume a tabela de balanço de incertezas aplicável a esta grandeza de saída.

Quadro 2.12: Tabela de balanço de incertezas da grandeza quociente Marshall num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$F$	5,2 mm	$\pm 0,18$ mm	-0,59 kN·mm <sup>-2</sup>	$\pm 0,104$ kN·mm <sup>-1</sup>	12
$S$	15,9 kN	$\pm 0,39$ kN	0,19 mm <sup>-1</sup>	$\pm 0,075$ kN·mm <sup>-1</sup>	11
$\delta M_{i_{\text{arred}}}$	0 kN·mm <sup>-1</sup>	$\pm 0,029$ kN·mm <sup>-1</sup>	1	$\pm 0,029$ kN·mm <sup>-1</sup>	50
$M_i$	3,1 kN·mm <sup>-1</sup>	<b>Incerteza de medição padrão</b>		$\pm 0,13$ kN·mm <sup>-1</sup>	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			23
		<b>Factor de expansão</b>			2,07
		<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>		$\pm 0,27$ kN·mm <sup>-1</sup>	

Conforme referido anteriormente, a norma de referência seguida pelo LNEC/PAVMAT prevê o ensaio de quatro provetes extraídos de uma dada amostra de mistura betuminosa, estando os resultados obtidos sujeitos a um processo de validação que poderá conduzir a três situações distintas:

1. rejeição dos resultados obtidos e conseqüente repetição do ensaio;
2. rejeição do provete com maior variabilidade em relação aos resultados médios da amostra; neste caso, as estimativas finais correspondem às médias aritméticas das estimativas associadas aos restantes três provetes de ensaio cujos resultados são considerados válidos;

3. aceitação dos resultados obtidos para os quatro provetes ensaiados; neste caso, as estimativas finais correspondem às médias aritméticas das estimativas dos quatro provetes ensaiados.

Para as duas últimas situações referidas anteriormente, a LPI permite determinar a incerteza de medição associada às médias aritméticas obtidas usando as expressões:

$$u(\bar{F}_t) = \sqrt{\frac{u^2(F_{t_i})}{n} + s^2(F_{t_i})} \quad (2.29)$$

e

$$u(\bar{M}) = \sqrt{\frac{u^2(M_i)}{n} + s^2(M_i)} \quad (2.30)$$

onde  $s(F_{t_i})$  e  $s(M_i)$  designam os desvios-padrão experimentais das amostras associadas às respectivas grandezas cuja dimensão,  $n$ , pode ser igual a três ou a quatro, consoante a validação de resultados prevista na norma de referência. Em geral,  $u(F_{t_i})$  e  $u(M_i)$  correspondem às incertezas de medição com magnitude mais elevada dentro do conjunto de estimativas consideradas para efeito de cálculo.

### 3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo permitiu efectuar a avaliação das incertezas de medição associadas às estimativas de grandezas mensuráveis no ensaio Marshall de misturas betuminosas realizado pelo LNEC/PAVMAT, enquadrado no âmbito de acreditação deste laboratório.

O conhecimento adquirido acerca da qualidade das medições efectuadas por este laboratório (quantificada pelas respectivas incertezas de medição), possibilita um julgamento fundamentado e rigoroso do seu desempenho na concretização do referido ensaio laboratorial, em particular, no contexto da realização de ensaios interlaboratoriais com outras entidades. Identifica, igualmente, as contribuições mais significativas para a incerteza de medição das mensurandas de interesse, nomeadamente, as componentes de repetibilidade e reprodutibilidade.

A formulação probabilística das grandezas de entrada, bem como, as expressões de cálculo de incertezas de medição combinada (obtidas por aplicação do método GUM e pelo método de determinação analítica da matriz variância-covariância, no caso da parametrização da tangente à curva estabilidade *versus* deformação) constituem uma base de suporte ao desenvolvimento de uma aplicação computacional visando o cálculo de estimativas e incertezas de medição das grandezas de interesse no ensaio Marshall.

Atendendo à reduzida influência das estimativas das grandezas de entrada na quantificação das componentes de incerteza identificadas, os valores de incerteza de medição apresentados nas Secções 2.3.2 e 2.3.3 (relativas aos estágios intermédio e final de propagação) podem ser considerados como representativos das melhores incertezas de medição do laboratório no contexto da sua acreditação no Sistema Português da Qualidade, evidenciando o cumprimento do requisito imposto pela norma de referência NP EN ISO/IEC 17025.

O Quadro 2.13 resume as melhores incertezas de medição expandidas (para um intervalo de confiança de 95 %) associadas às mensurandas de interesse num provete de ensaio. Note-se que, no que respeita a uma amostra de mistura betuminosa, as respectivas incertezas de medição podem diferir dos valores apresentados em virtude da sua dependência relativamente à dimensão e desvio-padrão experimental da amostra em consideração, conforme exposto no fim da Secção 2.3.3.

*Quadro 2.13: Síntese das melhores incertezas de medição do LNEC/PAVMAT na realização do ensaio Marshall de um provete de uma amostra de mistura betuminosa.*

<b>Grandeza de interesse</b>	<b>Incerteza de medição expandida (95 %)</b>
Estabilidade máxima corrigida	$\pm 0,86$ kN
Deformação	$\pm 0,39$ mm
Deformação tangencial	$\pm 0,06$ mm
Quociente Marshall	$\pm 0,27$ kN·mm <sup>-1</sup>

LNEC, Lisboa, Junho de 2010

#### VISTOS

O Director do CIC,



Carlos Oliveira Costa

#### AUTORIA



Luís Filipe Lages Martins

Lic.º em Engenharia Mecânica  
Bolsheiro de Iniciação à Investigação Científica



Álvaro Silva Ribeiro

Lic.º Física Tecnológica, Doutor  
Investigador Auxiliar, Chefe do NQM

#### 4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NP EN ISO/IEC 17025:2005 – Requisitos gerais de competência para laboratórios de ensaio e calibração. Caparica (Portugal): Instituto Português da Qualidade (IPQ), Dezembro de 2005.
- [2] Lages Martins, L. e Silva Ribeiro, A., *Avaliação de Incertezas de Medição no Laboratório de Ensaios de Materiais para Pavimentação (LNEC/PAVMAT) – Ensaios de misturas betuminosas*, Relatório 336/2009 – NQM. Lisboa (Portugal): Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), Outubro de 2009.
- [3] *Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)*. Genève (Suíça): International Organization for Standardization (ISO), 1995.
- [4] EN 12697-34:2004+A1:2007 – Bituminous mixtures – Test methods for hot mix asphalt. Part 34: Marshall test. Brussels (Bélgica): European Committee for Standardization (CEN), July 2007.
- [5] EN 12697-35:2004+A1:2007 – Bituminous mixtures – Test methods for hot mix asphalt. Part 35: Laboratory mixing. Brussels (Bélgica): European Committee for Standardization (CEN), July 2007.
- [6] EN 12697-30:2004+A1:2007 – Bituminous mixtures – Test methods for hot mix asphalt. Part 30: Specimen preparation by impact compactor. Brussels (Bélgica): European Committee for Standardization (CEN), July 2007.
- [7] EN 12697-6:2003+A1:2007 – Bituminous mixtures – Test methods for hot mix asphalt. Part 6: determination of bulk density of bituminous specimens. Brussels (Bélgica): European Committee for Standardization (CEN), July 2007.
- [8] Martins, L., Ribeiro, A., Freire, A., Batista, F. e Maia, A., *Seleção do método matemático para determinação da tangente no ensaio Marshall suportada na avaliação de incertezas de medição*, comunicação a submeter ao Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Metrologia em Outubro de 2010.
- [9] Mood, A. *et al.*, *Introduction to the theory of statistics*, 3<sup>rd</sup> edition. Singapore: McGraw-Hill International Editions, 1974.
- [10] *Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM)*, 3<sup>a</sup> edição. Caparica (Portugal): Instituto Português da Qualidade (IPQ), Novembro de 2008.



[11] Satterthwaite, F. E., (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110-114.

[12] Welch, B. L., (1947) *Biometrika.* **34**, 28-35.

## ANEXO A – MÉTODO GUM PARA AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO

### A.1 Introdução

A evolução recente da Metrologia tem como uma das suas principais consequências a introdução do conceito de incerteza de medição como parâmetro inerente ao resultado da medição (associado ao valor da estimativa de uma grandeza mensurável), constituindo este o elemento indicativo do nível de exactidão da medição.

Um dos métodos que suporta a sua determinação é descrito no *Guide to the expression of Uncertainty in Measurement (GUM)*<sup>4</sup> [3] adoptado pela comunidade metrológica contendo, entre outros aspectos: o enquadramento da medição no contexto probabilístico actualmente aceite; os conceitos e definições aplicáveis; as fontes genéricas que contribuem para a avaliação da incerteza; e o procedimento de avaliação de incertezas de medição incorporando a conhecida Lei de Propagação de Incertezas (cuja designação abreviada é “LPI”).

A informação que se encontra no GUM deve ser complementada com a consulta do conjunto de definições que se encontra no *Vocabulário Internacional de Metrologia* [9], cuja 3ª edição foi publicada em 2008 pelo *Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM)*, constituído pelas principais organizações metrológicas a nível internacional.

Com o intuito de facilitar a compreensão das tabelas de balanço de incerteza apresentadas em capítulos anteriores, é promovida, então, a descrição que se segue.

Qualquer procedimento de avaliação das incertezas de medição e, em particular, aquele que é preconizado pelo GUM, tem na sua base duas fases distintas: a fase de formulação e a fase de cálculo.

É na concretização destas fases que se estabelece o modelo matemático essencial para traduzir o problema físico envolvido e que se constitui a LPI necessária à avaliação pretendida.

---

<sup>4</sup> De acordo com a revisão do GUM em curso, envolvendo a introdução de alguns documentos suplementares, a nova sigla adoptada é “GUF” apontando o âmbito do Guia para um contexto mais alargado (Framework) englobando diversos métodos de avaliação de incertezas de medição.

## A.2 Fase de formulação

Esta fase contém como elemento fundamental o modelo matemático descritivo do problema metrológico, no qual se baseia a estimativa de uma grandeza mensurável e a incerteza associada a essa estimativa.

Assim, o modelo matemático relaciona a grandeza de saída – a mensuranda –  $Y$ , com um conjunto de grandezas de entrada,  $X_i$ , através do que se designa por relação funcional:

$$Y = f(X_1, \dots, X_N). \quad (\text{A.1})$$

Este modelo matemático possui uma tradução para a realidade experimental que é, necessariamente, imperfeita devido às limitações naturais da instrumentação, dos métodos e de outros factores, determinando a existência de um erro de medição. Da medição resultam observações e estimativas,  $\hat{x}_i$ , associadas a variáveis aleatórias do modelo matemático, conduzindo a uma estimativa da grandeza mensurável de saída,  $\hat{y}$ , cuja expressão é:

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N). \quad (\text{A.2})$$

A definição de *erro (absoluto) da medição*,  $\varepsilon$ , diz-nos que este representa a *diferença entre o valor da estimativa ou observação ( $\hat{A}$ ) e o valor verdadeiro da grandeza ( $\tilde{A}$ )*. Sendo este último, na perspectiva actual da medição, considerado inatingível, resulta a impossibilidade prática da sua quantificação

$$\varepsilon = \hat{A} - \tilde{A}. \quad (\text{A.3})$$

Este facto, no entanto, não impede que seja possível identificar as fontes que contribuem para esse erro e distinguir, nestas, as componentes cuja contribuição é de natureza sistemática ou aleatória.

Em relação a estas contribuições, de acordo com o disposto no GUM [3], considera-se que o conhecimento das componentes sistemáticas do erro – de natureza determinística – impõe a sua correcção, enquanto que as contribuições aleatórias – de natureza estocástica – devem incorporar um intervalo de dispersão global, relativo à estimativa da mensuranda, no que se designa por incerteza de medição.

No que se refere à sua origem, estas *componentes aleatórias do erro* resultam de variações imprevisíveis de natureza espacial ou temporal, sendo provocadas por *grandezas*

de influência, manifestando-se na variação das observações da grandeza mensurável no que se designa por *efeitos aleatórios*. O GUM [3] admite como fontes de incerteza as seguintes:

- *definição incompleta da mensuranda;*
- *realização imperfeita da definição da mensuranda;*
- *não-representatividade da amostra;*
- *conhecimento inadequado ou a medição imperfeita dos efeitos das condições ambientais na determinação da mensuranda;*
- *derivas na leitura efectuada por operadores de instrumentos com indicadores analógicos;*
- *resolução ou a discriminação finita dos instrumentos de medição;*
- *valores inexactos de padrões e de materiais de referência;*
- *valores inexactos de constantes e outros parâmetros obtidos mediante o recurso a fontes externas e usados em algoritmos computacionais;*
- *aproximações e os valores assumidos, os quais são incorporados no método e no procedimento de medição;*
- *variações obtidas em observações repetidas da mensuranda em condições aparentemente idênticas (próximas das condições ideais de repetibilidade).*

É do cômputo das contribuições aleatórias provenientes destas fontes que resulta, então, a quantificação da incerteza de medição, definida como [3]: “*parâmetro, associado ao resultado da medição, caracterizando a dispersão de valores que podem, razoavelmente, ser atribuídos à mensuranda*”. Desta definição, é admitido implicitamente que, em resultado da medição, não é possível atribuir um valor único – verdadeiro – da mensuranda mas, antes, um intervalo de valores prováveis.

### **A.3 Fase de cálculo**

A fase de cálculo sucede à fase de formulação e tem como finalidade obter a incerteza de medição expandida, sendo este objectivo atingido mediante a aplicação do método GUM [3] envolvendo um conjunto de etapas. Estas contêm expressões e envolvem conceitos de cuja compreensão depende a sua aplicação.

Desde logo, é conveniente ter presente que as observações associadas às grandezas de entrada têm uma natureza aleatória e, como tal, possuem uma dispersão de valores que é determinada pelos parâmetros variância e desvio-padrão experimental.

Logo, a primeira etapa do procedimento GUM [3] estabelece a necessidade de distinguir as componentes de incerteza consoante a origem da informação que lhes fornece os elementos para a determinação dos parâmetros referidos.

No GUM são admitidas duas vias para a obtenção dos parâmetros estatísticos: a amostra experimental; ou o conhecimento prévio do tipo de distribuição de probabilidade. No primeiro caso, diz-se que essa avaliação é feita de acordo com o “*método tipo A*” e no segundo caso, de acordo com o “*método tipo B*”.

Tendo em vista o objectivo de obter o parâmetro estimador dessa dispersão, o desvio-padrão experimental e sabendo que este se determina a partir da variância,  $s^2(x_i)$ , torna-se necessário, portanto, concretizar a quantificação deste último parâmetro.

No caso em que se adopta o método do tipo A, subentende-se que se determina a contribuição para a incerteza de medição a partir da estatística da variância de uma amostra experimental de observações (de acordo com uma perspectiva frequentista do problema). No caso de adopção do método do tipo B, considerando apropriada a utilização de determinada função densidade de probabilidade, cujos limites se estabelecem com base em conhecimento previamente adquirido<sup>5</sup>, é utilizada a expressão analítica da variância dessa distribuição para quantificar a pretendida contribuição para a incerteza de medição (neste caso, a abordagem segue a perspectiva bayesiana do problema).

Do ponto de vista prático, quando se recorre ao método do tipo A, é utilizada uma amostra experimental de uma grandeza de entrada  $Q$ , contendo observações  $q_i$ , obtendo-se o seu valor médio – utilizado na determinação da estimativa da grandeza de acordo com o modelo matemático (A.1) – cuja expressão é:

$$\hat{q} = \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i . \quad (\text{A.4})$$

A variância experimental da média é determinada por

---

<sup>5</sup> Por exemplo: dados relativos a medições anteriores; experiência ou conhecimento comum relativo ao comportamento e propriedades de materiais e instrumentos de medição; especificações de fabricantes e documentação de carácter técnico e científico; dados obtidos em calibrações, ensaios e certificados.

$$s^2(\bar{q}) = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2, \quad (\text{A.5})$$

de onde se obtém o pretendido valor do desvio-padrão experimental da média

$$s(\bar{q}) = \sqrt{s^2(\bar{q})}. \quad (\text{A.6})$$

Em alternativa, a utilização do método do tipo B, admite que se possui informação suficiente para se estipular qual a função densidade de probabilidade, os seus parâmetros e o grau de confiança dessa aceitação. Com base nesta informação, recorrendo às expressões analíticas, é possível determinar a variância e o respectivo desvio-padrão. Em Metrologia, os casos mais comuns de distribuições de probabilidade estão tipificados de acordo com o exposto no Quadro A.1 que apresenta, igualmente, as expressões das variâncias.

Conhecendo-se a forma de determinar a dispersão das grandezas de entrada,  $x_i$ , independentemente de resultarem de abordagens de acordo com o método do tipo A ou do tipo B, a etapa seguinte consiste em estabelecer a forma como estas se combinam, conduzindo à determinação da incerteza de medição da grandeza de saída,  $y$ .

O método utilizado no GUM recorre ao desenvolvimento em série de Taylor para obter a LPI.

Considerando que o modelo matemático admite as estimativas  $x_i$  de  $N$  grandezas de entrada  $X_i$ , para as quais existem valores esperados  $(\mu_1, \dots, \mu_N)$ , o desenvolvimento em série de Taylor de 1ª ordem em torno de  $\mu_i$  conduz a:

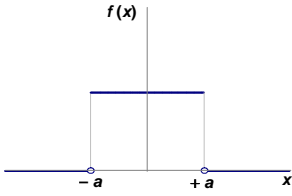
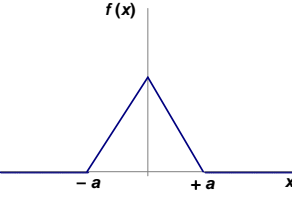
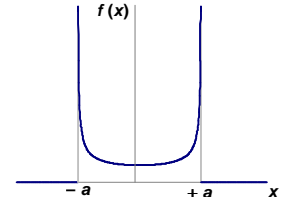
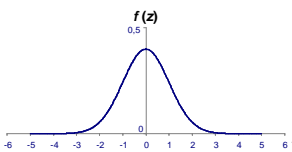
$$y = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - \mu_i) + r_2(x_i) \quad (\text{A.7})$$

sendo exacto apenas para modelos matemáticos lineares<sup>6</sup>. Na expressão anterior,  $f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$  representa o valor esperado  $\mu_y$ , da mensuranda  $y$  e  $r_2$  representa o resto de 2ª ordem do desenvolvimento em série de Taylor.

---

<sup>6</sup> Modelos matemáticos que não sejam fortemente não-lineares podem admitir a aplicação desta expressão enquanto aproximação ou, em alternativa, poder-se-ão incorporar termos do desenvolvimento de ordem superior, notando-se que estes introduzem um aumento significativo do grau de complexidade.

Quadro A.1: Distribuições de probabilidade, limites de variação e expressões da variância.

Função distribuição de probabilidade		Limites de variação	Expressão da variância
Denominação do tipo	Configuração característica		
Uniforme (centrada)		$\pm a$	$\frac{a^2}{3}$
Triangular (centrada)		$\pm a$	$\frac{a^2}{6}$
Configuração U ou arco-seno (centrada)		$\pm a$	$\frac{a^2}{2}$
Gaussiana normalizada		$\pm s$	$s^2$

Sabendo que,  $\mu_y = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ , a expressão anterior adquire a forma,

$$y - \mu_y = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - \mu_i) + r_2(x_i) \quad (\text{A.8})$$

cujo primeiro termo é uma componente da definição de variância aplicado à grandeza de saída,  $y$ , permitindo estabelecer a relação seguinte:

$$s_y^2 = \hat{\sigma}_y^2 = E \left[ (y - \mu_y)^2 \right] = E \left[ \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - \mu_i) \right)^2 \right]. \quad (\text{A.9})$$

Utilizando as propriedades do “valor esperado”,  $E$ , é obtida a expressão genérica da LPI:

$$s^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot E[(x_i - \mu_i)^2] + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \cdot E[(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)] \quad (\text{A.10})$$

que, na sua formulação exposta no GUM [3], substitui os termos  $s^2(y)$  por  $u^2(y)$ , reportando-se à incerteza de medição (“ $u$ ” de “*uncertainty*”) e apresenta a simbologia convencional para representar as variâncias e covariâncias

$$u^2(y) = s^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \cdot s_{ij} \quad (\text{A.11})$$

No GUM as derivadas parciais são designadas por “coeficientes de sensibilidade”, representando-os por  $c_i$  apresentando-se, por essa razão, uma expressão alternativa para a LPI, que é a mais conhecida,

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j) \quad (\text{A.12})$$

onde  $r_{ij}$  representa o coeficiente de correlação para o par de variáveis  $x_i$  e  $x_j$ .

A expressão anterior é simplificável quando não existe ou não é significativa a correlação entre os pares de grandezas de entrada, resultando:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (\text{A.13})$$

As expressões (A.12) e (A.13) determinam o valor da incerteza de medição padrão nas condições apresentadas.

O conhecimento do resultado da aplicação da LPI permite partir para a etapa seguinte da fase cálculo: a avaliação da incerteza de medição expandida. Esta avaliação parte do pressuposto (inerente ao GUM) de aplicabilidade do Teorema do Limite Central, estipulando que a distribuição de probabilidade da grandeza de saída,  $y$ , possui uma configuração do tipo gaussiana. Sendo assim, a incerteza de medição expandida,  $U_p(y)$ , resulta do produto da *incerteza de medição padrão*,  $u_c(y)$ , por um *factor de expansão*,  $k_p$ , que é função do intervalo de confiança pretendido,

$$U_p(y) = k_p \cdot u_c(y) \quad (\text{A.14})$$



Nos casos em que a dimensão da amostra permita, de facto, aceitar este pressuposto, então, a incerteza de medição padrão obtida usando a LPI equivale a um desvio-padrão experimental que, de acordo com esta distribuição, representa um intervalo de confiança da ordem de 68 %. A sua expansão para um intervalo de confiança de 95 % implica que se multiplique este valor por um *factor de expansão* conhecido que é igual a 2,00,

$$U_{95}(y) = k_{95} \cdot u_c(y) = 2,00 \cdot u_c(y). \quad (\text{A.15})$$

Contudo, grande parte das medições não dispõe de amostras com dimensão suficientemente grande para que se possa considerar apropriada a aplicação do Teorema do Limite Central. É, portanto, necessário recorrer a uma abordagem alternativa aplicável nestes casos (recomendada num dos anexos do GUM<sup>7</sup>) baseada na distribuição de probabilidade *t*-Student.

Neste caso, a relação (A.14) é substituída por outra,

$$U_p(y) = t_p(\nu) \cdot u_c(y) \quad (\text{A.16})$$

em que o *factor de expansão* é,  $t_p(\nu)$ , depende do número de graus de liberdade efectivos,  $\nu$  ou  $\nu_{\text{ef}}$ , da grandeza de saída.

A obtenção deste factor resulta da aplicação da fórmula de Welch-Satterthwaite [10, 11],

$$\nu_{\text{ef}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}, \quad (\text{A.17})$$

contendo no numerador uma potência de 4ª ordem da incerteza de medição padrão da grandeza de saída e no denominador os rácios das diversas potências de 4ª ordem das contribuições para a incerteza divididas pelos números de graus de liberdade respectivos.

---

<sup>7</sup> O GUM [3] refere que “reconhecendo a dificuldade de confirmar experimentalmente a presunção de aplicabilidade da distribuição gaussiana aos casos reais, apontam-se circunstâncias em que esta adequação se pode assumir, designadamente, quando os casos de aplicação possuem, pelo menos, 3 componentes distintas de incerteza, com distribuições de probabilidade bem comportadas e provenientes de grandezas independentes, por exemplo, distribuições normais e distribuições uniformes, contribuindo para a estimativa da incerteza de medição padrão com quantidades comparáveis. Nessas circunstâncias (e considerando que as amostras que as suportam também o permitem), admite-se que se está no âmbito de validade do Teorema do Limite Central e, conseqüentemente, que a distribuição de probabilidade da grandeza de saída (mensuranda) é, com elevado grau de aproximação, do tipo gaussiana. Do mesmo modo, considera-se que este critério é atingido se nenhuma das componentes de incerteza obtidas por um método do tipo A for baseada numa amostra inferior a 10 observações”.

Para completar a exposição acerca deste processo de avaliação da incerteza de medição expandida resta indicar a forma como se obtêm os elementos do denominador.

Relativamente às componentes contributivas da incerteza de medição, elas são determinadas conforme se descreveu na expressão (A.13) anterior,

$$u_i^2(y) = c_i^2 \cdot u^2(x_i). \quad (\text{A.18})$$

Quanto ao número de graus de liberdade relativo a cada grandeza de entrada, determina-se consoante a componente de incerteza é obtida pelo método do tipo A ou pelo método do tipo B conforme se expõe a seguir:

- *no caso de componentes de incerteza do tipo A, essa avaliação é directa, uma vez que, sendo a dimensão da sua amostra constituída por  $n$  observações, o número de graus de liberdade,  $\nu_i$ , corresponde a  $(n-1)$  valores independentes (considerando que  $n > 1$ );*
- *no caso de componentes de incerteza do tipo B é utilizada uma expressão exposta no GUM que visa relacionar o número de graus de liberdade com o grau de fiabilidade da informação utilizada<sup>8</sup>:*

$$\nu_i = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^{-2}. \quad (\text{A.19})$$

A relação estabelecida entre o número de graus de liberdade efectivos e o *factor de expansão t-Student* é apresentada sob a forma de Quadro, como o que se apresenta em seguida.

*Quadro A.2: Determinação do factor de expansão a partir do número de graus de liberdade efectivos (para um intervalo de confiança de 95%).*

$\nu_{\text{ef}}$	$k_p$	$\nu_{\text{ef}}$	$k_p$	$\nu_{\text{ef}}$	$k_p$	$\nu_{\text{ef}}$	$k_p$
1	13,97	8	2,37	15	2,18	30	2,09
2	4,53	9	2,32	16	2,17	35	2,07
3	3,31	10	2,28	17	2,16	40	2,06
4	2,87	11	2,25	18	2,15	45	2,06
5	2,65	12	2,23	19	2,14	50	2,05
6	2,52	13	2,21	20	2,13	> 50	2,00
7	2,43	14	2,20	25	2,11		

<sup>8</sup> Considerando que se exprime o *grau de fiabilidade* por,  $R$ , então,  $R=1-[\Delta u(x_i)/u(x_i)]$ , onde  $\Delta u(x_i)$  representa a estimativa da percentagem de “incerteza” inerente ao valor limite atribuído à incerteza de medição,  $u(x_i)$ . Um exemplo: considerando que o rácio  $\Delta u(x_i)/u(x_i)$  é igual a 0,1 (i.e., 10%), o *grau de fiabilidade* da informação corresponde a 0,9 (ou seja, admite-se que se dispõe de um intervalo de confiança de 90% das possibilidades) e, consequentemente,  $\nu_i = \frac{1}{2} \cdot [0,1]^{-2} = 50$  graus de liberdade.

#### A.4 Tabela de Balanço de Incertezas de Medição

O procedimento de avaliação de incertezas de medição é sintetizado em Quadros designados por “*Tabelas de Balanço de Incertezas de Medição*”, de acordo com duas abordagens tipo: uma, aplicável quando é válida a aproximação gaussiana; outra, aplicável quando se utiliza a distribuição *t*-Student.

Na primeira, quando é válida a aplicação da distribuição gaussiana, a *Tabela de Balanço de Incertezas de Medição* tem a forma que se apresenta no Quadro A.3. Neste caso, a incerteza de medição expandida é obtida usando a expressão (A.15).

Quadro A.3: Tabela de balanço de incertezas de medição (distribuição gaussiana).

<i>Grandezas de entrada</i>	<i>Estimativas</i>	<i>Incertezas padrão</i>	<i>Coefficientes de sensibilidade</i>	<i>Contribuições para a incerteza de medição padrão</i>
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$
$X_1$	$x_1$	$u(x_1)$	$c_1$	$u_1(y)$
$X_2$	$x_2$	$u(x_2)$	$c_2$	$u_2(y)$
...	...	...	...	...
$X_N$	$x_N$	$u(x_N)$	$c_N$	$u_N(y)$
$Y$	$y$			$u_c(y)$

Na segunda, quando é válida a aplicação da distribuição de probabilidade *t*-Student, sendo necessário incluir no Quadro anterior um conjunto de células adicionais, incluindo uma coluna contendo o número de graus de liberdade relativos a cada componente de incerteza associada a grandezas de entrada e o acréscimo de informação requerido para se determinar o *factor de expansão*, resultando a Tabela de Balanço de Incertezas de Medição seguinte.

Quadro A.4: Tabela de balanço de incertezas de medição (distribuição *t*-Student).

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza de medição padrão	Graus de liberdade
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$	$\nu_i$
$X_1$	$x_1$	$u(x_1)$	$c_1$	$u_1(y)$	$\nu_1$
$X_2$	$x_2$	$u(x_2)$	$c_2$	$u_2(y)$	$\nu_2$
...	...	...	...	...	...
$X_N$	$x_N$	$u(x_N)$	$c_N$	$u_N(y)$	$\nu_N$
		<b>Incerteza de medição padrão</b>		$u_c(y)$	
		<b>Graus de liberdade efectivos</b>			$\nu_{ef}$
		<b>Factor de expansão</b>			$t_p(\nu_{ef})$
$Y$	$y$	<b>Incerteza de medição expandida</b>		$U_p(y)$	

