



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**

**UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A
DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ**

Liliana Vieira Pinheiro
(Licenciada)

Dissertação elaborada no Laboratório Nacional de Engenharia Civil para
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica pela Universidade
Técnica de Lisboa no âmbito do protocolo de cooperação entre o IST e o LNEC

Orientador: Doutor José Leonel Monteiro Fernandes
Co-Orientador: Doutora Conceição Juana Espinosa Morais Fortes

Júri

Presidente: Doutor José Leonel Monteiro Fernandes
Vogais: Doutora Conceição Juana Espinosa Morais Fortes
Doutor Paulo Alexandre de Avilez Rodrigues Almeida Valente
Doutor António Alexandre Trigo Teixeira

Julho 2007

RESUMO

Nesta dissertação é apresentado um modelo de elementos finitos baseado nas equações de Boussinesq estendidas por Nwogu [60], BOUSSiw (versão unidimensional e bidimensional). Trata-se de um modelo especialmente indicado para a propagação de ondas não lineares e dispersivas que permite reproduzir alguns dos processos mais importantes envolvidos na propagação de ondas marítimas em regiões costeiras: a difracção, a refracção, a reflexão, o empolamento, a dispersão de frequência, a dispersão de amplitude e a geração de harmónicas. O modelo utiliza o pacote SPRINT (Berzins e Furzeland [14]) para a integração temporal e o método de Galerkin com uma malha não estruturada de elementos finitos triangulares para a discretização espacial. As condições de fronteira implementadas no modelo são a condição de reflexão total e a condição de radiação associada a uma zona absorvente.

O modelo BOUSSiw resultou do aperfeiçoamento do modelo de elementos finitos de propagação de ondas, desenvolvido por Walkley [79]. Foram melhorados, neste trabalho, os aspectos relacionados com as oscilações numéricas, a geração e absorção de ondas no domínio de cálculo e a qualidade das malhas de elementos finitos utilizadas pelo modelo numérico.

Assim, efectuou-se, no modelo BOUSSiw, a calibração do parâmetro de difusão artificial no domínio e nas fronteiras absorventes. Estabeleceu-se uma relação entre esse parâmetro de difusão artificial e as características da onda e da malha de elementos finitos. Implementou-se, também, uma nova condição de geração de ondas no interior do domínio por intermédio de uma função fonte (Wei *et al.* [82]). Esta nova condição de geração permite que as ondas reflectidas possam passar pela zona de geração e sair do domínio sendo absorvidas nas fronteiras absorventes.

Para garantir a boa qualidade das malhas e o melhor desempenho do modelo foi desenvolvido um gerador automático de malhas de elementos finitos destinadas a modelos de propagação de ondas em zonas costeiras, designado por GMALHA. As malhas geradas têm refinamento local proporcional ao comprimento de onda e obedecem a critérios de qualidade, tais como: boa adaptabilidade às irregularidades da fronteira, forma dos triângulos o mais próxima possível da equilátera, valência dos nós igual a seis, variação suave do tamanho dos elementos e numeração dos nós da malha de modo a minimizar a largura de banda das matrizes. O desempenho deste gerador de malhas foi avaliado com dois casos de teste reais, observando-se, nestes casos, que a qualidade das malhas é boa e que o refinamento local permite reduzir o número de pontos das malhas e, conseqüentemente, os tempos de CPU necessários para gerar a própria malha, enquanto a renumeração dos nós permite diminuir a quantidade de memória utilizada pelos modelos

numéricos assim como os tempos de CPU necessários para execução dos modelos numéricos.

Foram também desenvolvidas interfaces com o utilizador para a construção dos ficheiros de dados e para a obtenção e visualização de resultados, tanto do modelo BOUSSiw como do gerador de malhas GMALHA.

O modelo, com as alterações mencionadas foi validado e testado com casos de teste referidos na bibliografia, que simulam a propagação de ondas sobre um canal de profundidade constante (1D e 2D), sobre um quebra-mar submerso (Dingemans [18]) e sobre um baixio elíptico numa praia de inclinação constante (Berkhoff [13]). Finalmente, aplicou-se o modelo BOUSSiw a um caso de teste real: a propagação de ondas na bacia de adução da central termoelétrica de Sines. Os resultados numéricos obtidos com este modelo foram comparados com os resultados de outros modelos numéricos e/ou experimentais.

Em geral, verificou-se que o modelo simulou com precisão a propagação sobre fundos moderadamente inclinados e reproduziu bastante bem os efeitos não lineares (por exemplo, geração de harmónicas ou alterações na forma da onda) na propagação dessas ondas. No entanto, o modelo apresentou limitações em zonas onde os efeitos não lineares são significativos (águas muito pouco profundas), pois baseia-se nas equações de Nwogu que são deduzidas admitindo que os efeitos não lineares são da mesma ordem dos efeitos dispersivos $\varepsilon = O(\mu^2)$. Observaram-se também algumas oscilações numéricas no cálculo da elevação da superfície livre. Estas oscilações são controladas pelo valor do parâmetro de difusão artificial, o qual deve ser previamente calibrado de modo a não influenciar significativamente a solução numérica.

O método da função fonte é eficaz na geração de ondas no interior do domínio de cálculo e, em geral, conduz a resultados numéricos mais próximos dos experimentais do que a geração de ondas na fronteira de entrada do modelo. Com este método, verificou-se também menor ocorrência de instabilidades numéricas.

A aplicação do modelo ao caso real de propagação de ondas na bacia de adução da central termoelétrica de Sines evidenciou capacidades de boa utilização em estudos de engenharia portuária e costeira.

PALAVRAS-CHAVE: Equações de Boussinesq, Modelo de Elementos Finitos, Propagação de Ondas, Geração de Ondas, Geração de Malhas de Elementos Finitos.

ABSTRACT

The model BOUSSiw (both one-dimensional and two-dimensional), which is based on the extended Boussinesq equations of Nwogu [60], is presented in this work. BOUSSiw is a model especially suited for non linear dispersive wave propagation and reproduces some of the main phenomena involved in wave propagation in coastal zones, such as, diffraction, refraction, reflection, shoaling, frequency dispersion, amplitude dispersion and harmonics generation. The model uses SPRINT package (Berzins and Furzeland [14]) for time integration and the Galerkin method with an unstructured grid of triangular finite elements for spatial integration. The boundary conditions implemented are total reflection and radiation associated with a sponge layer.

BOUSSiw model is the result of the enhancing of the finite element model developed by Walkley [79]. In this work, aspects related with numerical oscillations, wave generation and absorption and finite element mesh quality are improved.

In BOUSSiw, the calibration of the numeric diffusion parameter both inside the domain and in the sponge layers is performed. A relation is established between this parameter and the characteristics of the incident wave and the finite element mesh. A new wave generation method is also implemented using a source function (Wei *et al.* [82]). This new generation condition allows reflected waves to pass through the generation zone and exit the domain by being absorbed in the sponge layers.

To ensure a good mesh quality and a better performance of the model, an automatic finite element mesh generator named GMALHA was developed. The meshes generated by GMALHA are suitable for wave propagation models in coastal areas as they have local refinement proportional to the wavelength and verify known quality criteria. Some of those criteria are: adaptability to the irregularities of the boundary, most equilateral shape of the elements, node valence of six, smooth variation of element size and node numbering chosen to minimize the bandwidth of the matrices. The performance of the mesh generator is evaluated with two real test cases, showing that the meshes are of good quality and the local refinement decreases the number of points and consequently CPU time. On the other hand, node renumbering diminishes the memory and CPU time necessary for the execution of the numerical models.

Two Graphical User Interfaces (GUI), for the model BOUSSiw and for the mesh generator GMALHA, were developed in order to generate input files and to process output files for visualization.

The enhanced model was validated and tested with reference test cases that simulate the wave propagation over a constant depth flume (1D and 2D), over a submerged breakwater (Dingemans [18]) and over an elliptic shoal on a sloping beach (Berkhoff [13]). Finally, the model was applied to a field test case: the wave propagation

at Sines' thermoelectric central adduction bay. The results are compared with other numerical results, and in one case with both numerical and experimental results.

In general, the model can properly simulate wave propagation over gently varying bottoms and reproduces quite well nonlinear effects, such as harmonics generation and wave shape alterations. However, the model is limited to zones where non linear effects are not very important (very shallow water), as it is based on Nwogu's equations. Notice that these equations were derived considering dispersive and non linear effects of the same order, $\varepsilon = O(\mu^2)$. Some numeric oscillations that can be controlled with a numerical diffusion parameter, were observed. This diffusion parameter must be previously calibrated to avoid interference with the solution.

The source function method was effective in generating waves inside the domain and, in general, led to very good results with a better agreement with experimental results. Besides, the source function method generated less instability than the traditional wave entrance at the boundary.

The application of the model to the field test case of wave propagation showed its ability to be used in coastal engineering studies.

KEYWORDS: Boussinesq Equations, Finite Element Model, Wave Propagation, Wave Generation, Finite Element Mesh Generation.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. MOTIVAÇÃO.....	1
1.2. OBJECTIVOS	3
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	5
2. AS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ	7
2.1. MODELOS BASEADOS NAS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ	7
2.2. MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO	10
2.2.1. <i>Diferenças finitas</i>	10
2.2.2. <i>Elementos finitos</i>	11
2.3. AS EQUAÇÕES DE NWOGU.....	12
3. MODELO NUMÉRICO DE ELEMENTOS FINITOS	17
3.1. INTRODUÇÃO	17
3.2. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ESTENDIDAS DE BOUSSINESQ PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ..	17
3.2.1. <i>Formulação fraca</i>	18
3.2.2. <i>Aproximação por elementos finitos</i>	20
3.3. ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL	22
3.4. CONDIÇÕES INICIAIS	23
3.5. CONTROLO DA ESTABILIDADE NUMÉRICA.....	24
3.6. CONDIÇÕES DE FRONTEIRA	25
3.6.1. <i>Condição de geração</i>	25
3.6.2. <i>Condição de radiação</i>	26
3.6.3. <i>Condição de reflexão total</i>	28
3.7. GERAÇÃO DE ONDAS NO INTERIOR DO DOMÍNIO.....	29
3.7.1. <i>Introdução</i>	29
3.7.2. <i>Método de Walkley</i>	29
3.7.3. <i>Método da função fonte</i>	30
3.8. INTERFACE COM O UTILIZADOR.....	32
4. GERADOR DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS	35
4.1. INTRODUÇÃO	35
4.2. GERAÇÃO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS	36
4.2.1. <i>Introdução</i>	36
4.2.2. <i>Algoritmo de geração</i>	38
4.2.3. <i>Algoritmos de pós-processamento</i>	40
4.2.4. <i>Combinação dos algoritmos de pós-processamento</i>	45
4.2.5. <i>Interpolação da batimetria</i>	47
4.2.6. <i>Renumeração dos nós</i>	48
4.3. INTERFACE COM O UTILIZADOR.....	48
4.4. DESEMPENHO DAS MALHAS	51
4.4.1. <i>Bacia de adução da central termoeléctrica de Sines</i>	51
4.4.2. <i>Porto de Vila do Porto</i>	56
5. APLICAÇÕES	59

5.1. INTRODUÇÃO	59
5.2. MODELO UNIDIMENSIONAL BOUSSIW_1D	59
5.2.1. Canal unidimensional com profundidade constante.....	59
5.2.2. Quebra-mar submerso	65
5.3. MODELO BIDIMENSIONAL BOUSSIW_2D.....	74
5.3.1. Canal bidimensional com profundidade constante.....	74
5.3.2. Baixo elíptico numa praia de inclinação constante.....	77
5.3.3. Caso real: Bacia de adução da central termoelétrica de Sines	82
6. CONCLUSÕES E FUTURAS LINHAS DE TRABALHO	95
REFERÊNCIAS	99
ANEXO A.....	1
CÁLCULO DOS COEFICIENTES DAS MATRIZES ELEMENTARES M, K E C.....	1
ANEXO B.....	1
ESTRUTURA DO PROGRAMA GMALHA.....	1
ESTRUTURA DO PROGRAMA BOUSSIW	1
ESTRUTURA DOS FICHEIROS: <i>BATIM_FINA.DAD</i> , <i>BATIM_LARGA.DAD</i> E <i>FRONT.DAD</i>	1
<i>Ficheiro Batim_Fina.dad</i>	2
<i>Ficheiro Batim_Larga.dad</i>	2
<i>Ficheiro Front.dad</i>	2
ESTRUTURA DOS FICHEIROS: <i>SINES.IN</i> , <i>SINES.M</i> E <i>SINES.H</i>	2
<i>Ficheiro Sines.in</i>	3
<i>Ficheiro Sines.m</i>	4
<i>Ficheiro Sines.h</i>	4
ANEXO C.....	1
RESULTADOS OBTIDOS COM O MODELO BOUSSIW_1D PARA O CASO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS REGULARES SOBRE UM FUNDO DE PROFUNDIDADE CONSTANTE.....	1
ANEXO D.....	1
MODELO DE PROPAGAÇÃO DA AGITAÇÃO MARÍTIMAS: DREAMS	1
ANEXO E.....	1
MODELO DE PROPAGAÇÃO DA AGITAÇÃO MARÍTIMA: FUNWAVE.....	1

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Características de uma onda.	7
Figura 2 – Difusão artificial no domínio e na zona de absorção.	28
Figura 3 – Esquema da geração de ondas por variação da configuração do fundo (retirado de Walkley [79])......	30
Figura 4 – Esquema da geração de ondas com o método de Wei et al. [82].	31
Figura 5 – Interface com o utilizador do modelo BOUSSiw_2D.....	33
Figura 6 – Estrutura do GMALHA.....	37
Figura 7 – Evolução da criação de uma malha.	38
Figura 8 – Casos possíveis na criação de triângulos.....	39
Figura 9 – Malha final antes e depois do alisamento laplaceano.....	40
Figura 10 – Alisamento Laplaceano.	41
Figura 11 – Correção de ângulos por troca de diagonais.	42
Figura 12 – Malha antes e após a correção de ângulos.	42
Figura 13 – Correção de valências por troca de diagonais.....	42
Figura 14 – Malha antes e após a correção de valências.....	43
Figura 15 – Decomposição de um triângulo em dois, três ou quatro.	44
Figura 16 – Malha inicial e batimetria do domínio.....	44
Figura 17 – Malha refinada localmente considerando: a) NPPCO mínimo de 2; b) NPPCO mínimo de 4.....	45
Figura 18 – Ciclo de pós-processamento.	45
Figura 19 – Malha antes (malha A) e após a correção de valências e de ângulos (malha B). Malhas A e B sobrepostas (malha C) e pormenor de edge swapping.	46
Figura 20 – Malha antes (malha A) e após correções de valências e de ângulos com alisamentos Laplaceanos (malha B). Malhas A e B sobrepostas (malha C) e pormenor da malha inicial vs final.	46
Figura 21 – Esquema da interpolação da batimetria para os pontos da malha.	47
Figura 22 – Fronteiras inicial e redistribuída.....	50
Figura 23 – Parâmetros da criação da malha.	50

Figura 24 – Batimetria da zona da bacia de adução da central termoelétrica de Sines e correspondentes malhas geradas com 10 pontos por comprimento de onda para um período de 6s.	52
Figura 25 – Número de pontos e de elementos das malhas com os dois tipos de refinamento.	52
Figura 26 – Largura de banda das malhas.	53
Figura 27 – Tempo de CPU (s) de geração, interpolação, renumeração e total das malhas de elementos finitos com refinamento local.	54
Figura 28 – Tempo de CPU (s) de geração, interpolação, renumeração e total das malhas de elementos finitos com refinamento uniforme.	54
Figura 29 – Tempo de CPU de geração, interpolação e renumeração em percentagem do tempo total de criação das malhas de elementos finitos.	55
Figura 30 – Relação entre as malhas refinadas localmente e uniformemente.	56
Figura 31 – Número de pontos e de elementos das malhas com os dois tipos de refinamento.	57
Figura 32 – Tempo de CPU da criação da malha (geração + interpolação + renumeração) e de execução do modelo DREAMS.....	57
Figura 33 – Canal unidimensional, retirado de Wei et al. [82].....	60
Figura 34 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 1.0$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s e $t = 100$ s. BOUSSiw_1D (azul escuro) e FUNWAVE (azul claro).	62
Figura 35 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 1.0$ s. BOUSSiw_1D (azul escuro) e FUNWAVE (azul claro).	63
Figura 36 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 1.0$ s. BOUSSiw_1D (azul escuro tracejado) e FUNWAVE (azul claro).	64
Figura 37 – Perfil do canal experimental e posição das sondas, para a situação de geração de ondas na fronteira de entrada.	66
Figura 38 – Perfil do canal com zona de geração das ondas e posição das sondas, para a situação de geração no interior do domínio.....	67
Figura 39 – Evolução do passo temporal no caso do quebra-mar submerso.	67
Figura 40 – Perfil espacial da superfície livre. Bouss2D.....	69

Figura 41 – Comparação das deformadas da superfície livre: Geração na fronteira (azul claro), Geração interna (azul escuro) Experimental (vermelho).....	72
Figura 42 – Periodogramas relativos aos sinais das sondas. Geração na fronteira (preto) Geração interna (verde), experimental (vermelho tracejado).....	73
Figura 43 – Canal bidimensional com profundidade constante.....	75
Figura 44 – Evolução do passo temporal nos primeiros instantes.....	75
Figura 45 – Elevações da superfície livre no instante $t=100s$ obtidas com vários valores do parâmetro de difusão artificial (2.6×10^{-6} , 1.3×10^{-6} e 1.2×10^{-6}).	76
Figura 46 – Índices de agitação obtidos com vários valores do parâmetro de difusão artificial (2.6×10^{-6} , 1.3×10^{-6} e 1.2×10^{-6}).	76
Figura 47 – Elevação da superfície livre em vários instantes de cálculo (1 s, 5 s, 10 s, 20 s, 40 s, 200 s) com $\gamma = 1.2 \times 10^{-6}$	77
Figura 48 – Batimetria do baixio de Berkhoff.....	79
Figura 49 – a) Índices de agitação obtidos no instante $t = 50 s$ e localização das secções; b) Elevação da superfície livre no instante $t = 50 s$	80
Figura 50 – Baixio elíptico (Berkhoff [13]). Índices de agitação em diversas secções do domínio.	81
Figura 51 – Batimetria da zona marítima adjacente à bacia de adução da central termoelétrica de Sines.	84
Figura 52 – Batimetrias da zona da bacia de adução da central termoelétrica de Sines: a) real; b) modificada com profundidade constante de 2m (caso A); c) modificada com profundidade constante de 2m na zona de geração (caso B).....	85
Figura 53 – Fronteira do domínio e localização das zonas absorventes e da zona de geração das ondas.....	85
Figura 54 – Posição dos pontos de análise dos resultados.....	87
Figura 55 – Índices de agitação obtidos com o BOUSSiw_2D ao fim de 500s de simulação: a) Caso A; b) Caso B.	88
Figura 56 – Índices de agitação obtidos com o DREAMS: a) Caso A; b) Caso B.....	88
Figura 57 – Índices de agitação na bacia de adução obtidos com o BOUSSiw_2D ao fim de 200 s de simulação: a) Caso A; b) Caso B.....	89

Figura 58 – Índices de agitação na bacia de adução obtidos com o BOUSSiw_2D ao fim de 500 s de simulação: a) Caso A; b) Caso B.....	89
Figura 59 – Índices de agitação na bacia de adução obtidos com o DREAMS: a) Caso A; b) Caso B.....	89
Figura 60 – Índices de agitação obtidos nos nove pontos de controlo com os modelos BOUSSiw_2D e DREAMS.....	91
Figura 61 – Séries temporais da elevação da superfície livre em nove pontos no interior da bacia (pontos 1 a 5).....	92
Figura 62 – Séries temporais da elevação da superfície livre em nove pontos no interior da bacia (pontos 6 a 9).....	93
Figura 63 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 0.8$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s.....	2
Figura 64 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 1.0$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s.....	3
Figura 65 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 1.5$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s.....	4
Figura 66 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 2.0$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s.....	5
Figura 67 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 0.8$ s.....	6
Figura 68 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 1.0$ s.....	7
Figura 69 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 1.5$ s.....	8
Figura 70 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 2.0$ s.....	9

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Posição das sondas em relação ao início do canal da Figura 38.	67
---	----

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Prof. Leonel Fernandes pelo apoio precioso e pela disponibilidade e enorme paciência demonstradas e Eng.^a Juana Fortes pelo conhecimento transmitido, pela ajuda e incentivo constantes e incondicionais, e pela boa disposição e amizade que sempre demonstrou, sem os quais esta dissertação não poderia ter sido realizada.

Ao Prof. Mark Walkley, por ceder os seus trabalhos e tese de doutoramento que serviram de base para esta tese, pela disponibilidade demonstrada ao se deslocar a Lisboa e me acolher na sua universidade em Leeds onde, com paciência e dedicação, tornou possível a compreensão do seu trabalho.

Ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) pelo acolhimento tão caloroso e por me disponibilizar os meios necessários à produção deste trabalho, nomeadamente, as instalações físicas, os recursos computacionais, as ajudas financeiras e o ambiente humano sem igual.

A todos os amigos e colegas do LNEC e de mestrado, principalmente aos do Núcleo de Portos e Estruturas Marítimas, pela ajuda, companheirismo e incentivo, pois todos contribuíram, directa ou indirectamente, para a realização deste trabalho. Em especial ao Artur Palha pela ajuda preciosa, à Branca Branco, ao João Alfredo e ao Rui Capitão que atenciosamente colaboraram na correcção deste trabalho.

Aos meus pais, António e Mafília, e irmão, Mickael, por todo o carinho e incentivo durante a minha formação.

Ao meu marido, Dário, por todo apoio, companheirismo e principalmente pela compreensão demonstrada nos momentos críticos.

SIMBOLOGIA

a, a_0	:	amplitude da onda, amplitude da onda na zona de geração/entrada
A_1, A_2	:	constantes auxiliares
b	:	amplitude da velocidade
b_1	:	coeficiente da função de variação de fundo
B_1, B_2	:	constantes auxiliares
c	:	celeridade da onda
C_{ij}	:	elemento ij da matriz de convecção
D	:	amplitude da função fonte
D_{max}	:	distância máxima entre dois pontos da malha
D_{tol}	:	distância mínima de tolerância entre um ponto da malha e a fronteira
$f(x,t)$:	função fonte de geração das ondas
g	:	aceleração da gravidade
H, H_0	:	altura da onda, altura da onda na geração/entrada do domínio de cálculo
H/H_0	:	índice de agitação
h	:	profundidade local
h_1	:	variação da configuração do fundo
I_1	:	parâmetro relacionado com função de geração
K_{ij}	:	elemento ij da matriz de difusão
k	:	número de onda
L	:	comprimento total do domínio unidimensional
m	:	grau da função de interpolação
m_1	:	coeficiente da difusão no tempo
m_2	:	expoente da difusão no tempo
M_{ij}	:	elemento ij da matriz de massa
n_1	:	coeficiente da difusão no espaço
n_2	:	expoente da difusão no espaço
N	:	número total de nós numa malha
$NPPCO$:	número de pontos por comprimento de onda
$O(x)$:	ordem de grandeza da variável x
T	:	período da onda monocromática
t	:	tempo

t_0	:	instante inicial
u	:	componente horizontal da velocidade na direcção OX
v	:	componente horizontal da velocidade na direcção OY
\bar{u}	:	componente horizontal da velocidade média na direcção OX
\bar{v}	:	componente horizontal da velocidade média na direcção OY
v	:	função de teste
W	:	largura da fonte
w, p, f	:	variáveis auxiliares
x, y, z	:	coordenadas cartesianas
x_F	:	localização do final de uma zona absorvente
x_I	:	localização do início de uma zona absorvente
Z_α	:	posição, na vertical, definida pelo parâmetro α
α	:	parâmetro que define uma posição em z
β	:	parâmetro que define uma posição em z
β_w	:	parâmetro associado à largura da fonte
δ	:	parâmetro que define a largura da fonte
Δt	:	intervalo de tempo
Δx	:	espaçamento em x
Δy	:	espaçamento em y
ε	:	parâmetro de não linearidade
ϕ	:	função de interpolação
γ	:	parâmetro empírico para determinar a ordem de grandeza da difusão artificial
η	:	elevação da superfície livre
φ	:	ângulo de incidência das ondas em relação à direcção principal de propagação
λ	:	comprimento de onda
λ_0	:	comprimento de onda ao largo
μ	:	parâmetro de dispersão
ν_s	:	difusão artificial aplicada espacialmente

ν_s^*	:	difusão artificial aplicada espacialmente nas zonas absorventes
ν_t	:	difusão artificial aplicada ao longo do tempo
θ	:	parâmetro de Nwogu
Ω	:	domínio de cálculo
ω	:	frequência angular
ψ	:	ângulo entre dois lados consecutivos da fronteira da malha de elementos finitos

VECTORES

\mathbf{n}	:	vector normal à fronteira
\mathbf{u}	:	vector velocidade horizontal
$\bar{\mathbf{u}}$:	média do vector velocidade horizontal, ao longo da profundidade

MATRIZES

\mathbf{C}	:	matriz de convecção
\mathbf{M}	:	matriz de massa
\mathbf{K}	:	matriz de difusão

OPERADORES

$\frac{\partial a}{\partial x}$:	derivada da variável a em ordem a x
$\frac{\partial a}{\partial y}$:	derivada da variável a em ordem a y
$\frac{\partial a}{\partial t} = \dot{a}$:	derivada da variável a em ordem ao tempo
∇a	:	gradiente da variável a
$\int_0^L a \cdot dx$:	integral da variável a entre 0 e L
$\mathfrak{S}(f)$:	transformada de Fourier da função f
$\mathfrak{S}^{-1}(f)$:	transformada de Fourier inversa da função f

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação

Os estudos de engenharia portuária e costeira, incluindo o planeamento, projecto, construção e manutenção de obras de protecção costeira requerem uma previsão da evolução das ondas marítimas desde o largo até à costa.

No caso específico de portos, marinas e outras estruturas de abrigo, é particularmente importante o conhecimento das características da agitação marítima (altura, direcção de propagação e período da onda) no seu exterior e interior para o cálculo de forças, momentos e tensões que servirão para o dimensionamento e verificação de critérios de estabilidade destas estruturas. As características da agitação marítima também determinam as condições de manobrabilidade das embarcações na aproximação ao porto e no seu interior assim como a operacionalidade do próprio porto.

No decurso da sua propagação desde o largo até junto à costa, as ondas podem sofrer os efeitos de diversos fenómenos físicos como, por exemplo, a difracção, a refracção, a reflexão, o empolamento, a dissipação de energia por atrito de fundo e/ou rebentação, interacções entre ondas, entre ondas e correntes e/ou entre ondas e estruturas. O efeito destes fenómenos é a transformação das características da onda ao longo da sua propagação, isto é, a modificação da velocidade e da direcção de propagação da onda e uma redistribuição da energia ao longo das cristas, à medida que as ondas se aproximam da costa. A diminuição da profundidade leva ainda ao aumento da instabilidade da onda que culmina na rebentação, fenómeno que provoca a dissipação de energia da onda.

Além disso, à medida que as ondas se propagam para profundidades cada vez menores, verificam-se também alterações na forma da onda com uma progressiva assimetria vertical do perfil da onda (um maior declive na zona anterior da onda do que na posterior) com crescimento das cristas e achatamento das cavas. Estas alterações da onda estão relacionadas com a variação da topografia do fundo (por exemplo) que podem provocar a geração e transferência de energia entre harmónicas, efeitos não-lineares presentes na propagação das ondas.

O recurso à modelação numérica é cada vez mais utilizado na previsão da evolução das ondas em zonas costeiras devido, em geral, à rapidez, flexibilidade e vasto leque de aplicações práticas que podem ser efectuadas com os modelos numéricos. No entanto, a sua utilização acarreta várias dificuldades relacionadas com as limitações dos

modelos numéricos na descrição “correcta” dos fenómenos físicos e com a representação de situações reais.

A utilização de modelos baseados nas equações de Boussinesq tem-se revelado adequada para descrever a propagação de ondas em zonas de pequena profundidade. Nestas equações, o domínio espacial reduz-se a duas dimensões horizontais, tirando partido da pequena dimensão da profundidade em relação às outras duas dimensões espaciais. Isto é conseguido substituindo a distribuição vertical de velocidades por um valor constante correspondente à velocidade numa determinada profundidade. No entanto, os modelos baseados nestas equações estão limitados a zonas de águas pouco profundas onde os efeitos de não linearidade e de dispersão sejam fracos. Nas últimas décadas, diversos trabalhos têm procurado estender o domínio de aplicabilidade destas equações a águas cada vez mais profundas assim como a águas muito pouco profundas e ainda ter em conta outros fenómenos presentes na propagação de ondas. Assim, hoje em dia existe uma vasta família de equações estendidas de Boussinesq (Madsen *et al.* [51] [49] [50], Beji e Nadaoka [12], Nwogu [60], Wei *et al.* [81], Gobbi e Kirby [32], Madsen e Schäffer [52] [53], Agnon *et al.* [3], Zou [86], Kennedy *et al.* [39]).

A resolução numérica destas equações tem sido na grande maioria dos casos feita com o método das diferenças finitas (Peregrine [63], Abbot *et al.* [1] [2], Hauguel [35], Karambas *et al.* [36], Madsen *et al.* [51], Silva [75], Neves e Silva [59], Madsen e Sørensen [54], Beji e Battjes [11], Wei e Kirby [80], Ohyama *et al.* [61], Schröter *et al.* [73], Dingemans [18] e Lynett [48]).

Um dos modelos de diferenças finitas mais utilizado é o FUNWAVE (Kirby *et al.* [41]). Este modelo é baseado nas equações não lineares completas desenvolvidas por Wei *et al.* [81]. A integração das equações do modelo numérico no tempo é feita através do método predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton de 4ª ordem. Os termos que envolvem derivadas espaciais de 1ª ordem são discretizados com diferenças finitas com uma precisão de 4ª ordem. A discretização das derivadas espaciais e temporais de ordem superior é feita com uma precisão de 2ª ordem. Este modelo foi desenvolvido para aplicações a uma e duas dimensões. Mil-homens [55] utilizou este modelo para a propagação de ondas ao longo de um canal de profundidade variável, de modo a analisar o seu desempenho na simulação dos efeitos não lineares e verificou que o modelo simula adequadamente a maioria das transformações das características das ondas ao longo da sua propagação, apresentando no entanto algumas limitações na simulação da rebentação de ondas e na aplicação bidimensional a casos reais.

Nos últimos anos têm surgido alguns modelos que utilizam o método dos elementos finitos (Katapodes e Wu [37], Ambrosi [4], Grasselli *et al.* [34], Perotto [64], Antunes do Carmo [5], Antunes do Carmo *et al.* [7], Antunes do Carmo e Seabra Santos

[6], Li *et al.* [43], Walkley e Berzins [77], [78], Walkley [79], Woo e Liu [84] e Eskilsson *et al.* [19]). Embora este método seja computacionalmente mais complexo, apresenta a capacidade de lidar directamente com malhas não estruturadas de fronteiras irregulares, incluindo ilhas e outros obstáculos. As malhas de elementos finitos permitem minimizar o número de pontos, refinando a malha apenas nas zonas onde seja necessário.

Do exposto, é notória a variedade de modelos numéricos utilizados para resolver as equações de Boussinesq ou as suas versões estendidas, cujas vantagens e desvantagens dependem muito dos objectivos para os quais são aplicados.

No caso particular desta tese, o interesse na utilização de um modelo de elementos finitos com potencialidades em ser aplicado a zonas portuárias e abrigadas, cujo código e documentação respectiva estivessem disponíveis motivaram a escolha como base de trabalho do modelo BOUSS desenvolvido por Walkley [79].

O modelo de Walkley é um modelo que utiliza o método de elementos finitos para a resolução das equações de Boussinesq estendidas por Nwogu [60]. Este modelo utiliza uma malha não estruturada de elementos finitos para a discretização espacial. A aproximação espacial foi acoplada com um *software* de integração temporal e, para resolver o sistema de equações lineares em cada passo de tempo, foi usado o método iterativo GMRES com um pré-condicionador. Os resultados obtidos por Walkley mostraram que este método reproduz com alguma precisão os resultados de problemas não lineares e dispersivos de propagação de ondas. No entanto, o modelo também apresenta algumas limitações, relacionadas com a ocorrência de oscilações numéricas (instabilidade numérica) e com o facto das condições de fronteira implementadas não possibilitarem a saída de perturbações pela fronteira onde as ondas são geradas. Por outro lado, os resultados obtidos mostram uma grande dependência das características da malha de elementos finitos. No caso de situações reais com domínios de grande dimensão, fronteiras sólidas irregulares e reflectivas e batimetrias complexas, estas limitações impedem a aplicação generalizada do modelo.

1.2. Objectivos

O objectivo geral deste trabalho foi o aperfeiçoamento e validação do modelo de elementos finitos de propagação de ondas, baseado nas equações de Boussinesq estendidas por Nwogu [60], desenvolvido por Walkley [79], de modo a que esta nova versão do modelo seja mais fiável, menos parametrizada e aplicável a casos reais complexos. Nesse sentido, foram melhorados no modelo de Walkley os aspectos

relacionados com as oscilações numéricas, a geração e absorção de ondas no domínio e a qualidade das malhas de elementos finitas usadas pelo modelo numérico.

Mais detalhadamente, o trabalho iniciou-se com a familiarização com os aspectos teóricos, numéricos e computacionais do modelo de Walkley e das suas sub-rotinas e a sua implementação no sistema operativo Windows. Para isso, foi necessário:

- implementar as versões unidimensional e bidimensional do modelo no sistema operativo Windows. Durante este processo, foram substituídas algumas das bibliotecas por outras equivalentes e disponíveis no terminal de trabalho, nomeadamente, os *solvers* de sistemas de equações lineares que utilizavam as bibliotecas da NAG[®] (NAG [87]) por *solvers* equivalentes da biblioteca IMSL[®] (IMSL [88]);
- desenvolver uma interface com o utilizador simples para a construção dos ficheiros de dados e formatação dos ficheiros de saída de forma a serem automaticamente reproduzidos pelos programas de visualização gráfica disponíveis (Golden Software Surfer 8TM e Tecplot 360TM);
- aplicar o modelo a casos de teste simples para análise do seu comportamento;
- testar os vários métodos de integração temporal disponíveis dentro dos pacotes SPRINT (Berzins e Furzeland [14]), e DASP (Brown *et al.* [15]).

Walkley identificou vários problemas na aplicação do seu modelo, alguns dos quais foram o objecto de desenvolvimento neste trabalho, como é o caso dos problemas relacionados com as oscilações numéricas, a geração e absorção de ondas no domínio e a qualidade das malhas de elementos finitas utilizadas.

Para resolver o problema das oscilações numéricas, foi necessário:

- analisar os termos difusivos artificiais existentes no modelo;
- calibrar os parâmetros envolvidos nesses termos para cada caso de teste e estabelecer uma relação entre esses parâmetros e as características da onda e da malha.

Com vista à resolução do problema das ondas reflectidas que incidem sobre a fronteira de entrada e de saída, foi necessário:

- incorporar uma nova condição de geração das ondas no interior do domínio, de acordo com métodos mais recentes. Foram analisados os trabalhos de Wei *et al.* [82], Lee *et al.* [42] e Schäffer e Sørensen [72];
- incorporar uma nova condição de absorção de ondas nas fronteiras de saída.

A qualidade das malhas de elementos finitos a ser utilizada pelo modelo BOUSSiw é uma componente essencial para a estabilidade do modelo e para a qualidade dos resultados. Foi também objectivo deste trabalho a criação de um gerador de malhas com refinamento local em função da profundidade, ou seja, proporcional ao comprimento de onda, e com imposição de critérios de qualidade, de modo a gerar malhas o mais possível optimizadas e adequadas a este modelo.

Analizou-se o desempenho do gerador de malhas através da aplicação a dois casos de teste reais: a) Bacia de adução da central termoeléctrica de Sines; b) Porto de Vila do Porto. É de salientar que também se desenvolveu uma interface com o utilizador para facilitar a aplicação do gerador de malhas.

Finalmente, efectuou-se a validação do modelo e do gerador de malhas assim construídos aplicando-os a diferentes casos de teste da bibliografia e a um caso de teste real, nomeadamente:

- canal com profundidade constante (1D e 2D);
- quebra-mar submerso (Dingemans [18]) (1D);
- baixio elíptico numa praia de inclinação constante (Berkhoff [13]) (2D);
- bacia de adução da central termoeléctrica de Sines (2D).

Os resultados foram comparados com outros modelos numéricos e/ou com resultados de ensaios em modelo físico reduzido.

Neste trabalho, as versões unidimensional e bidimensional do modelo desenvolvido designam-se por BOUSSiw_1D e BOUSSiw_2D, respectivamente, e o gerador de malhas por GMALHA.

1.3. Organização do texto

Esta tese está organizada de forma a sintetizar o trabalho efectuado e os resultados obtidos.

Depois deste capítulo de introdução do tema em estudo e de definição dos objectivos, descrevem-se, no segundo capítulo, as equações de Boussinesq e faz-se uma breve revisão bibliográfica da sua utilização. São abordados os diversos métodos e esquemas numéricos para a resolução daquelas equações. É ainda apresentado o sistema de equações de Boussinesq estendidas deduzido por Nwogu.

No terceiro capítulo, descreve-se, primeiramente, o modelo de elementos finitos de Walkley [79] baseado nas equações de Boussinesq estendidas por Nwogu [60]. Seguidamente, são apresentadas as alterações introduzidas no modelo de modo a melhorar o seu desempenho, nomeadamente a calibração dos parâmetros de difusão artificial no domínio e nas fronteiras absorventes e a implementação de uma nova condição de geração de ondas no interior do domínio por intermédio de uma função fonte. Finalmente, descreve-se a interface desenvolvida numa folha de cálculo da Microsoft Excel™ recorrendo à linguagem de programação Visual Basic for Applications™ para facilitar a aplicação do modelo de elementos finitos.

No quarto capítulo é descrito o gerador automático de malhas de elementos finitos criado para modelos de elementos finitos de propagação de ondas em zonas costeiras. São explicados os algoritmos utilizados nas diversas fases da geração das malhas e é analisado o seu desempenho através da sua aplicação a dois casos reais.

No quinto capítulo, procede-se à validação do modelo e, em especial, das modificações introduzidas, utilizando casos de teste de propagação de ondas descritos na literatura e um caso de teste real – a bacia de adução da central termoelétrica de Sines. Os resultados são comparados com outros modelos numéricos e/ou com resultados experimentais.

Por fim, no sexto capítulo são tiradas as conclusões e definidas as futuras linhas de trabalho.

2. AS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ

2.1. Modelos baseados nas equações de Boussinesq

As equações de onda dispersiva não linear (equações de Boussinesq) foram desenvolvidas inicialmente para explicar observações experimentais de ondas solitárias que percorriam distâncias relativamente grandes sem alterações na sua forma ou velocidade (Whitham [83]). Nos anos 50, Ursell [76] unificou este trabalho com outras teorias de ondas longas definindo um parâmetro baseado na amplitude da onda, a , no comprimento de onda, λ , e na profundidade da água, h , parametrizando assim, de uma forma combinada, os efeitos relativos da não linearidade, ε , e da dispersão, μ (ver Figura 1).

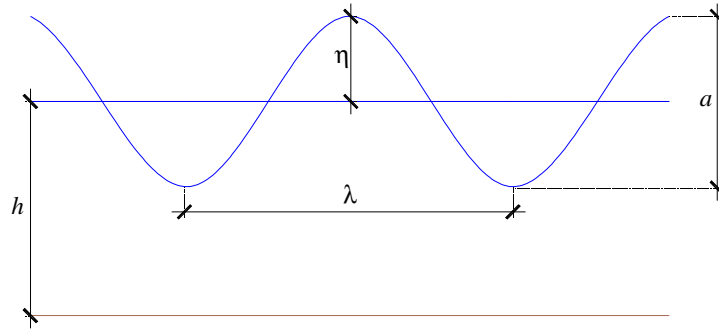


Figura 1 – Características de uma onda.

em que η é a elevação da superfície livre e ε e μ são dados por:

$$\varepsilon = \frac{a}{h}, \quad (1)$$

$$\mu = \frac{h}{\lambda}. \quad (2)$$

Peregrine [63] deduziu um sistema das equações bidimensionais de Boussinesq para profundidade variável, considerando como hipóteses simplificativas, relativamente à dispersão, $\mu \ll 1$ e à não linearidade, $\varepsilon \sim \mu^2$. Peregrine usou a média em profundidade da velocidade, \mathbf{u} , como variável dependente.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \eta) \bar{\mathbf{u}}] = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \eta + \varepsilon (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \mu^2 \left\{ \frac{h^2}{6} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) - \frac{h}{2} \nabla \left[\nabla \cdot \left(h \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) \right] \right\} = 0, \quad (4)$$

em que o vector de velocidade $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(x, y, t) = (\bar{u}, \bar{v})$ representa o campo de velocidades bidimensional, e $\eta = \eta(x, y, t)$ representa a elevação da superfície livre. $h = h(x, y)$ é a profundidade e ∇ representa o operador gradiente bidimensional em relação às coordenadas horizontais x e y .

No entanto, apesar destas equações descreverem o fenómeno não linear da propagação de ondas em fundos de profundidade variável, a sua aplicação está limitada a zonas de pequena profundidade relativa, $kh < \pi/2$, sendo k o número de onda. Este sistema de equações, que é limitado a águas pouco profundas, apresenta características de dispersão linear que diferem grandemente da realidade quando se entra em águas mais profundas invalidando a utilização do modelo nestas situações.

Nas últimas décadas têm surgido diversos trabalhos com base nas equações de Boussinesq no sentido de aumentar o seu domínio de aplicabilidade a águas cada vez mais profundas, i.e., melhorar as características de dispersão linear destas equações. Estes trabalhos contribuíram bastante para alargar a gama de aplicação destas equações a águas profundas (até $kh \sim 6$).

Madsen *et al.* [51] adicionaram termos de dispersão ao sistema original das equações de Boussinesq a fim de melhorar as características lineares da dispersão. Beji e Nadaoka [12] produziram um sistema de equações de Boussinesq estendidas, válido para profundidades variáveis. Nwogu [60] deduziu um sistema de equações de Boussinesq estendidas escolhendo a velocidade numa profundidade arbitrária como uma das variáveis dependentes. Esta equação de ordem $O(\mu^2, \varepsilon)$, contém termos de terceiras derivadas, quer na equação de conservação da massa quer na equação de conservação da quantidade de movimento, e permite a aplicação a águas de profundidade intermédia, $kh < 3$. Embora estes sistemas de equações de Boussinesq estendidas tenham melhorado as características de dispersão linear, são ainda formalmente da mesma ordem de precisão que o sistema original, no que respeita à não linearidade.

Neste sentido, adaptando a metodologia de Nwogu, Wei *et al.* [81] deduziram um novo conjunto de equações de Boussinesq que descrevem a evolução bidimensional de ondas que não rebentam sobre um fundo suave e impermeável. Estas equações de ordem $O(\mu^2, \varepsilon^3 \mu^2)$ incluem termos não lineares dispersivos. Assim, além de se poderem aplicar a profundidades intermédias, podem simular a propagação de ondas em zonas muito pouco profundas onde as interacções não lineares são fortes. No entanto, é de salientar que se tratam de equações deduzidas admitindo que o potencial de velocidades é representado

por um polinómio de segundo grau na vertical. Este facto conduz a uma representação pouco precisa da cinemática do escoamento em águas intermédias e profundas (Avilez-Valente [8]).

Mais recentemente, Gobbi e Kirby [32] estenderam o modelo anterior, de modo a obterem um modelo de $O(\mu^4, \epsilon\mu^4, \epsilon^2\mu^4)$, em que o potencial de velocidade é aproximado por um polinómio de 4ª ordem na coordenada z . Em relação ao modelo de Wei *et al.* [81], este modelo apresenta melhores resultados na previsão da cinemática do fluido.

Madsen e Schäffer ([52] e [53]) deduzem vários conjuntos de equações de Boussinesq, de acordo com as características da variável dependente escolhida (velocidade média na profundidade, velocidade da partícula no nível de repouso ou a um determinado nível arbitrário z) e a ordem dos termos retida (termos da ordem μ^2 , para formulações de menor ordem e termos da ordem μ^4 , para formulações de ordem superior).

Agnon *et al.* [3] apresentam uma formulação $O(\mu^4)$ que retém termos não lineares de $O(\epsilon\mu^6, \epsilon^2\mu^6)$, e Gobbi e Kirby [33] e Schäffer [71] apresentam uma formulação que retém todos os termos lineares e não lineares até $O(\mu^4)$. Algumas das formulações de Boussinesq existentes aparecem como casos especiais desta formulação.

Zou [86] melhorou as equações de Boussinesq de ordem superior obtendo equações de $O(\mu^4)$ em profundidades constantes mas que apenas contêm termos de $O(\mu^2)$. Estas equações são idênticas às equações deduzidas por Madsen e Schäffer [52] para profundidades constantes, tendo estas sido deduzidas como equações de $O(\mu^2)$.

Kennedy *et al.* [39] melhorou as equações de Wei *et al.* [81] redefinindo o conceito de profundidade de referência para incluir uma componente não linear. Mais tarde, Kennedy *et al.* [40] simplificou as equações de ordem superior retendo apenas os termos de ordem inferior. Estas simplificações são efectuadas para profundidade constante e termos envolvendo potências de primeira ordem do declive ∇h . As equações resultantes são variantes de equações existentes apresentando as mesmas características de dispersão mas apresentam significativas melhorias na representação dos efeitos não lineares.

Inspirado por Nwogu e com o objectivo de melhorar o campo de velocidades Madsen *et al.* [49] generalizou o procedimento de Agnon *et al.* [3] para uma profundidade arbitrária, z . Mais tarde, Madsen *et al.* [50] deduziram novas equações inteiramente não lineares e altamente dispersivas para ondas interagindo com uma batimetria rapidamente variável. Estas equações são uma extensão da formulação de ordem superior de Agnon *et al.* [3] válidas em fundos de declive suave e baseiam-se na

expansão em série do campo de velocidades numa profundidade arbitrária z . Pela primeira vez esta dedução é feita sem assumir aproximações de declive suave.

2.2. Métodos numéricos de resolução

2.2.1. Diferenças finitas

Os primeiros esquemas numéricos para resolver as equações de Boussinesq eram baseados em métodos de diferenças finitas. Peregrine [63] utilizou um esquema de diferenças finitas de segunda ordem com um passo corrector para a equação de conservação da massa. Abbot *et al.* [1] aplicou um esquema de diferenças finitas numa malha espacial deslocada (*staggered*), em que a variável da elevação da superfície livre é calculada nos pontos da malha enquanto as velocidades são calculadas nos lados. Uma análise cuidadosa deste esquema permitiu identificar e remover fontes de dispersão e difusão não físicas. Neves e Silva ([57] e [58]) foram os primeiros, em Portugal, a desenvolver esquemas de diferenças finitas para resolver as equações de Boussinesq. Karambas *et al.* [36] usou um esquema de diferenças finitas com correcções para os erros de truncatura espaciais para resolver problemas de propagação de ondas periódicas e solitárias.

Mais recentemente, têm sido apresentados trabalhos sobre a utilização de métodos de diferenças finitas aplicados ao sistema de equações de Boussinesq estendidas. Madsen *et al.* [51] aplicou o esquema de diferenças finitas de Abbot *et al.* [1] ao seu sistema estendido e mostrou que as ondas podiam ser simuladas em profundidades superiores às das equações clássicas de Boussinesq. Neves e Silva [59] e Silva [75] utilizaram um método de diferenças finitas para as equações de Boussinesq incluindo uma extensão das equações a águas intermédias e profundas com base em esquemas de discretização espacial e temporal de segunda ordem mas com os termos relativos à aceleração local e à pressão discretizados com precisão de quarta ordem. Beji e Battjes [11] usaram um esquema do tipo predictor-corrector para resolver estas equações e modelar a propagação de ondas sobre um quebra-mar submerso.

Nwogu [60] apresentou um esquema do tipo predictor-corrector para as suas próprias equações estendidas com correcções para os erros de truncatura nos termos que poderiam produzir dispersão numérica. Nwogu mostrou que estas equações podiam ser usadas para simular com precisão ondas periódicas e irregulares. Wei e Kirby [80] apresentaram um método alternativo de diferenças finitas para as equações de Nwogu que

elimina directamente os erros dispersivos, diferenciando certos termos com uma ordem mais elevada e utilizando um método do tipo predictor-corrector de ordem mais elevada para a integração no tempo. Os resultados apresentados por Wei e Kirby [80] confirmam que este método é exacto e eficiente. Ohyama *et al.* [61] apresentou um método de diferenças finitas a uma malha deslocada (*staggered*) para as equações de Nwogu e aplicou-o à propagação de ondas sobre um quebra-mar submerso. Dingemans [18] faz um estudo comparativo de modelos do tipo Boussinesq para a propagação de ondas sobre uma barra, incluindo também modelos de diferenças finitas para as equações clássicas e estendidas. Os resultados mostraram a importância de modelar com precisão os efeitos dispersivos, mas também verificou-se que a não linearidade fraca inerente a todos os modelos pode conduzir a imprecisões significativas. Este caso de teste, da propagação de ondas sobre um quebra-mar submerso, será considerado na secção 5.2.

2.2.2. Elementos finitos

Até recentemente, o trabalho com métodos de elementos finitos limitava-se às equações clássicas de Boussinesq. Katapodes e Wu [37] aplicaram um esquema de Lax-Wendroff para a discretização temporal combinado com um método de elementos finitos de Galerkin e usou este esquema para resolver o problema da onda solitária. Ambrosi [4] aplicou um método de elementos finitos com Taylor-Galerkin modificado. Grasselli *et al.* [34] e Perotto [64] desenvolveram *a posteriori* uma estimativa do erro para o método dos elementos finitos aplicado às equações clássicas de Boussinesq.

Antunes do Carmo *et al.* [7] apresentaram um método de elementos finitos com quadriláteros utilizando o método de Petrov-Galerkin e, mais tarde, Antunes do Carmo e Seabra Santos [6] acrescentaram ao modelo a rebentação e a interacção com correntes ao modelo. Em Avilez-Valente [8] é desenvolvida uma formulação de Petrov-Galerkin que garante a estabilidade e precisão de 3ª ordem do esquema numérico para as equações de Boussinesq 1D e 2D e de Seabra-Santos 1D. Em Avilez-Valente e Seabra-Santos [9] esse esquema foi estendido às equações de Beji-Nadaoka 1D a 1-termo. Plecha [68] optimizou a formulação apresentada em Avilez-Valente [8] e Avilez-Valente e Seabra-Santos [9] por forma a garantir a precisão e estabilidade do esquema iterativo.

Só muito recentemente começaram a ser publicados trabalhos sobre métodos de elementos finitos para as equações de Boussinesq estendidas.

Li *et al.* [43] desenvolveram um método de elementos finitos para o sistema de Beji e Nadaoka [12], utilizando quadriláteros e uma interpolação bi-linear para todas as variáveis. A integração temporal utiliza o método predictor-corrector de Adams–

Bashforth–Moulton. Shi *et al.* [74] também utilizaram o método de elementos finitos para criar um modelo baseado nas equações de Beji e Nadaoka [12].

Walkley e Berzins [77], [78] e Walkley [79], desenvolveram um método de elementos finitos para o sistema de equações de Boussinesq desenvolvido por Nwogu [60], utilizando uma malha não estruturada de elementos triangulares para a discretização espacial. Para resolver o sistema de equações lineares em cada passo de tempo foi usado o método iterativo GMRES com um pré-condicionador. Todas as variáveis são interpoladas linearmente e é introduzida uma variável auxiliar para tratar as derivadas espaciais de terceira ordem.

Woo e Liu [84] desenvolveram um método de elementos finitos de Petrov–Galerkin para as equações de Boussinesq unidimensionais totalmente não lineares e fracamente dispersivas. Este modelo baseia-se em funções de interpolação cúbicas podendo tratar directamente as derivadas espaciais de terceira ordem. No entanto, é muito difícil estender esta técnica para duas dimensões, especialmente com malhas não estruturadas.

Eskilsson *et al.* [19] utilizou um método de elementos finitos espectrais que permite resolver as equações de Boussinesq estendidas em duas dimensões com uma ordem de aproximação elevada utilizando aproximações polinomiais de ordem arbitrária. Este método permite diminuir substancialmente os custos computacionais de problemas complexos de grande dimensão ou com simulações de longo termo.

2.3. As equações de Nwogu

A forma padrão das equações de Boussinesq, equações (3) e (4), para profundidade variável, foi primeiro deduzida por Peregrine [63], que usou a média em profundidade da velocidade, \mathbf{u} , como variável dependente, e $\varepsilon \sim \mu^2$.

Apesar das equações clássicas de Boussinesq descreverem o fenómeno não linear da propagação de ondas em fundos de profundidade variável, a sua aplicação está limitada a zonas de pequena profundidade relativa, isto é, $kh < \pi/2$. O facto de se assumir fraca dispersão em frequência faz com que a forma padrão das equações de Boussinesq seja inválida em águas intermédias e profundas. Por outro lado, em águas muito pouco profundas a sua utilização é também limitada pois os efeitos não lineares tornam-se muito mais importantes do que os efeitos dispersivos, $\varepsilon \gg \mu^2$.

Normalmente, nas aplicações práticas das equações clássicas de Boussinesq, a imprecisão na representação das características de dispersão é o factor mais limitativo,

porque influencia directamente a celeridade das ondas e conseqüentemente todos os processos de transformação da onda, como o empolamento, a refração e a difração. Além disso, muitos processos não lineares, tais como a interação entre ondas e a geração de harmónicas em águas pouco profundas, dependem também da precisão da relação de dispersão linear (Freilich e Guza, [29]; Madsen e Sørensen, [54]).

Para melhorar as características de dispersão linear das equações de Boussinesq e, por conseguinte, estender a sua aplicabilidade a profundidades cada vez maiores, foram apresentadas por Madsen *et al.* [51] e Nwogu [60], formas estendidas das equações de Boussinesq. Em Madsen *et al.* [51] foi adicionado um novo termo na equação de conservação de quantidade de movimento, com o objectivo de produzir uma relação de dispersão que se aproximasse o mais possível da solução linear, segundo a teoria de Airy. Na aproximação de Nwogu [60], foi usada a velocidade a uma certa profundidade como variável dependente (em vez da média em profundidade). Nestas equações, $\mu \ll 1$ e $\mu^2 \sim \varepsilon$ sendo desprezados os termos $O(\varepsilon\mu^2, \varepsilon^2, \mu^4)$.

As equações de Boussinesq estendidas deduzidas por Nwogu são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta + \frac{Z_\alpha^2}{2} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + Z_\alpha \nabla \left(\nabla \cdot \left(h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot ((h + \eta) \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\left(\frac{Z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \left(Z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u})) \right) = 0, \quad (6)$$

em que o vector de velocidade $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) = (u, v)$ representa o campo de velocidades bidimensional, calculado numa determinada profundidade, Z_α , $\eta = \eta(x, y, t)$ representa a elevação da superfície livre e g é a aceleração da gravidade.

Escolhendo uma profundidade arbitrária $Z_\alpha = \theta h$, em que $-1 \leq \theta \leq 0$ o sistema (5) e (6) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta + A_1 h^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + A_2 h \nabla \left(\nabla \cdot \left(h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot ((h + \eta) \mathbf{u}) + \nabla \cdot (B_1 h^3 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + B_2 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}))) = 0, \quad (8)$$

onde

$$A_1 = \frac{\theta^2}{2}, \quad (9)$$

$$A_2 = \theta, \quad (10)$$

$$B_1 = \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{6}, \quad (11)$$

$$B_2 = \theta + \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Se a profundidade for constante, ou seja, $h(x, y) = H$ e $\nabla h = 0$, as equações (7) e (8) simplificam-se, e obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha H^2 \nabla \left(\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot ((H + \eta) \mathbf{u}) + \beta H^3 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (14)$$

onde

$$\alpha = \theta + \frac{\theta^2}{2}, \quad (15)$$

$$\beta = \alpha + \frac{1}{3}. \quad (16)$$

A versão unidimensional das equações (5) e (6) pode ser obtida facilmente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{Z^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + Z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((h + \eta) u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{Z^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(Z + \frac{h}{2} \right) h \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (18)$$

Escolhendo a profundidade arbitrária $Z_\alpha = \theta h$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_1 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + A_2 h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((h + \eta) u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(B_1 h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_2 h^2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (20)$$

Se a profundidade for constante, ou seja, $h(x) = H$ e $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$, estas equações resultam:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha H^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((H + \eta)u) + \beta H^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (22)$$

Substituindo as seguintes definições

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ e } \dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (23)$$

$$p = (h + \eta)u, \quad (24)$$

$$f = \frac{1}{2}u^2 + g\eta, \quad (25)$$

nas equações (19) e (20), obtém-se, para profundidade variável, o sistema:

$$\dot{u} + \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} + A_2 h \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h\dot{u}) = 0, \quad (26)$$

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(B_1 h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_2 h^2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (27)$$

e para profundidade constante:

$$\dot{u} + \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha H^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} = 0, \quad (28)$$

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \beta H^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (29)$$

3. MODELO NUMÉRICO DE ELEMENTOS FINITOS

3.1. Introdução

Neste capítulo é descrito o modelo de elementos finitos BOUSSiw utilizado nesta dissertação, no que diz respeito à sua formulação teórica, à sua resolução pelo método variacional e à sua aplicação computacional. Ambas as versões, unidimensional e bidimensional, foram usadas neste trabalho. No entanto, para simplicidade, apresentam-se apenas as equações referentes ao modelo unidimensional de profundidade constante.

Primeiramente, descreve-se a aplicação do método dos elementos finitos às equações de Boussinesq estendidas por Nwogu [60], equações base do modelo BOUSSiw, o esquema de integração temporal e as condições iniciais e de fronteira do modelo.

Seguidamente, é dada especial ênfase às alterações introduzidas no modelo de modo a melhorar o seu desempenho, nomeadamente a calibração dos parâmetros de difusão artificial no domínio e nas fronteiras absorventes e à implementação de uma nova condição de geração de ondas no interior do domínio por intermédio de uma função fonte.

Finalmente, apresenta-se a interface desenvolvida numa folha de cálculo da Microsoft Excel™ recorrendo à linguagem de programação *Visual Basic for Applications*™ para facilitar a aplicação do modelo de elementos finitos.

3.2. Resolução das equações estendidas de Boussinesq pelo método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos permite a resolução de uma ou mais equações às derivadas parciais num domínio espacial, Ω , geometricamente complexo, através da divisão desse domínio, num conjunto de elementos geometricamente simples, chamados elementos finitos, nos quais se calcula uma solução aproximada do problema com recurso a funções de interpolação contínuas (Reddy [69]).

No caso unidimensional, os elementos consistem em sub-intervalos de aproximação linear ou de ordem polinomial superior. No caso bidimensional, os elementos podem, em princípio, ter qualquer forma geométrica. A forma mais simples é a triangular e é a adoptada no modelo utilizado nesta dissertação.

Os nós são os pontos onde a solução discreta aproximada do problema é calculada. Cada elemento finito é definido pelos seus nós, sendo linear se tem nós apenas nos vértices ou de ordem superior se contém nós nas arestas ou no seu interior.

As soluções aproximadas são interpoladas em cada elemento através de funções de interpolação polinomial. A reunião das contribuições dos elementos gera aproximações contínuas. O grau das funções de interpolação depende do número de nós no elemento e da continuidade requerida pela formulação fraca associada às equações diferenciais a resolver. Neste modelo, são utilizados elementos com funções de interpolação lineares.

Nas sub-seções seguintes apresenta-se a aplicação do método dos elementos finitos às equações estendidas de Boussinesq, nomeadamente a obtenção da formulação fraca ou variacional e da aproximação por elementos finitos.

3.2.1. Formulação fraca

A versão unidimensional das equações estendidas de Boussinesq é dada pelas equações (26) e (27). Estas equações não podem ser resolvidas directamente, com funções de interpolação lineares, devido às derivadas espaciais de 3ª ordem presentes na equação (27). Para resolver este problema, é, então, introduzida uma variável auxiliar, w , dada por:

$$w = B_1 h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_2 h^2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2}. \quad (30)$$

Introduzindo esta variável auxiliar na equação (27), o novo sistema de equações a resolver é dado por:

$$\dot{u} + \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} + A_2 h \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h\dot{u}) = 0, \quad (31)$$

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (32)$$

$$w - B_1 h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B_2 h^2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} = 0. \quad (33)$$

Para simplificar as deduções que se seguem, são utilizadas as equações considerando profundidade constante. O método descrito aplica-se igualmente ao sistema mais geral com profundidade variável.

O sistema de equações, considerando profundidade constante, é então dado por:

$$\dot{u} + \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha H^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} = 0, \quad (34)$$

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (35)$$

$$w - \beta H^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (36)$$

A multiplicação das equações anteriores por uma função de teste, $v = v(x)$, regular, pertencente ao domínio e que satisfaz as condições de fronteira, permite obter:

$$v\dot{u} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha H^2 v \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} = 0, \quad (37)$$

$$v\dot{\eta} + v \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (38)$$

$$vw - \beta H^3 v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (39)$$

A integração destas equações no domínio $\Omega = [0, L]$ conduz a:

$$\int_0^L v\dot{u}dx + \int_0^L v \frac{\partial f}{\partial x} dx + \alpha H^2 \int_0^L v \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} dx = 0, \quad (40)$$

$$\int_0^L v\dot{\eta}dx + \int_0^L v \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_0^L v \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0, \quad (41)$$

$$\int_0^L vw dx - \beta H^3 \int_0^L v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = 0. \quad (42)$$

Recorrendo à integração por partes e sabendo que:

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (43)$$

obtém-se a formulação fraca ou variacional das equações diferenciais (Reddy [69]):

$$\int_0^L v \dot{u} dx + \int_0^L v \frac{\partial f}{\partial x} dx - \alpha H^2 \int_0^L v \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} dx = -\alpha H^2 \left[v \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right]_0^L, \quad (44)$$

$$\int_0^L v \dot{\eta} dx + \int_0^L v \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_0^L v \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0, \quad (45)$$

$$\int_0^L v w dx + \beta H^3 \int_0^L \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \beta H^3 \left[v \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L. \quad (46)$$

3.2.2. Aproximação por elementos finitos

Utilizando o método de Galerkin, a aproximação por elementos finitos é conseguida substituindo as variáveis por um valor aproximado dado pela multiplicação de uma função de interpolação linear, $\phi_i(x)$ e dos valores nodais da mesma variável (Zienkiewicz e Taylor [85]). Assim, considerando:

$$v(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) v_i, \quad (47)$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) w_i, \quad (48)$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i, \quad (49)$$

$$\dot{\eta}(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{\eta}_i, \quad (50)$$

$$\dot{u}(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{u}_i, \quad (51)$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) p_i, \quad (52)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) f_i, \quad (53)$$

Substituindo a equação (49) nas equações (44), (45) e (46) obtêm-se três tipos de integrais para a variável u :

$$\begin{aligned}\int_0^L v u dx &= \int_0^L \sum_{i=1}^N \phi_i(x) v_i \sum_{k=1}^N \phi_k(x) u_k dx \\ &= \sum_{i=1}^N v_i \left(\sum_{k=1}^N u_k \left(\int_0^L \phi_i(x) \phi_k(x) dx \right) \right),\end{aligned}\quad (54)$$

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) v_i \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^N \phi_k(x) u_k \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^N v_i \left(\sum_{k=1}^N u_k \left(\int_0^L \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} dx \right) \right),\end{aligned}\quad (55)$$

$$\begin{aligned}\int_0^L v \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \int_0^L \sum_{i=1}^N \phi_i(x) v_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^N \phi_k(x) u_k \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^N v_i \left(\sum_{k=1}^N u_k \left(\int_0^L \phi_i(x) \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} dx \right) \right).\end{aligned}\quad (56)$$

Para as outras variáveis: η , w , \dot{u} , $\dot{\eta}$, p e f , são também obtidas relações semelhantes. Considerando as definições para as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} , dadas por:

$$M_{ik} = \int_0^L \phi_i(x) \phi_k(x) dx, \quad (57)$$

$$K_{ik} = \int_0^L \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} dx, \quad (58)$$

$$C_{ik} = \int_0^L \phi_i(x) \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} dx, \quad (59)$$

e substituindo no sistema de equações (44), (45) e (46) obtêm-se as equações discretas:

$$M_{ik} \dot{u}_k + C_{ik} f_k - \alpha H^2 K_{ik} \dot{u}_k = -\alpha H^2 \left[\phi_i \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right]_0^L, \quad (60)$$

$$M_{ik} \dot{\eta}_k + C_{ik} p_k + C_{ik} w_k = 0, \quad (61)$$

$$M_{ik} w_k + \beta H^3 K_{ik} u_k = \beta H^3 \left[\phi_i \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L. \quad (62)$$

Os coeficientes das matrizes M_{ik} , K_{ik} e C_{ik} são apresentados no Anexo A.

3.3. Esquema de integração temporal

O modelo unidimensional de Walkley recorre ao pacote de integração temporal SPRINT (Berzins e Furzeland [14]). Este software fornece um modo geral de resolver sistemas de equações diferenciais parciais ordinárias utilizando passos de tempo e ordens de integração variáveis e adaptáveis a cada caso. Existem cinco módulos que podem ser utilizados conforme o método que se pretende. Os métodos incorporados são: Theta A, Theta B, BDF (*Backward Differentiation Formulas* – fórmulas de diferenças finitas regressivas), Adams-Moulton e DASSL (*Differential-Algebraic System Solver*) (Walkley [79]).

Neste trabalho, para os casos de teste de profundidade constante e do quebra-mar submerso de Dingemans, efectuou-se uma análise do comportamento dos diferentes métodos. Verificou-se que, tal como Walkley [79], o mais robusto em todos os casos foi o método DASSL. Este método provou ser o mais estável para simulações de longo termo.

A ideia base deste método de resolução (ou *solver*) para resolver sistemas de equações diferenciais é substituir as derivadas temporais por uma diferença finita e, de seguida, resolver o sistema de equações pelo método de Newton-Raphson. Substituindo a derivada temporal por uma diferença regressiva (*backward difference*) de 1ª ordem, obtém-se a fórmula de Euler implícita:

$$F\left(y_{n+1}, \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n}, t_{n+1}\right) = 0. \quad (63)$$

O sistema não linear é, então, resolvido em ordem a y_{n+1} através duma variante do método de Newton.

O software SPRINT pode tirar partido da estrutura bandeda das matrizes e usar métodos directos aumentando, assim, a eficiência do processo de integração temporal. Outra estratégia utilizada pelo SPRINT é a variação do passo de tempo e da ordem do método através do controlo do erro absoluto e relativo que se mantêm sempre abaixo dos valores pré-definidos. Walkley [79], após algumas experiências, estabeleceu que a ordem adequada destes valores é de 10^{-6} , embora possam variar em cada caso.

O modelo bidimensional produz matrizes esparsas pelo que o método de integração temporal deve ter isso em conta. O pacote SPRINT permite a resolução de

sistemas esparsos através da factorização da matriz jacobiana. No entanto, quando se trata de problemas de grande dimensão, esta factorização e o armazenamento da matriz factorizada pode ser computacionalmente muito pesado e até proibitivo. Uma alternativa é usar métodos iterativos. Para isso, Walkley acoplou ao SPRINT o pacote DASPK (Brown *et al.* [15]) (*Differential Algebraic Systems Krylov Preconditioned*) que usa o método iterativo GMRES (*Generalized Minimum Residual*) com um pré-condicionador do tipo ILU (Factorização LU incompleta).

É importante salientar que é de grande vantagem para o método de resolução de equações, que a malha de elementos finitos tenha a numeração nodal ordenada de modo que a largura de banda seja mínima. Este procedimento encontra-se explicado na secção 4.2.6.

3.4. Condições iniciais

As condições iniciais definidas no modelo BOUSSiw são as de repouso, isto é, a elevação da superfície livre é igual a zero assim como a velocidade em todos os pontos do domínio:

$$\begin{aligned}\eta^0 &= 0, \\ u^0 &= 0.\end{aligned}\tag{64}$$

Esta condição pode levar a descontinuidades no tempo significativas, quando as ondas começam a ser introduzidas no sistema e, conseqüentemente, a passos temporais muito pequenos. Para que tal não aconteça, a introdução da onda no domínio é feita de forma gradual nos primeiros passos de tempo. Utiliza-se, assim, uma função v_t que começa por absorver as perturbações, nos primeiros passos de tempo e que gradualmente vai diminuindo com o tempo até deixar de ter influência no sistema. Esta função v_t é do tipo exponencial:

$$v_t = m_1 \cdot e^{-m_2 \frac{t}{T}},\tag{65}$$

em que m_1 e m_2 são parâmetros que podem ser ajustados a cada caso. Os valores utilizados neste trabalho foram $m_1 = 0.005$ e $m_2 = 1$.

A função v_t , designada por difusão no tempo, é somada à equação da conservação da massa:

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \beta H^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \nu_t \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (66)$$

3.5. Controlo da estabilidade numérica

O método dos elementos finitos é, por si, não difusivo pelo que frequentemente surgem oscilações espúrias, que amplificam e inviabilizam a obtenção duma solução numérica.

Uma das formas de atingir a estabilidade numérica é através da introdução de difusão artificial. A difusão artificial é introduzida através de um termo viscoso que se adiciona à equação de conservação da massa. Esta técnica baseia-se na constatação de que a fricção causada pela viscosidade elimina as oscilações de frequência elevada. No entanto, ao acrescentar este termo viscoso, estamos a modelar um sistema físico diferente do inicial. Por isso deve ter-se muito cuidado ao aplicar este termo. Mas se a difusão artificial for bem dimensionada, permite eliminar as ondas de pequena escala sem alterar grandemente as ondas de maior escala da solução. Este termo difusivo, ao eliminar as oscilações espúrias, impede que os erros se acumulem ao longo do tempo e levem a problemas de instabilidade numérica do modelo.

Walkley [79] introduziu um termo difusivo de segunda ordem, ν_s , constante em todo o domínio adicionado à equação da conservação da massa:

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \beta H^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \nu_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (67)$$

em que ν_s devia ser ajustado em cada caso.

No trabalho apresentado por Søndergaard e Hansen [90], é demonstrado que a viscosidade deve ser proporcional a:

$$\nu_s \propto \frac{\lambda^2}{2\pi\Delta x}, \quad (68)$$

$$\nu_s \propto \frac{\lambda^4}{(2\pi\Delta x)^3}, \quad (69)$$

conforme se utiliza uma difusão de 2ª ordem ou de 4ª ordem. Em Walkley [78] (pp 871) é referido que o termo difusivo de segunda ordem é aplicado em duas fases subsequentes, o que equivale a aplicar um termo de quarta ordem. Por isso a equação (69) é a escolhida para o cálculo da difusão. Foi assim introduzido um parâmetro de

proporcionalidade, γ , na equação dando origem à relação (70). No entanto, continua a ser necessário calibrar o parâmetro de difusão artificial, γ . Como a viscosidade, ν_s , tem como unidades m^2/s , o parâmetro γ tem as unidades de m/s nesta equação.

$$\nu_s = \frac{\gamma \cdot \lambda^4}{(2 \cdot \pi \cdot \Delta x)^3}. \quad (70)$$

A gama de valores do parâmetro γ foi obtida empiricamente neste trabalho, através dos vários casos de teste efectuados, e é diferente conforme se utiliza a geração clássica das ondas numa fronteira ou através duma função fonte no interior do domínio. Com efeito, verificou-se que o modelo BOUSSiw apresenta menos oscilações do que o modelo original com a geração das ondas na fronteira. Assim, é aconselhável que este parâmetro varie nos seguintes intervalos:

$$\gamma \in \begin{cases} [0.5 \times 10^{-4}, 2.5 \times 10^{-4}] m^3 / s & \Leftarrow \text{Geração na fronteira} \\ [2.0 \times 10^{-6}, 8.5 \times 10^{-6}] m^3 / s & \Leftarrow \text{Geração interna} \end{cases} \quad (71)$$

3.6. Condições de fronteira

Para resolver o sistema de equações devem ser impostas condições de fronteira em todos os nós que se encontram na fronteira do domínio computacional. Nos problemas de propagação de ondas, existem três tipos de fronteiras distintas: entrada das ondas no domínio computacional, saída das ondas do domínio computacional e fronteiras sólidas. A estas fronteiras correspondem as condições de fronteira de geração, radiação e reflexão, respectivamente. De seguida, descrevem-se essas condições.

3.6.1. Condição de geração

A condição de geração permite a geração das ondas numa fronteira do domínio. Esta condição é dada pela imposição da elevação da superfície livre e das derivadas espaciais da velocidade na fronteira de entrada. Assim, considerando uma onda sinusoidal, as expressões da elevação da superfície livre e da velocidade são dadas por:

$$\eta_x^t = a \sin(kx - \omega t), \quad (72)$$

$$u_x^t = b \sin(kx - \omega t), \quad (73)$$

em que a é a amplitude da onda, b é a magnitude da velocidade, k é o número de onda, ω é a frequência angular. k , ω e b são dados por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (74)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (75)$$

$$b = \frac{\omega \cdot a}{kH(1 - \beta(kH)^2)}, \quad (76)$$

sendo T o período da onda. Sendo que b foi obtido através da linearização das equações de Nwogu assumindo que a onda é periódica e regular.

A derivada da velocidade em ordem ao tempo, dada pela equação (73), permite obter:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -b\omega \cos(kx - \omega t). \quad (77)$$

As derivadas espaciais da velocidade são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = bk \cos(kx - \omega t), \quad (78)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = bk\omega \sin(kx - \omega t), \quad (79)$$

o que conduz na fronteira de entrada às seguintes equações:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{b}{k} \cos(-\omega t), \quad (80)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{b}{k\omega} \sin(-\omega t). \quad (81)$$

3.6.2. Condição de radiação

Nas fronteiras não físicas que limitam o domínio computacional, é importante minimizar eventuais reflexões para o interior do domínio. É de salientar também que uma condição de radiação simples, eficaz nos modelos lineares, não o é nos modelos não lineares e dispersivos, uma vez que as ondas dispersivas não possuem uma única

velocidade de fase. Uma maneira de evitar reflexões é a de absorver completamente as ondas que incidem nestas fronteiras.

No presente modelo, introduz-se uma zona de absorção nas fronteiras onde se pretende a absorção total das ondas incidentes. Trata-se de uma zona onde se adiciona um termo difusivo à equação (29) que cresce exponencialmente em direcção à fronteira capaz de absorver a energia das ondas que saem do domínio com diferentes frequências.

Walkley [79] utiliza uma expressão do tipo:

$$v_s^* = n_1 \cdot \frac{e^{\left(\frac{x-x_I}{x_F-x_I}\right)^{n_2}} - 1}{e - 1}, \quad (82)$$

em que n_1 e n_2 são parâmetros que devem ser calibrados para cada caso. Desta forma garante-se a total absorção das ondas na zona de absorção.

Dados os inconvenientes óbvios de efectuar uma calibração de dois parâmetros, para cada caso de teste, definiu-se neste trabalho uma nova lei de crescimento da difusão que não necessita de calibração, e que garante a continuidade entre a difusão no domínio e a da zona de absorção. Na zona de absorção o valor de v_s é corrigido, v_s^* é dado por:

$$v_s^* = v_2 \cdot \frac{e^{\left(\frac{x-x_I}{x_F-x_I}\right)^2} - 1}{e - 1} + v_s, \quad (83)$$

$$v_2 = 400 \cdot v_s, \quad (84)$$

sendo v_s a difusão constante utilizada para controlar as oscilações numéricas de pequena escala em todo o domínio, descrita na secção 3.5, v_2 é a difusão máxima da zona absorvente sobre a fronteira, x_I é o ponto onde começa a zona de absorção e x_F encontra-se sobre a fronteira (ver Figura 2). Fora da zona de absorção, $v_s^* = v_s$.

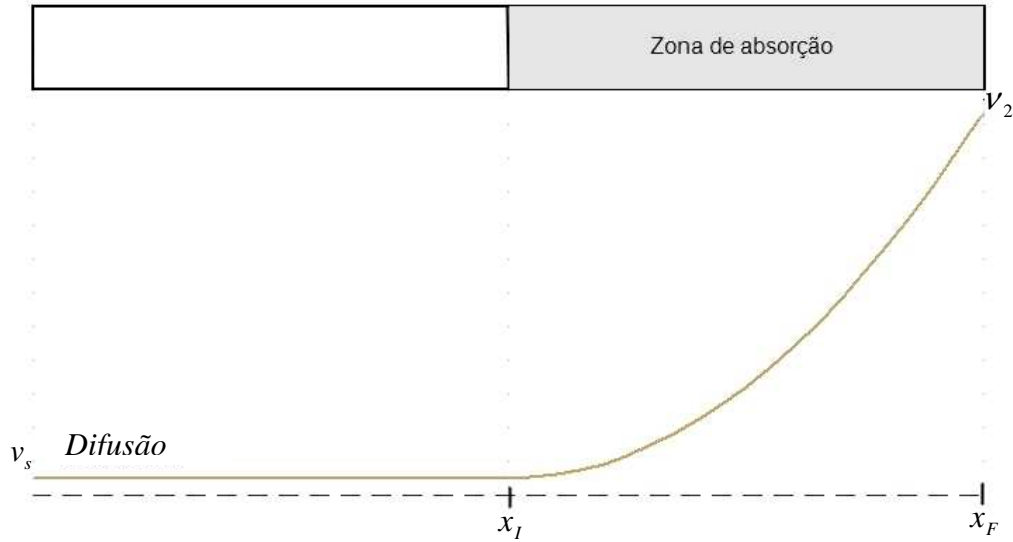


Figura 2 – Difusão artificial no domínio e na zona de absorção.

A largura da zona de absorção deve ser entre duas e três vezes o comprimento de onda.

Esta difusão espacial é introduzida na equação de conservação da massa e, no caso de profundidade constante, obtém-se a seguinte equação:

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \beta H^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = v_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (85)$$

3.6.3. Condição de reflexão total

As fronteiras sólidas reflectem as ondas que nelas incidem. Essa reflexão pode ser total ou parcial, em que alguma da energia da onda é absorvida. No modelo BOUSSiW apenas é possível simular condições de reflexão total, o que representa uma parede vertical sólida e impermeável. As condições de impermeabilidade e de conservação de massa levam às seguintes condições de fronteira:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ e } \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (86)$$

em que \mathbf{n} é o vector normal à fronteira.

A introdução da condição de reflexão parcial, para simular fronteiras como quebra-mares, praias, etc., será objecto de trabalho futuro.

3.7. Geração de ondas no interior do domínio

3.7.1. Introdução

Em algumas situações, ocorrem reflexões significativas no interior do domínio que vêm a incidir sobre a fronteira de entrada das ondas. O modelo não é capaz de lidar com estas perturbações uma vez que não é possível prever as suas características *a priori*. Uma maneira de resolver este problema é introduzir uma nova forma de gerar as ondas, no interior do domínio. As ondas reflectidas podem passar através desta zona sem alterar as condições de geração e propagam-se até sair do domínio através duma fronteira de saída. Este método é particularmente importante em simulações de longo termo em domínios geometricamente complexos.

Apresenta-se de seguida, os métodos utilizados para a geração de ondas no interior do domínio: o método utilizado por Walkley [79] e o método da função fonte (Wei *et al.* [82]). Este último método foi implementado no modelo BOUSSiw.

3.7.2. Método de Walkley

Para a geração de ondas no interior do domínio, Walkley [79], adicionou um termo à equação da conservação da massa que simula os efeitos duma configuração de fundo que varia com o tempo provocando a formação duma onda à superfície:

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \beta H^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dot{h}_l = 0, \quad (87)$$

sendo a forma da variação do fundo definida por:

$$\dot{h}_l = 2 \cdot a \cdot \omega \cdot c \frac{b_l}{\sqrt{\pi}} e^{-b_l^2 (x-x_l)^2} \sin(-\omega \cdot t), \quad (88)$$

em que a é a amplitude da onda, ω é a frequência angular e c é a celeridade da onda que se quer gerar. O coeficiente b_l garante que a função seja nula quando $x = x_l$.

Na Figura 3 esquematiza-se a variação da configuração do fundo ao longo do tempo, utilizada por Walkley.

A zona de geração estende-se sobre uma área rectangular cuja largura é de um ou dois comprimentos de onda. Tanto a função da variação da configuração do fundo como a largura da zona de geração são parâmetros a ajustar a cada caso de aplicação do modelo.

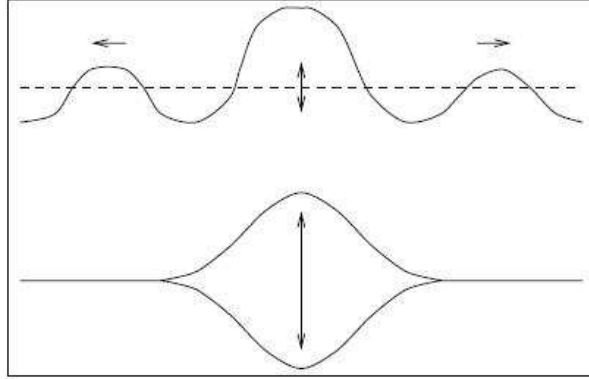


Figura 3 – Esquema da geração de ondas por variação da configuração do fundo (retirado de Walkley [79]).

Os resultados obtidos por Walkley com esta metodologia foram satisfatórios embora com alguma falta de precisão nas características das ondas geradas.

3.7.3. Método da função fonte

Wei *et al.* [82] apresentaram um método semelhante ao de Walkley, mas deduziram uma função fonte, $f(x,t)$, a partir da linearização das equações de Boussinesq e utilizaram o teorema de Green para obter uma relação explícita entre a altura de onda desejada e a amplitude da função fonte. Tal como Walkley, Wei *et al.* também distribui a zona de geração sobre vários pontos da malha. O método de Wei é, no entanto, mais geral e foi deduzido, aparentemente, com um maior rigor matemático podendo também estender-se a ondas irregulares.

O método consiste em adicionar um termo, a função fonte $f(x,t)$, à equação da conservação da massa:

$$\dot{\eta} + \frac{\partial p}{\partial x} + \beta H^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = f(x,t), \quad (89)$$

$$f(x,t) = D \cdot e^{(-\beta_w \cdot x^2)} \cdot \sin(-\omega \cdot t), \quad (90)$$

em que D é a amplitude da função fonte, β_w é um parâmetro associado à largura da fonte e x é a distância ao ponto central da geração. D é dado por:

$$D = 2 \cdot a \cdot \frac{(\omega^2 - \alpha_1 \cdot g \cdot k^4 \cdot h^3) \cdot \cos(\varphi)}{\omega \cdot I_1 \cdot k \cdot (1 - \alpha(kh)^2)}, \quad (91)$$

em que $\alpha_1 = \alpha + 1/3$, $\alpha = -0.390$, φ é o ângulo de incidência das ondas em relação à direcção principal de propagação e I_1 é dado por:

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\beta_w}} \cdot e^{\left(\frac{(k \cdot \cos(\theta))^2}{4 \cdot \beta_w}\right)}. \quad (92)$$

O parâmetro β_w é definido de modo a obter a largura, W , desejada. Wei *et al.* [82] define que a largura da fonte deve ser entre 0.15 e 0.25 vezes o comprimento de onda, L , ou seja:

$$W = \delta \cdot \frac{L}{2} \text{ com } \delta \in [0.3, 0.5]. \quad (93)$$

Para que a equação (90) seja nula nas extremidades de W , então β_w deve ser:

$$\beta_w = \frac{80}{\delta^2 L^2}. \quad (94)$$

Assim, a função fonte tem uma amplitude máxima de D , uma largura de W e vai oscilando com o tempo entre D e $-D$ (ver Figura 4).

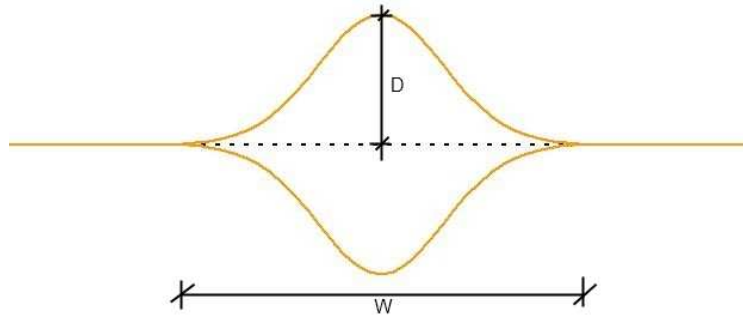


Figura 4 – Esquema da geração de ondas com o método de Wei *et al.* [82].

No caso de ondas irregulares o procedimento é o seguinte:

- Aplica-se uma transformada de Fourier à série temporal das ondas que se pretende gerar, $\eta(t)$:

$$\eta(\omega) = \mathfrak{F}\{\eta(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt, \quad (95)$$

- Calculam-se os coeficientes de Fourier da função fonte:

$$F(\omega) = 2 \cdot \eta(\omega) \cdot \frac{(\omega^2 - \alpha_1 \cdot g \cdot k^4 \cdot h^3) \cdot \cos(\varphi)}{\omega \cdot I_1 \cdot k \cdot (1 - \alpha(kh)^2)}, \quad (96)$$

- Aplica-se a transformada de Fourier inversa e obtém-se a função fonte:

$$F(t) = \mathfrak{S}^{-1}\{\eta(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} . \quad (97)$$

Wei *et al.* [82] efectuaram testes com ondas regulares e irregulares de vários períodos e amplitudes e obteve resultados bastantes bons. No modelo BOUSSiw adoptou-se o método de Wei *et al.* [82] o que permite gerar também ondas irregulares.

3.8. Interface com o utilizador

Para facilitar a construção do ficheiro de dados para o modelo BOUSSiw, foi criada uma interface com o utilizador. Esta interface foi desenvolvida numa folha de cálculo da Microsoft Excel™ recorrendo à linguagem de programação *Visual Basic for Applications*™ (ver Figura 5).

A interface é composta por quatro folhas:

- folha ONDA: contém os dados da agitação incidente, nomeadamente, o coeficiente de Nwogu, θ , o tipo de onda, a amplitude de onda, a_0 , o período, T , o comprimento de onda, λ , a profundidade na zona de geração e o ângulo de incidência das ondas em relação à direcção da linha de geração, φ .
- folha VISCOS: contém os dados da difusão artificial, nomeadamente, o coeficiente m_1 e o expoente m_2 da difusão no tempo dada pela equação (65), o parâmetro de difusão artificial γ , dado pela equação (71), a localização em y da fonte e a largura das zonas de absorção em relação ao comprimento de onda.
- folha TEMPO: contém os dados da discretização temporal, nomeadamente, se as condições iniciais são nulas ou não nulas (futuramente será incluído no modelo a condição inicial não nula), o valor do instante inicial, o valor do instante final, se o utilizador define ou não o passo temporal inicial e o valor deste, a tolerância de erro absoluto e a tolerância de erro relativo.
- folha OUTPUT: contém os dados para definir quais os resultados a serem produzidos pelo modelo, nomeadamente, os pontos onde se deseja obter a solução no tempo, os instantes onde se deseja obter a solução no espaço e os instantes inicial e final para o cálculo dos índices de agitação (relação entre a altura da onda gerada e a altura máxima da onda atingida em cada ponto).

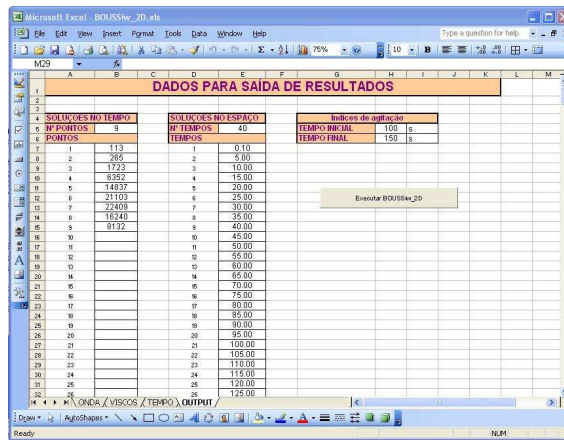
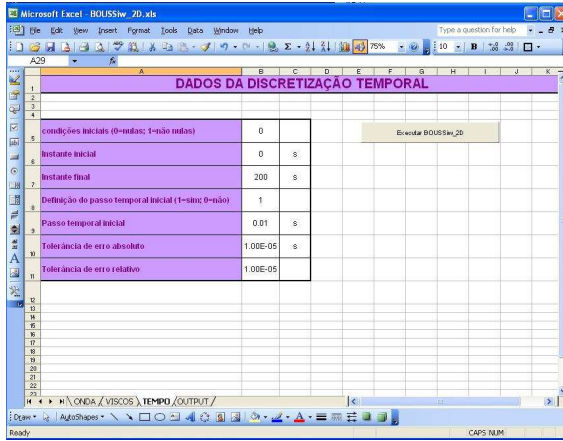
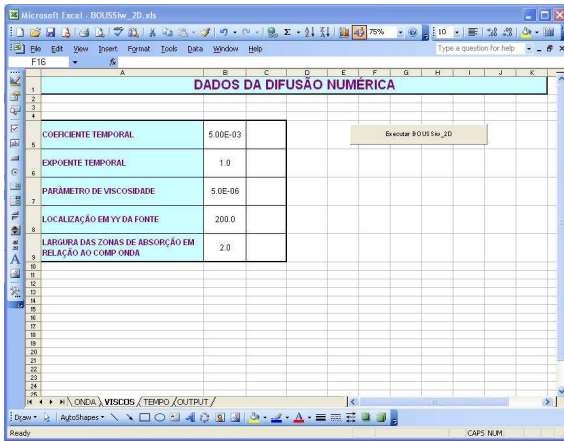
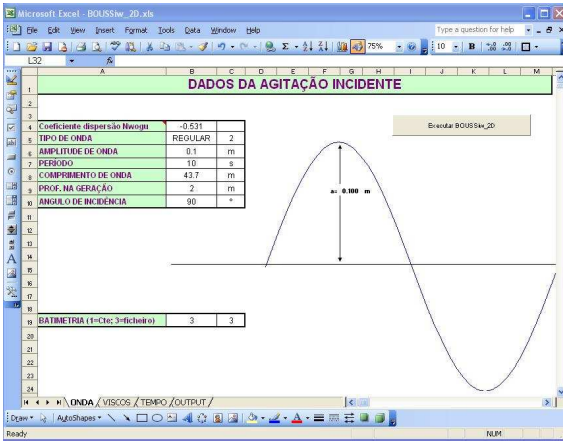


Figura 5 – Interface com o utilizador do modelo BOUSSiw_2D.

4. GERADOR DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS

4.1. Introdução

O domínio de cálculo é discretizado por uma malha não estruturada de elementos finitos triangulares, sendo a sua construção facilitada por um gerador automático deste tipo de malhas.

A construção das malhas de elementos finitos é um processo que em estágios iniciais foi considerado complexo e moroso mas que tem vindo a evoluir nas últimas quatro décadas. Existem, actualmente, diferentes algoritmos para a geração de malhas propriamente dita e outros para o seu pós-processamento, (NGGW [89]). O pós-processamento das malhas é a etapa mais importante da geração das malhas, uma vez que dele depende a qualidade final da malha. Existem três famílias principais de algoritmos de pós-processamento: o alisamento, o *cleanup* e o refinamento. A combinação destes dois ingredientes (geração e pós-processamento) dá origem a uma grande diversidade de geradores de malhas que podem ser usados em várias aplicações.

Apesar da existência de inúmeros geradores de malhas, não se dispunha, para o caso específico da propagação de ondas em zonas costeiras e/ou portuárias, de um gerador automático em ambiente de janelas, que efectuasse a geração de malhas triangulares não estruturadas com elevada qualidade num determinado domínio costeiro, caracterizado por uma batimetria e uma fronteira arbitrárias.

Note-se que os problemas comuns em utilizar geradores existentes, prendem-se com as características complexas e irregulares das fronteiras e da batimetrias das zonas costeiras a estudar. Com efeito, estas fronteiras apresentam diversas peculiaridades, uma vez que representam uma qualquer zona costeira a qual pode conter, para além da linha de costa (já de si complexa), obras marítimas, tais como, quebra-mares, portos de pesca ou de recreio, marinas, etc. Por outro lado, a batimetria correspondente a cada zona costeira pode envolver quer zonas de grande profundidade, quer de pequena profundidade e, para qualquer dessas zonas, é necessário garantir um número mínimo de pontos (8 a 10 pontos) por comprimento de onda em todo o domínio de modo a ter confiança nos resultados numéricos dos modelos numéricos.

No sentido de resolver estes problemas, foi desenvolvido o gerador de malhas GMALHA (Pinheiro *et al.* [65], [66]), capaz de produzir malhas optimizadas especificamente para modelos de propagação de ondas em zonas costeiras e portuárias. Este gerador de malhas foi desenvolvido no âmbito do trabalho de mestrado aqui relatado.

Nas próximas secções descreve-se os aspectos gerais do gerador de malhas de elementos finitos, nomeadamente o algoritmo de geração, de optimização e de refinamento. Referem-se também os métodos de interpolação da batimetria e de renumeração dos nós. Seguidamente, apresenta-se a interface com o utilizador desenvolvida para facilitar a aplicação do gerador de malhas. Finalmente, analisa-se o desempenho do gerador de malhas através da aplicação a dois casos de teste reais: a) Bacia de adução da central termoeléctrica de Sines; b) Vila do Porto.

4.2. Geração de malhas de elementos finitos

4.2.1. Introdução

Qualquer malha de elementos finitos deve obedecer a alguns critérios de qualidade, nomeadamente, a regularidade dos elementos finitos, a uniformidade local da malha (variações de densidade pouco bruscas), uma valência de nós óptima, que no caso dos triângulos é de 6, a representação correcta das fronteiras do domínio e da batimetria da zona a modelar. Para além disso, no caso dos modelos de propagação de ondas, tem de se garantir uma densidade de elementos proporcional ao comprimento de onda, isto é, deve existir um número mínimo de nós da malha por comprimento de onda em cada zona do domínio. Como o comprimento de onda é função da profundidade de água local e do período da onda a simular, o controlo local da densidade da malha é efectuado de acordo com essas duas variáveis. A malha gerada é tanto mais fina quanto menos profundo for o local e menor for o período da onda.

Uma malha de elementos finitos pode ser estruturada ou não estruturada. As malhas estruturadas têm uma conectividade regular o que significa que todos os pontos interiores têm o mesmo número de elementos adjacentes, enquanto que, as malhas não estruturadas têm conectividade irregular, i.e., cada ponto pode ter um número diferente de elementos adjacentes. Para fronteiras complexas, as malhas não estruturadas apresentam vantagens em relação às malhas estruturadas.

Em relação ao tipo de elemento, é comum a utilização de triângulos devido à sua adaptabilidade aos pormenores geométricos das fronteiras, à sua simplicidade e à facilidade na geração de malha.

Para o método dos elementos finitos, os requisitos da malha são:

- a malha deve ser válida, i.e., não devem haver hiatos ou sobreposições;
- a malha deve adaptar-se à fronteira (George *et al.* [30]);
- a densidade local de pontos deve ser a adequada;

- a distribuição de pontos deve ser localmente quase uniforme. Grandes variações da densidade de pontos podem causar difusão artificial. Tal pode conduzir a resultados incorrectos ou à instabilidade do modelo numérico;
- a forma dos elementos da malha deve ser tão optimizada quanto possível. Por exemplo, triângulos delgados e longos originam alguns problemas numéricos provocados por um Jacobiano quase singular. O ângulo interno óptimo é de $\pi/3$ correspondente a um triângulo equilátero.

Note-se que uma malha com elevada densidade conduz a uma maior precisão nos resultados numéricos mas o seu processamento implica a utilização de mais memória e de mais tempo de CPU. Isto pode ser resolvido com métodos adaptativos ou de controlo local prévio da densidade. Deve encontrar-se um compromisso entre a precisão dos resultados numéricos, o tempo de processamento e a memória necessária ao armazenamento. No caso específico dos modelos de propagação de ondas, é necessário garantir, em todo o domínio de cálculo, que o número mínimo de pontos por comprimento de onda, esteja situado entre 8 e 16 para modelos lineares e entre 20 e 30 para modelos não lineares, devendo o número médio daqueles pontos ser até superior. Este facto condiciona significativamente a aplicação do modelo a áreas muito extensas, isto é, a grandes zonas costeiras. Ora, principalmente nos estudos de agitação envolvendo períodos de onda curtos, esta condição conduz a malhas de elementos finitos com um grande número de pontos, o que, conseqüentemente, exige grandes recursos computacionais (memória e tempo de cálculo) para a resolução do correspondente sistema de equações. O esforço computacional para a resolução destes sistemas inviabiliza muitas vezes a análise do problema;

Para obter uma malha que satisfaça todos estes critérios, o GMALHA passa por diversas etapas, desde a definição da fronteira do domínio até à obtenção dos ficheiros finais de entrada no modelo (ver Figura 6).

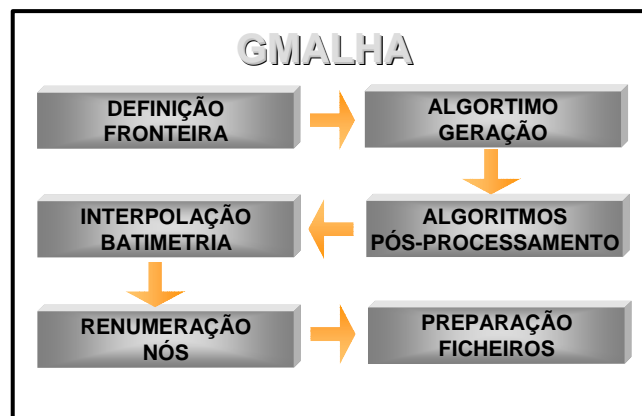


Figura 6 – Estrutura do GMALHA.

4.2.2. Algoritmo de geração

O gerador de malha é baseado no método da frente móvel ou *advancing front*. Este método teve origem nos trabalhos pioneiros de Lo [45], Peraire *et al.* [62], Löhner [46] e Löhner e Parikh [47]. Neste algoritmo, existe uma frente activa que se move da fronteira para o interior do domínio que se pretende discretizar com triângulos. Em cada momento, a frente separa a parte do domínio que já está preenchida com triângulos da restante, ainda por tratar. A frente inicial é a fronteira. Com o progresso do algoritmo, a frente avança até preencher, com triângulos, toda a área em estudo (ver Figura 7). Para cada lado ou segmento da frente, uma posição ideal para um novo nó (o terceiro vértice de um novo triângulo) é calculada. O algoritmo selecciona o novo nó para formar o novo triângulo baseado na melhor forma para este. Também é necessário assegurar que esse triângulo seja válido, i.e., não se sobreponha com a frente.

Na Figura 7 ilustra-se o processo de avanço do algoritmo à medida que o domínio é preenchido com triângulos e a frente se vai fechando sobre si mesma.

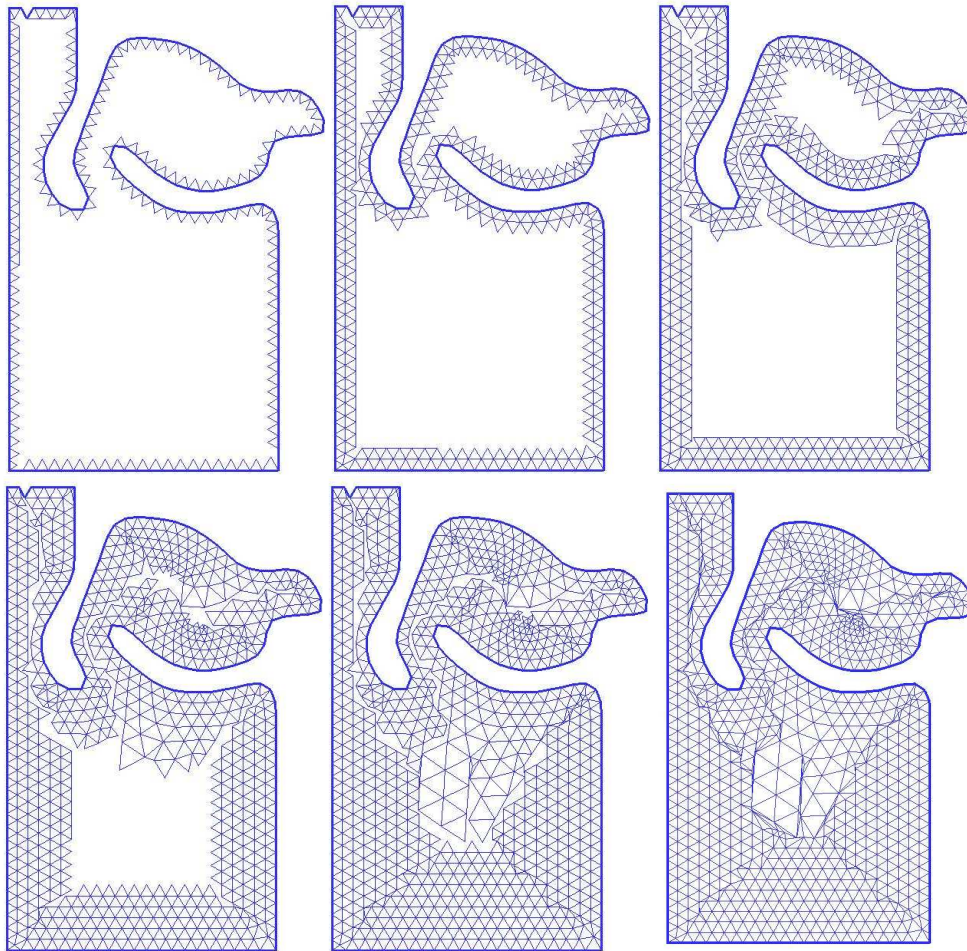


Figura 7 – Evolução da criação de uma malha.

Para a geração de triângulos, utiliza-se um método adaptado de Modi [56]. A partir dos nós da fronteira, são gerados os triângulos. Três casos afiguram-se, dependendo do ângulo, ψ , entre dois lados consecutivos da fronteira (ver Figura 8):

- se $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$ – Os dois lados da fronteira são unidos criando um novo triângulo;
- se $\frac{\pi}{2} < \psi \leq \frac{3\pi}{2}$ – É escolhido um nó interior e criam-se dois triângulos;
- se $\frac{3\pi}{2} < \psi \leq 2\pi$ – É escolhido um nó interior e cria-se um triângulo.

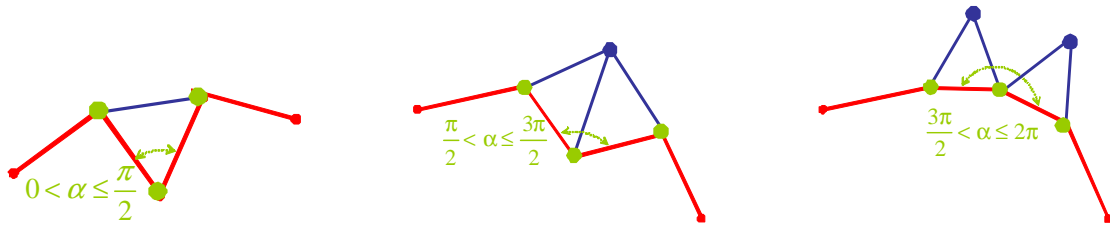


Figura 8 – Casos possíveis na criação de triângulos.

Escolhidos os novos lados, verifica-se se estes interceptam a fronteira. Se não for o caso, o(s) triângulo(s) é(são) criado(s), a fronteira é actualizada e passa-se ao lado seguinte. Itera-se até que a fronteira se reduza a 3 lados. Neste caso, o último triângulo é criado e o processo de criação dá-se por terminado (ver Figura 7).

Por vezes, nesta geração de triângulos a partir da fronteira não é mais possível formar triângulos válidos. Nesse caso, é permitido ao algoritmo quebrar as regras e ir construindo triângulos unindo simplesmente os lados adjacentes mesmo que o ângulo não o permita. Isto leva a que a fronteira se feche sobre si mesma no final do processo (ver a malha final antes do alisamento na Figura 9). Obviamente, que estes últimos triângulos não terão boa qualidade. Mas estes problemas serão corrigidos após as operações de alisamento e refinamento da zona em estudo (ver a malha final após alisamento na Figura 9).

Se, ainda assim, o ciclo não terminar dentro de um número razoável de iterações, é apresentada uma mensagem de erro e é pedido ao utilizador que altere algum parâmetro de geração das malhas. Os parâmetros que podem ser alterados são a discretização da fronteira ou a tolerância abaixo da qual se considera que um ponto está muito próximo da fronteira e não pode ser criado.

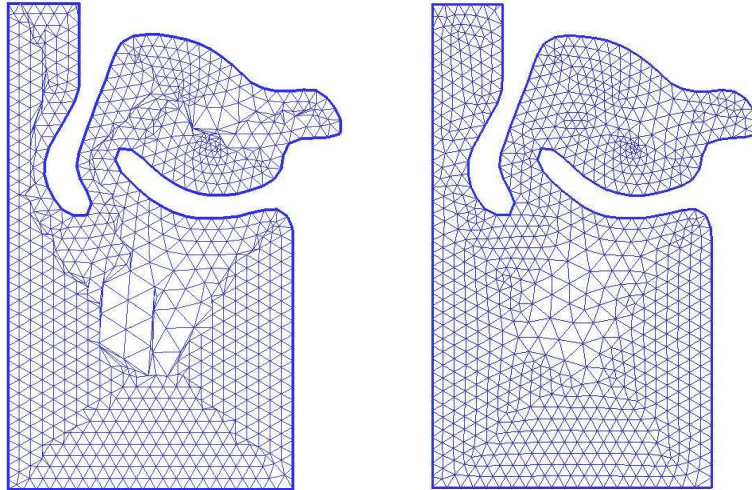


Figura 9 – Malha final antes e depois do alisamento laplaceano.

4.2.3. Algoritmos de pós-processamento

É raro que um algoritmo de geração de malhas seja capaz de definir uma malha ideal sem algum tipo de pós-processamento para melhorar a qualidade geral dos elementos. As três categorias principais de pós-processamento de malhas são os refinamentos, os alisamentos e os chamados *cleanup*, sendo os dois últimos algoritmos de otimização de malhas. O alisamento inclui métodos que ajustam as posições dos nós mantendo as suas conectividades. O *cleanup* inclui métodos que mudam as conectividades dos nós ou elementos.

Os métodos de *cleanup* geralmente utilizam um critério que deve ser satisfeito para executar uma operação local. O critério pode basear-se na melhoria da forma, através da correcção de ângulos ou na melhoria topológica através da correcção de valências.

O GMALHA utiliza quatro algoritmos de pós-processamento:

- alisamento laplaceano;
- correcção de ângulos;
- correcção de valências;
- refinamento local condicionado à batimetria.

4.2.3.1. Alisamento de Laplace

Os procedimentos de suavização envolvem, normalmente, um processo iterativo para o reposicionamento dos nós de modo a melhorar a qualidade local dos elementos. Da larga variedade de técnicas de alisamento – métodos de ponderação, métodos de otimização ou métodos físicos – seleccionou-se o método de ponderação mais simples, que é o alisamento laplaceano (Field [24]). Neste método, um nó interno da malha é colocado na posição média de todos os nós ligados a ele por um lado (ver Figura 10). O algoritmo itera por todos os nós internos da malha várias vezes até que qualquer nó individual não se mova mais do que uma tolerância especificada. É um método muito simples de implementar e tem sido largamente usado.

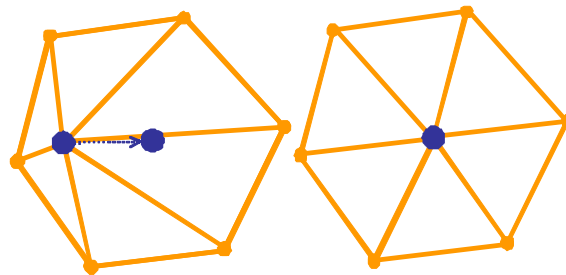


Figura 10 – Alisamento Laplaceano.

Por vezes, o alisamento laplaceano tem tendência a inverter ou degradar a qualidade local dos elementos e, por isso, foi introduzida uma restrição adicional ao movimento do nó. Efectua-se uma comparação da qualidade dos elementos locais antes e depois do movimento proposto e o nó só é movido se a qualidade dos elementos for melhorada. Este procedimento é designado por alisamento laplaceano com restrição.

Na aplicação GMALHA, o algoritmo de alisamento de Laplace (Fernandes [22]) é chamado antes e depois de cada refinamento e *cleanup*, uma vez que é bastante simples, rápido e permite melhores resultados aos outros processos de pós-processamento.

4.2.3.2. Correção de ângulos

Um gerador de malhas deve tentar otimizar os ângulos dos elementos. Isso consegue-se tanto nas operações de trocas de diagonais simples (*edge swapping*) num quadrilátero formado por dois triângulos adjacentes, como nas passagens de suavização de Laplace. Como neste trabalho se faz o uso combinado dessas duas técnicas, os ângulos internos dos elementos na malha final acabam por ser óptimos ou quase óptimos. Para cada lado interior da triangulação, pode determinar-se qual a posição ideal relativamente aos seus dois triângulos adjacentes. O critério utilizado foi o de maximizar o menor

ângulo obtido com as duas disposições possíveis do lado interior (ver Figura 11). Na Figura 12 pode ver-se o resultado final após a passagem do corrector de ângulos.

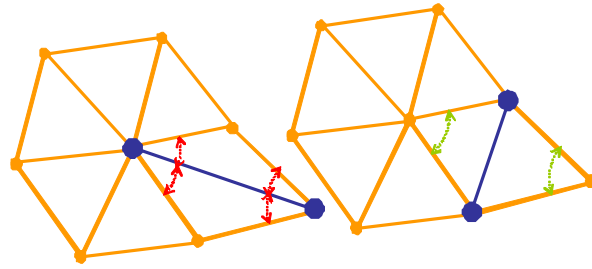


Figura 11 – Correção de ângulos por troca de diagonais.

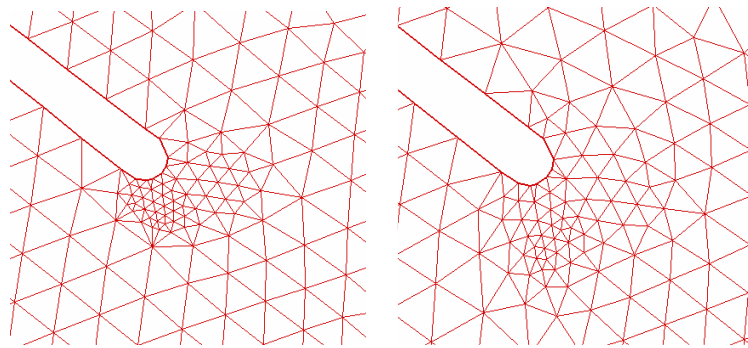


Figura 12 – Malha antes e após a correção de ângulos.

4.2.3.3. Correção de valências

É desejável otimizar o número de lados compartilhando um único nó (ver Figura 13). O número de lados que compartilham o mesmo nó é designado por valência do nó. Para uma malha de triângulos, o número ideal de lados adjacentes a um nó interior é de 6, correspondentes a 6 triângulos equiláteros ligados a esse nó. Neste sentido, as trocas de diagonais (*edge swapping*) podem melhorar a topologia da malha. Ao contrário, a suavização de Laplace mantém inalterada a topologia. Na Figura 14 ilustra-se o resultado final após a passagem do corrector de diagonais.

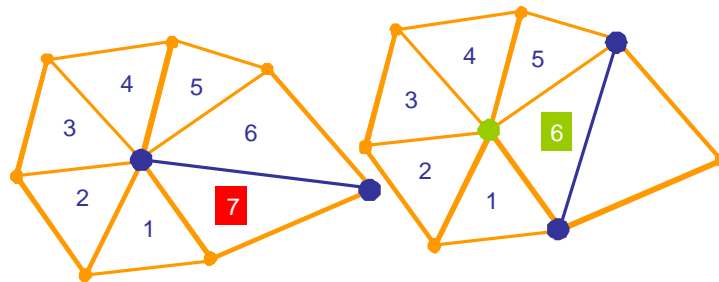


Figura 13 – Correção de valências por troca de diagonais.

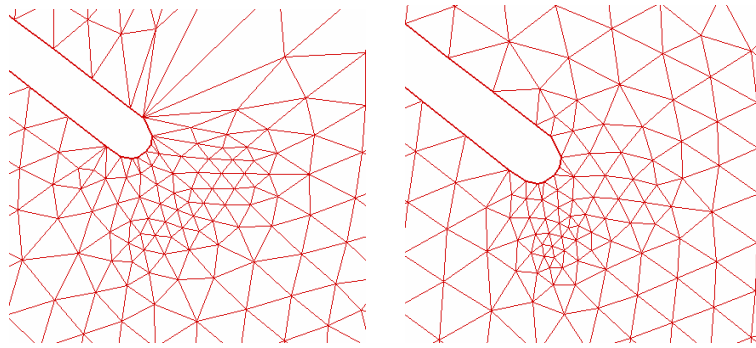


Figura 14 – Malha antes e após a correção de valências.

4.2.3.4. Algoritmo de refinamento

O refinamento consiste num conjunto de operações executadas sobre a malha que reduzem o tamanho local dos elementos. Começando com uma malha grosseira, o procedimento de refinamento é aplicado por níveis até que seja atingida a densidade nodal desejada, definida localmente pelo número de pontos mínimo por comprimento de onda.

Os principais métodos utilizados para o refinamento são: método da bissecção, inserção de pontos e decomposição de triângulos. O método utilizado no GMALHA é o método da decomposição de triângulos. Cada triângulo pode ser decomposto em dois, três ou quatro triângulos.

O critério de refinamento utilizado no GMALHA é o de um número de pontos por comprimento de onda, $NPPCO$, mínimo, de modo a garantir a precisão dos resultados numéricos.

O comprimento de onda (λ) depende do período (T) e da profundidade (h) e é obtido iterativamente. Primeiramente, calcula-se o comprimento de onda ao largo (λ_0) sabendo o período da onda:

$$\lambda_0 = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi}. \quad (98)$$

Depois, calcula-se iterativamente o comprimento de onda em cada local, $\lambda = \lambda(T, h)$, do domínio em estudo, através da expressão:

$$\lambda = \lambda_0 \tanh\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}\right). \quad (99)$$

Por fim, determina-se em cada local a distância máxima entre dois pontos, D_{\max} :

$$D_{\max} = \frac{\lambda_i}{NPPCO}. \quad (100)$$

Se essa distância for inferior ao comprimento do lado analisado, então procede-se ao refinamento da zona, i.e., introduz-se no lado analisado um ponto adicional no centro desse lado. Introduzidos todos os pontos, percorrem-se os triângulos e verifica-se qual o caso de decomposição necessário (ver Figura 15):

- em 2, se apenas um dos lados do triângulo tiver um ponto adicional;
- em 3, se dois dos lados do triângulo tiverem um ponto adicional;
- em 4, se todos os lados do triângulo tiverem um ponto adicional.

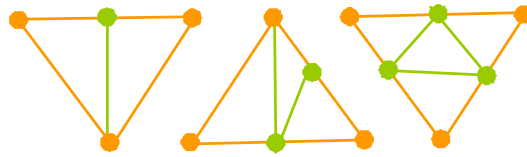


Figura 15 – Decomposição de um triângulo em dois, três ou quatro.

Na Figura 16 apresenta-se a malha inicial criada pelo GMALHA para a zona do porto de Vila do Porto, na ilha de Santa Maria, Açores, e a batimetria dessa zona. Na Figura 17 apresenta-se a mesma malha após passar pelo algoritmo de refinamento, considerando um *NPPCO* mínimo de 2, malha a), e de 4, malha b). Pode ver-se nitidamente que o refinamento é tanto mais apertado quanto menor é a profundidade local.

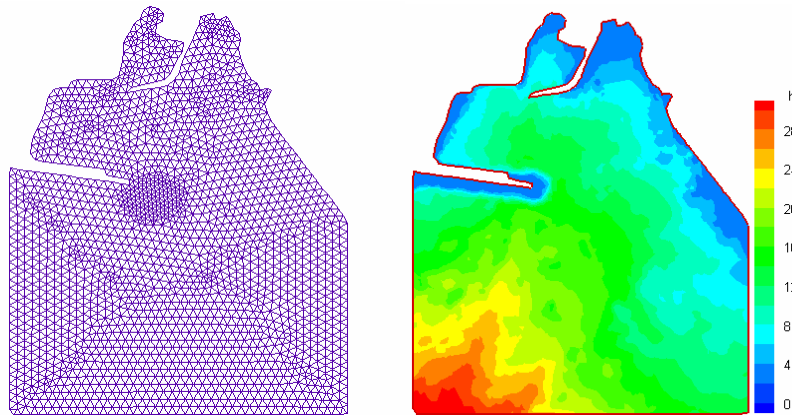


Figura 16 – Malha inicial e batimetria do domínio.

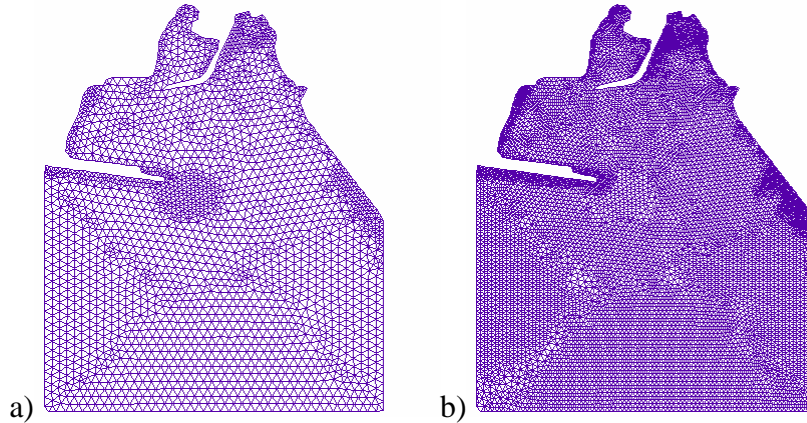


Figura 17 – Malha refinada localmente considerando: a) *NPPCO* mínimo de 2; b) *NPPCO* mínimo de 4.

4.2.4. Combinação dos algoritmos de pós-processamento

As operações de pós-processamento são efectuadas em ciclos (ver Figura 18).

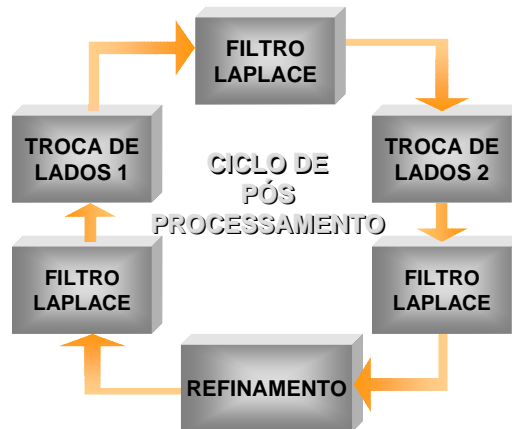


Figura 18 – Ciclo de pós-processamento.

Este procedimento permite a obtenção de malhas com uma qualidade muito próxima da óptima. Na Figura 19, exemplifica-se o resultado final da malha se apenas se efectuassem correcções de ângulos e valências, enquanto na Figura 20, apresenta-se a mesma malha após correcções de valências e ângulos combinadas com alisamentos de Laplace. Verifica-se que com o esquema alternado com alisamentos de Laplace, o resultado final é bastante melhor.

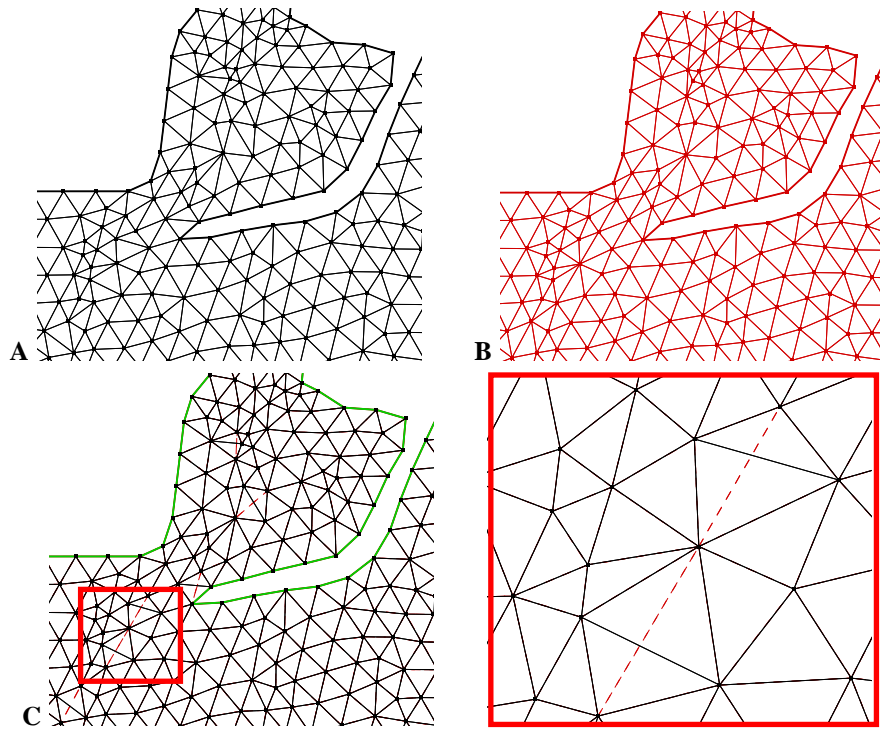


Figura 19 – Malha antes (malha A) e após a correção de valências e de ângulos (malha B). Malhas A e B sobrepostas (malha C) e pormenor de *edge swapping*.

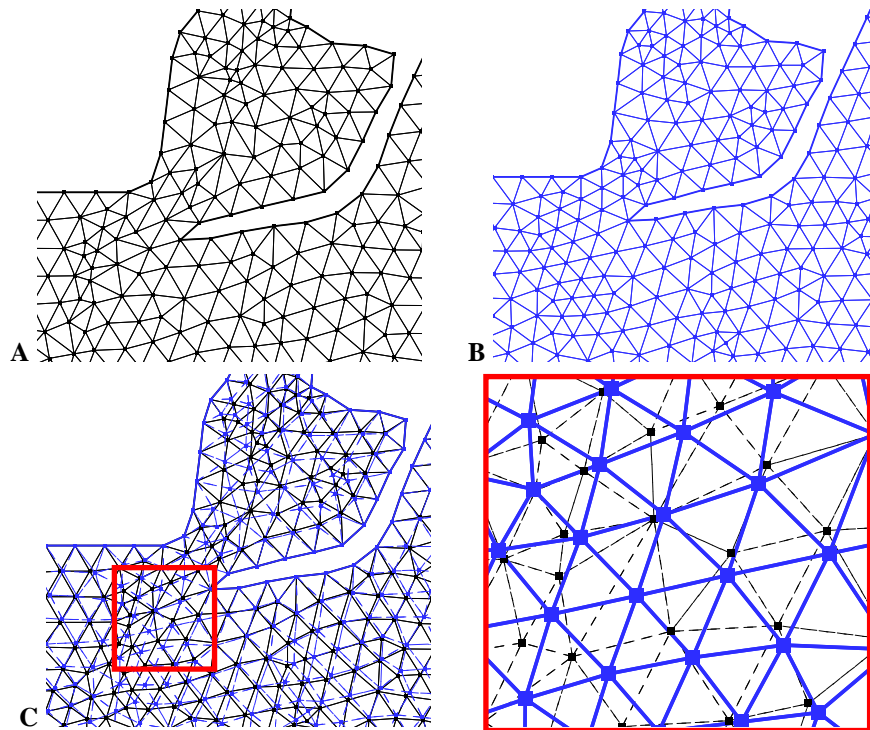


Figura 20 – Malha antes (malha A) e após correções de valências e de ângulos com alisamentos Laplaceanos (malha B). Malhas A e B sobrepostas (malha C) e pormenor da malha inicial vs final.

4.2.5. Interpolação da batimetria

Concluído o processo de refinamento, um algoritmo simples de interpolação linear atribui os valores de profundidade a cada nó da malha a partir da batimetria fornecida.

A batimetria consiste numa malha rectangular de pontos igualmente espaçados em x e em y com a informação da profundidade, z. Na Figura 21, demonstra-se esquematicamente o processo de interpolação.

Os pontos A, B, C e D são pontos da malha batimétrica e o ponto P é um ponto da malha de elementos finitos, onde se quer interpolar.

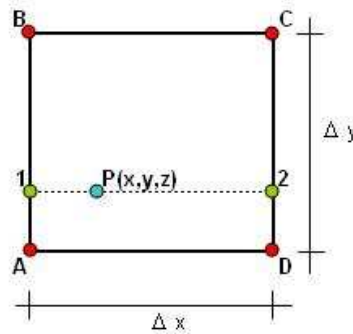


Figura 21 – Esquema da interpolação da batimetria para os pontos da malha.

Primeiro, efectua-se uma interpolação linear na vertical para dois pontos auxiliares, 1 e 2:

$$z_1 = \frac{z_A \cdot (y_B - y_1) + z_B \cdot (y_1 - y_A)}{\Delta y} \quad e \quad z_2 = \frac{z_C \cdot (y_2 - y_D) + z_D \cdot (y_C - y_2)}{\Delta y}. \quad (101)$$

E, depois efectua-se uma interpolação linear na horizontal para o ponto P:

$$z = \frac{z_1 \cdot (x_2 - x_P) + z_2 \cdot (x_P - x_1)}{\Delta x}. \quad (102)$$

Se este procedimento for feito ao contrário, ou seja, interpolar primeiro na horizontal e depois na vertical, o resultado é exactamente o mesmo. A fórmula geral é dada por:

$$z = \frac{[z_A \cdot (y_B - y_1) + z_B \cdot (y_1 - y_A)] \cdot (x_2 - x_P) + [z_C \cdot (y_2 - y_D) + z_D \cdot (y_C - y_2)] \cdot (x_P - x_1)}{\Delta x \cdot \Delta y}. \quad (103)$$

4.2.6. Renumeração dos nós

Para além do número de pontos e de elementos, a largura de banda da malha é muito importante para um bom desempenho do modelo numérico. Com efeito, o tempo de CPU e a memória utilizada dependem fortemente deste parâmetro. A largura de banda da malha é definida como a maior diferença entre os números dos nós de cada elemento. Os nós das malhas geradas pelo GMALHA têm então que ser renumerados.

Um dos métodos mais comuns de renumeração de nós é o método *Reverse Cuthill-Mckee* (RCM) (Cuthill e McKee [17]). É um algoritmo de aproximação que tem como objectivo reduzir a largura de banda da matriz. O algoritmo apresenta os seguintes procedimentos, de forma resumida:

- determinar um vértice inicial, normalmente num dos cantos da malha;
- percorrer os nós da malha e encontrar todos os seus nós vizinhos usando uma busca em largura e numerá-los por ordem crescente;
- inverter a ordenação obtida.

É importante salientar que o resultado da aplicação do método de *Reverse Cuthill-Mckee* é frequentemente melhor na redução do perfil de uma matriz em *skyline* do que o do *Cuthill-Mckee* normal (Liu e Sherman [44]).

4.3. Interface com o utilizador

A interface do GMALHA foi desenvolvida em Microsoft Excel™ e encontra-se incluída numa interface mais geral, SOPRO (Pinheiro *et al.* [67] e Fortes *et al.* [25]). O SOPRO é um pacote informático de previsão da ondulação em portos que contém diversos modelos numéricos de propagação de ondas, uma base de dados da agitação marítima na costa portuguesa e um módulo de estabelecimento e transferência de regimes de agitação marítima.

O GMALHA (Pinheiro *et al.* [65] e [66]) utiliza um ficheiro Excel, composto por 3 folhas de cálculo. Na primeira folha de cálculo, designada por “front_ini”, são introduzidas as coordenadas da fronteira do domínio a discretizar. Na segunda folha de cálculo, designada por “fronteiras”, visualiza-se o contorno da fronteira e podem redistribuir-se os pontos uniformemente pela fronteira, se se desejar (Fernandes [23]). Na Figura 22, a título de exemplo, podem ver-se as fronteiras utilizadas para a bacia de adução da central termoeléctrica de Sines.

Na terceira folha de cálculo são introduzidos os parâmetros para a criação da malha. Esta folha contém ainda botões que permitem accionar diversas tarefas (ver Figura 23).

Os parâmetros a definir são:

- o nome da malha;
- o *NPPCO* mínimo;
- o período mínimo para o qual deve ser criada a malha;
- a distância de tolerância, i.e., a distância mínima a garantir entre os pontos a gerar e a fronteira de modo a poder ser criado um novo triângulo;
- o número máximo de iterações para a geração da malha. No entanto, por vezes, esse número é excedido e o processo de geração da malha deve ser terminado. Quando isto acontece, deve alterar-se a distância de tolerância ou a posição de alguns pontos da fronteira;
- um parâmetro de escrita que determina se é necessário escrever nos ficheiros todos os passos de criação da malha ou não;
- um parâmetro de refinamento que determina se é necessário refinar a malha de acordo com a batimetria;
- um parâmetro de refinamento que determina se se optimiza a malha durante o refinamento;
- um parâmetro de refinamento que determina se é necessário refinar a malha uniformemente, de acordo com a profundidade mínima.

Antes de iniciar o processo de criação da malha deve proceder-se à ordenação dos pontos da batimetria de modo a ter abcissas e ordenadas crescentes. Esta ordenação é um processo que pode ser demorado, se a batimetria tiver muitos pontos, mas basta ser efectuada uma vez. A inclusão de um algoritmo mais eficaz na ordenação dos pontos da batimetria constituirá trabalho futuro.

Existe ainda a opção de se criarem várias malhas, bastando para isso definir-se os valores mínimos, máximos e o intervalo regular, designado por *step*, do *NPPCO* mínimo e dos períodos da onda (ver Figura 23).

No final, criada a malha, pode utilizar-se o programa, *CONTORNO_NOVO* desenvolvido por Santos e Fortes [70], que extrai os pontos da malha que estão sobre a fronteira. Este procedimento permite gerar o ficheiro com as condições de fronteira necessárias ao modelo. Outra opção disponível na interface é o *Mesh quality report*, um programa desenvolvido por Fernandes [21], que lê a malha gerada e analisa diversos

parâmetros de qualidade, como por exemplo, áreas dos elementos, valências dos nós, NPPCO mínimo e médio e períodos críticos da malha baseado nestes últimos.

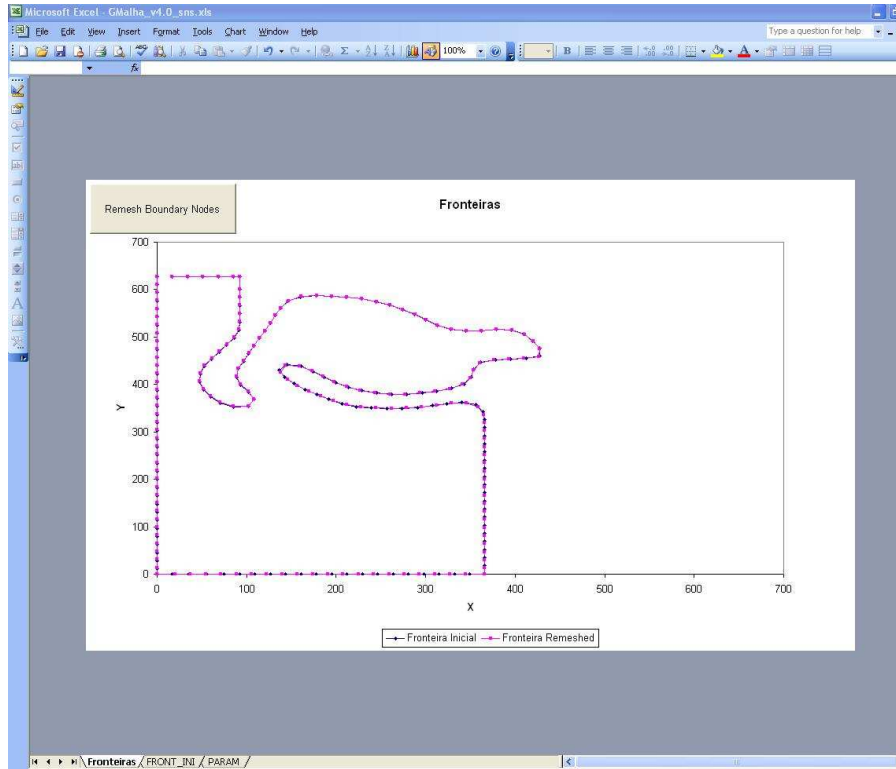


Figura 22 – Fronteiras inicial e redistribuída.

MESH PARAMETERS				
Name of the mesh	sns0_e			Sort Bathymetry
Minimum number of points per wave length	INITIAL	FINAL	STEP	Generate Mesh
	14	14	1	
Minimum wave period	INITIAL	FINAL	STEP	Extract Boundary
	10	10	1	
Tolerance distance between points and boundary	3.48			Mesh Quality Report
Maximum number of iterations	500000			
Write all steps of mesh creation?	FALSE			<h1>GMALHA</h1>
Refine mesh according to bathymetry?	TRUE			
Optimize after refinement?*	FALSE			
*if false it will optimize only before refinement				
Uniforme Refinement	TRUE			

Figura 23 – Parâmetros da criação da malha.

4.4. Desempenho das malhas

O desempenho dos modelos de propagação de ondas depende, entre outros factores, do número de pontos por comprimento de onda e da optimização da malha. Para ilustrar as potencialidades do programa GMALHA foram efectuados alguns testes.

No GMALHA, como referido, é possível efectuar uma malha recorrendo ao refinamento local ou uniforme. O refinamento local garante o *NPPCO* mínimo definido *a priori* tendo em conta a batimetria da zona, resultando uma malha com uma densidade de pontos variável. O refinamento uniforme garante o mesmo *NPPCO* mínimo mas, para tal, não tem em conta a profundidade local, resultando uma malha com densidade de pontos uniforme em toda a sua extensão.

Assim, foram geradas malhas com refinamento uniforme e com refinamento local e compararam-se os tempos de CPU, os números de pontos e de elementos, a largura de banda, correspondentes a cada malha. Os casos de teste utilizados foram a bacia de adução da central termoeléctrica de Sines e o Porto de Vila do Porto.

4.4.1. Bacia de adução da central termoeléctrica de Sines

Na Figura 24 apresenta-se a batimetria da zona marítima adjacente à bacia de adução da central termoeléctrica de Sines, para a qual se geraram várias malhas de elementos finitos. A batimetria desta zona apresenta uma diferença de cota entre as zonas mais e menos profundas de cerca de 8m. As malhas foram geradas com o GMALHA utilizando o refinamento local e uniforme, para 5 períodos de onda (4, 6, 8, 10 e 12) e 8 valores do número de pontos por comprimento de onda (*NPPCO* mínimo) – 2 a 30, com intervalo de 2. Na Figura 24 apresenta-se um exemplo de malhas geradas utilizando o refinamento local e o uniforme.

Foram geradas no total 75 malhas. Na Figura 25 apresenta-se o número de pontos e elementos correspondentes a cada malha gerada.

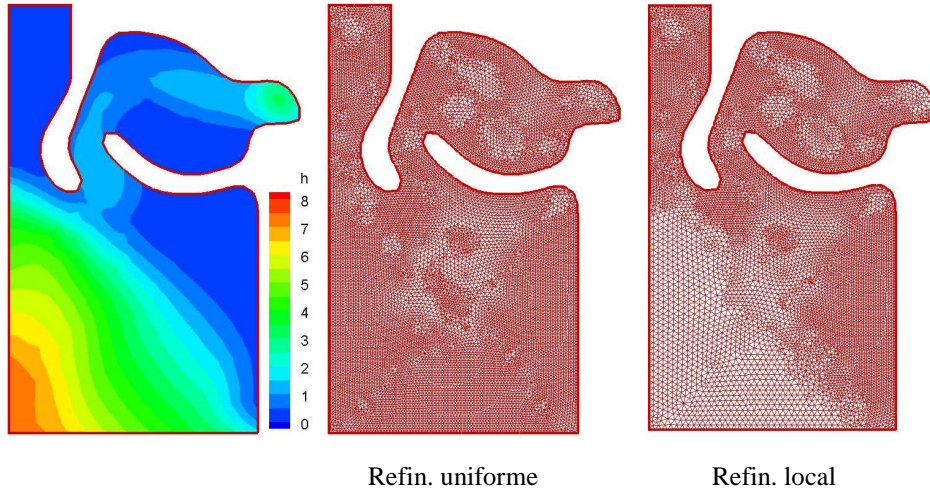


Figura 24 – Batimetria da zona da bacia de adução da central termoeléctrica de Sines e correspondentes malhas geradas com 10 pontos por comprimento de onda para um período de 6s.

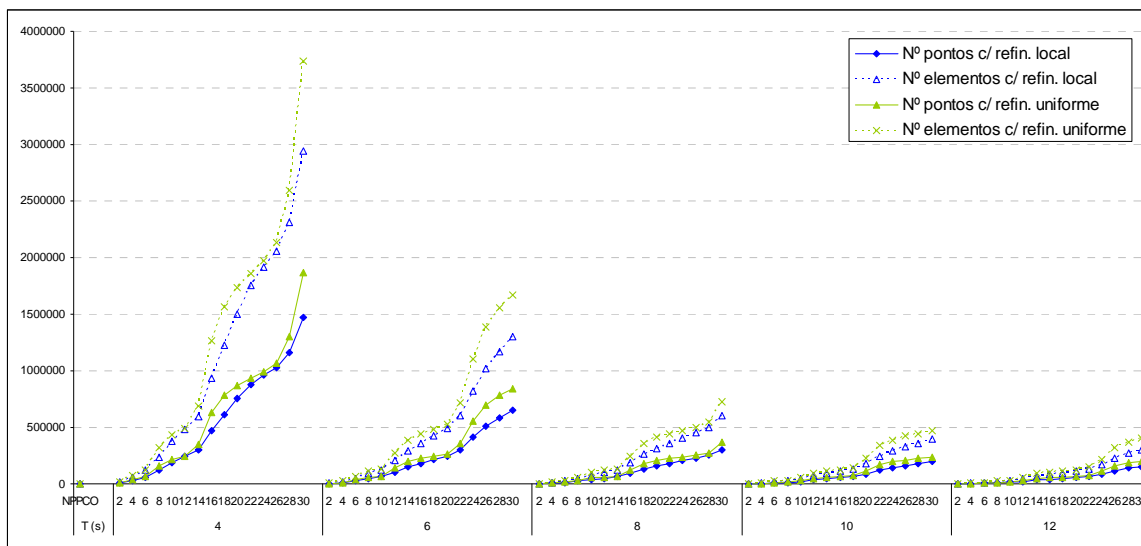


Figura 25 – Número de pontos e de elementos das malhas com os dois tipos de refinamento.

Como se pode constatar da análise da Figura 25, o número de pontos da malha para o mesmo nível de qualidade (*NPPCO*) é sempre menor quando o refinamento é local, i.e., quando se considera a batimetria para calcular o comprimento de onda local e se refina a malha apenas onde é necessário.

À medida que o *NPPCO* aumenta, dá-se um aumento do número de pontos da malha final, mas este aumento é menos acentuado no caso do refinamento local. O mesmo acontece à medida que o período da onda diminui. Esta é outra vantagem do GMALHA em relação aos geradores uniformes.

Na Figura 26 analisa-se a largura de banda da matriz gerada pela malha. Verifica-se que o refinamento local permite obter larguras de banda quase sempre inferiores às obtidas com um refinamento uniforme.

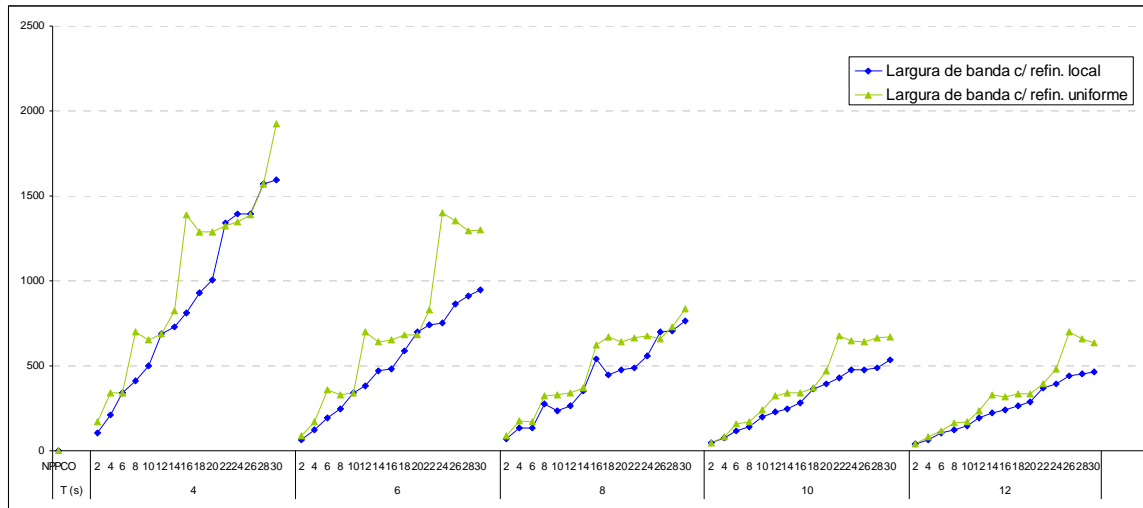


Figura 26 – Largura de banda das malhas.

Na Figura 27, Figura 28 e na Figura 29 representa-se a relação entre número de pontos de uma malha e os tempos de CPU associados à geração, à interpolação da batimetria, renumeração das malhas de elementos finitos e à criação das malhas com os dois tipos de refinamento. Os cálculos foram efectuados num computador pessoal AMD Athlon™ XP3000+ 2.17GHz 1.00GB de RAM.

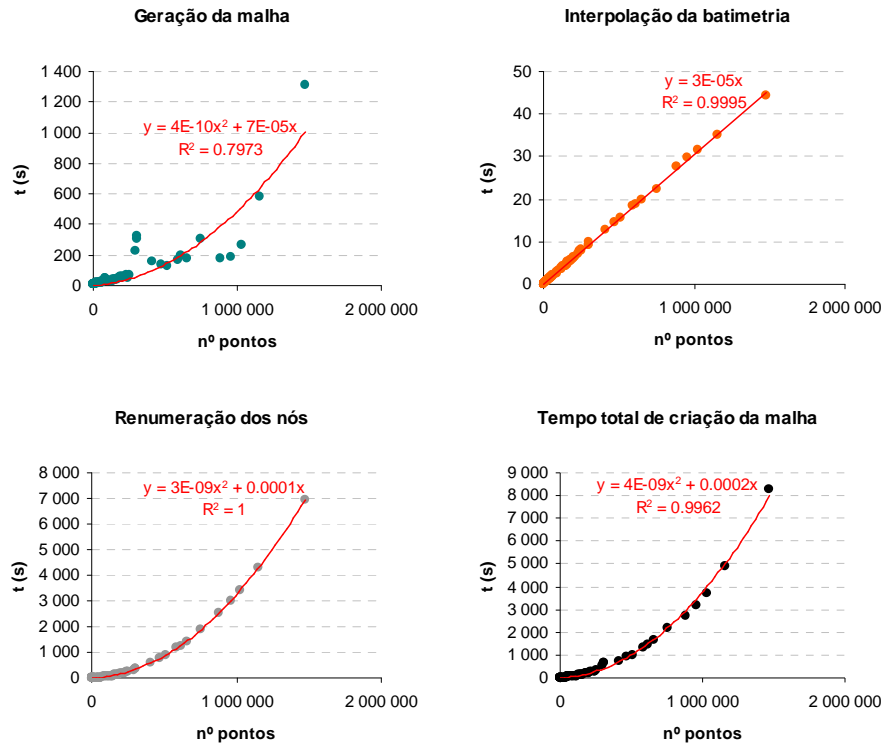


Figura 27 – Tempo de CPU (s) de geração, interpolação, renumeração e total das malhas de elementos finitos com refinamento local.

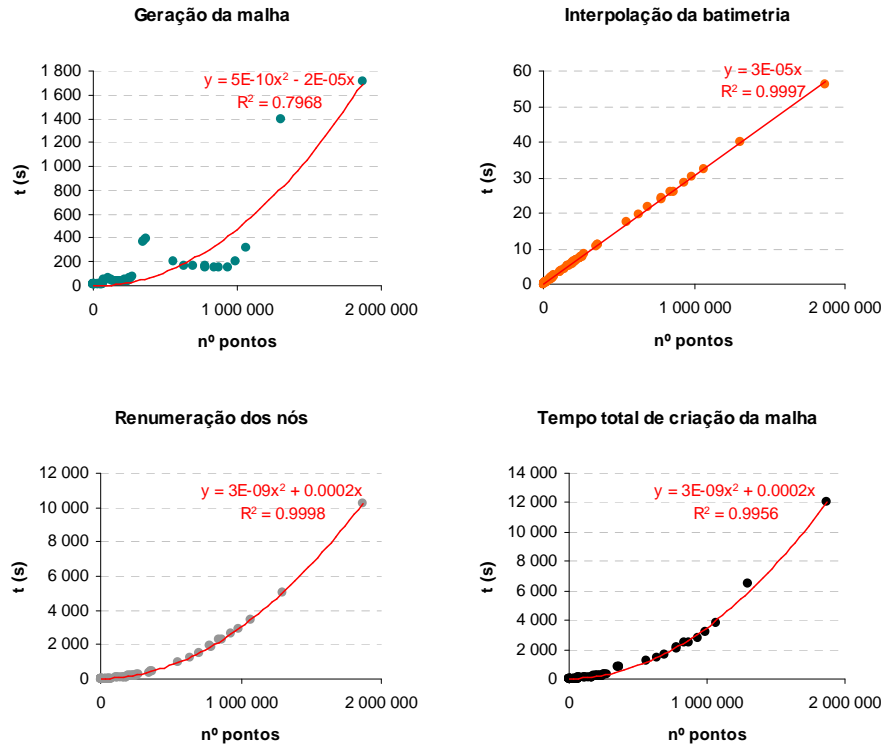


Figura 28 – Tempo de CPU (s) de geração, interpolação, renumeração e total das malhas de elementos finitos com refinamento uniforme.

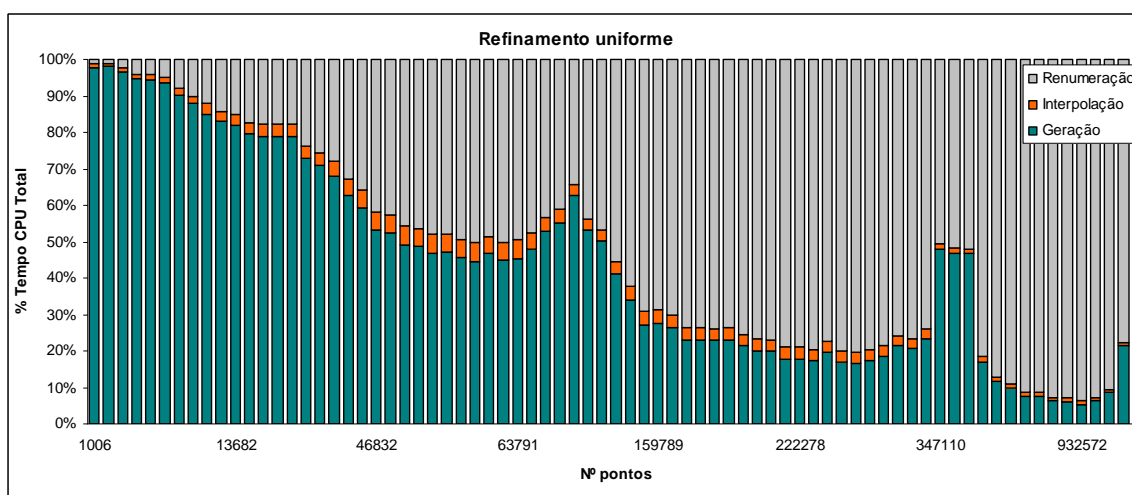
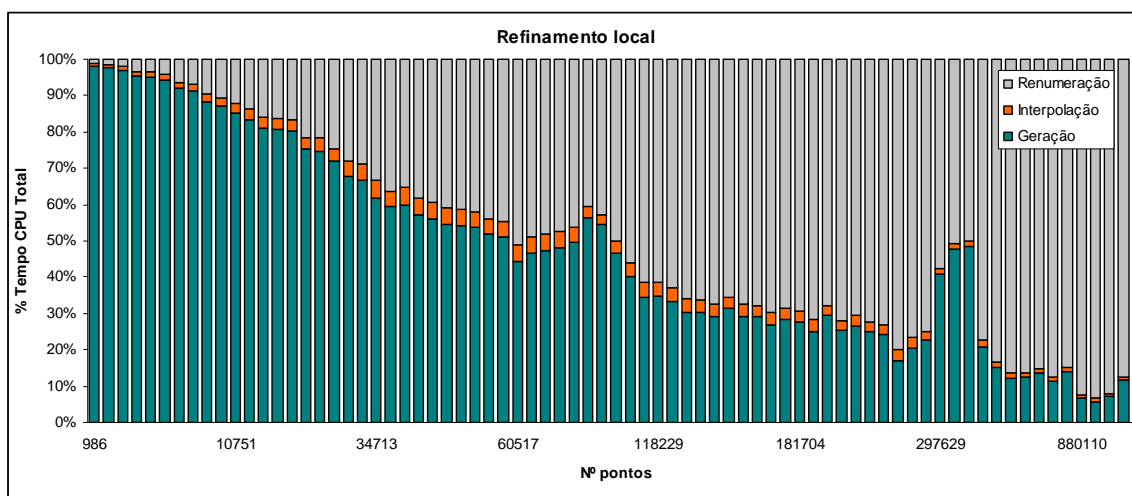


Figura 29 – Tempo de CPU de geração, interpolação e renumeração em percentagem do tempo total de criação das malhas de elementos finitos.

Da análise da Figura 27, Figura 28 e da Figura 29 verifica-se que o tempo de interpolação depende linearmente do número de nós e é sempre o processo mais rápido.

O tempo de geração é maior que o tempo de renumeração quando o número de pontos é relativamente pequeno. Em contrapartida, quando o número de pontos é grande a renumeração dos nós da malha é o processo mais moroso e depende directamente do número de nós de forma quadrática (ver Figura 28).

Na Figura 30 apresenta-se a relação entre os tempos de CPU obtidos com refinamentos uniforme e local. Nesta figura, comparam-se os tempos de CPU de geração, de interpolação da batimetria, de renumeração e o tempo total para cada uma das malhas geradas utilizando os dois tipos de refinamento. Quando aquela relação se encontra abaixo do valor 1, significa que o processo foi mais rápido com o refinamento local.

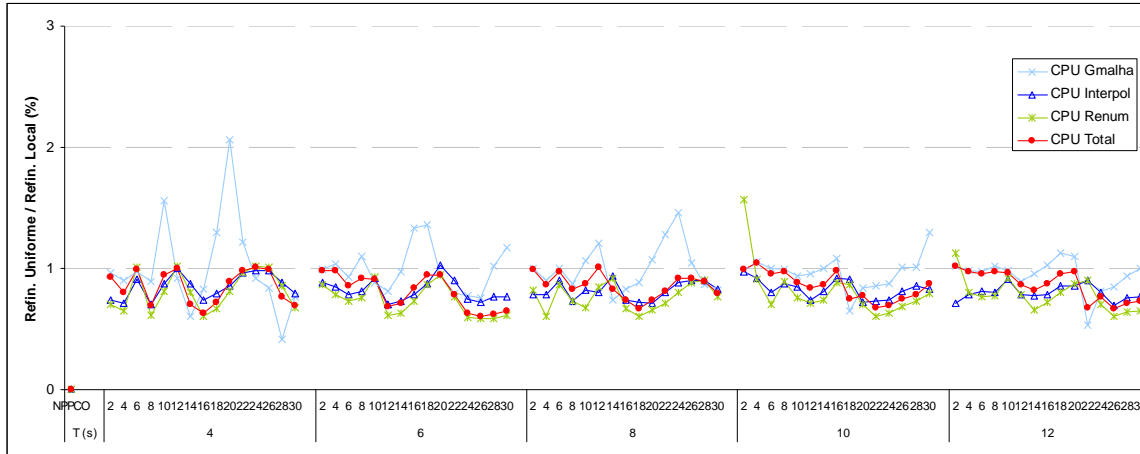


Figura 30 – Relação entre as malhas refinadas localmente e uniformemente.

Verifica-se que, em geral, os índices são inferiores a 1. Apenas o tempo de geração aparece, por vezes, superior a 1. Não obstante, o tempo total de geração da malha é quase sempre inferior. Quando tal não acontece (apenas num dos casos – $NPPCO=4$ e $T=10s$), o número de pontos é inferior (3521 para refinamento local e 3976 para refinamento uniforme) e a largura de banda também (75 para refinamento local e 85 para refinamento uniforme). Daqui se pode concluir que o refinamento local é sempre preferível ao refinamento uniforme, no que concerne ao tamanho da malha e ao tempo de criação desta.

Na prática, a opção por uma malha com refinamento local levou a poupanças médias de 18% no número de pontos e de elementos, 20% na largura de banda, 2% na geração, 18% na interpolação, 22% na renumeração e 15% no tempo total de CPU, para esta malha. Note-se que estes valores dizem respeito ao caso específico da bacia de adução da central termoelétrica de Sines, onde a diferença de profundidades máxima e mínima é da ordem de 8 m. Na secção seguinte faz-se a mesma análise para outro caso onde essa diferença é superior.

4.4.2. Porto de Vila do Porto

Para ilustrar melhor as vantagens do refinamento local testa-se o gerador de malhas para a zona do Porto de Vila do Porto na ilha de Santa Maria, Açores. A batimetria desta zona tem maiores diferenças entre as zonas mais e menos profundas do que o observado no caso de teste anterior, com profundidades que variam de 0 a 30 m. Pretende-se também estudar a influência que a utilização de malhas geradas com refinamento local e uniforme têm no comportamento de um modelo de propagação de

ondas em zonas costeiras ou portuárias e, mais concretamente, no modelo DREAMS (Fernandes [20] e Fortes [26]), modelo de elementos finitos linear, ver Anexo D.

Foram geradas 36 malhas para o caso do porto de Vila do Porto variando o *NPPCO* mínimo, o período e o tipo de refinamento. Os valores dos períodos de onda considerados foram 4, 6, 8, 10 e 12 s e os valores do *NPPCO* variaram entre 2 a 10, com um intervalo de 2. Na Figura 31, são representados os valores do número de pontos e de elementos das malhas com os dois tipos de refinamento, considerando $T = 8$ s ou fixando o *NPPCO* em 6. Na Figura 32 representa-se o tempo de CPU da criação da malha (geração+interpolação+renumeração) e de execução do modelo DREAMS.

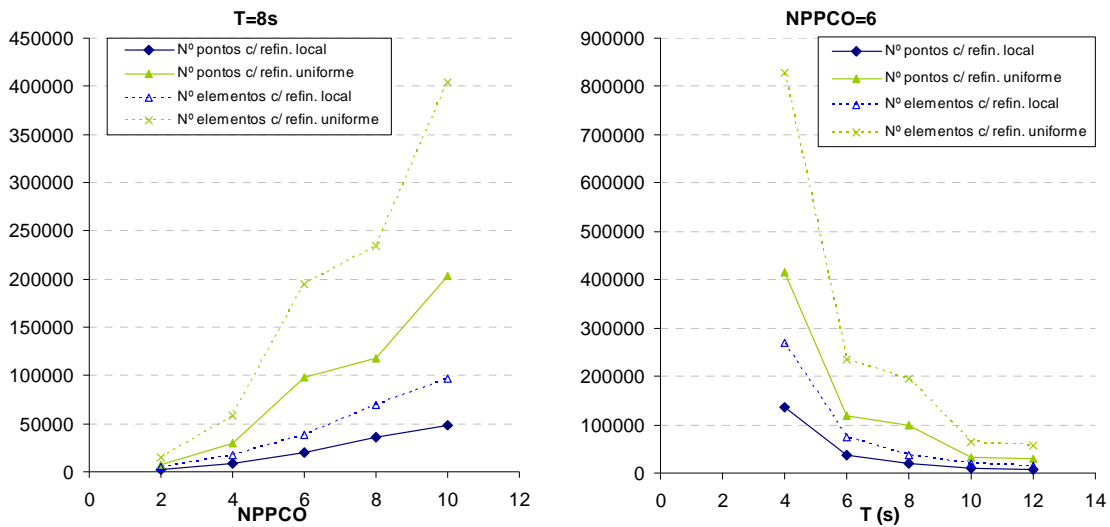


Figura 31 – Número de pontos e de elementos das malhas com os dois tipos de refinamento.

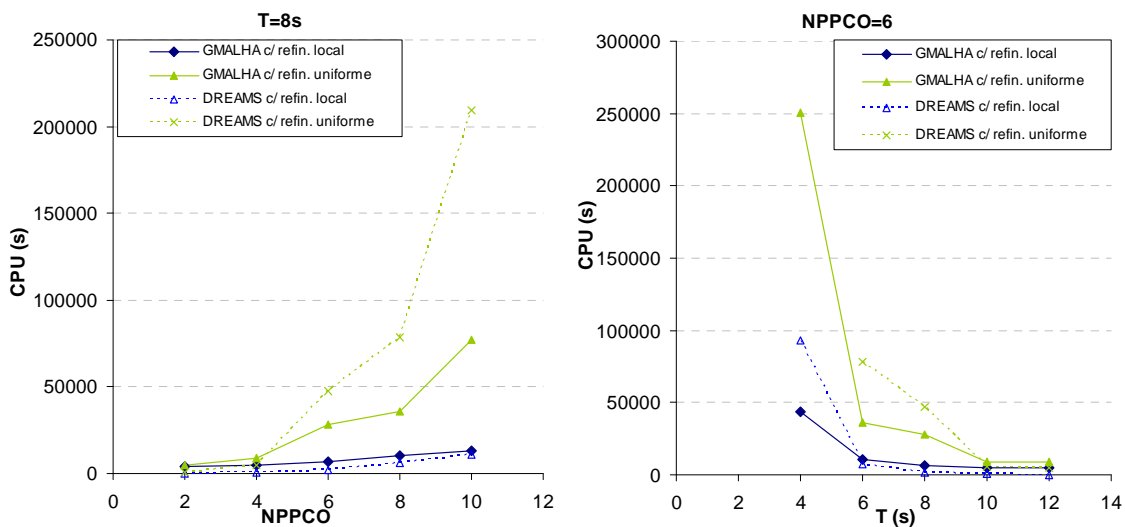


Figura 32 – Tempo de CPU da criação da malha (geração + interpolação + renumeração) e de execução do modelo DREAMS.

Como se pode constatar da análise da Figura 31, o número de pontos da malha para o mesmo nível de qualidade (*NPPCO*) é consideravelmente mais pequeno quando o refinamento é local. Como é de esperar, à medida que o *NPPCO* imposto aumenta, aumenta também o número de pontos da malha final, mas este aumento é menos acentuado no caso do refinamento local. O mesmo acontece à medida que o período da onda diminui.

Neste caso, a opção por uma malha com refinamento local leva a poupanças médias de 29% no número de pontos e de elementos, 50% no tempo total de criação da malha e 92% nas simulações numéricas com o modelo DREAMS (ver Figura 32). Do exposto conclui-se que quanto maior é a diferença de profundidades máxima e mínima da zona a discretizar, maior é a poupança de tempo e de memória. O GMALHA permite assim correr simulações em zonas de maior extensão com um número de pontos inferior, sem prejudicar a qualidade da malha e a precisão dos resultados numéricos.

5.1. Introdução

Neste capítulo, descrevem-se as aplicações efectuadas com o modelo de elementos finitos, BOUSSiw (versões unidimensional, BOUSSiw_1D, e bidimensional, BOUSSiw_2D), para testar/analisar o comportamento do modelo em diferentes casos de propagação de ondas sobre fundos de profundidade variável, considerando diferentes formas de geração das ondas no domínio de cálculo.

Assim, foram efectuadas as seguintes aplicações:

Modelo unidimensional BOUSSiw 1D

- Canal de profundidade constante.
- Quebra-mar submerso (Dingemans [18]).

Modelo bidimensional BOUSSiw 2D

- Canal de profundidade constante.
- Baixio elíptico numa praia de inclinação constante (Berkhoff [13]).
- Bacia de adução da central termoeléctrica de Sines.

Os resultados foram comparados com resultados analíticos, de outros modelos numéricos ou resultados de ensaios em modelo físico reduzido, conforme o caso de teste.

5.2. Modelo unidimensional BOUSSiw_1D

5.2.1. Canal unidimensional com profundidade constante

Neste sub-capítulo descreve-se a aplicação do modelo BOUSSiw_1D na simulação da propagação de ondas ao longo de um canal de profundidade constante (Wei *et al.* [82]). O objectivo deste caso de teste é verificar o método da função fonte introduzido no modelo BOUSSiw_1D para geração de ondas no domínio de cálculo.

Apresentam-se as condições de cálculo e os resultados obtidos com o modelo. Os resultados numéricos são comparados com resultados numéricos obtidos com o modelo FUNWAVE (Kirby *et al.* [41]). Este modelo encontra-se descrito no Anexo E.

Os cálculos foram efectuados em PC AMD Athlon™ 64 Processor 3500+ com 2.21GHz e com 1GB de memória RAM.

5.2.1.1. Características gerais e condições de cálculo

O modelo BOUSSiw_1D foi aplicado na simulação da propagação de ondas ao longo de um canal de profundidade constante, considerando uma onda regular gerada no centro do canal.

O comprimento do domínio de cálculo é de 50 m e a profundidade é de 0.5 m (ver Figura 33). O centro da região de geração das ondas localiza-se na coordenada $x=25$ m. Para absorver a energia das ondas, foram criadas duas zonas absorventes nas duas extremidades do domínio com 5.0 m.

A condição inicial correspondeu à situação de repouso.

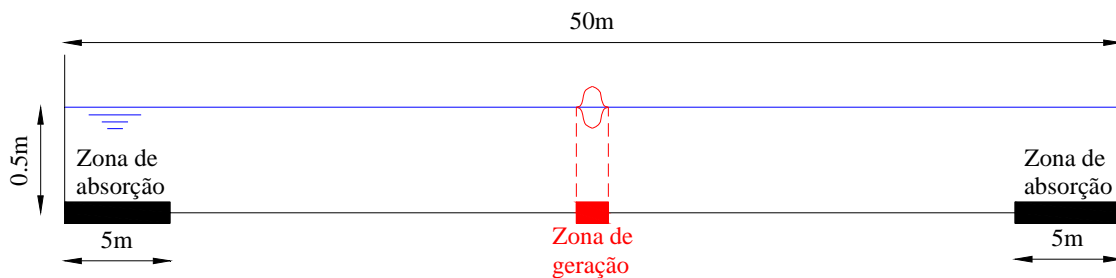


Figura 33 – Canal unidimensional, retirado de Wei *et al.* [82].

Foram geradas ondas de amplitude de 0.05 m e período igual a 0.8 s, 1.0 s, 1.5 s e 2.0 s. Os comprimentos de onda correspondentes são de 1.00 m, 1.51 m, 2.83 m e 4.06 m.

O domínio de cálculo utilizado foi discretizado por elementos finitos lineares com dois nós. O espaçamento entre nós foi de $\Delta x=0.02$ m (2501 nós). O coeficiente relacionado com a largura da zona de geração é $\delta=2.0$, fazendo com que a zona de geração tenha cerca de 50, 76, 142 e 203 nós, respectivamente para cada período simulado.

Não foi utilizada difusão artificial. O tempo de simulação numérica foi de 200 s não se registando quaisquer problemas de estabilidade numérica.

5.2.1.2. Apresentação e análise de resultados

Para validação do método de geração implementado, compararam-se resultados do modelo BOUSSiw_1D com o FUNWAVE usando as equações de Nwogu, em termos da:

- elevação da superfície livre ao longo do domínio nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s e $t = 100$ s para um período de $T = 1.0$ s (ver Figura 34);
- elevação da superfície livre em seis pontos colocados ao longo do domínio nas posições $x = 2.5$ m, $x = 5.0$ m, $x = 10.0$ m, $x = 15.0$ m, $x = 20.0$ m, $x = 25.0$ m para um período de $T = 1.0$ s (ver Figura 35).

Obtiveram-se ainda com o modelo BOUSSiw_1D:

- a elevação da superfície livre ao longo do domínio nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s (ver Figura 63 a Figura 66 do anexo C) correspondentes aos períodos de $T = 0.8$ s, 1.0 s, 1.5 s e 2.0 s;
- a elevação da superfície livre em seis pontos colocados ao longo do domínio nas posições $x = 2.5$ m, $x = 5.0$ m, $x = 10.0$ m, $x = 15.0$ m, $x = 20.0$ m, $x = 25.0$ m (ver Figura 67 a Figura 70 do anexo C) correspondentes aos períodos de $T = 0.8$ s, 1.0 s, 1.5 s e 2.0 s.

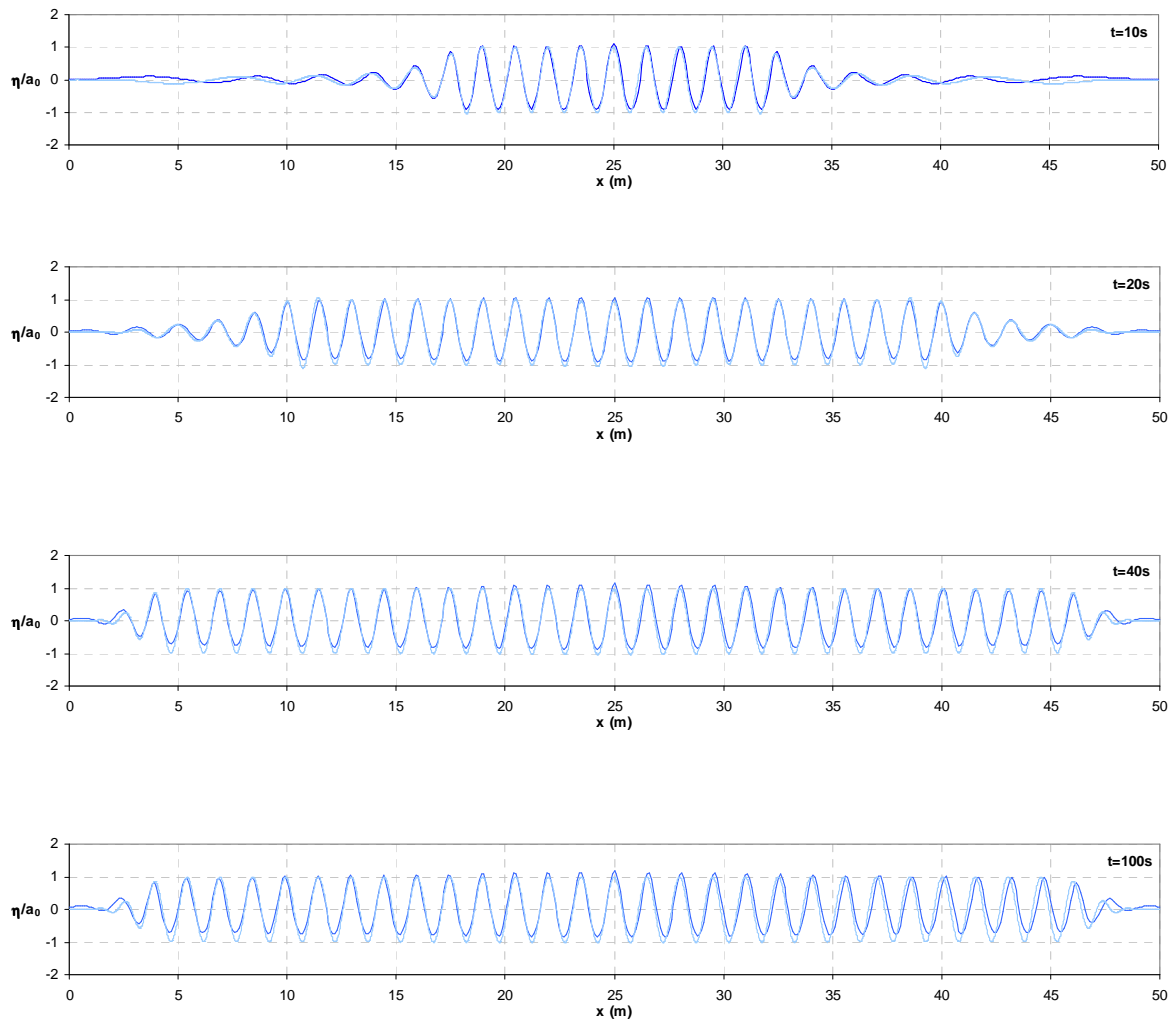


Figura 34 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 1.0\text{ s}$ nos instantes $t = 10\text{ s}$, $t = 20\text{ s}$, $t = 40\text{ s}$ e $t = 100\text{ s}$. BOUSSiw_1D (azul escuro) e FUNWAVE (azul claro).

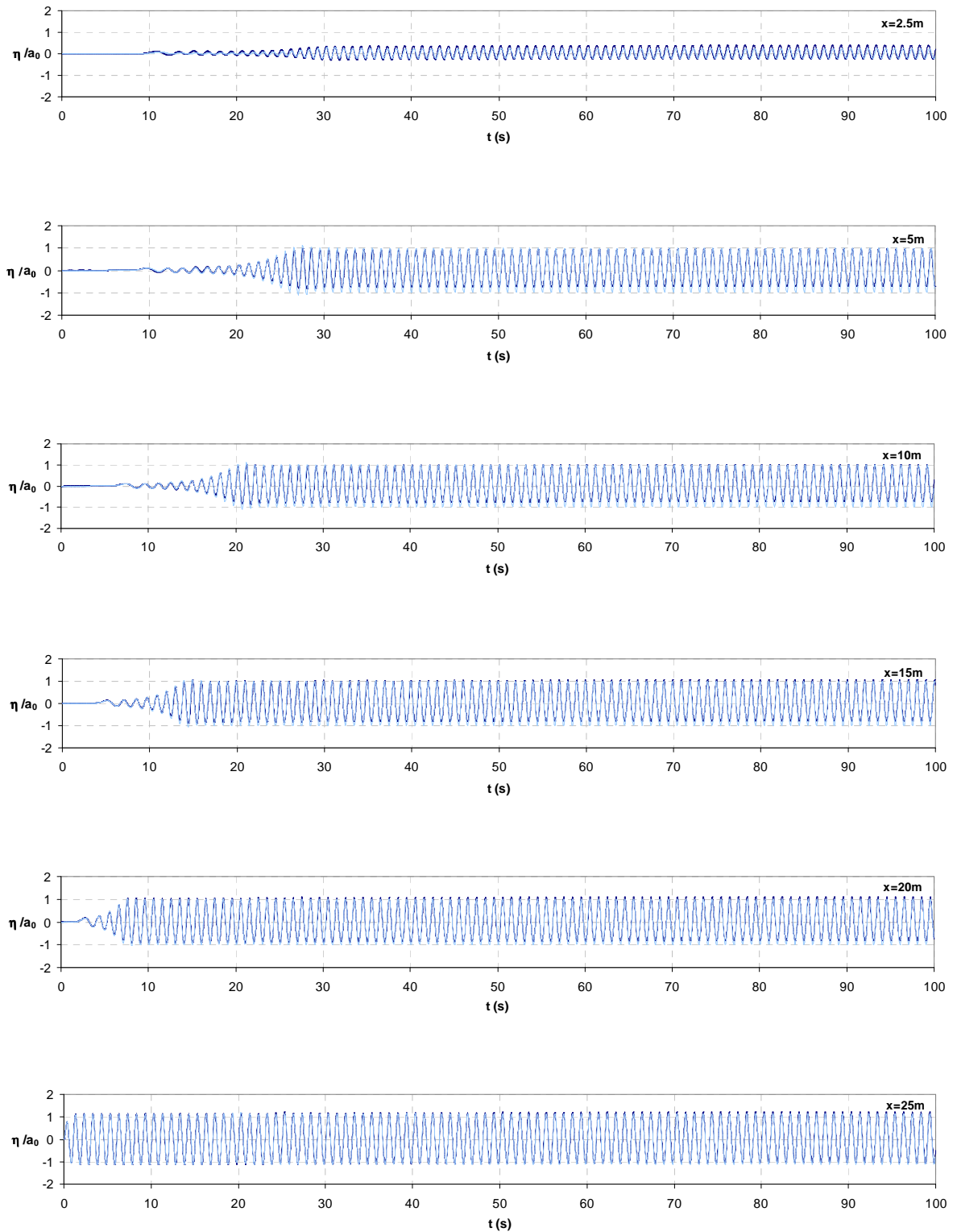


Figura 35 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 1.0$ s. BOUSSiw_1D (azul escuro) e FUNWAVE (azul claro).

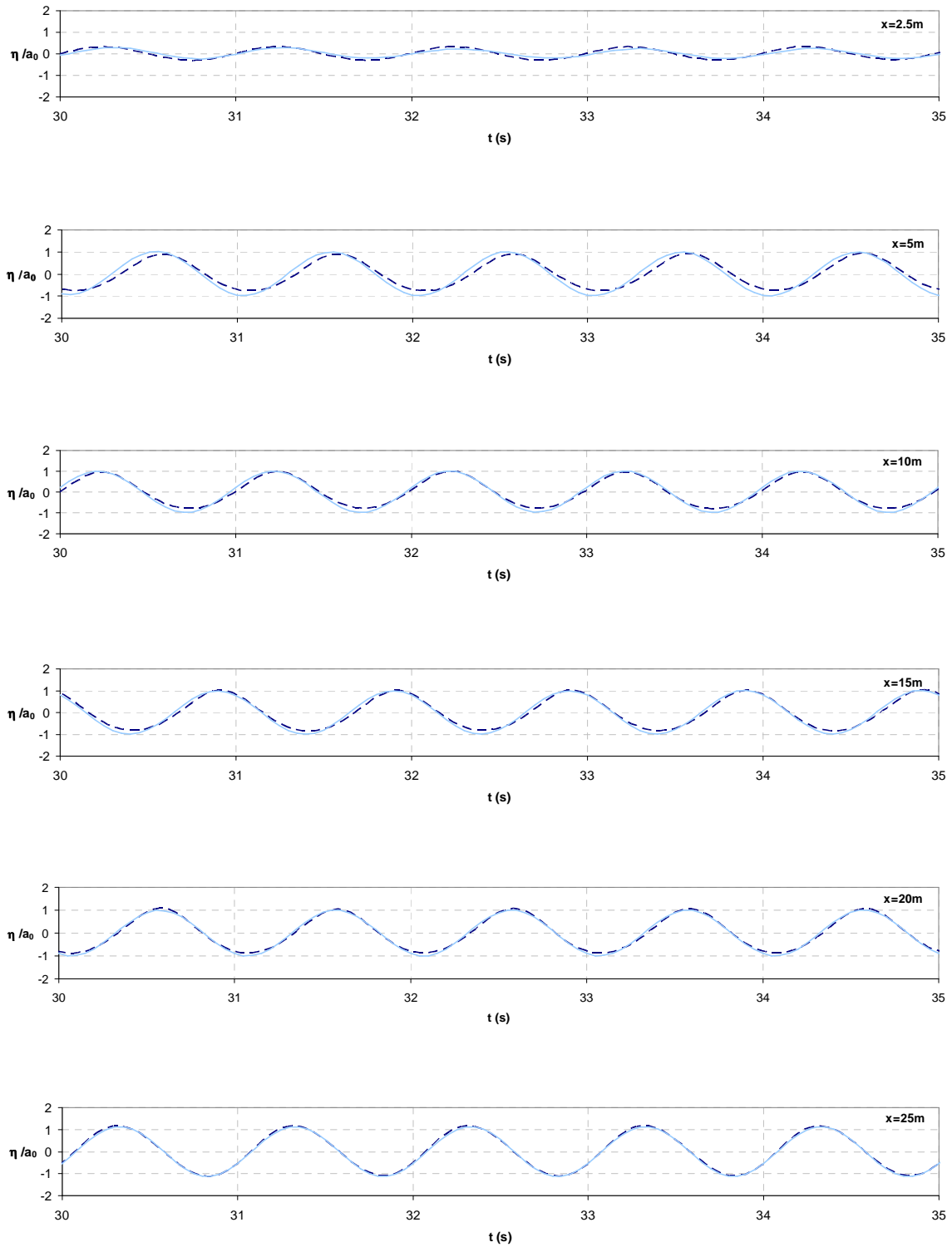


Figura 36 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 1.0$ s. BOUSSiw_1D (azul escuro tracejado) e FUNWAVE (azul claro).

Das figuras anteriores, verificou-se que o modelo reproduz bem a propagação das ondas a partir da zona de geração em direcção às duas extremidades do domínio de cálculo. As zonas de absorção interceptam as ondas incidentes sem permitir que elas sejam reflectidas para o interior do domínio. Como se pode ver nas Figura 34 e Figura 35 a altura da onda vai diminuindo ao longo das zonas absorventes até se anular.

Comparando os resultados obtidos com o modelo BOUSSiw_1D e com o modelo FUNWAVE, verifica-se que a altura e o período da onda são quase coincidentes, demonstrando um bom desempenho do modelo BOUSSiw_1D em gerar as ondas e em propagá-las.

Analisando as Figura 63 a Figura 66 do anexo C, verifica-se que, para os períodos mais elevados, a onda vai se tornando cada vez mais não linear apresentando cristas aguçadas e cavas achatadas.

Os cálculos efectuados para períodos de 0.8 s a 2.0 s utilizaram a mesma malha e não apresentaram qualquer problema de estabilidade numérica para uma simulação até aos 200 s. Estes resultados indicam que o modelo pode ser aplicado para simular ondas irregulares compostas por várias frequências.

5.2.2. Quebra-mar submerso

Para avaliar o desempenho do modelo unidimensional BOUSSiw_1D, efectuaram-se simulações numéricas da propagação de ondas sobre um quebra-mar submerso, estudado experimentalmente por Dingemans [18] e Beji e Battjes [10].

Trata-se de um caso frequentemente utilizado na literatura (Gobbi e Kirby [33], Gil *et al.* [31]) para a validação de novos modelos ou novas técnicas de resolução das equações de Boussinesq.

Estudou-se o comportamento do modelo na simulação dos efeitos não lineares que levam à transformação das ondas sobre o quebra-mar submerso e a influência nos resultados do modelo de se considerar a geração de ondas na fronteira ou a geração interna através do método da função fonte.

A comparação da simulação numérica e experimental é feita recorrendo à análise temporal e espectral da deformada da superfície livre em várias posições do domínio de cálculo.

Os cálculos foram efectuados em PC AMD Athlon™ 64 Processor 3500+ com 2.21GHz e com 1GB de memória RAM.

5.2.2.1. Características gerais e condições de cálculo

O modelo BOUSSiw_1D foi aplicado a duas situações distintas: a) geração de ondas é feita na fronteira de entrada; b) geração de ondas é efectuada no interior do domínio de cálculo através de uma função fonte.

Para a primeira situação, a geometria do quebra-mar submerso, a sua localização no canal em estudo, a topografia do fundo e as localizações das sondas onde se efectuaram medições nas experiências de Dingemans [18] encontram-se representados na Figura 37. O comprimento útil do canal é de 23 m, após o qual existe uma zona de absorção das ondas que impede a sua reflexão. A profundidade máxima é de 0.4 m e a mínima é de 0.1 m. O quebra-mar submerso apresenta declives de montante e jusante iguais a 1:20 e 1:10, respectivamente.

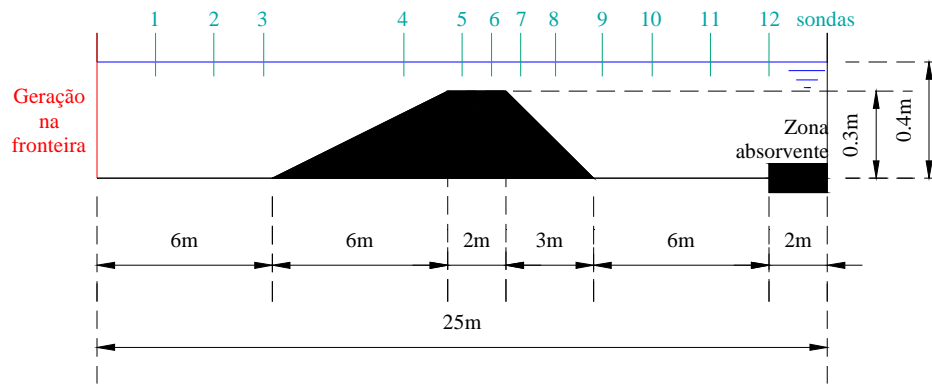


Figura 37 – Perfil do canal experimental e posição das sondas, para a situação de geração de ondas na fronteira de entrada.

Na segunda situação, (geração interna das ondas), houve que aumentar o domínio de modo a incluir uma zona de geração de ondas e uma zona de absorção a montante do quebra-mar submerso. O domínio de cálculo tem a dimensão de 35 m (ver Figura 38). No Tabela 1. resumem-se posições das sondas referidas ao novo domínio.

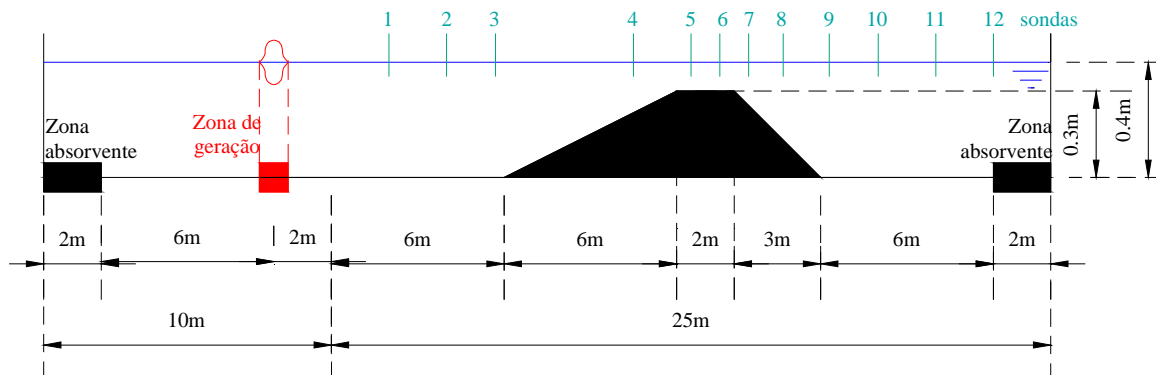


Figura 38 – Perfil do canal com zona de geração das ondas e posição das sondas, para a situação de geração no interior do domínio.

Tabela 1. Posição das sondas em relação ao início do canal da Figura 38.

Sonda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Posição (m)	12.0	14.0	15.7	20.5	22.5	23.5	24.5	25.7	27.3	29.0	31.0	33.0

A onda monocromática gerada tem um período de 2.02 s a que corresponde, na zona de maior profundidade, um comprimento de onda de 3.73 m e uma amplitude de 0.01 m, tal como em Dingemans [18].

A discretização espacial do domínio de cálculo foi efectuada com elementos lineares. Os nós encontram-se uniformemente espaçados de 0.025 m e o passo de tempo utilizado variou entre 0.031 e 0.001 s, estabilizando ao fim de cerca de 12s de simulação em 0.0097 s (ver Figura 39). A simulação de 60 s necessitou de cerca de 6 minutos de tempo de CPU.

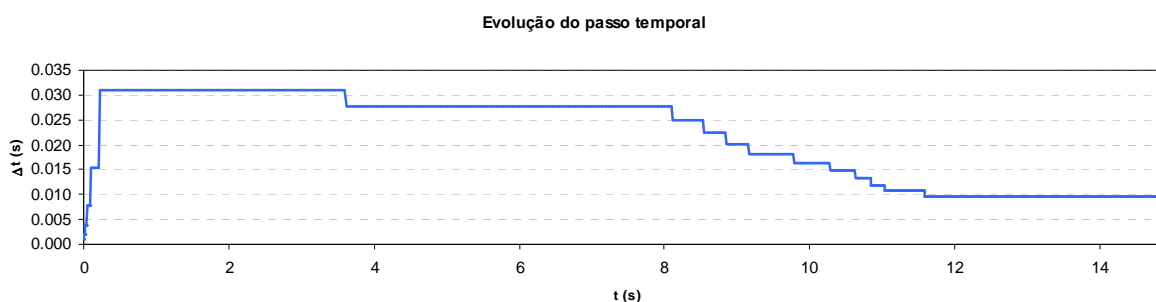


Figura 39 – Evolução do passo temporal no caso do quebra-mar submerso.

Foi imposta uma condição de radiação na saída do domínio. Nesta zona, foi ainda introduzida uma zona de absorção com a dimensão de cerca de um comprimento de onda. A condição inicial correspondeu ao repouso.

Não foi introduzida qualquer difusão artificial no domínio.

5.2.2.2. *Apresentação e análise de resultados*

Efectuaram-se cálculos com o modelo BOUSSiw_1D para as situações de geração de ondas na fronteira de entrada e no interior do domínio. Na Figura 40 representa-se a elevação da superfície livre ao longo do domínio, ao fim de 60 s de simulação, para as duas situações.

Verifica-se que, à medida que a profundidade diminui, dá-se o empolamento da onda. Além disso, constata-se que a forma da onda sinusoidal no início, se transforma e passa a apresentar características não lineares, com cristas aguçadas e cavas achatadas, principalmente na zona de menor profundidade e no declive de jusante do quebra-mar. Observam-se também algumas oscilações na elevação da superfície livre que surgem por não ter sido introduzida qualquer difusão artificial no domínio. Estas oscilações são mais significativas quando a geração se efectua na fronteira de entrada do que quando a geração é efectuada no interior do domínio com recurso ao método da função fonte.

Na Figura 41, comparam-se as deformadas da superfície livre obtidas experimentalmente e numericamente para as sondas 1 a 11 posicionadas de acordo com o Tabela 1.. No caso da sonda 12, apenas se apresentam os resultados numéricos pois não se dispõe dos resultados experimentais. Consideraram-se as duas formas de geração de ondas.

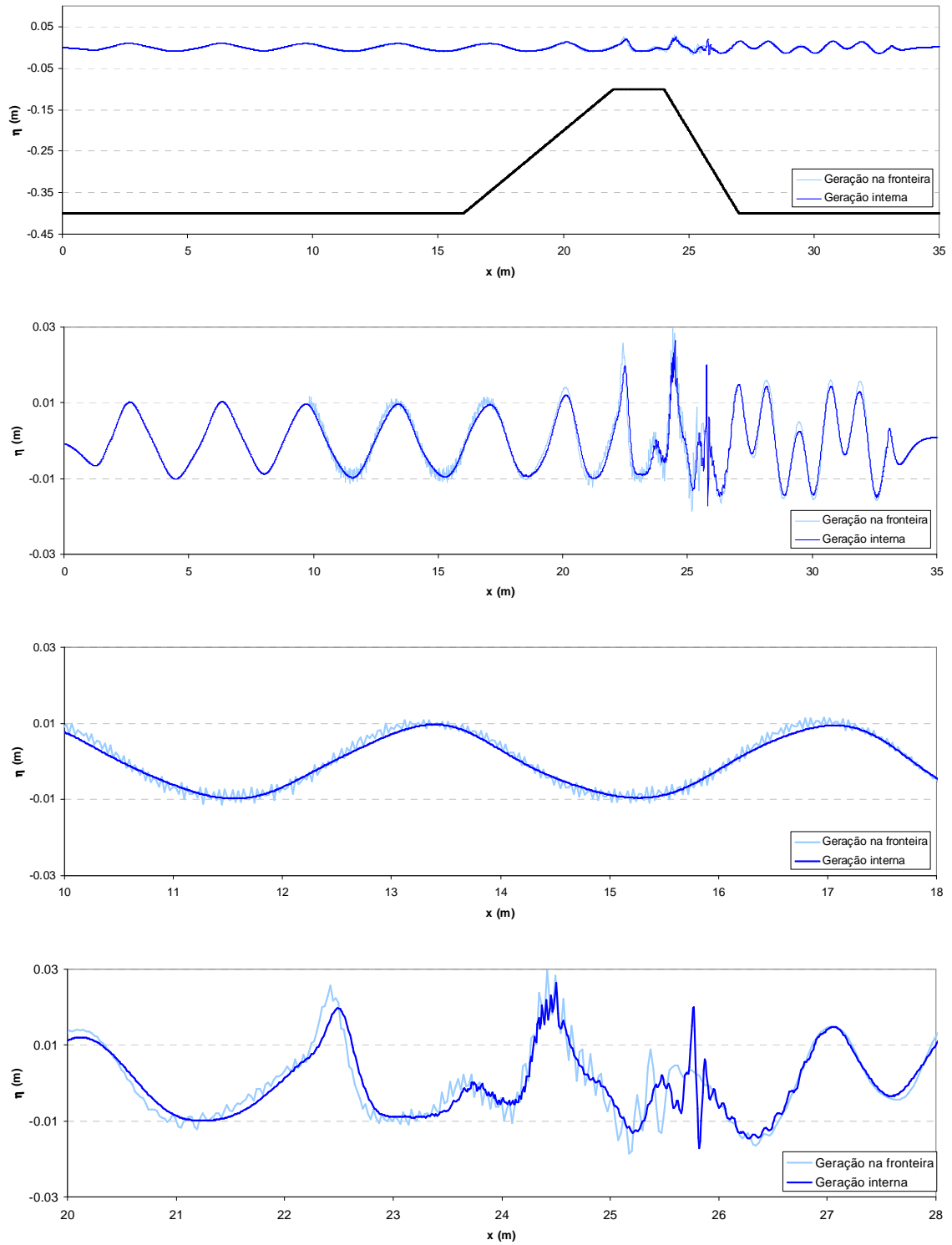


Figura 40 – Perfil espacial da superfície livre. Bouss2D.

Na análise de seguida, compara-se o comportamento do modelo quando a geração se efectua na fronteira de entrada ou quando a geração é efectuada no interior do domínio com recurso ao método da função fonte. Verificou-se que:

- as diferenças entre os resultados da elevação da superfície livre correspondentes aos dois tipos de geração, não são significativas em todas as sondas, com excepção da sonda 8. Com efeito, verifica-se que:
 - nas sondas 1 a 7, essas diferenças são mínimas, mas pode-se afirmar que os resultados com a geração no interior do modelo estão mais próximos dos resultados experimentais do que os correspondentes com a geração na fronteira. Estes últimos sobrestimam um pouco os valores mais elevados da elevação da superfície livre e sobrestimam os valores mais baixos;
 - nas sondas 9 a 11, os resultados com os dois tipos de geração das ondas apresentam maiores diferenças entre si e com os resultados experimentais. Em geral, nessas sondas, os resultados com a geração no interior do modelo estão mais próximos dos resultados experimentais do que os correspondentes com a geração na fronteira;
 - o contrário passa-se na sonda 8, onde as diferenças de resultados dos dois tipos de geração são significativas e os resultados com a geração na fronteira são os que mais se aproximam dos resultados experimentais.
- as diferenças entre os resultados dos periodogramas correspondentes aos dois tipos de geração, não são significativas em todas as sondas em termos da posição dos picos da frequência fundamental e das componentes harmónicas geradas ao longo do domínio de cálculo. No entanto convém salientar que:
 - apenas na sonda 1 e 3 os resultados correspondentes à geração na fronteira apresentam um pico na 2ª harmónica que não tem correspondência quer nos resultados com a geração interna quer experimentais;
 - as maiores diferenças entre os resultados dos dois tipos de geração de ondas são a nível das amplitudes máximas dos picos das harmónicas;
 - verifica-se que os resultados com a geração na fronteira apresentam amplitudes maiores para a frequência fundamental e segunda harmónica e menores para as restantes harmónicas, relativamente aos resultados com a geração interna;
 - em geral, os resultados com a geração na fronteira são os mais próximos dos experimentais nas sondas 1 a 3, passando-se o contrário nas restantes.

Na análise de seguida, comparam-se os resultados do modelo com geração no interior do domínio com recurso ao método da função fonte com os resultados experimentais.

A evolução da superfície livre nas sondas representadas na Figura 41, relativas às sondas 1 a 5 são praticamente coincidentes. Consta-se assim que existe uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais nas zonas de profundidade constante, decrescente e de menor profundidade. Nas sondas 4 e 5 verifica-se que o modelo subestima o valor dos picos da elevação da superfície livre. No caso da sonda 6 notam-se algumas diferenças (pouco significativas) entre a deformada da superfície livre do modelo e dos resultados experimentais.

A partir da sonda 6, a que corresponde o aumento da profundidade, a concordância é menor, embora de uma maneira geral as deformadas de superfície livre numéricas e experimental tem um comportamento semelhante.

Nas sondas 7 e 8 verifica-se que as soluções numéricas da elevação da superfície livre respeitantes são semelhantes aos resultados experimentais, embora se observe um desfasamento da segunda harmónica, na sonda 7 principalmente, e uma sobrestimação dos valores mais elevados, na sonda 8 principalmente. Nas sondas 9, 10 e 11 constata-se que as diferenças entre os resultados experimentais e os numéricos são significativas.

Para uma melhor caracterização das diferenças entre as componentes harmónicas dos sinais obtidos pelas sondas representam-se, na Figura 42, os respectivos periodogramas. Os periodogramas apresentados na Figura 42 confirmam que as divergências entre os resultados se devem a diferenças na intensidade das componentes harmónicas mais visíveis nas sondas da zona final do canal. Com efeito, constata-se que o modelo numérico simula convenientemente a posição dos picos da frequência fundamental e das componentes harmónicas geradas ao longo do domínio de cálculo, observando-se, no entanto, diferenças apreciáveis na amplitude máxima desses picos, principalmente nas sondas 9, 10 e 11. Nestas sondas, a terceira harmónica não aparece bem definida.

Tendo em conta os resultados apresentados, pode-se concluir que o modelo simula com precisão a propagação de ondas sobre fundos moderadamente inclinados e reproduziu bastante bem os efeitos não lineares existentes sobre o quebra-mar. A utilização do método da função fonte conduziu a bons resultados que, em geral se aproximam mais dos resultados experimentais. É de lembrar que os resultados experimentais não devem ser considerados isentos de erros. A geração de ondas através de um batedor plano, em condições de profundidade finita, e a reflexão das ondas nas extremidades do canal e nos batedores são fontes de perturbações que, embora minimizados, existem em qualquer ensaio experimental (Gil *et al.* [31]).

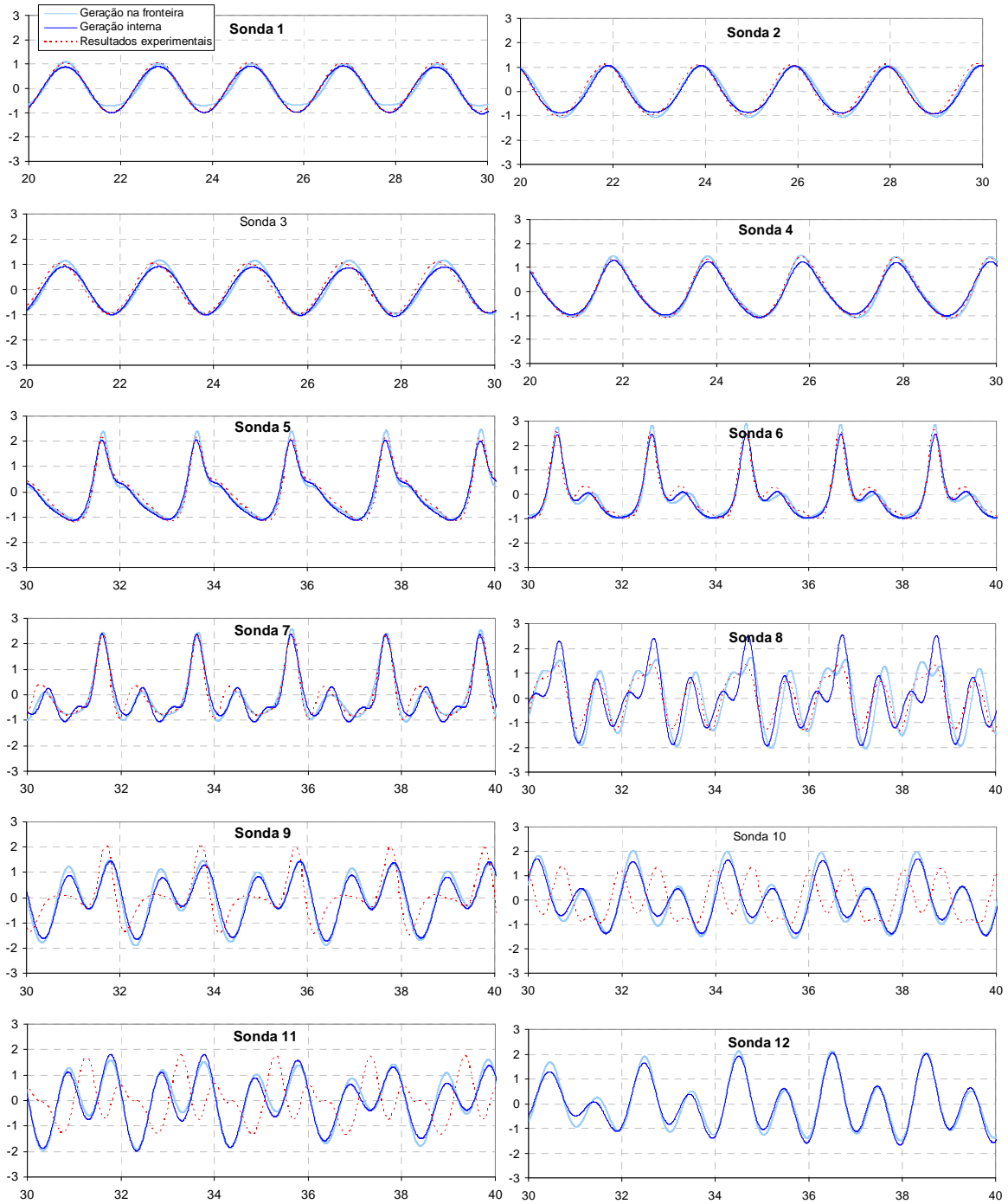


Figura 41 – Comparação das deformadas da superfície livre: Geração na fronteira (azul claro), Geração interna (azul escuro) Experimental (vermelho).

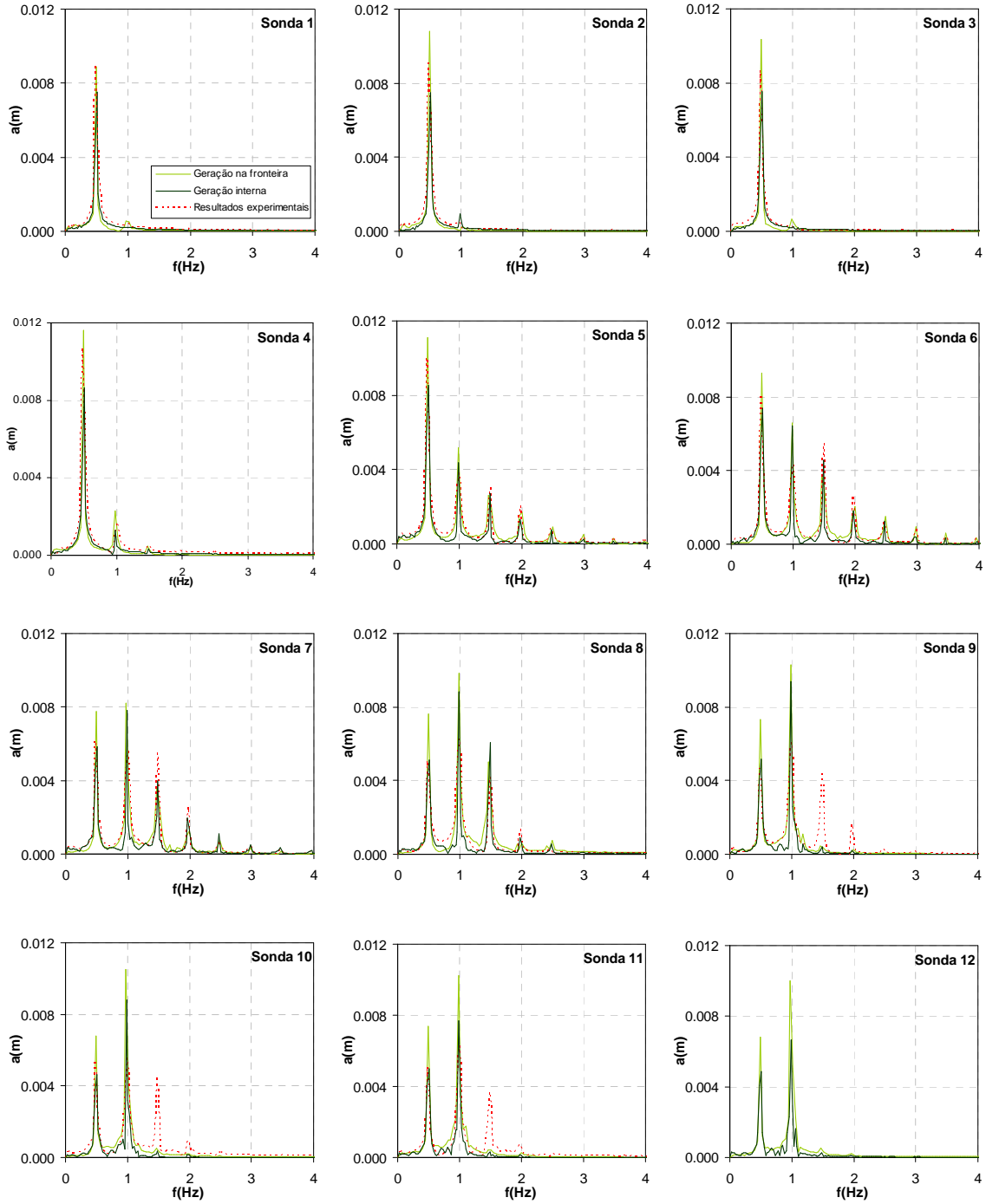


Figura 42 – Periodogramas relativos aos sinais das sondas. Geração na fronteira (preto) Geração interna (verde), experimental (vermelho tracejado).

5.3. Modelo bidimensional BOUSSiw_2D

5.3.1. Canal bidimensional com profundidade constante

Neste sub-capítulo descreve-se a aplicação do modelo BOUSSiw_2D na simulação da propagação de ondas ao longo de um canal de profundidade constante. Trata-se de uma caso de teste para avaliar o desempenho do modelo bidimensional e, mais concretamente, do método da função fonte para a simulação da geração de ondas no interior do domínio de cálculo.

Apresentam-se as condições de cálculo e os resultados obtidos com o modelo.

É também efectuada uma análise da influência dos valores do parâmetro de difusão espacial, definida na secção 3.5, nos resultados do modelo numérico.

Os cálculos foram efectuados numa estação de trabalho LINUX CORVUS com quatro processadores AMD Opteron™ 265 de 2GHz e com 8GB de memória RAM.

5.3.1.1. Características gerais e condições de cálculo

O modelo BOUSSiw_2D foi aplicado na simulação da propagação de ondas ao longo de um canal de profundidade constante, considerando uma onda incidente regular gerada no seu interior.

Para isso, utilizou-se o caso unidimensional da secção 5.2.1 adicionando-lhe uma dimensão de largura igual a 2.0 m.

O centro da região de geração das ondas localiza-se na ordenada $y = 25$ m. Para absorver a energia das ondas, foram criadas duas zonas absorventes nas duas extremidades do domínio com 5.00 m de comprimento (ver Figura 43).

A condição inicial correspondeu à situação de repouso.

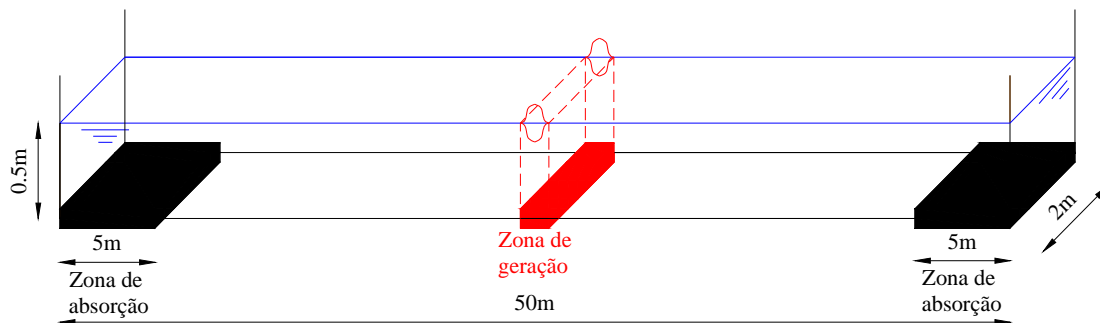


Figura 43 – Canal bidimensional com profundidade constante.

Foram geradas ondas de período igual a 1.0 s e amplitude de 0.05 m. O comprimento de onda correspondente é de 1.51 m.

O domínio de cálculo utilizado foi discretizado por uma malha de elementos finitos triangulares com 57 069 nós e 111 800 elementos. O espaçamento entre nós é, em média, de $\Delta x = 0.03$ m havendo em média 50 pontos por comprimento de onda. O coeficiente relacionado com a largura da zona de geração é $\delta = 2.0$ fazendo com que a zona de geração tenha cerca de 76x100 pontos.

Testaram-se valores do parâmetro de difusão artificial, γ , igual a 2.6×10^{-6} , 1.3×10^{-6} e 1.2×10^{-6} .

O tempo de simulação numérica foi de 200 s e não se registaram problemas de estabilidade numérica, para os valores de difusão testados. O tempo total de CPU para correr este exemplo durante 8854 passos de cálculo foi de 38340 s (10 h e 39 min).

5.3.1.2. Apresentação e análise de resultados

O passo temporal variou entre 0.0032 s e 0.0252 s, estabilizando, ao fim de 0.20ss nos 0.0231 s (ver Figura 44).

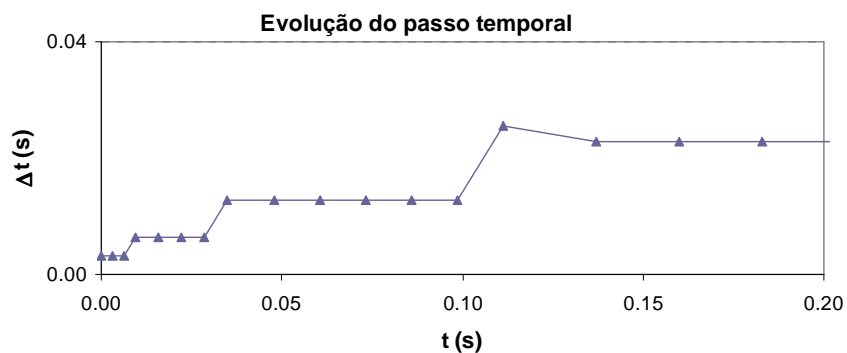


Figura 44 – Evolução do passo temporal nos primeiros instantes.

Para as condições de cálculo anteriores, obtiveram-se, com o modelo de elementos finitos bidimensional:

- a elevação da superfície livre ao longo da linha central do domínio ($x = 1.0\text{m}$) no instante 10 s (ver Figura 45);
- os índices de agitação máximos, relação da altura de onda máxima num ponto e a altura de onda inicial, obtidos com vários valores do parâmetro de difusão artificial (2.6×10^{-6} , 1.3×10^{-6} e 1.2×10^{-6}) (ver Figura 46);
- a elevação da superfície livre no domínio bidimensional nos instantes de cálculo 1 s, 5 s, 10 s, 20 s, 30 s, 200 s (ver Figura 47).

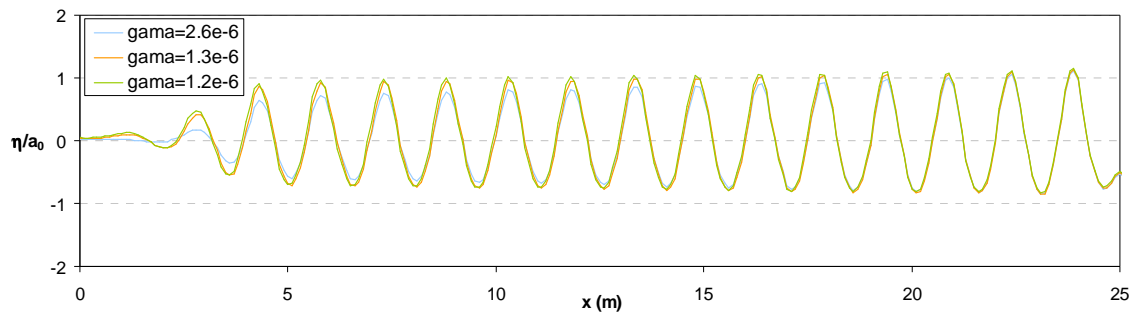


Figura 45 – Elevações da superfície livre no instante $t=100\text{s}$ obtidas com vários valores do parâmetro de difusão artificial (2.6×10^{-6} , 1.3×10^{-6} e 1.2×10^{-6}).

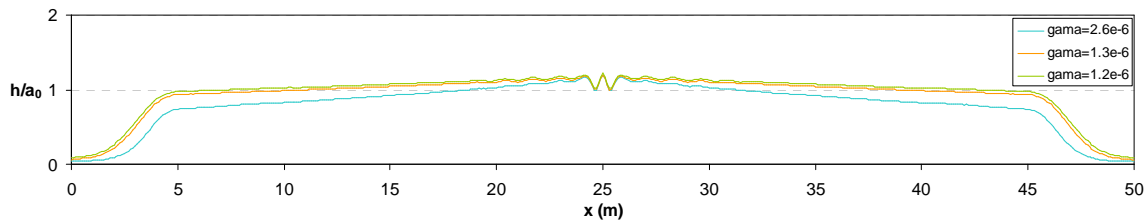


Figura 46 – Índices de agitação obtidos com vários valores do parâmetro de difusão artificial (2.6×10^{-6} , 1.3×10^{-6} e 1.2×10^{-6}).

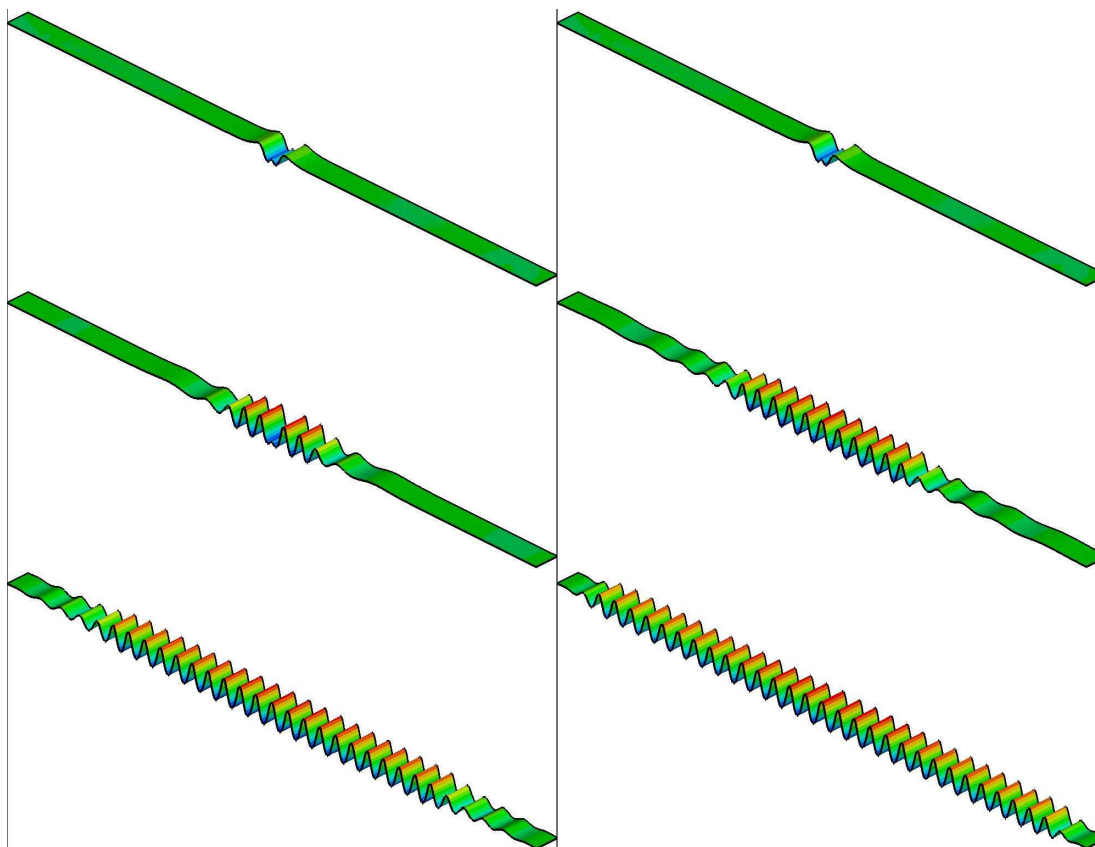


Figura 47 – Elevação da superfície livre em vários instantes de cálculo (1 s, 5 s, 10 s, 20 s, 40 s, 200 s) com $\gamma = 1.2 \times 10^{-6}$.

O modelo reproduz bem a propagação das ondas a partir da zona de geração em direcção às duas extremidades do canal. As zonas de absorção interceptam as ondas incidentes sem permitir que elas sejam reflectidas para o interior do domínio. O controlo da estabilidade numérica com valores de difusão mais elevados tem custos na precisão dos resultados. Nota-se uma ligeira perda de energia à medida que a onda se propaga, principalmente para $\gamma = 2.6 \times 10^{-6}$.

Do exposto, verifica-se que a função de fonte implementada consegue gerar a onda com a amplitude e período pretendidos.

5.3.2. Baixio elíptico numa praia de inclinação constante

Neste sub-capítulo descreve-se a aplicação do modelo BOUSSiw_2D na simulação da propagação de ondas sobre um baixio elíptico localizado numa praia de inclinação constante. Este estudo foi conduzido experimentalmente por Berkhoff [13]. A propagação de ondas ao longo desta topografia envolve diversos fenómenos físicos como,

por exemplo, a refacção, a difracção, o empolamento e a dispersão não linear. Por isso, constitui um óptimo teste para validação do modelo aqui apresentado baseado nas equações estendidas de Boussinesq deduzidas por Nwogu.

Apresenta-se, de seguida, as condições de cálculo e os resultados obtidos com o modelo BOUSSiw_2D. Os resultados numéricos são comparados com resultados experimentais obtidos por Berkhoff [13]. É feita uma análise da influência do valor do parâmetro de difusão artificial nos resultados numéricos.

Os cálculos foram efectuados em PC AMD Athlon™ 64 Processor 3500+ com 2.21GHz e com 1GB de memória RAM.

5.3.2.1. Características gerais e condições de cálculo

O modelo BOUSSiw_2D foi aplicado na simulação da propagação de ondas sobre um baixio elíptico localizado numa praia de inclinação variável (Berkhoff [13]).

A topografia de fundo é apresentada na Figura 48 e consiste num baixio de forma elíptica situado numa praia de inclinação constante de 1:50. As isolinhas de profundidade da praia encontram-se orientadas num ângulo de 20° com a direcção x . Para obter os valores da profundidade, recorre-se às seguintes expressões:

$$h(x_r, y_r) = \begin{cases} 0.45 & x_r < -5.84 \\ 0.45 - (x_r + 5.84)/50 & x_r \geq -5.84 \\ 0.45 - (x_r + 5.84)/50 - h_s & (x_r/3)^2 + (y_r/4)^2 \leq 1 \end{cases} \quad (104)$$

$$h_s(x_r, y_r) = -0.3 + 0.5 \left[1 - (x_r/3.75)^2 - (y_r/5)^2 \right]^{0.5}$$

$$x_r = (x - 10) \cos 20^\circ - (y - 10) \sin 20^\circ \quad (105)$$

$$y_r = (x - 10) \sin 20^\circ + (y - 10) \cos 20^\circ$$

sendo x_r e y_r as coordenadas em relação ao centro do baixio e h_s a altura do baixio em relação à praia.

O domínio de cálculo tem dimensões de 20x30 m² nas direcções x e y , respectivamente (ver Figura 48).

Na fronteira inferior do domínio, $y = 0$ m foram geradas ondas regulares com 1.0 s de período e 2.32 cm de amplitude. A condição de geração é a indicada na secção 3.6.1. Na extremidade oposta, foi introduzida uma zona de absorção entre $y = 27$ m e $y = 30$ m. A condição inicial correspondeu à situação de repouso.

A discretização do domínio foi realizada com uma malha de elementos finitos triangulares com 30 748 pontos e 60 854 elementos. A malha de elementos finitos tem uma densidade média de 9 pontos por comprimento de onda.

O intervalo de tempo, Δt , variou entre 0.001 s e 0.032 s estabilizando em 0.021 s. Os cálculos foram efectuados durante 2059 passos de tempo. Tal correspondeu a 50 s de simulação.

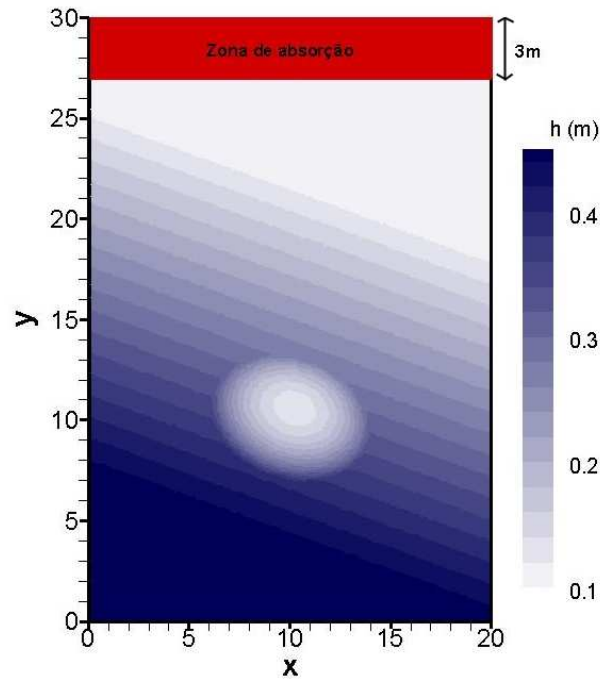


Figura 48 – Batimetria do baio de Berkhoff.

Para controlar as oscilações numéricas é introduzida uma difusão artificial que tende a absorver energia nas pequenas escalas ao longo do domínio. Para controlar as instabilidades numéricas e apurar a sua influência nos resultados, foram testados diversos valores do parâmetro de difusão espacial, γ . Os valores testados foram 1.1×10^{-3} , 2.2×10^{-4} e 1.1×10^{-4} .

O tempo total de CPU para correr este exemplo foi de 4260 s, para 50 s de simulação.

5.3.2.2. Apresentação e análise de resultados

Para as condições de cálculo anteriores, obtiveram-se, com o modelo de elementos finitos bidimensional (ver Figura 49):

- os valores de índices de agitação (relação entre a altura em qualquer ponto no interior do domínio e a altura de onda incidente) no domínio em estudo. Estes índices de agitação foram obtidos para $t = 50$ s;
- a elevação da superfície livre no domínio em estudo no instante $t = 50$ s.

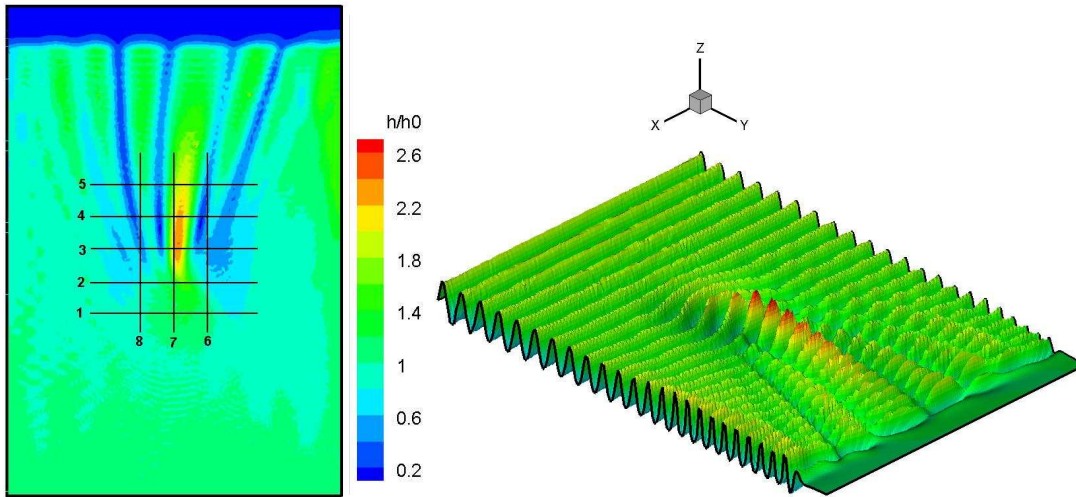


Figura 49 – a) Índices de agitação obtidos no instante $t = 50$ s e localização das secções; b) Elevação da superfície livre no instante $t = 50$ s.

Os resultados experimentais foram obtidos em diversas sondas posicionadas sobre oito secções no interior do domínio. Estas secções estão representadas na Figura 49.

Na Figura 50 apresentam-se os valores dos índices de agitação nas 8 secções. Foram efectuados cálculos numéricos considerando os valores do parâmetro de difusão artificial, γ , de 1.1×10^{-3} , 2.2×10^{-4} e 1.1×10^{-4} .

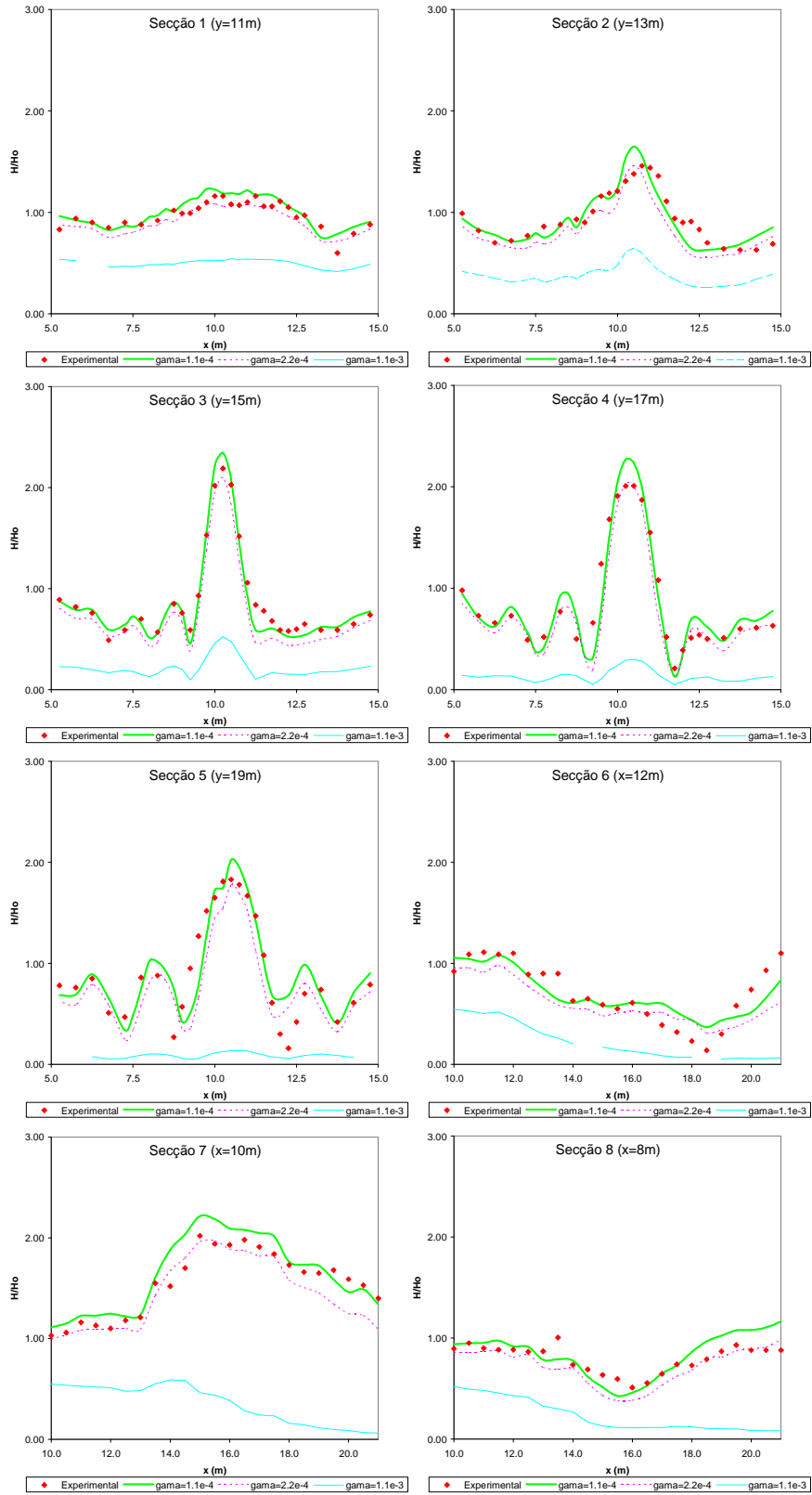


Figura 50 – Baixo elíptico (Berkhoff [13]). Índices de agitação em diversas secções do domínio.

A análise da influência do valor da difusão nos resultados numéricos mostrou que:

- o um valor muito elevado do parâmetro γ leva a uma perda exagerada de energia da onda;
- o um valor muito baixo do parâmetro γ leva a oscilações numéricas que inviabilizam a obtenção de resultados.

Assim, verifica-se que é necessário encontrar um valor adequado para cada caso. O valor mais baixo do parâmetro de difusão que permitiu obter resultados estáveis foi de 1.1×10^{-4} e é também o que gera resultados mais próximos dos experimentais.

Para esse valor do parâmetro da difusão, verificou-se que:

- o comportamento do modelo numérico é semelhante aos valores experimentais. Com efeito, a ordem de grandeza dos valores do modelo bidimensional e dos resultados experimentais é semelhante e observa-se o mesmo tipo de andamento. O modelo consegue reproduzir o empolamento da onda sobre o baixio;
- os valores do modelo numérico são ligeiramente superiores aos experimentais na zona a seguir ao baixio elíptico (ver secções 2, 3, 4 e 5);
- os resultados numéricos são bastante concordantes com os experimentais mesmo nas secções mais próximas da fronteira de saída do domínio (ver secção 5).

Do exposto verifica-se que o modelo BOUSSiw_2D consegue reproduzir os principais fenómenos de transformação de ondas sobre fundos de profundidade variável. No entanto, apresenta algumas limitações relacionados com problemas de instabilidade numérica. Estes problemas podem ser controlados com o parâmetro de difusão artificial, o qual requer, por enquanto, uma calibração *a priori* para estabelecer o valor mais adequado para esse parâmetro de modo a que não influencie significativamente a precisão da solução.

5.3.3. Caso real: Bacia de adução da central termoelétrica de Sines

Neste sub-capítulo descreve-se a aplicação do modelo numérico BOUSSiw_2D a um caso real de propagação de ondas numa zona abrigada. Pretendeu-se avaliar o comportamento do modelo na propagação da agitação marítima para o interior da bacia de adução da central termoelétrica de Sines.

Foram efectuados cálculos de propagação com ondas regulares com o modelo BOUSSiw_2D e compararam-se os seus resultados com o modelo de elementos finitos DREAMS (Fernandes [20] e Fortes [26]), descrito no Anexo D.

Mais concretamente, efectuaram-se os seguintes procedimentos.

1. Definição do domínio de cálculo e sua discretização por uma malha de elementos finitos com o gerador GMALHA.
2. Propagação de ondas regulares na zona em estudo.
 - Definição das características das ondas regulares incidentes.
 - Cálculos com o modelo BOUSSiw_2D.
 - Cálculos com o modelo DREAMS.
 - Processamento e análise dos resultados dos modelos, que incluem: a) diagramas de isolinhas dos índices de agitação na zona marítima da bacia de adução; b) valores destes índices em nove pontos no interior da bacia de adução.

Foram utilizadas duas batimetrias distintas, uma com profundidade constante de 2m em todo o domínio e outra com profundidade constante apenas na zona de geração das ondas, sendo o restante domínio caracterizado pela batimetria real. A primeira batimetria simula uma dragagem da bacia de modo a facilitar as operações no seu interior, nomeadamente, o manuseamento das redes instaladas para a retenção de algas invasoras. O aparecimento, em larga escala, destas algas tem-se mostrado bastante prejudicial ao funcionamento do sistema de refrigeração da central termoeléctrica. O aprofundamento da bacia de adução interfere com a hidrodinâmica da bacia, o que leva a alterações nas correntes e nas taxas de transporte, podendo ter consequências na sedimentação na bacia. Outra consequência é a agitação marítima dentro da bacia, uma vez que existem limites às alturas de onda que podem atingir a zona de adução sem consequências negativas para o funcionamento do sistema de tomada de água.

Os cálculos foram efectuados numa estação de trabalho LINUX CORVUS com quatro processadores AMD *Opteron*TM 265 de 2GHz e com 8GB de memória RAM.

5.3.3.1. Características gerais e condições de cálculo

A batimetria da zona de estudo, utilizada na aplicação do modelo numérico é apresentada na Figura 51.

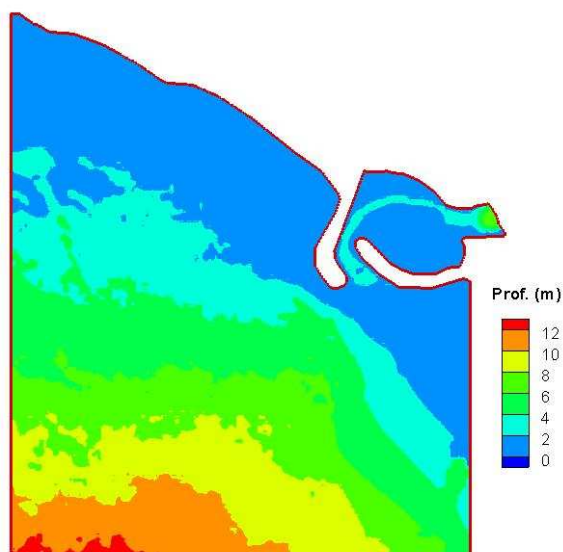


Figura 51 – Batimetria da zona marítima adjacente à bacia de adução da central termoelétrica de Sines.

Devido a limitações computacionais, o domínio utilizado abrange uma área de aproximadamente $630 \text{ m} \times 430 \text{ m}$. A batimetria real não pôde ser utilizada em todo o domínio, uma vez que a zona de geração das ondas deve ser plana, sob pena de surgirem oscilações numéricas nesta zona, o que corromperia totalmente as características das ondas geradas (a não ser que a malha seja muito refinada nessa zona).

Foram utilizadas duas batimetrias distintas, uma com profundidade constante de 2 m em todo o domínio, adiante designado por *caso A* e outra com profundidade constante apenas na zona de geração das ondas, sendo o restante domínio caracterizado pela batimetria real, adiante designado por *caso B* (ver Figura 52).

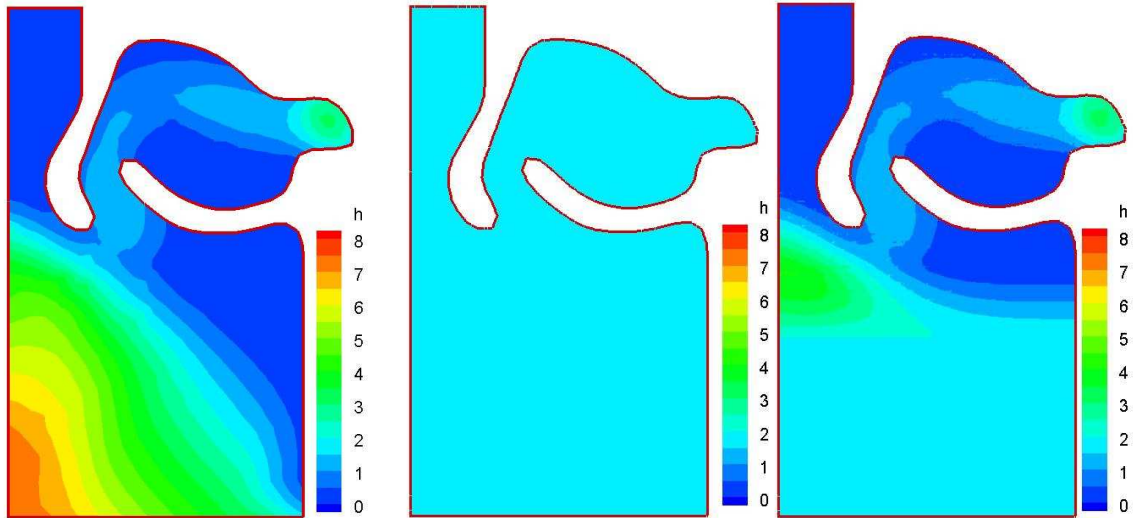


Figura 52 – Batimetrias da zona da bacia de adução da central termoeléctrica de Sines: a) real; b) modificada com profundidade constante de 2m (caso A); c) modificada com profundidade constante de 2m na zona de geração (caso B).

As ondas regulares utilizadas nos cálculos de propagação têm uma amplitude de 0.1 m, um período de 10 s e uma direcção de 90° em relação ao eixo das abcissas, isto é, são ondas provenientes de Sul. O comprimento de onda, na zona de geração, é de 60.96 m.

Os cálculos foram efectuados, para um nível de maré médio de +2.0 m, em relação ao Zero Hidrográfico (Z.H.).

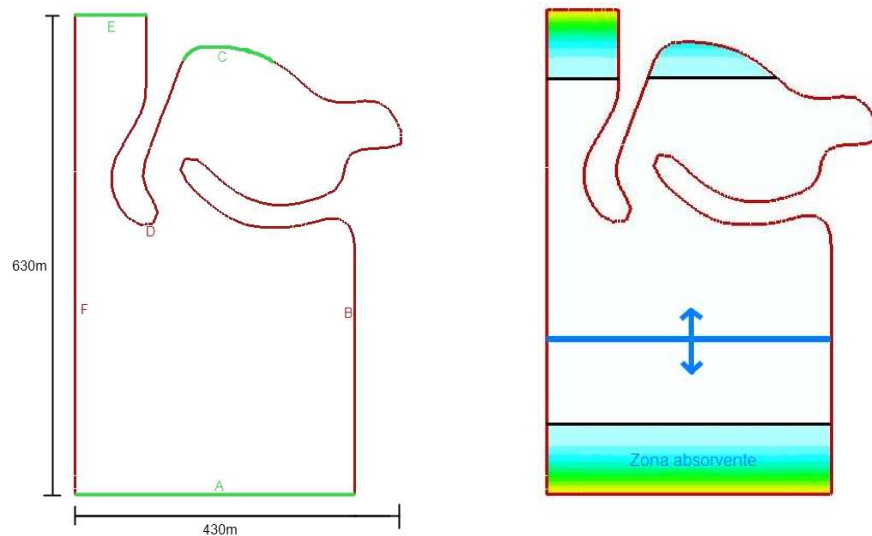


Figura 53 – Fronteira do domínio e localização das zonas absorventes e da zona de geração das ondas.

Na Figura 53 ilustra-se a fronteira do domínio e a localização das zonas absorventes e da zona de geração das ondas. A zona de geração localiza-se na ordenada $y = 200$ m e tem uma largura de 12.2 m. As zonas absorventes têm uma largura de 1.5 vezes o comprimento de onda, isto é, 91.44 m.

No modelo BOUSSiw_2D, impuseram-se condições de fronteira de saída aos troços A, C e E. Quanto aos restantes troços, B, D e F, impuseram-se condições de reflexão total.

O domínio de cálculo foi discretizado por uma malha de elementos finitos com 72 689 nós e 143 972 elementos. A densidade de nós da malha foi definida de modo a garantir um mínimo de 18 pontos por comprimento de onda em todo o domínio, para um período de 10 s. A malha resultante tem em média 33 pontos por comprimento de onda.

O modelo DREAMS foi executado para as mesmas condições de cálculo, i.e., características de onda incidente, geometria e malha de elementos finitos. Quanto às condições de fronteira, impôs-se a condição de geração-radiação ao troço A (fronteira de entrada), condições de radiação aos troços C e E (fronteiras de saída) e condições de reflexão total aos restantes troços, B, D e F.

Utilizou-se um parâmetro de difusão artificial, γ , igual a 5.6×10^{-6} , definido após vários testes preliminares.

5.3.3.2. Apresentação e análise de resultados

O caso A e o caso B descritos na secção anterior foram testados com o modelo de Boussinesq BOUSSiw_2D e com o modelo linear DREAMS para comparação de resultados.

Os resultados analisados são as isolinhas dos índices de agitação no domínio de cálculo e os índices de agitação em nove pontos no interior da bacia (ver Figura 54).

Foram também extraídas as séries temporais da elevação da superfície livre nesses mesmos pontos.

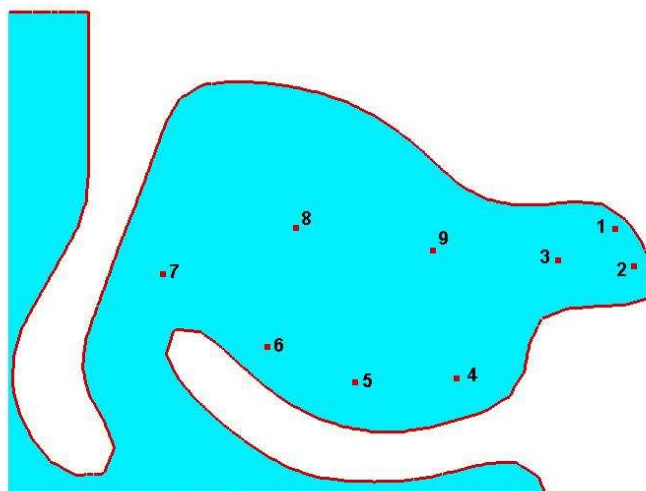


Figura 54 – Posição dos pontos de análise dos resultados.

Na Figura 55 apresentam-se as isolinhas dos índices de agitação em todo o domínio obtidas com o BOUSSiw_2D, ao fim de 500 s de simulação e na Figura 56 os mesmos índices obtidos com o DREAMS.

Nas Figura 57 e Figura 58 apresentam-se os mesmos índices em mais detalhe no interior da bacia obtidos com o BOUSSiw_2D, ao fim de 200 s e 500 s de simulação, respectivamente. Na Figura 59 apresentam-se os correspondentes valores com o modelo DREAMS.

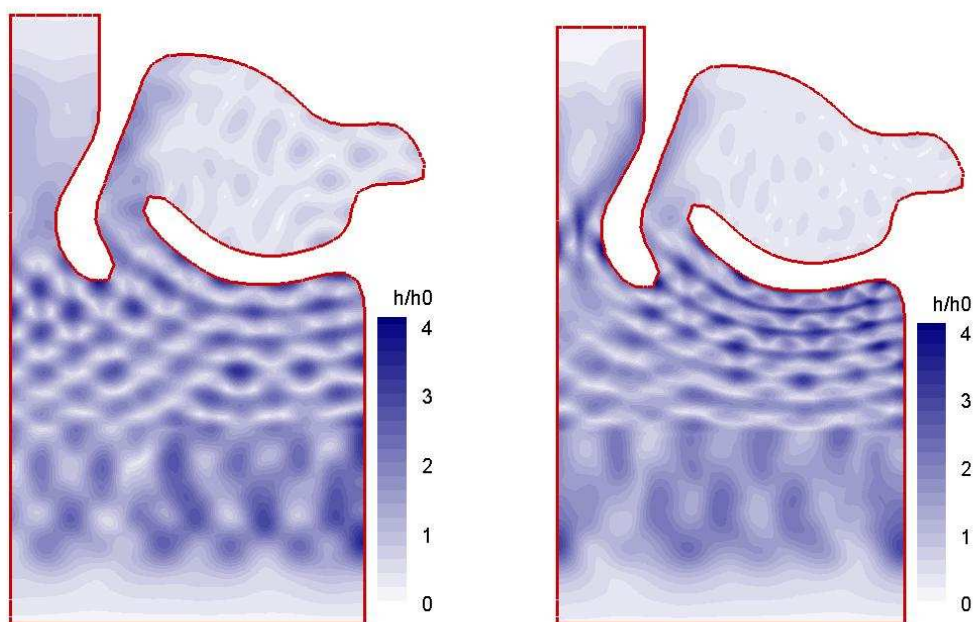


Figura 55 – Índices de agitação obtidos com o BOUSSiw_2D ao fim de 500s de simulação: a) Caso A; b) Caso B.

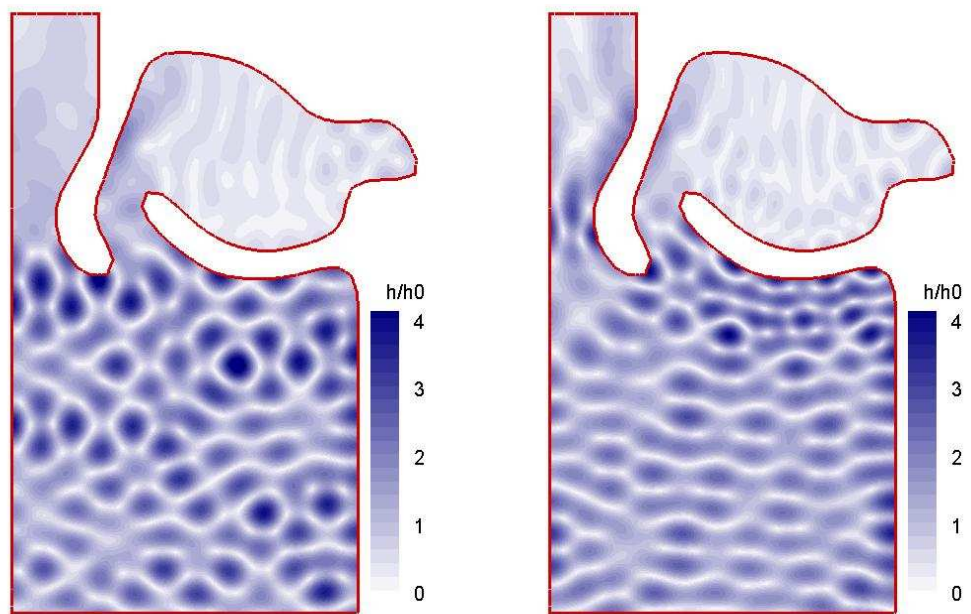


Figura 56 – Índices de agitação obtidos com o DREAMS: a) Caso A; b) Caso B.

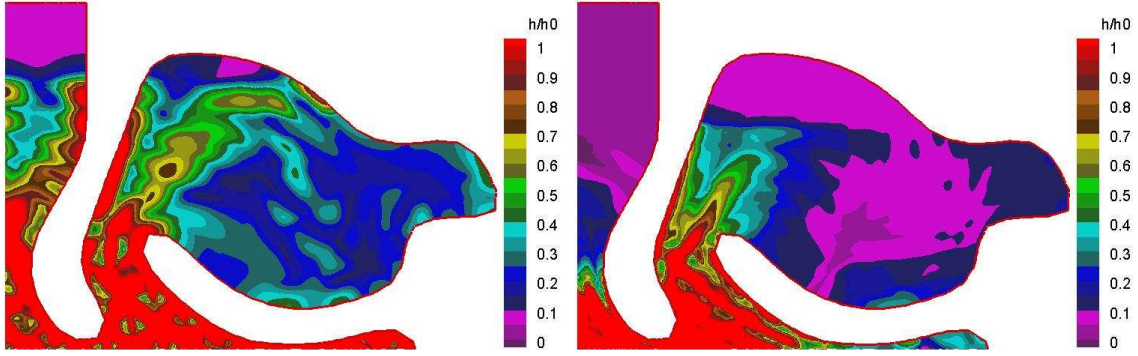


Figura 57 – Índices de agitação na bacia de adução obtidos com o BOUSSiw_2D ao fim de 200 s de simulação: a) Caso A; b) Caso B.

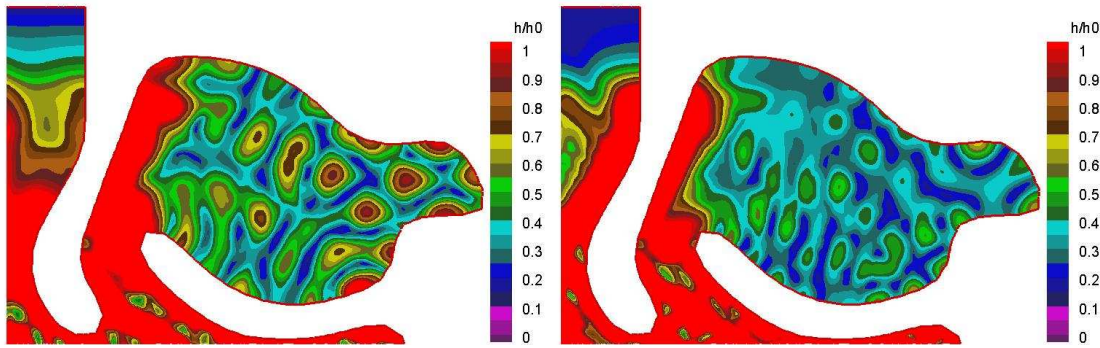


Figura 58 – Índices de agitação na bacia de adução obtidos com o BOUSSiw_2D ao fim de 500 s de simulação: a) Caso A; b) Caso B.

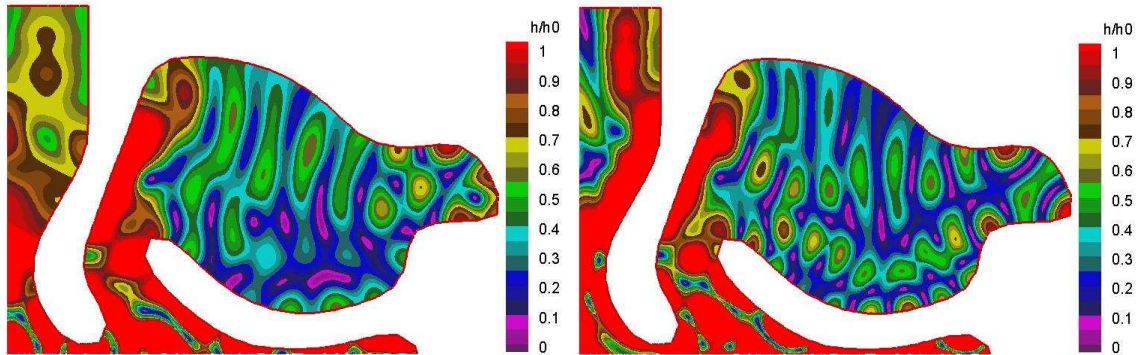


Figura 59 – Índices de agitação na bacia de adução obtidos com o DREAMS: a) Caso A; b) Caso B.

De uma forma geral, o comportamento dos resultados com o modelo BOUSSiw_2D foi semelhante ao do modelo DREAMS.

Zona exterior da bacia

- Os valores do índice de agitação variam significativamente devido aos efeitos da refacção e difracção da onda ao longo do domínio e das reflexões nas fronteiras sólidas desse domínio (correspondentes às estruturas físicas da bacia).
- Os valores mais elevados verificam-se em frente à parte exterior do molhe sul (fronteira B, ver Figura 53) podendo atingir valores de índice de agitação superiores a 3.0.
- A zona de entrada da bacia portuária é caracterizada por valores do índice de agitação inferiores aos verificados na parte exterior do molhe de protecção sul e são o resultado dos efeitos da difracção da onda em torno deste molhe. No entanto, devido a reflexão entre os dois molhes, existem locais na zona de entrada com valores mais elevados do índice de agitação.

Zona interior da bacia portuária

- Os valores mais elevados do índice de agitação verificam-se na zona de entrada da bacia portuária, que está mais exposta à agitação incidente, e vão diminuindo para o seu interior.
- No entanto, e devido à ocorrência de reflexões no interior da bacia, verifica-se a ocorrência de valores elevados do índice de agitação. As maiores reflexões verificam-se em frente à tomada de água e na parte interior do molhe sul (ver Figura 58 e Figura 59).

A comparação mais detalhada entre resultados do modelo não linear e linear permite concluir que os padrões de isolinhas são semelhantes para os dois modelos, excepto, naturalmente, nas zonas de absorção do modelo BOUSSiw_2D que não existem no caso do modelo DREAMS. Os padrões de reflexão das ondas nos molhes aparecem claros na Figura 55. Aos 200 s de simulação com o modelo BOUSSiw_2D as ondas já entraram na bacia mas ainda não tiveram tempo de reflectir-se no seu interior. Ao fim de 500 s já se podem ver nitidamente as reflexões em toda a bacia. Os padrões das isolinhas assemelham-se aos obtidos com o modelo DREAMS.

Na Figura 60 apresentam-se os valores dos índices de agitação obtidos nos nove pontos de controlo com os modelos BOUSSiw_2D e DREAMS.

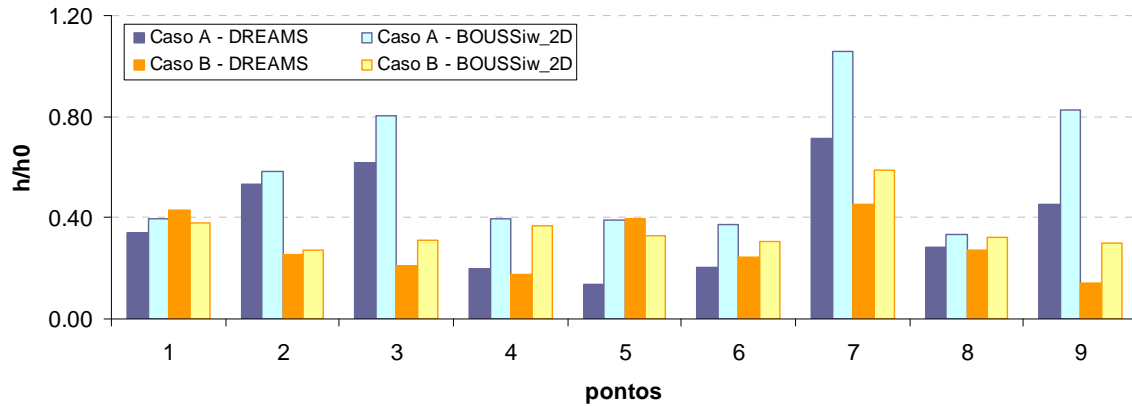


Figura 60 – Índices de agitação obtidos nos nove pontos de controlo com os modelos BOUSSiw_2D e DREAMS.

Da Figura 60, constata-se que a ordem de grandeza dos valores é semelhante em ambos os casos testados embora o modelo BOUSSiw apresente, geralmente, valores mais elevados que o modelo DREAMS. Por outro lado, o caso A apresenta valores de índices de agitação superiores aos do caso B, sugerindo que um alisamento da batimetria na bacia leva a um aumento das alturas de onda, nomeadamente, no ponto 2 que se encontra junto à tomada de água.

Apresentam-se, na Figura 61 e na Figura 62, os valores da elevação da superfície livre obtidos para os 9 pontos de controlo, para os casos A e B, obtidos com o modelo BOUSSiw_2D.

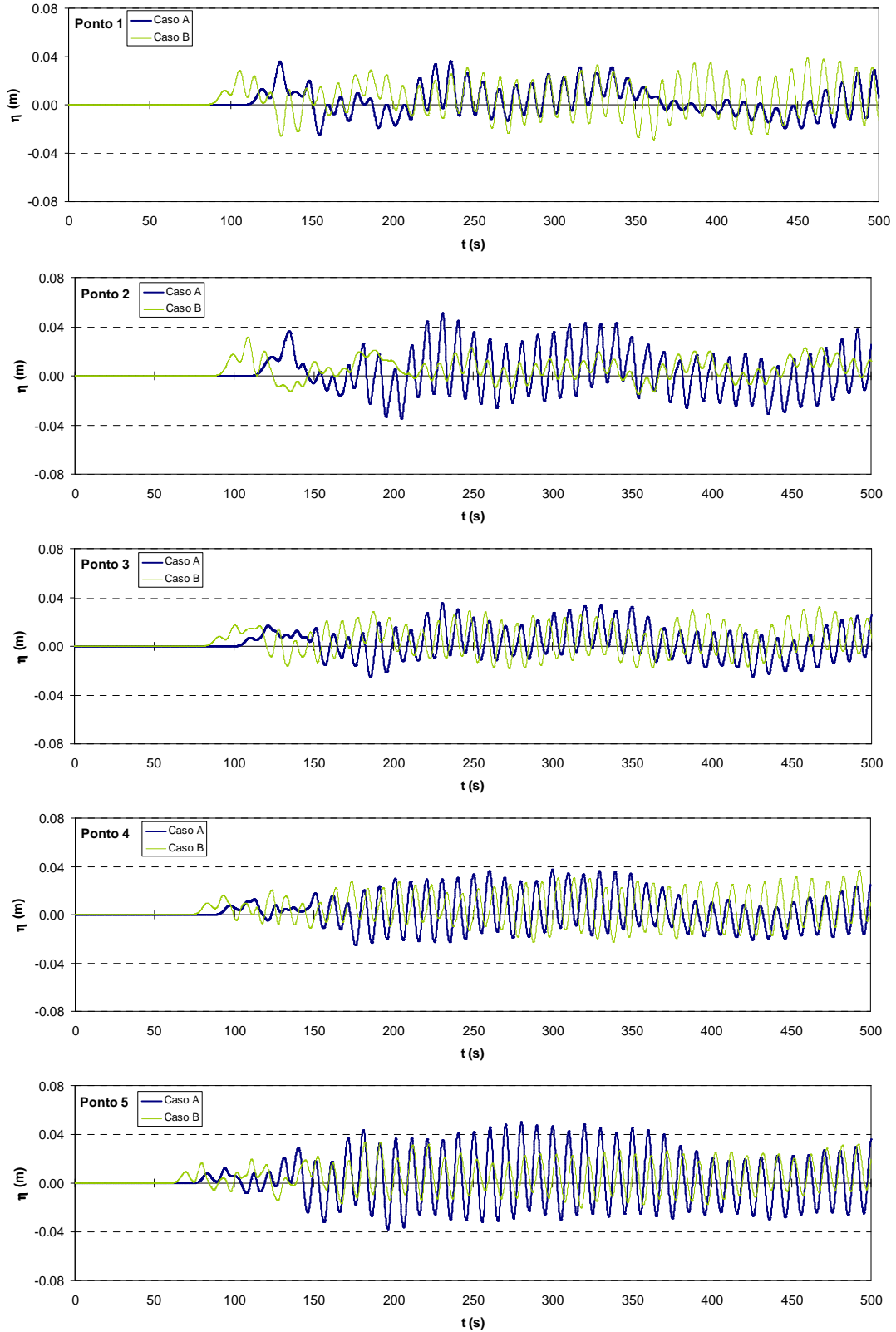


Figura 61 – Séries temporais da elevação da superfície livre em nove pontos no interior da bacia (pontos 1 a 5).

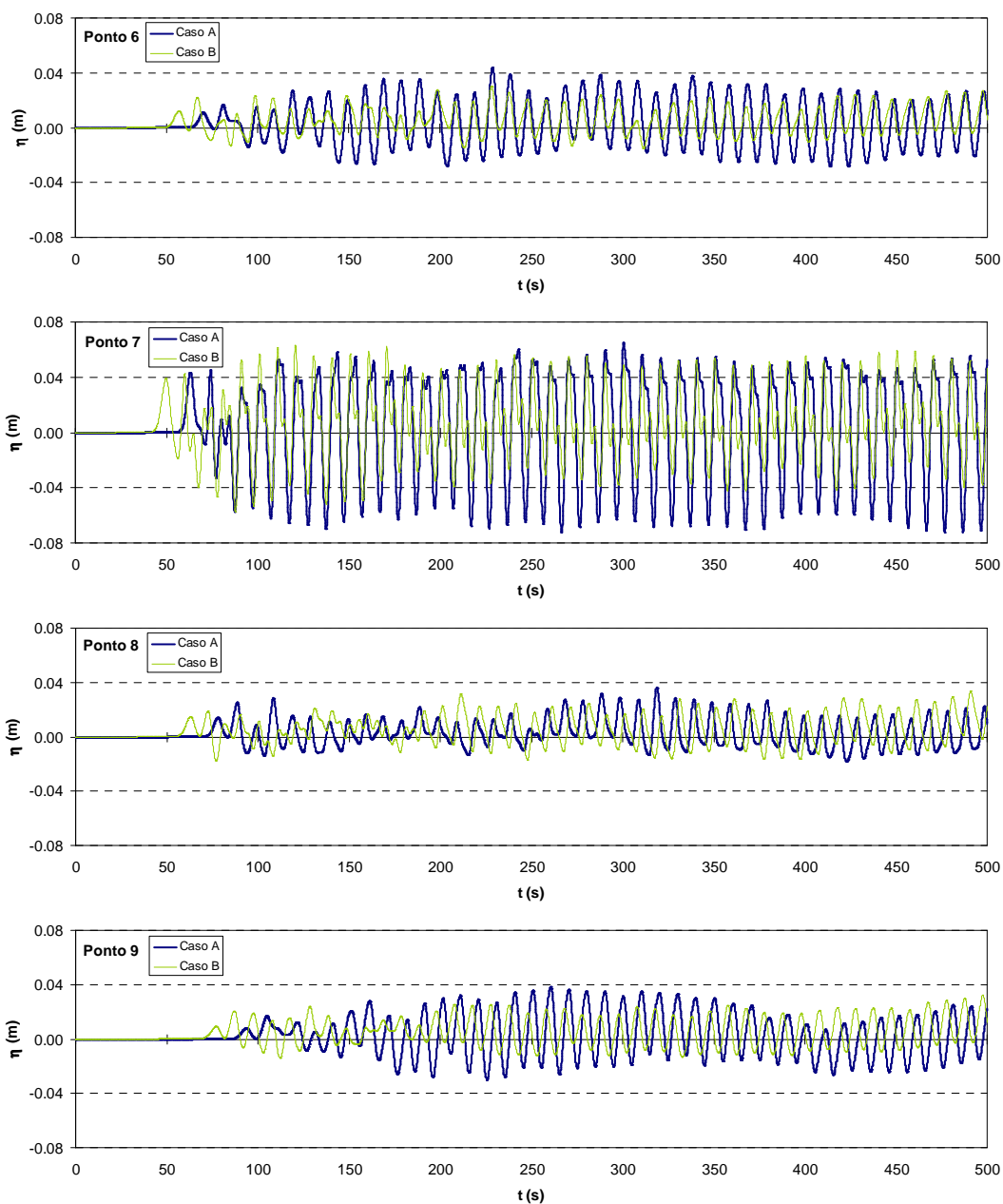


Figura 62 – Séries temporais da elevação da superfície livre em nove pontos no interior da bacia (pontos 6 a 9).

A análise da Figura 61 e da Figura 62 permite verificar que:

- o ponto 7 é o que apresenta maiores valores de elevação da superfície livre com valores que atingem 0.065 m, ou seja, 65 % da agitação incidente;
- os pontos 1, 3 e 4 apresentam valores do índice de agitação inferiores aos dos restantes pontos;
- os pontos 8 e 9 também têm valores baixos de elevação da superfície livre, mas por se situarem perto da zona de absorção da bacia.

Do exposto, pode-se afirmar que a agitação penetra mais no interior da bacia de adução no caso A, ou seja, com a batimetria plana em todo o domínio do que no caso B. Verifica-se a ocorrência de reflexões importantes no interior do porto, em ambos os casos, responsáveis pelos valores mais elevados dos índices de agitação, principalmente nos pontos 2, 5 e 7.

Em resumo, o modelo BOUSSiw_2D simulou a maioria das transformações das características das ondas ao longo da sua propagação no domínio de geometria e batimetria complexos, como é este caso da bacia de adução, e apresenta assim, capacidades para ser utilizado em estudos de engenharia portuária e costeira mais gerais. A sua utilização está, no entanto, condicionada à implementação de condições de fronteira de reflexão parcial, que pretendem simular estruturas como molhes, cais, etc.

6. CONCLUSÕES E FUTURAS LINHAS DE TRABALHO

Nesta dissertação, apresentaram-se os modelos BOUSSiw_1D e BOUSSiw_2D resultantes do aperfeiçoamento do modelo de elementos finitos de propagação de ondas, BOUSS, desenvolvido por Walkley [79], e que é baseado nas equações de Boussinesq estendidas por Nwogu [60].

Trata-se de um modelo indicado para a propagação de ondas não lineares e dispersivas que permite reproduzir alguns dos processos mais importantes envolvidos na propagação de ondas marítimas, em regiões costeiras: a difracção, a refracção, a reflexão, o empolamento, a dispersão de frequência, a dispersão de amplitude e a geração de harmónicas. O modelo utiliza o pacote SPRINT (Berzins e Furzeland [14]) para a integração temporal, e o método de Galerkin, com uma malha não estruturada de elementos finitos triangulares, para a discretização espacial. As condições de fronteira implementadas no modelo são a condição de reflexão total e a condição de radiação, que permite a saída das perturbações do domínio computacional.

Relativamente ao modelo de Walkley, foram melhorados os aspectos relacionados com as oscilações numéricas, a geração e a absorção de ondas no domínio e foi desenvolvido um método automático de geração de malhas de qualidade.

Com efeito, efectuou-se a calibração do parâmetro de difusão artificial no domínio e nas fronteiras absorventes, o que melhorou o desempenho do modelo de Walkley. Após diversos testes com os casos apresentados na secção 5, concluiu-se que a ordem de grandeza do parâmetro de difusão artificial no domínio, de modo que este permitisse controlar as oscilações espúrias sem comprometer a precisão da solução, tinha uma forte relação com o comprimento de onda e com o espaçamento da malha. Estabeleceu-se assim uma relação empírica entre eles, o que permitiu mais facilmente determinar uma ordem de grandeza para o valor desse parâmetro de difusão, Eq. (71). No entanto, haverá sempre que efectuar uma calibração em cada caso de teste.

Implementou-se uma nova forma de geração de ondas no interior através de uma função fonte. Este método permite que as ondas reflectidas no domínio possam passar através da zona de geração sem alterar as suas características e propagarem-se para fora do domínio. O método proposto baseia-se no trabalho de Wei *et al.* [82] para um modelo de diferenças finitas e é particularmente importante para simulações de longo-prazo em domínios geometricamente complexos.

Foi desenvolvido um gerador automático de malhas de elementos finitos, destinadas especificamente para o modelo BOUSSiw_2D e, de forma mais geral, para os modelos de propagação de ondas em zonas costeiras. Este gerador permitiu a obtenção de malhas de boa qualidade e a melhoraria no desempenho do modelo de elementos finitos.

As malhas são geradas a partir de uma fronteira e batimetria conhecidas, passando por diversos processos de pós-processamento. As malhas geradas têm refinamento local proporcional ao comprimento de onda, e a imposição de critérios de qualidade, tais como: boa adaptabilidade às irregularidades da fronteira, forma dos triângulos o mais próxima possível da equilátera, valência dos nós igual a seis, variação suave do tamanho dos elementos e numeração dos nós da malha de modo a minimizar a largura de banda e o perfil das matrizes.

O desempenho do gerador de malhas foi avaliado através da geração de várias malhas com refinamento uniforme ou com refinamento local, com, comparação dos tempos de CPU, dos números de pontos e de elementos e das larguras de banda, correspondentes a cada malha. Observou-se que as malhas geradas com o GMALHA utilizando o refinamento local, permitem obter melhores resultados e melhores desempenhos do modelo quando o domínio é de grande extensão, uma vez que o refinamento local permite reduzir o número de elementos nas zonas mais profundas e, conseqüentemente, reduzir os tempos de CPU necessários para gerar a própria malha, enquanto a renumeração dos nós permite diminuir a quantidade de memória utilizada pelos modelos numéricos assim como os tempos de CPU necessários para execução dos modelos numéricos.

Foram também desenvolvidas interfaces com o utilizador para a construção dos ficheiros de dados e para a obtenção e visualização de resultados, tanto do modelo BOUSSiw como do gerador GMALHA. Estas interfaces permitem executar esses modelos de forma interactiva e amigável, reduzindo o tempo de preparação dos dados e visualização dos resultados e diminuindo a possibilidade de ocorrência de erros.

O modelo BOUSSiw, desenvolvido neste trabalho, foi validado e testado com casos de teste de propagação de ondas, sendo os respectivos resultados numéricos comparados quer com outros modelos numéricos, quer com resultados experimentais.

O desempenho do modelo unidimensional BOUSSiw_1D foi avaliado com base em simulações numéricas da propagação de ondas sobre: 1) um fundo de profundidade constante; 2) um quebra-mar submerso (Dingemans [18]). Os resultados numéricos foram comparados com base em resultados do modelo de diferenças finitas FUNWAVE e também com resultados experimentais (Dingemans [18]).

O modelo simulou com precisão a propagação de ondas sobre fundos moderadamente inclinados e reproduziu bastante bem os efeitos não lineares existentes sobre o quebra-mar. Verificou-se ainda que o método de geração de ondas no interior do domínio, através duma função fonte, reproduziu bem a propagação das ondas a partir da zona de geração em direcção às duas extremidades do canal. Observou-se que as oscilações numéricas são menores quando se utiliza a geração de ondas no interior do

domínio, sugerindo que este método gera menos instabilidades no modelo numérico. Nas simulações com o modelo BOUSSiw_1D não foi necessário introduzir qualquer difusão artificial nos cálculos, uma vez que, apesar de existirem oscilações, estas não causaram instabilização do modelo.

O desempenho do modelo unidimensional BOUSSiw_2D foi avaliado com simulações numéricas da propagação de ondas sobre: 1) um fundo de profundidade constante; 2) um baixo elíptico numa praia de inclinação constante (Berkhoff [13]); 3) a zona da bacia de adução da central termoeléctrica de Sines. Os resultados numéricos foram comparados com resultados experimentais (Berkhoff [13]) e também com resultados do modelo linear DREAMS.

Verificou-se que o modelo reproduziu bem a propagação das ondas sobre fundos de profundidade variável. No entanto, foi necessário introduzir uma difusão numérica artificial para evitar o aparecimento de oscilações numéricas na solução que se amplificavam e levavam à instabilização do modelo. A análise da influência da difusão nos resultados numéricos mostrou que é necessário efectuar uma calibração prévia do parâmetro γ de modo a estabelecer um valor que elimine as oscilações numéricas e que, ao mesmo tempo, permita obter uma solução próxima da realidade. Encontrado o valor adequado, o comportamento do modelo numérico é bastante satisfatório e os seus resultados são concordantes com os valores experimentais. Verificou-se também que o valor do parâmetro de difusão é bastante inferior quando a onda é introduzida no interior do domínio através da função fonte, o que confirma que esta forma de introdução das ondas no domínio gera menos instabilidades no método numérico. Assim, foi possível estabelecer duas gamas de valores do parâmetro da difusão consoante a geração das ondas é feita na fronteira ou no interior do domínio, Eq. (71).

O modelo provou ainda, em casos de domínio e batimetria complexos, ser capaz de simular adequadamente a maioria das transformações das características das ondas ao longo da sua propagação, como por exemplo, a difracção, a refracção, a reflexão, o empolamento e as interacções entre ondas e entre ondas e estruturas, demonstrando boas capacidades para ser utilizado em estudos de engenharia portuária e costeira. A sua utilização generalizada nesses estudos depende da implementação de condições de reflexão parcial que simulem estruturas como quebra-mares, cais ou trechos de costa como praias, escarpas, etc. e a dissipação de energia por rebentação.

Como trabalho futuro, assinala-se a necessidade de:

- introduzir condições de reflexão parcial capazes de reproduzir fronteiras físicas reflectivas reais, tais como quebra-mares, cais, praias, escarpas, etc.;
- introduzir os efeitos da rebentação das ondas;

- efectuar testes com ondas irregulares para avaliar o desempenho do modelo na reprodução desse tipo de agitação;
- substituir o esquema de elementos finitos por uma interpolação mista onde as velocidades são interpoladas quadraticamente e a superfície livre é interpolada linearmente (este esquema pode levar a melhoramentos significativos no controlo da ocorrência de oscilações numéricas);
- melhorar o gerador de malhas no sentido de ter em conta que na zona de geração das ondas a malha deve ser uniforme;
- incluir um algoritmo mais eficaz na ordenação dos pontos da batimetria, visto ser um processo ainda moroso.

REFERÊNCIAS

- [1] Abbot, M.B.; McCowan, A.D.; Warren, I.R. (1984) Accuracy of short-wave numerical models. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, 110(10):1287–1301.
- [2] Abbot, M.B.; Petersen, H.M.; Skovgaard, O. (1978) On the numerical modeling of short waves in shallow water. *Journal of Hydraulic Research*, 16(3):173–203.
- [3] Agnon, Y.; Madsen, P.A.; Schäffer, H. (1999) A new approach to higher order Boussinesq models. *J. Fluid Mechanics*, 399:319-333.
- [4] Ambrosi, D. (1997) A new finite element scheme for the Boussinesq equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 7(2):193–209.
- [5] Antunes do Carmo, J.S. (1995) *Contribuição para o Estudo dos Processos Morfodinâmicos em Regiões Costeiras e Estuarinas*. Tese de Doutoramento. Universidade de Coimbra, Abril.
- [6] Antunes do Carmo, J.S.; Seabra Santos, F.J. (1996) On breaking waves and wave–current interaction in shallow water: a 2DH finite element model. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 22:429–444.
- [7] Antunes do Carmo, J.S.; Seabra Santos, F.J.; Barthélemy, E. (1993) Surface waves propagation in shallow water: a finite element model. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 16, 447–459.
- [8] Avilez-Valente, P. (2000) *Método de Elementos Finitos para a modelação a 1 e 2 dimensões horizontais da propagação de ondas de gravidade em Engenharia costeira*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra;
- [9] Avilez-Valente P., Seabra-Santos F.J. (2002). A finite element method for the 1-term weakly nonlinear Beji-Nadaoka wave model, in *Ocean Wave Measurement and Analysis: Proc. of the Fourth Int. Symposium, WAVES 2001* (eds. B.L. Edge & J.M. Hemsley), Sep. 2–6, 2001, San Francisco, California, 874–883, ASCE, Virginia. ISBN 0-7844-0604-9.
- [10] Beji, S.; Battjes, J.A. (1993) Experimental investigations of wave propagation over a bar. *Coastal Engineering*, 19:151-162.
- [11] Beji, S.; Battjes, J.A. (1994) Numerical simulation of nonlinear-wave propagation over a bar. *Coastal Engineering*, 23(1-2):1–16.
- [12] Beji, S.; Nadaoka, K. (1996) A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth. *Ocean Engineering*, 23(8):691-704.
- [13] Berkhoff, J.C.W. (1972) Computation of combined refraction diffraction. *Proc. 13th International Conference in Coastal Engineering*, Vancouver, Canada, Vol. 2, pp. 471-490.
- [14] Berzins, M.; Furzeland, R.M. (1985) *A user's manual for SPRINT – a versatile software package for solving systems of algebraic, ordinary and partial*

- differential equations: Part 1 – algebraic and ordinary differential equations*. Technical Report TNER.85.058, Thornton Research Centre, Chester.
- [15] Brown, P.N.; Hindmarsh, A.C.; Petzold, L.R. (1994) Using Krylov methods in the solution of large-scale differential-algebraic systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(6):1467–1488.
- [16] Chen, Q.; Kirby, J. T.; Dalrymple, R. A.; Kennedy, A. B.; Chawla, A. (2000) Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. Part I: 2D. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.* 126(1), 57-62.
- [17] Cuthill, E.; McKee, J. (1969) Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In *Proceedings of the 1969 24th national conference*, pages 157-172, New York, NY, USA,. ACM Press.
- [18] Dingemans, M.W. (1994) *Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements*. Technical Report H-1684.12 Delft Hydraulics, 32 pp.
- [19] Eskilsson, C.; Sherwin, S.J.; Bergdahl, L. (2006) An unstructured spectral/hp element model for enhanced Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering* 53 947–963.
- [20] Fernandes, J. L. M. (1990) Código em FORTRAN do programa DREAMS – Versão 0.0. Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- [21] Fernandes, J. L. M. (2003) Código em FORTRAN do programa LEITOR3_NEW. IST.
- [22] Fernandes, J. L. M. (2005) Código em FORTRAN do programa LAPLACE. Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- [23] Fernandes, J. L. M. (2005) Código em FORTRAN do programa REMESHBOUND. Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- [24] Field, D.A. (1988) Laplacian smoothing and Delaunay triangulations. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 4, pp. 709-712.
- [25] Fortes, C. J.; Pinheiro, L.; Santos, J. A.; Neves, M.G.; Capitão, R. (2006) SOPRO – Pacote integrado de modelos de avaliação dos efeitos das ondas em portos. *Tecnologias da Água*, Edição I, Março, 51-61.
- [26] Fortes, C.J.E.M. (1993) *Modelação Matemática da Refracção e Difracção Combinadas de Ondas Marítimas, Análise pelo Método dos Elementos Finitos*. Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, IST.
- [27] Fortes, C.J.E.M. (2002) *Transformações não lineares de ondas em portos. Análise pelo método dos elementos finitos*. Tese de Doutoramento em Engenharia Mecânica, IST.
- [28] Fortes, C.J.E.M.; Covas, J.M.A.; Fernandes, J.L.M. (1997) Harbour resonance and wave agitation studies in Baleeira’s harbour by using the mathematical model DREAMS. *Proc. 3rd Int. Conference WAVES 97 – Ocean wave Measurement and Analysis*, ASCE, 2:1495-1509.

- [29] Freilich, M.H.; Guza, R.T. (1984) Non-linear effects on shoaling surface gravity waves. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, A311:1-41.
- [30] George, P.L.; Hecht, F.; Saltel, E. (1991) Automatic Mesh Generator with Specified Boundary. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North-Holland, 92:269-288.
- [31] Gil, L.C.; Didier, E.; Fortes, C.J.E.M.; Clément Alain, H. (2005) Simulação da Propagação de Ondas Sobre um Quebra-Mar Submarino. *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Granada, 4 a 7 de Julio.
- [32] Gobbi, M.F.; Kirby, J.T. (1996) A fourth order fully non-linear Boussinesq wave model. *Proc. 25th International Conference on Coastal Engineering*, Orlando, USA, 1, pp. 1116-1129.
- [33] Gobbi, M.F.; Kirby, J.T. (1999) Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model. *Coastal Engineering*, Vol. 37 pp 57-96.
- [34] Grasselli, M.; Perotto, S.; Saleri, F. (1997) *Space-time finite elements for Boussinesq equations*. Technical Report 294/P, Department of Mathematics. Politecnico di Milano.
- [35] Hauguel, A. (1980) A numerical model of storm waves in shallow water. In *17th International Conference on Coastal Engineering*, Sydney, Australia, 746-762.
- [36] Karambas, Th.; Krestenitis, Y.; Koutitas, C. (1990) A numerical solution of Boussinesq equations in the inshore zone. *Hydrosoft*, 3(1):34-37.
- [37] Katopodes, N.D.; Wu, C. (1987) Computation of finite-amplitude dispersive waves. *ASCE Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 113(4):327-346.
- [38] Kennedy, A.B.; Chen, Q.; Kirby, J.T.; Dalrymple, R.A. (2000) Boussinesq modelling of wave transformation, breaking and runup. I: 1D. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 126(1), 99, pp. 39-47.
- [39] Kennedy, A.B.; Kirby, J.T.; Chen, Q.; Dalrymple, R.A. (2000) Boussinesq-type equations with improved nonlinear performance. *Wave Motion* 33 (3):225-243.
- [40] Kennedy, A.B.; Kirby, J.T.; Gobbi, M.F. (2002) Simplified higher-order Boussinesq equations I. Linear simplifications. *Coastal Engineering*, 44:205-229.
- [41] Kirby, J.T.; Wei, G.; Chen, Q. (1998) *FUNWAVE 1.0 Fully nonlinear Boussinesq wave model*. Documentation and user's manual, UD, Newark, Rel.CACR 98 06, September.
- [42] Lee, C.; Cho, Y.-S.; Yum, K. (2001) Internal generation of waves for extended Boussinesq equations. *Coastal Engineering*, 42:155-162.
- [43] Li, Y.S.; Liu, S.-X.; Yu, Y.-X.; Lai, G.-Z. (1999) Numerical modeling of Boussinesq equations by a finite element method. *Coastal Engineering*, 37:97-122.

- [44] Liu, W.-H.g; Sherman, A.H. (1976) Comparative analysis of the Cuthill-McKee and the reverse Cuthill-McKee ordering algorithms for sparse matrices. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2):198-213.
- [45] Lo, S.H. (1985) A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. *Int. Journal Numerical Methods in Engineering*, 21:1403-1426.
- [46] Löhner, R. (1996) Progress in Grid Generation via the Advancing Front Technique. *Engineering with Computers*, 12:186-210.
- [47] Löhner, R.; Parikh, P. (1988) Three-Dimensional Grid Generation by the Advancing Front Method. *Int. Journal Numerical Methods in Fluids*, 8:1135-1149.
- [48] Lynett, P. (2002) *A Multi-Layer Approach to Modeling Generation, Propagation, and Interaction of Water Waves*. PhD Thesis. Cornell University, August.
- [49] Madsen, P.A.; Bingham, H.B.; Liu, H. (2002) A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water. *J. Fluid Mech.* 462:1–30.
- [50] Madsen, P.A.; Fuhrman, D.R.; Wang Benlong (2006) A Boussinesq-type method for fully nonlinear waves interacting with a rapidly varying bathymetry. *Coastal Engineering*, 53:487-504
- [51] Madsen, P.A.; Murray, R.; Sørensen, O.R. (1991) A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Engineering*, 15:371–388.
- [52] Madsen, P.A.; Schäffer, H.A. (1998a) Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves – Derivation and analysis. *Phil. Trans. Roy. Soc., Series A*, London, 356:3123-3184.
- [53] Madsen, P.A.; Schäffer, H.A. (1998b) *A review of Boussinesq-type equations for gravity waves*. Report pp. 1-63.
- [54] Madsen, P.A.; Sørensen, O.R. (1992) A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2: A slowly-varying bathymetry. *Coastal Engineering*, 18:183-204.
- [55] Mil-homens, J. (2006) *Modelação Numérica da Propagação da agitação Marítima com Modelos de Resolução de Fase*. Tese de Mestrado em Hidráulica e Recursos Hídricos. Março, IST.
- [56] Modi, A. (1997) *Unstructured Mesh Generation on Planes and Surfaces using Graded Triangulation* B.Tech Project Report, Department of Aerospace Engineering, IIT Bombay.
- [57] Neves, R. J. J. e Silva A. J. R. (1987) *Modelo de Ondas Não-Linear (caso unidimensional)*. Relatório interno, DEM, Instituto Superior Técnico.
- [58] Neves, R. J. J. e Silva A. J. R. (1988) A non-linear model for surface waves. *Proc. Int. Conf. Computer Modelling in Ocean Engineering*, Veneza, 19-23 Setembro, Eds. B. A. Schrefler & O. C. Zienkiewicz, Balkema, Rotterdam.

- [59] Neves, R. J. J.; Silva, A. R. J. (1991) An extension of the Boussinesq equations to deep water – A case study. *2nd International Conference on Computer Modelling in Ocean Engineering*, Barcelona, Espanha.
- [60] Nwogu, O. (1993) Alternative form of Boussinesq equations for near-shore wave propagation. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 119(6):618-638.
- [61] Ohyama, T.; Kioka, W.; Tada, A. (1995) Applicability of numerical models to nonlinear dispersive waves. *Coastal Engineering*, 24:297–313.
- [62] Peraire, J.; Peiro, J.; Morgan, K. (1987) Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. *J. Comp. Phys.*, 72, 449-466.
- [63] Peregrine, D.H. (1967) Long waves on a beach. *J. Fluid Mechanics* 27, pp. 815-827.
- [64] Perotto, S. (1998) A posteriori error estimates for Boussinesq equations. In *Proceedings of the ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics VI*, pages 451–457.
- [65] Pinheiro, L. V.; J. Fernandes, L. M.; Fortes C. J. (2006) Sobre um Gerador de Malhas de Elementos Finitos com Densidade Local Condicionada à Batimetria para Modelos de Propagação de Ondas em Zonas Portuárias. *I Conferência Nacional de Métodos Numéricos em Mecânica dos Fluidos e Termodinâmica*, Lisboa, 8 e 9 de Junho.
- [66] Pinheiro, L.; Fernandes, J. L.; Fortes, C.J.E.M. (2006) Finite Element Mesh Generator with Local Density Conditioned to Bathymetry for Wave Propagation Models in Coastal Zones. *Proceedings of State of the Art in Numerical Grid Generation II: From Theory to Practice*, Roma, 2 a 6 de Outubro (poster).
- [67] Pinheiro, L.; Fortes, C.J.E.M.; Santos, J.A.; Neves, M.G; Capitão, R.; Coli, A.B. (2005) SOPRO – Sistema Operacional de Previsão da Ondulação em Portos. *7º Simpósio de Hidráulica e Recursos Hídricos dos Países de Língua Oficial Portuguesa*, Évora, 30 de Maio a 2 de Junho.
- [68] Plecha, S.M.N. (2005) *Esquemas de Elementos Finitos para Ondas Dispersivas*. Tese de Mestrado, FEUP Universidade do Porto.
- [69] Reddy, J.N. (1985) *An Introduction to the Finite Element Method*. International Student Edition. McGraw-Hill.
- [70] Santos J. A.; Fortes, C. J. E. M. (2005) Código em FORTRAN do programa CONTORNO_NOVO. LNEC.
- [71] Schäffer, H.A. (2000) Higher-order Boussinesq equations in terms of a generalized velocity variable. *Hydrodynamics IV*, Yokohama, 7-9 Sept. 2000, pp. 485-490.
- [72] Schäffer, H.A.; Sørensen, O.R. (2006) On the internal wave generation in Boussinesq and mild-slope equations. *Coastal Engineering*, 53:319–323.

- [73] Schröter, A.; Mayerle, R.; Zielke, W. (1994) *Optimized dispersion characteristics of the Boussinesq wave equations*. Technical report, Institute of Fluid Mechanics and Computer Applications in Civil Engineering. University of Hannover.
- [74] Shi, F.; Dalrymple, R.A.; Kirby, J.T.; Chen, Q.; Kennedy, A.B. (2001) A fully nonlinear Boussinesq model in generalized curvilinear coordinates. *Coastal Engineering*, 42:337-358.
- [75] Silva, A. R. J. (1991) *Modelação matemática não linear de ondas de superfície e de correntes litorais*. Tese de Doutoramento, IST, Lisboa.
- [76] Ursell, F. (1953) The long-wave paradox in the theory of gravity waves. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 49:685–694.
- [77] Walkley, M.; Berzins, M. (1999) A finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29(2):143–157.
- [78] Walkley, M.; Berzins, M. (2002) A finite element method for the two-dimensional extended Boussinesq equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39(2):865–885.
- [79] Walkley, M.A (1999) *Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-Water Wave Equations*. PhD Thesis, University of Leeds School of Computer Studies.
- [80] Wei, G.; Kirby, J.T. (1995) Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, 121(5):251–261.
- [81] Wei, G.; Kirby, J.T.; Grilli, S.T.; Subramanya, R. (1995) A fully non linear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly non-linear unsteady waves. *J. Fluid Mechanics*, 294:71-92.
- [82] Wei, G.; Kirby, J.T.; Sinha, A. (1999) Generation of waves in Boussinesq models using a source function method. *Coastal Engineering*, 36:271–299.
- [83] Whitham, G.B. (1974) *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience.
- [84] Woo, S.-B.; Liu, P. L.-F. (2001) A Petrov–Galerkin finite element model for one-dimensional fully non-linear and weakly dispersive wave propagation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 37:541–575.
- [85] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. (2000) *The Finite Element Method*. 5th Edition. Volume 3: Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann.
- [86] Zou, Z.L. (2000) A new form of higher order Boussinesq equations. *Ocean Engineering*, 27:557–575.

PÁGINAS WEB:

- [87] NAG[®] - Numerical Algorithms Group. <http://www.nag.co.uk/>
- [88] IMSL[®] - Fortran Numerical Library
<http://www.vni.com/products/imsl/fortran/overview.php>

- [89] NGGW - Numerical Grid Generation Wiktionary
<http://alice.iac.rm.cnr.it:8080/wiki>
- [90] Peter Søndergaard and Jan Vittrup Hansen (1999) *Numerical Computation with Shocks*. <http://www2.imm.dtu.dk/~pch/Projekter/Shock/main/>

ANEXO A

Cálculo dos coeficientes das matrizes elementares **M**, **K** e **C**

Definindo as funções de interpolação,

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{\Delta x} \quad (106)$$

$$\phi_2(x) = \frac{x}{\Delta x} \quad (107)$$

em que Δx é o comprimento do elemento, obtemos a matriz da massa **M**:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \int_0^{\Delta x} \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) \cdot dx \\ &= \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot dx \\ &= \frac{1}{6} \Delta x \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_0^{\Delta x} \phi_1(x) \cdot \phi_1(x) \cdot dx \\ &= \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \cdot dx \\ &= \frac{1}{3} \Delta x \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} M_{22} &= \int_0^{\Delta x} \phi_2(x) \cdot \phi_2(x) \cdot dx \\ &= \int_0^{\Delta x} \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot dx \\ &= \frac{1}{3} \Delta x \end{aligned} \quad (110)$$

$$\mathbf{M} = \Delta x \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (111)$$

Para a matriz de rigidez, **K**, obtemos:

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \int_0^{\Delta x} \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} dx \\
&= \int_0^{\Delta x} \frac{-1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} dx \\
&= -\frac{1}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned}
K_i &= \int_0^{\Delta x} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \cdot dx \\
&= \int_0^{\Delta x} \frac{-1}{\Delta x} \cdot \frac{-1}{\Delta x} \cdot dx \\
&= \frac{1}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= \int_0^{\Delta x} \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} dx \\
&= \int_0^{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} dx \\
&= \frac{1}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{114}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{115}$$

E para a matriz de convecção, \mathbf{C} , obtemos:

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \int_0^{\Delta x} \phi_1(x) \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} dx \\
&= \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \frac{1}{\Delta x} dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{116}$$

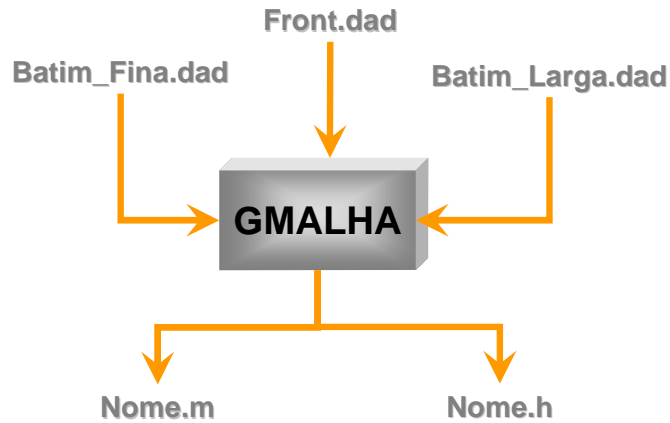
$$\begin{aligned}
C_{ii} &= \int_0^{\Delta x} \phi_i(x) \cdot \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \cdot dx \\
&= \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) \cdot \frac{-1}{\Delta x} \cdot dx \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= \int_0^{\Delta x} \phi_2(x) \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} dx \\ &= \int_0^{\Delta x} \frac{x}{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{118}$$

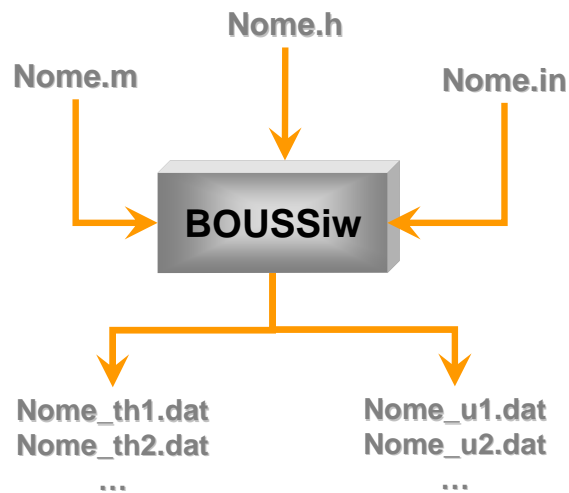
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{119}$$

ANEXO B

Estrutura do programa GMALHA



Estrutura do programa BOUSSiw



Estrutura dos ficheiros: *Batim_Fina.dad*, *Batim_Larga.dad* e *Front.dad*

Os ficheiros de entrada do GMALHA são três:

- *Batim_Fina.dad* – Batimetria da zona com grau de refinamento alto;
- *Batim_Larga.dad* – Batimetria da zona com grau de refinamento baixo;

- *Front.dad* – Coordenadas dos nós da fronteira inicial.

Ficheiro *Batim_Fina.dad*

```

Batimetria fina ordenada SinesAducao
10.0          15640          ! Δx = Δy      n°pontos
!i      x      y      z
1      0.000      0.000      14.200
2      0.000      10.000     14.061
3      0.000      20.000     13.872
4      0.000      30.000     13.755
...      ...      ...      ...

```

Ficheiro *Batim_Larga.dad*

```

Batimetria larga ordenada SinesAducao
50.0          1764          ! Δx = Δy      n°pontos
!i      x      y      z
1      0.000      0.000      14.200
2      0.000      50.000     13.667
3      0.000      100.000    12.918
4      0.000      150.000    12.704
...      ...      ...      ...

```

Ficheiro *Front.dad*

```

173          ! n°pontos
0.0000      628.0000    !x      y
0.0000      610.9420
0.0000      593.8840
...          ...

```

Estrutura dos ficheiros: *Sines.in*, *Sines.m* e *Sines.h*

Para ilustrar a estrutura dos ficheiros de dados necessários ao modelo BOUSSiw apresentam-se os do caso da bacia de adução de Sines. Os ficheiros de entrada do BOUSSiw são três:

- *Sines.in* – Parâmetros relacionados com as ondas incidentes, as zonas absorventes, a zona de geração e outputs do modelo;
- *Sines.m* – Informações sobre a malha de elementos finitos e condições de fronteira;

- Sines.h – Informações sobre a batimetria.

Ficheiro *Sines.in*

```

|<-      Identifier      ->||<-      Value      ->|
----WAVE PARAMETERS----
EXTENDED DISPERSION
Nwogu parameter          -0.531d0
INFLOW WAVE DATA
Type                     2
Amplitude                0.1d0
Period                   10.00d0
Wavelength               43.70d0
Inflow depth             4.00d0
Theta_in                 90.0d0
BATHYMETRY
Option                   3
VISCOUS DAMPING
Time coefficient          5.0d-3
Time exponent            1.0d0
Sponge layer coefficient 2.0d0
Sponge layer exponent    2.0d0
Diffusion parameter      5.6e-6d0
Source location (Y)      200.0d0
Sponge layer relative width 1.50d0
----TIME INTEGRATION----
INITIAL CONDITIONS
Initial conditions flag   0
TIME INTERVAL
Initial time              0.0d0
Final time                200.0d0
INITIAL TIME STEP
Initial time step flag   1
Initial time step        1.0d-2
ERROR CONTROL
Relative error tolerance 1.0d-6
Absolute error tolerance 1.0d-6
TIME HISTORY OUTPUT
Number of points          10
Mesh node 1               10000
Mesh node 2               20000
Mesh node 3               30000
Mesh node...              ...
TIMES FOR FULL SOLUTION OUTPUT
Number of intermediate times 40
Time 1                    01.0d0
Time 2                    05.5d0
Time 3                    10.0d0
Time...                   ...
TIMES FOR WAVE ENVELOPE
Time start                160.0d0
Time end                  195.0d0

```

Ficheiro *Sines.m*

```
Ne          np          nb          bw
143972      72689      1404      366
iel
1      1873  1988  1987          !iel  ip1  ip2  ip3
2      2110  2113  1998
3      1257  1352  1353
...      ...      ...
coord
1      415.408000000000  497.961500000000          !ip  x  y
2      413.412037000000  497.839093000000
3      426.897500000000  471.291250000000
...      ...      ...
bside
1      10      66805  3          !ip1  ip2  iel  cond.  fronteira
10     36      66806  3
36     75      66801  3
...      ...      ...
```

Ficheiro *Sines.h*

```
72689          !n°  pontos
1      415.4080      497.9620      4.768000          !ip  x  y  z
2      413.4120      497.8390      4.832000
3      426.8970      471.2910      4.019000
...      ...      ...      ...
```

ANEXO C

Resultados obtidos com o modelo BOUSSiw_1D para o caso da propagação de ondas regulares sobre um fundo de profundidade constante

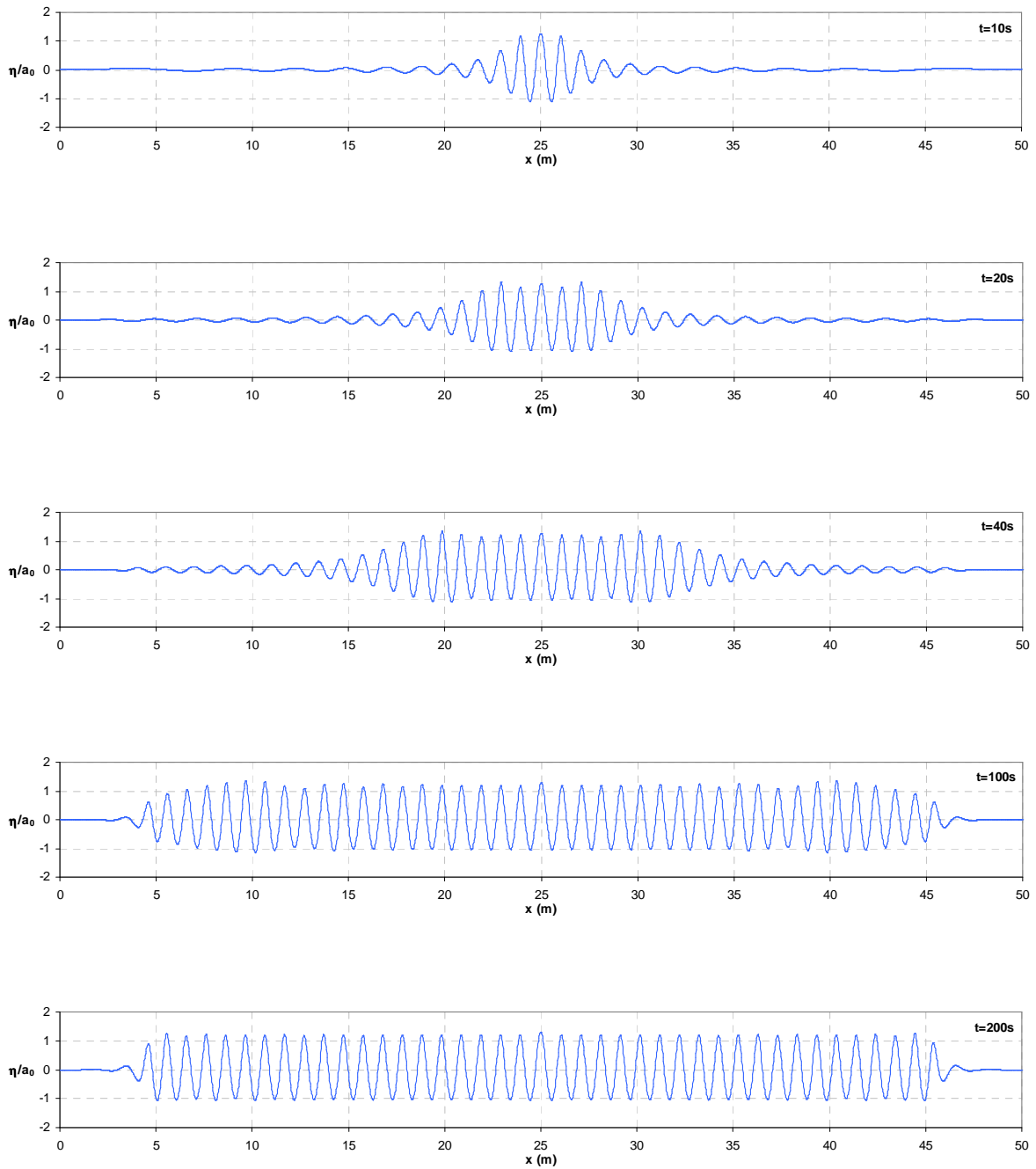


Figura 63 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 0.8$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s.

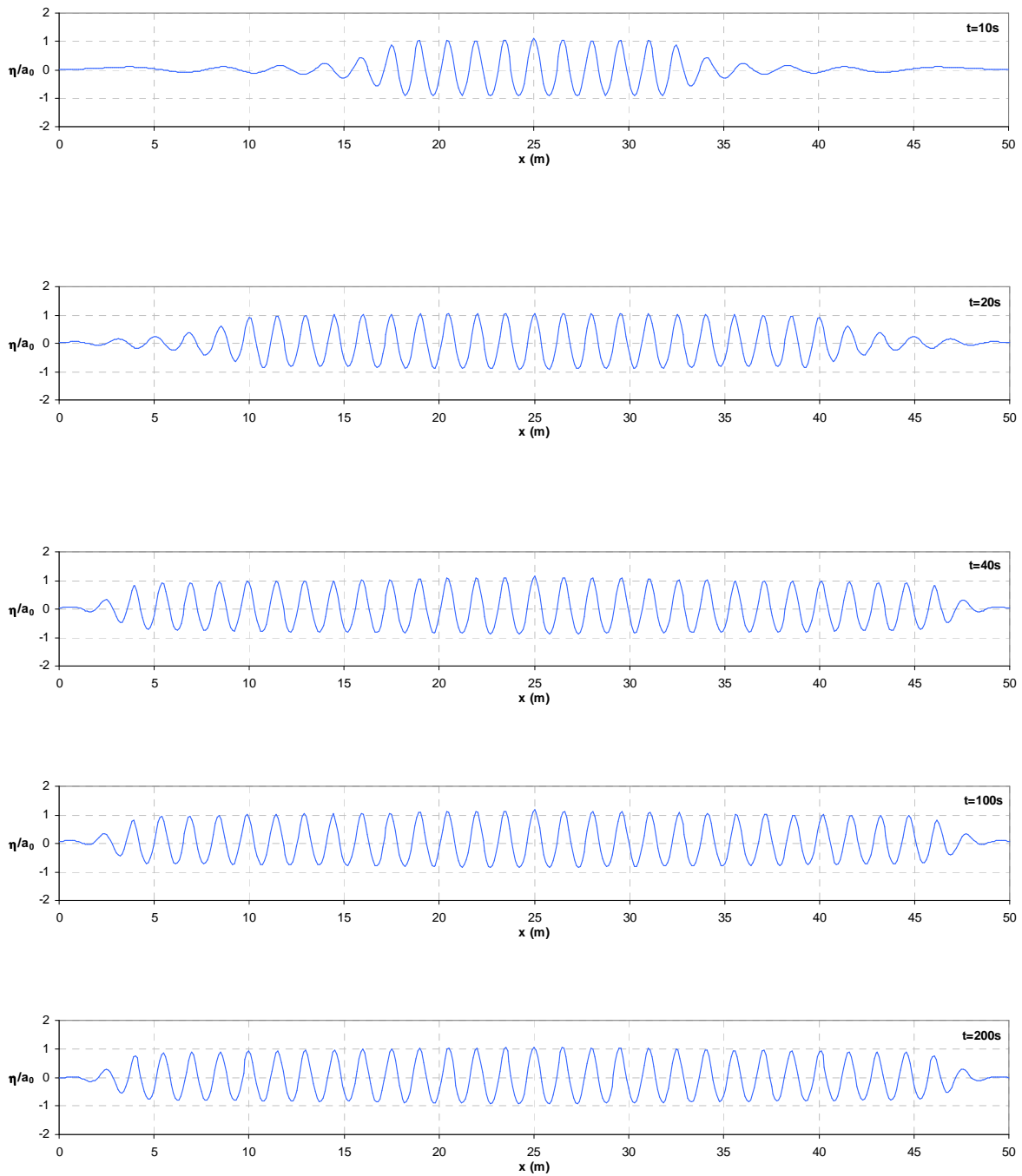


Figura 64 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 1.0$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s.

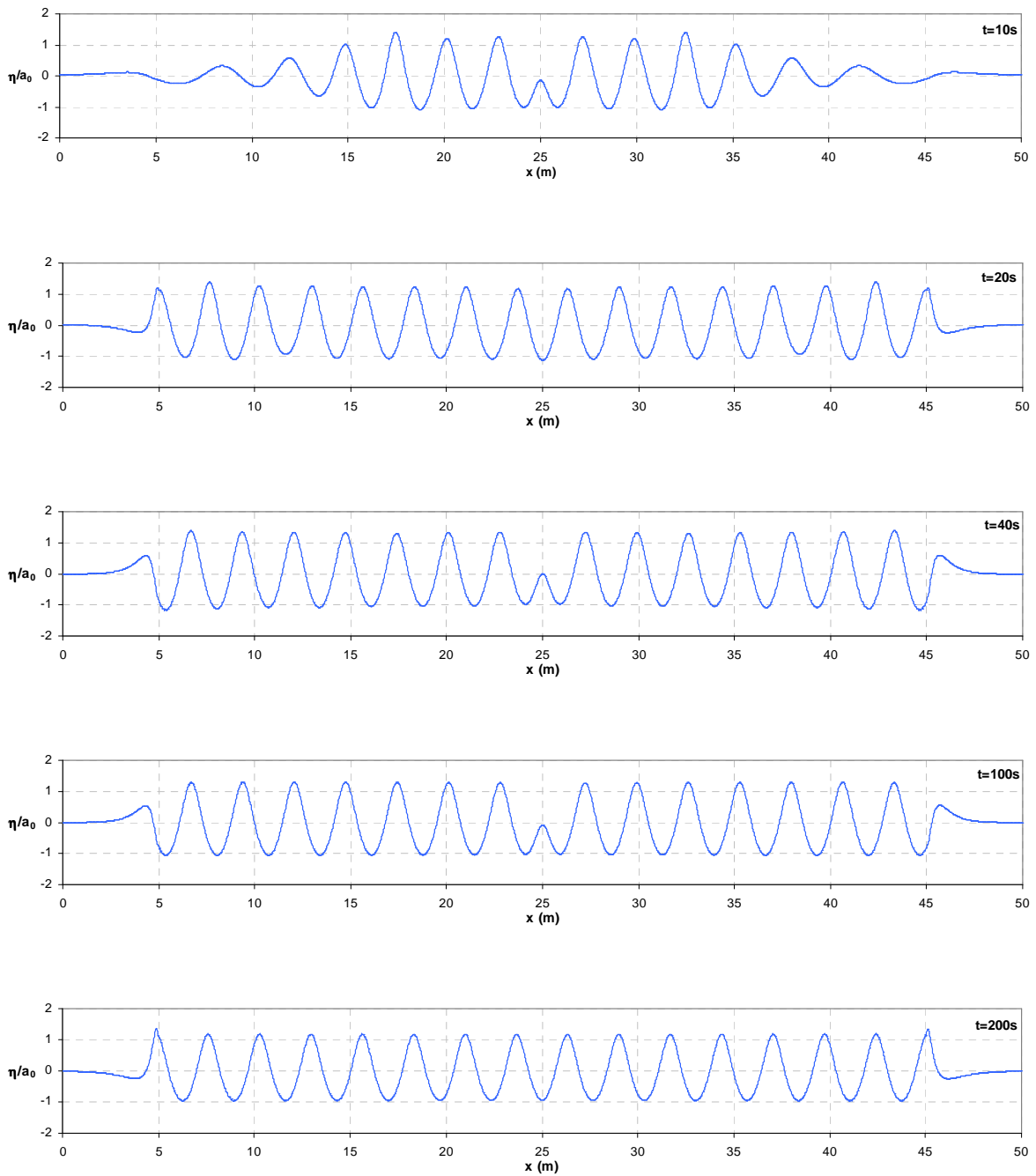


Figura 65 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 1.5$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s.

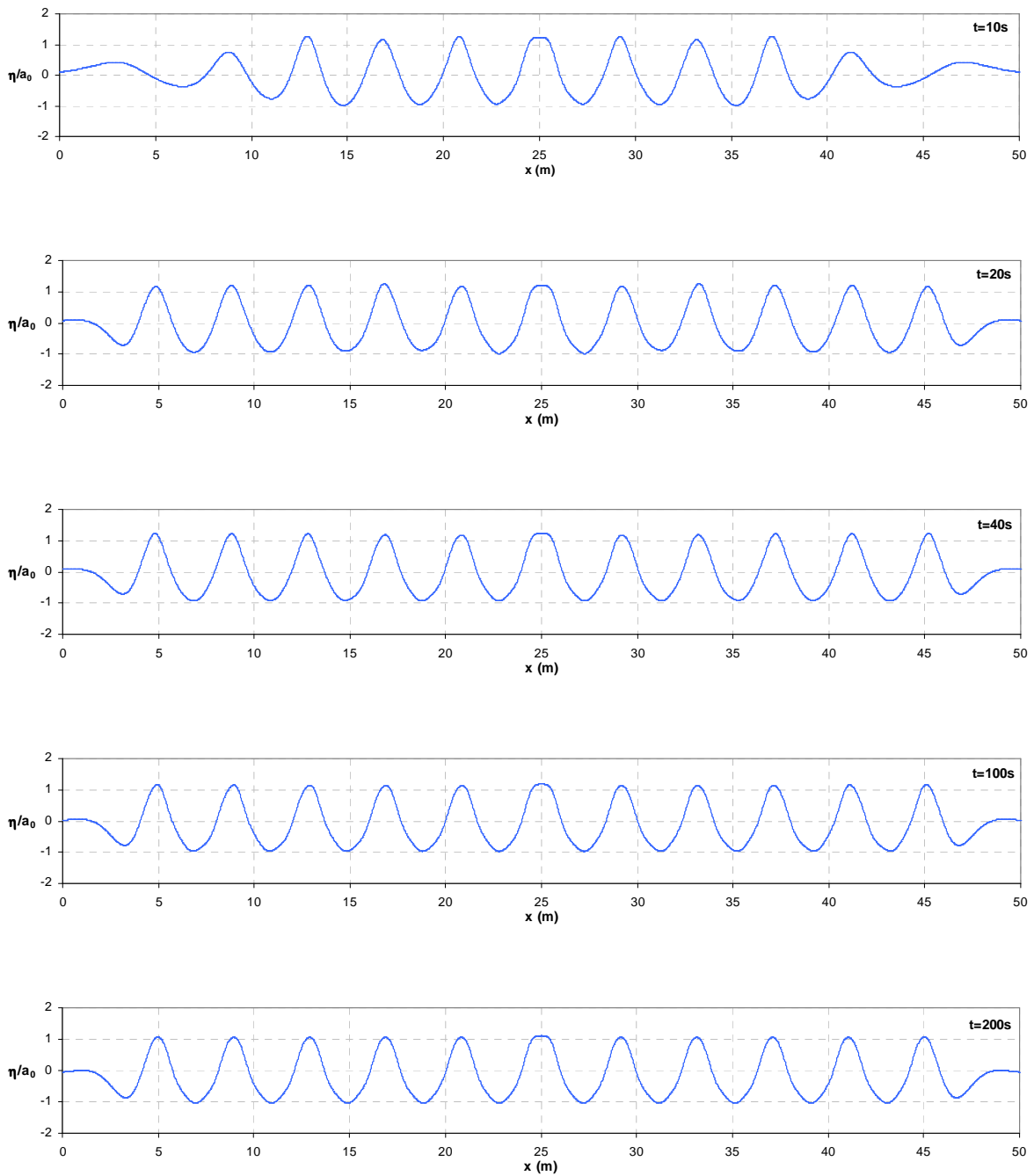


Figura 66 – Elevação da superfície livre ao longo do domínio para um período de $T = 2.0$ s nos instantes $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 40$ s, $t = 100$ s e $t = 200$ s.

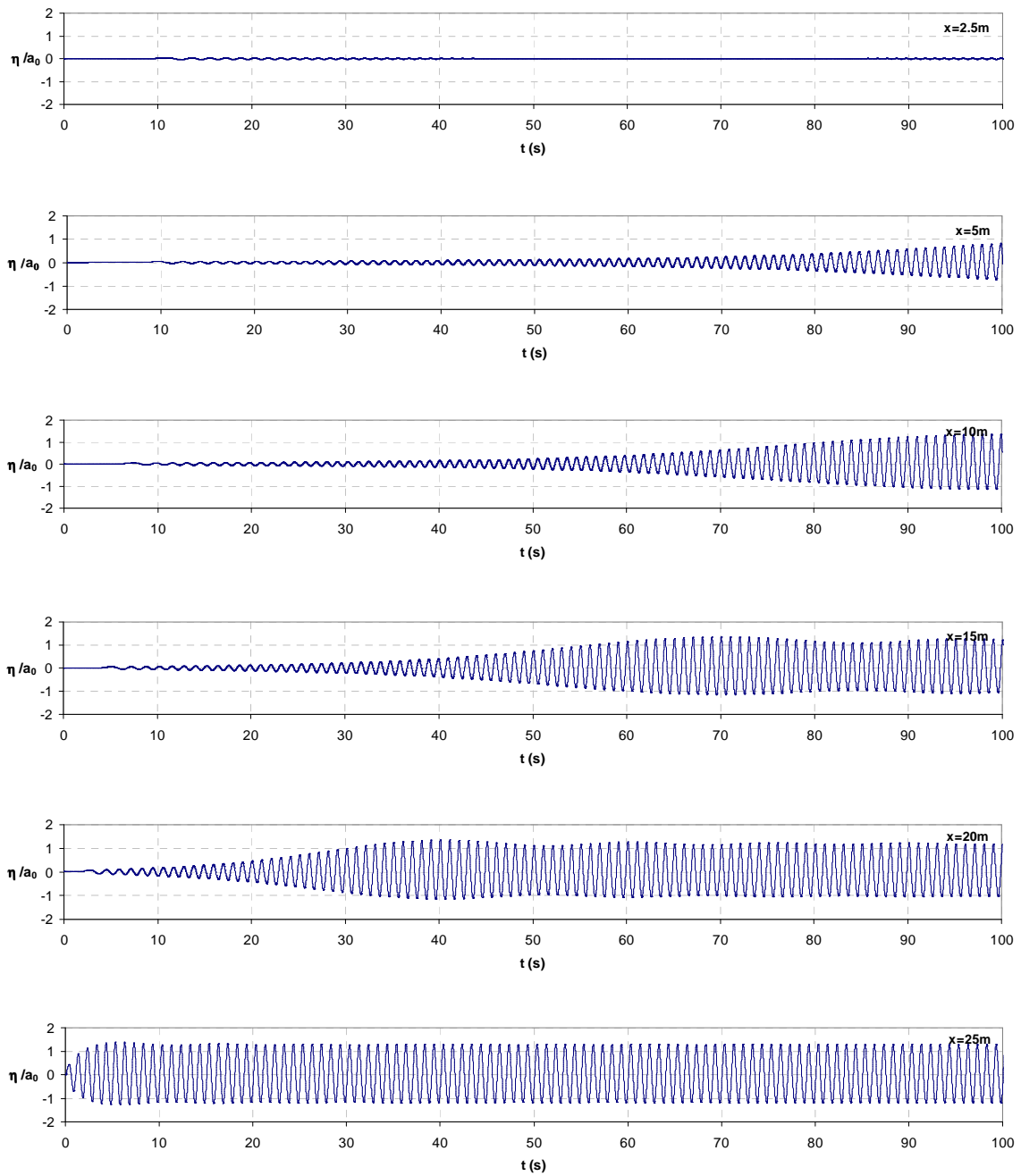


Figura 67 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 0.8$ s.

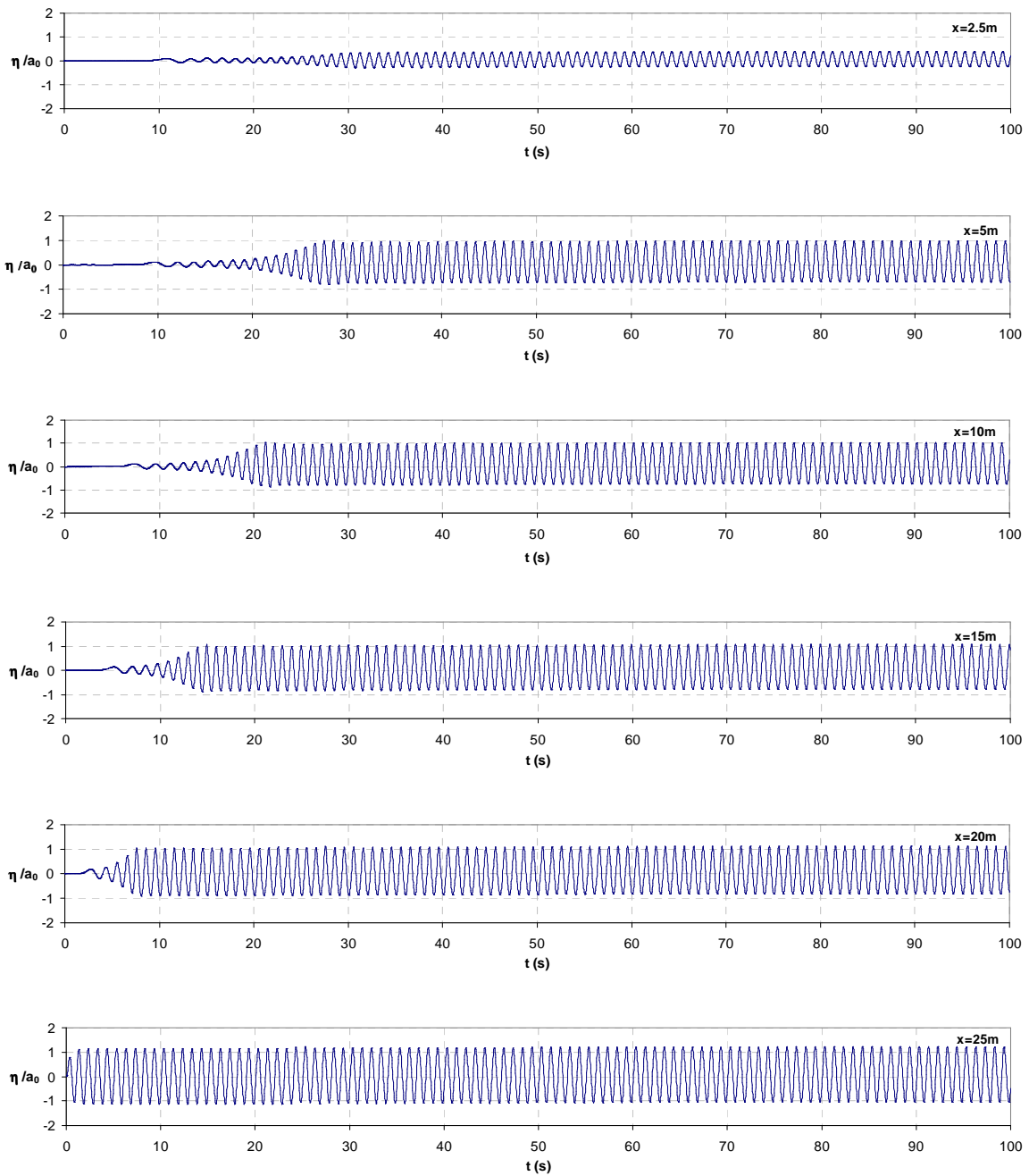


Figura 68 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 1.0$ s.

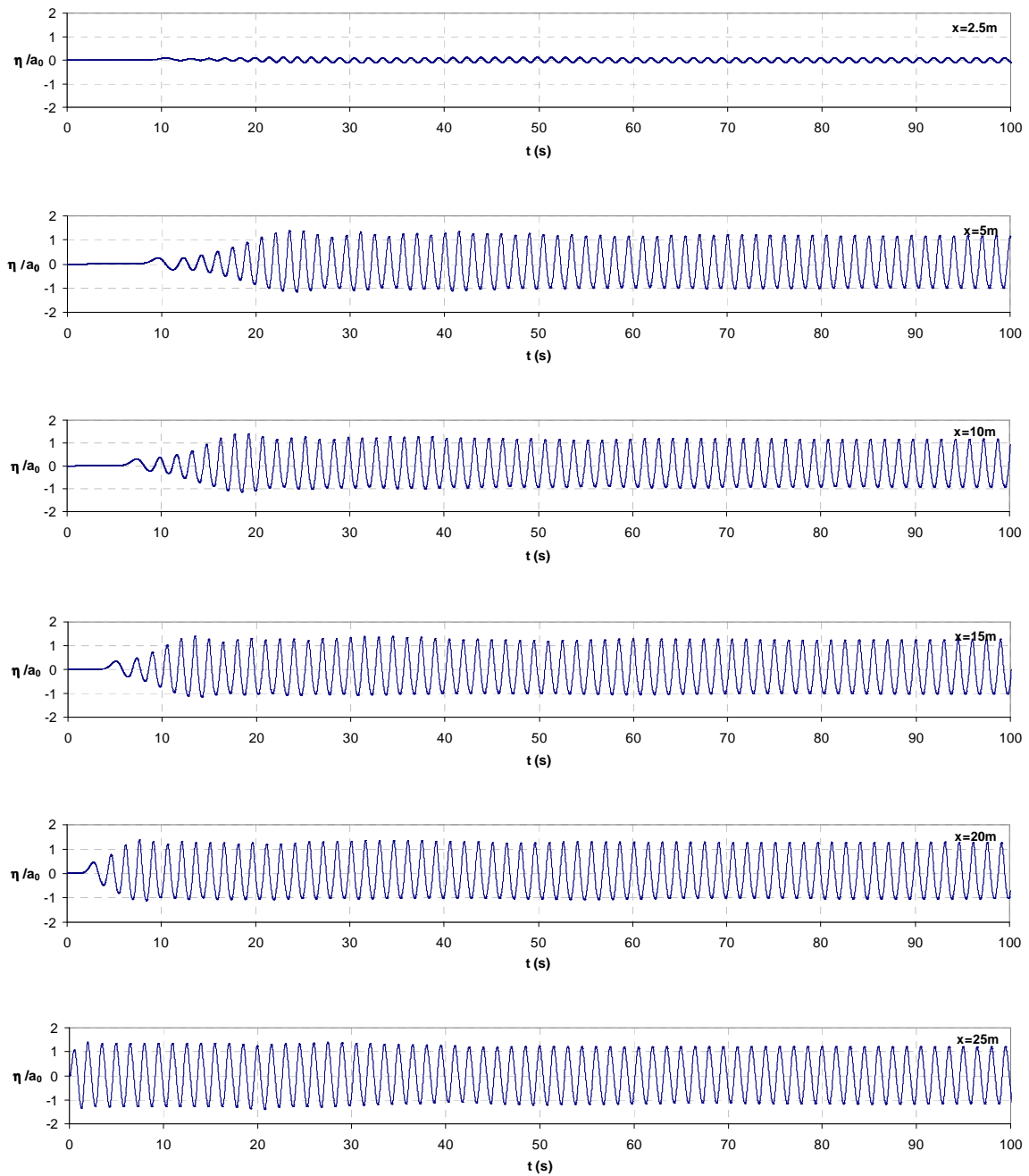


Figura 69 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 1.5$ s.

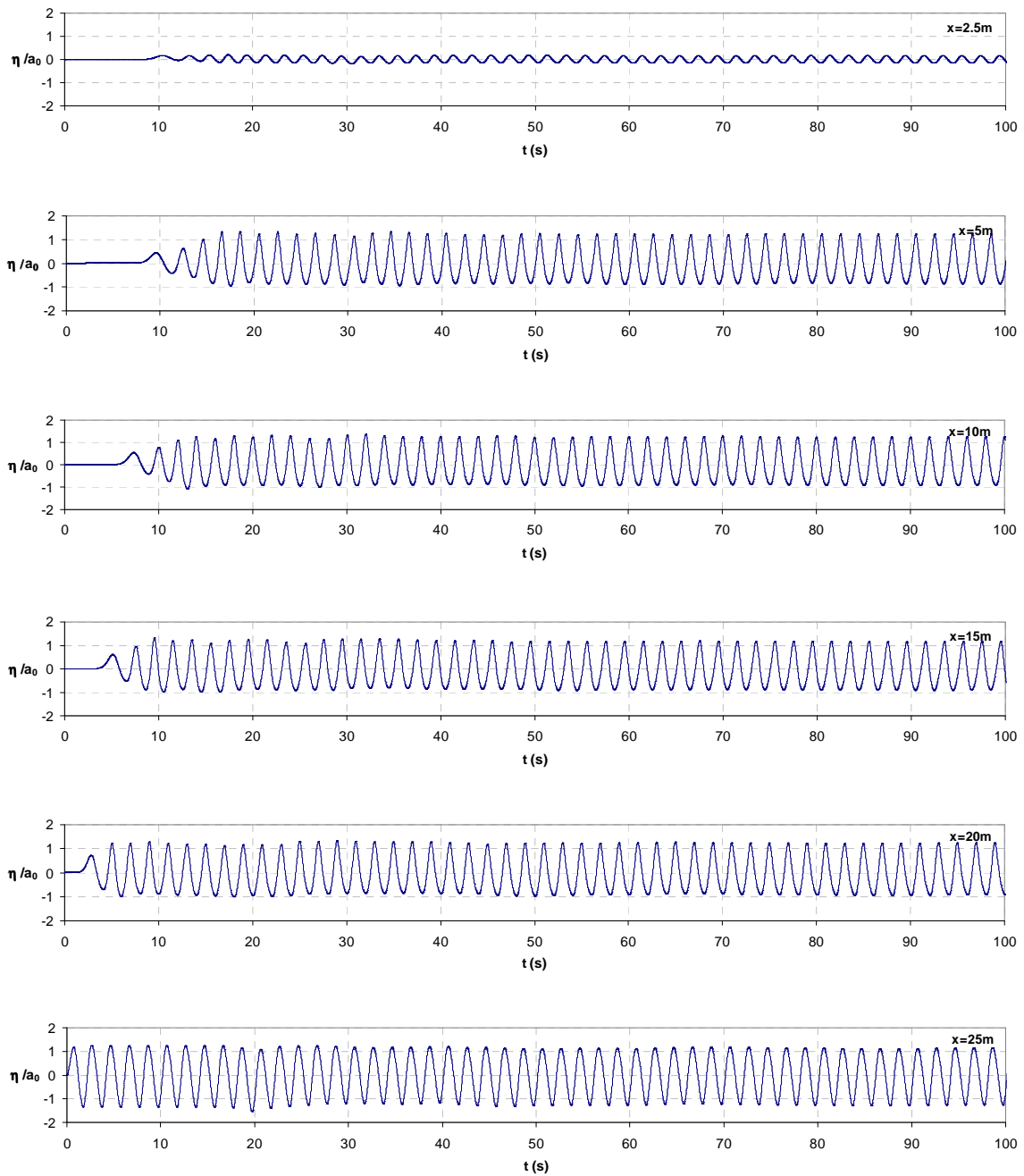


Figura 70 – Elevação da superfície livre ao longo do tempo em seis pontos do canal para um período de $T = 2.0$ s.

ANEXO D

Modelo de propagação da agitação marítimas: DREAMS

DREAMS é um modelo matemático de elementos finitos para o cálculo da propagação e deformação de ondas regulares em zonas costeiras (Fernandes [20] e Fortes [26] e [27]). O modelo pode ser aplicado no estudo, quer da penetração da agitação marítima de período curto num porto, quer da ressonância de uma bacia portuária excitada por ondas de longo período nela incidentes. É baseado na equação elíptica de declive suave de Bekhoff [13], que descreve os efeitos combinados da refração e difracção de ondas monocromáticas propagando-se em fundos de inclinação suave como os que ocorrem em portos, baías e zonas costeiras. O método numérico utilizado para a resolução da equação de declive suave é o Método dos Elementos Finitos (MEF). O modelo não tem em conta os efeitos da rebentação das ondas, da presença de correntes, nem de eventuais galgamentos das obras de abrigo.

As condições de fronteira podem ser de 3 tipos: condições de radiação, que permitem a saída de perturbações geradas no domínio no sentido de propagação para o infinito; condições de geração e radiação combinadas, adequadas para fronteiras abertas, e condições de reflexão (total ou parcial), referentes aos contornos sólidos da zona em estudo (praias, falésias, molhes, etc.).

Os dados a fornecer ao modelo DREAMS são: as características da agitação incidente (período e direcção da onda); os coeficientes de reflexão em cada troço da fronteira do domínio de cálculo e as características da malha de elementos finitos com que foi discretizado o domínio em estudo.

O modelo calcula índices de agitação H/H_0 , relação entre a altura de onda no ponto do domínio de cálculo, H , e a altura de onda à entrada do domínio de cálculo, H_0 , ou coeficientes de amplificação (em estudos de ressonância portuária) e direcções de propagação da onda. O campo de velocidades horizontais na superfície livre e as cristas das ondas (linhas de igual fase) constituem resultados opcionais.

A validação deste modelo matemático foi feita com casos de teste clássicos da bibliografia, tais como o fundo plano inclinado, o baixio elíptico, os molhes semi-infinitos e a bacia rectangular de Mei e com casos de teste reais. O modelo foi também validado com base nos estudos de ressonância e agitação nos portos de Saint Quay-Portrieux e no porto da Baleeira (Fortes *et al.* [28]). No âmbito do último estudo os

resultados deste modelo foram comparados com resultados de outros modelos matemáticos, e/ou de modelos físicos.

Como limitações do modelo DREAMS, salientam-se:

- O modelo não tem em conta os efeitos da difusão de energia por rebentação e atrito de fundo, os efeitos das correntes na propagação das ondas ou os galgamentos sobre estruturas;
- O modelo é linear, pelo que não tem em conta efeitos não-lineares, tais como a interacção de ondas e correntes, a interacção de ondas devido à topografia do fundo, a transferência de energia entre componentes de onda, a geração de componentes de baixa frequência induzidas por grupos de ondas curtas e o efeito da dispersão por amplitude da onda (o efeito da amplitude da onda na celeridade);
- A aplicação do modelo está condicionada a fundos de declive suave, até 1:3.

ANEXO E

Modelo de propagação da agitação marítima: FUNWAVE

O FUNWAVE (Kirby *et al.* [41] e Chen *et al.* [16]) é um modelo de propagação de ondas baseado nas equações de Boussinesq estendidas, derivadas por Wei e Kirby [80]. A aproximação de Wei, que inclui termos adicionais às equações de Boussinesq desenvolvidas por Peregrine [63], estende a equação original até águas de profundidade intermédia e permite a simulação da propagação de ondas em situações de fortes interações não-lineares. A inclusão da não linearidade total contribui também para a precisão da dispersão por efeito *Döppler*, no caso da presença de correntes. Estas equações descrevem a evolução de ondas que não rebentam, sobre um fundo suave e impermeável.

No modelo FUNWAVE foram acrescentados, às equações de Wei, termos que representam: difusão de energia devido à rebentação e atrito de fundo, geração de ondas, fronteiras absorventes e espraiamento, com vista a estender o domínio de aplicabilidade do modelo.

Na geração das ondas no interior do domínio é utilizada uma função fonte de energia (Wei *et al.* [82]). Esta fonte é colocada em determinada posição do domínio de cálculo e, a partir da mesma, são geradas ondas que se propagam em ambas as direcções. Esta metodologia corresponde, fisicamente, à colocação de um batedor de ondas a meio de um canal, gerando ondas nas duas direcções opostas. Por detrás da fonte, a energia é absorvida por uma fronteira absorvente de modo a serem eliminadas essas ondas. Para a frente da fonte, a onda propaga-se ao longo do domínio até à fronteira mais distante a qual é também absorvente. Com esta metodologia é possível gerar ondas regulares e irregulares no interior do domínio. As características do espectro de agitação irregular são as de um espectro TMA caracterizado por frequências de pico e de corte inferior e superior.

Na simulação da hidrodinâmica da zona de rebentação, a dissipação de energia devido à rebentação é tratada através da inclusão de um termo de viscosidade turbulenta nas equações de conservação da quantidade de movimento (Kennedy *et al.* [38]). O espraiamento (*runup*) na praia é simulado considerando um fundo poroso, que permite que o nível da superfície livre esteja abaixo da elevação da praia. A formulação da rebentação e do espraiamento encontra-se pormenorizadamente descrita em Kennedy *et al.* [38] e Chen *et al.* [16].

Este modelo permite reproduzir a maioria dos fenómenos intervenientes na transformação da onda em fundos de profundidade variável e na presença de correntes: dispersão de frequência, dispersão de amplitude, empolamento (linear e não linear), difracção, refracção pelo fundo e devida às correntes, geração de harmónicas e difusão de energia por rebentação da onda.

O esquema numérico de diferenças finitas utilizado para a discretização temporal das equações é o de 4ª ordem de Adams-Bashforth-Moulton que utiliza um passo de previsão de 3ª ordem Adams-Bashforth e 4ª ordem Adams-Moulton para correcção. As derivadas espaciais de 1ª ordem são discretizadas por diferenças finitas, utilizando uma fórmula de 5 pontos, com uma precisão de 4ª ordem. As derivadas espaciais e temporais de ordem superior são efectuados com uma precisão de 2ª ordem.

Devido às interacções não lineares no modelo, são geradas harmónicas de ordem superior à medida que a onda se propaga no domínio. Para eliminar as harmónicas de comprimento de onda muito curto, que podem provocar a não convergência do modelo (*blow-up*), é aplicado um filtro numérico com um intervalo de passos temporais definido pelo utilizador. Este filtro é basicamente uma média ponderada de 9 pontos.

O modelo FUNWAVE requer como dados de entrada, as características da agitação incidente (período e direcção da onda e nível de maré) e as características da malha de diferenças finitas com que foi discretizado o domínio em estudo e da fronteira desse domínio.

Este modelo foi desenvolvido para aplicações a uma e duas dimensões (em planta), permitindo obter resultados da elevação da superfície livre e da velocidade horizontal (representativa) em cada ponto do domínio de aplicação.

