

FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO COMPORTAMENTO DE VIGAS DE AÇO EM REGIME ELASTOPLÁSTICO SUJEITAS A FLEXÃO SIMPLES

António Manuel Baptista*

* Laboratório Nacional de Engenharia Civil
Departamento de Estruturas
Av. do Brasil, 101
1700-066 Lisboa
e-mail: ambaptista@lnec.pt, web <http://www-int.lnec.pt/>

Palavras-chave: Estruturas de aço, Modelo analítico, Análise elasto-plástica, Vigas hiperestáticas, Flexão simples, Cálculo de deslocamentos, Cálculo da rigidez.

Resumo. *O presente trabalho apresenta dois modelos analíticos, para o cálculo de vigas encastradas numa extremidade e simplesmente apoiadas na outra, submetida a um momento externo, e para vigas encastradas nas duas extremidades, com possibilidade de deslocamentos transversais numa delas, submetida a uma força concentrada. As expressões apresentadas permitem determinar os deslocamentos de qualquer secção transversal e estabelecer as relações de rigidez da viga em flexão simples, para qualquer nível de carga, em regime elástico ou elasto-plástico. Além disso, possibilitam o controlo dos estados limites de deformação, associados a qualquer deslocamento da viga, e detectar os estados limites últimos associados à capacidade de deformação do material.*

1. INTRODUÇÃO

A análise do comportamento de vigas em regime elástico encontra-se actualmente bastante simplificada, graças às expressões analíticas desenvolvidas no âmbito da Teoria da Elasticidade, que permitem efectuar um cálculo expedito dos esforços, da rigidez e dos deslocamentos de qualquer secção transversal da viga em estudo. No entanto, é actualmente reconhecido que, no caso de vigas de aço, algumas das secções transversais podem ultrapassar o estado limite elástico, desde que a sua segurança não seja condicionada por fenómenos de instabilidade. A aceitação do funcionamento destes elementos estruturais em regime elastoplástico, em determinadas condições particulares, permite justificar uma prática de dimensionamento menos conservativa e, portanto, mais económica.

No entanto, uma das dificuldades que resultam desta opção reside no facto de as expressões analíticas existentes, fornecidas pela Teoria da Elasticidade, não serem apropriadas para o cálculo elastoplástico destes elementos, uma vez que as relações constitutivas da viga deixam de ser lineares.

Uma solução para este problema consiste na utilização de métodos de cálculo numéricos. Porém, são ainda raros os programas de cálculo elastoplástico de estruturas, à disposição da generalidade dos projectistas, que permitem considerar os efeitos da evolução progressiva da plastificação, ao longo das secções transversais e do comprimento da viga, sobre a perda gradual da sua rigidez e, conseqüentemente, sobre o cálculo dos respectivos deslocamentos. Além disso, a utilização destes programas é habitualmente demorada, devido ao tempo requerido pela preparação de dados e tratamento de resultados.

O presente trabalho apresenta um conjunto de expressões analíticas para o cálculo de vigas de aço hiperestáticas, sujeitas à acção de forças ou momentos concentrados numa das extremidades. Estas expressões permitem determinar os deslocamentos, flechas e rotações, de qualquer secção transversal e, portanto, estabelecer as relações de rigidez da viga em flexão simples, para qualquer nível de carga, em regime elástico ou elastoplástico.

O conhecimento destas expressões pode revelar-se bastante útil na realização de um cálculo expedito do comportamento da viga em regime elastoplástico, através do recurso a uma simples folha de cálculo.

As expressões referidas foram obtidas através da integração de outras expressões analíticas, desenvolvidas pelo autor, que estabelecem a relação entre os esforços e as deformações globais das secções transversais, em regime elástico e elastoplástico, e permitem determinar a evolução dos limites das zonas plastificadas em função da intensidade da carga aplicada. Estas expressões dependem da geometria das secções transversais; no presente trabalho é abordado o caso particular de vigas de secção transversal rectangular.

Embora este estudo apresente um interesse essencialmente académico, em termos da sua aplicação ao cálculo das estruturas metálicas correntes, o processo de dedução das formulações analíticas apresentadas constitui uma base para a compreensão de modelos analíticos relativos a vigas constituídas por secções transversais de forma mais complexa, tais como as secções em I ou as secções tubulares, por exemplo. Nas referências [6, 7, 8, 9] são apresentados outros exemplos de modelos analíticos, relativos ao comportamento elastoplástico de vigas isostáticas com secções transversais destes tipos.

2. VARIÁVEIS DO PROBLEMA

O modelo analítico exposto no presente trabalho é aplicável a vigas de aço constituídas por elementos lineares, cujo comportamento depende essencialmente das extensões normais às secções transversais, podendo-se desprezar a influência das restantes componentes do tensor de extensões, nomeadamente no que se refere às deformações resultantes de solicitações de corte ou de torção. As secções transversais das vigas são solicitadas em flexão simples, pelo que o seu único esforço interno relevante é o momento flector M . As variáveis cinemáticas do problema são as rotações θ e as flechas v das secções transversais.

As vigas encontram-se isentas de quaisquer fenómenos de instabilidade que possam limitar a sua capacidade de deformação em regime elástico ou elastoplástico.

Supõe-se que o comportamento do aço é elastoplástico perfeito (sem endurecimento), e simétrico em tracção e em compressão. A extensão de cedência ε_y estabelece a fronteira entre o comportamento elástico linear, caracterizado pelo módulo de elasticidade E , e o comportamento plástico perfeito, caracterizado por um módulo de elasticidade tangente nulo, $E_t=0$. A extensão máxima ε_u representa o limite máximo de capacidade de deformação do aço, após o qual ocorre a sua rotura.

As expressões analíticas para o cálculo da viga são escritas em função de variáveis reduzidas (adimensionais), obtidas a partir da divisão das variáveis de base do problema por factores de escala adequados [1, 2, 3, 4, 5].

O factor de escala seleccionado para o momento flector M é o momento elástico M_y , correspondente ao estado limite elástico da secção em flexão simples, quando é atingida a extensão de cedência ε_y na fibra da secção mais afastada do seu centro de gravidade, de coordenada z_M . O momento flector reduzido é definido através da expressão (1):

$$m = M/M_y = M/EI\chi_y \quad (1)$$

Nesta expressão, a variável I indica o momento de inércia da secção em relação ao eixo de flexão (eixo yy), e $\chi_y = \varepsilon_y/z_M$ representa a curvatura da secção no correspondente estado limite elástico. A curvatura reduzida da secção, μ , é definida através da expressão (2):

$$\mu = \chi/\chi_y \quad (2)$$

Em regime elástico tem-se $m \leq 1$ e $\mu \leq 1$, e em regime plástico $m > 1$ e $\mu > 1$. O estado limite elástico corresponde à situação em que $m=1$ e $\mu=1$. Em regime elastoplástico, as fronteiras entre a zona elástica da secção transversal e as zonas plastificadas, em tracção ou em compressão, são dadas pelas coordenadas reduzidas $\tau = 1/\mu$ e $\tau = -1/\mu$, em que $\tau = z/z_M$ representa o valor reduzido da coordenada, segundo o eixo zz normal ao eixo de flexão yy , de uma fibra qualquer da secção.

3. VIGA SUBMETIDA A MOMENTO CONCENTRADO NUMA EXTREMIDADE

3.1. Descrição geral do problema

O primeiro modelo analítico apresentado neste trabalho é aplicável a vigas encastradas numa extremidade e simplesmente apoiadas na outra extremidade, onde são submetidas a um momento externo concentrado, M_a . Na fig. 1 são indicadas as principais variáveis do problema, na sua forma dimensional, bem como a orientação dos eixos dos sistemas de coordenadas x e z , e a convenção de sinais positivos das rotações θ e das flechas v das secções transversais da viga. Na fig. 2 são indicadas as mesmas variáveis, na sua forma reduzida.

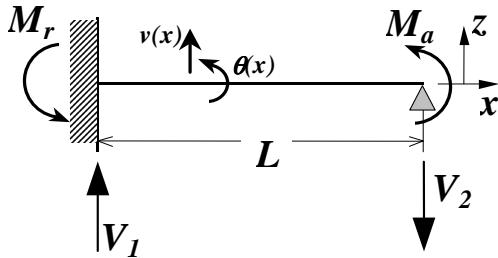


Figura 1. Variáveis dimensionais

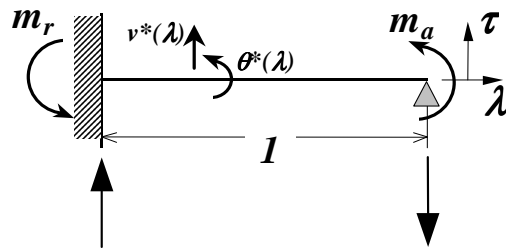


Figura 2. Variáveis reduzidas

A distribuição dos momentos flectores nestas vigas é representada pela equação (3), em que o valor das reacções verticais, $V_1=V_2=(M_r + M_a)/L$, pode ser obtido através das condições de equilíbrio estático da viga. Se o momento M_r for indicado em função do momento actuante M_a , através da relação $M_r = \alpha M_a$, a expressão (3) toma a forma indicada na equação (4). Por sua vez, esta expressão pode ser escrita numa forma reduzida, através da equação (5), em que $\lambda = x/L$ é a coordenada reduzida de cada secção transversal e $m_a = M_a/M_y$ representa o valor reduzido do momento actuante M_a .

$$M(x) = -M_r + V_1 x \quad (3)$$

$$M(x) = -\alpha M_a + (\alpha M_a + M_a) x/L \quad (4)$$

$$m(\lambda) = (-\alpha + (1 + \alpha) \lambda) m_a \quad (5)$$

3.2. Distribuições das flechas e rotações em regime elástico

O momento máximo na viga ocorre na secção $\lambda=1$, onde $m(\lambda) = m_a$. Deste modo, a viga encontra-se em regime elástico quando $m(\lambda=1) \leq 1$ ou seja, quando $m_a \leq m_{a,e}$, em que $m_{a,e}=1$ (5).

Neste caso, todas as secções transversais se encontram em regime elástico, pelo que a respectiva relação momento-curvatura, expressa em variáveis reduzidas, é dada pela equação (6) [1, 2, 3, 4, 5]:

$$m(\lambda) = \mu(\lambda) \quad (6)$$

As flechas e rotações das secções transversais podem ser determinadas com base numa hipótese clássica dos modelos de cálculo de primeira ordem, segundo a qual a rotação θ e a curvatura χ de uma secção de coordenada x podem ser obtidas através da primeira (7) e da segunda (8) derivadas da distribuição dos deslocamentos verticais v das secções transversais da viga:

$$\theta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad (7)$$

$$\chi(x) = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (8)$$

A distribuição das rotações, θ_{el} (10), pode assim ser obtida através da integração da eq. (8):

$$\theta_{el}(\lambda) = \chi_y \int \mu(\lambda) \frac{dx}{d\lambda} d\lambda + C_1 \quad (9)$$

$$\theta_{el}(\lambda) = \chi_y L m_a (-\alpha + (1+\alpha)\lambda/2) \lambda + C_1 \quad (10)$$

Por sua vez, a distribuição dos deslocamentos verticais das secções, v_{el} (12), pode ser obtida através da integração da equação (7), formulada através da expressão (11):

$$v_{el}(\lambda) = \int \theta_{el}(\lambda) \frac{dx}{d\lambda} d\lambda + C_2 \quad (11)$$

$$v_{el}(\lambda) = \chi_y L^2 m_a (-\alpha/2 + (1+\alpha)\lambda/6) \lambda^2 + C_1 L \lambda + C_2 \quad (12)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 são obtidas através das condições de fronteira da viga:

$$\theta_{el}(\lambda = 0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (13)$$

$$v_{el}(\lambda = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (14)$$

Por sua vez, a relação α entre os momentos m_r e m_a pode ser obtida através de uma outra condição de fronteira:

$$v_{el}(\lambda = 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1/2 \quad (15)$$

Sendo assim, as distribuições dos valores reduzidos das rotações, θ_{el}^* , e das flechas, v_{el}^* , podem ser escritas, em função da coordenada λ da secção em questão, através das expressões (16) e (17):

$$\theta_{el}^*(\lambda) = \frac{\theta_{el}(\lambda)}{\chi_y L} = m_a (-2+3\lambda) \frac{\lambda}{4} \quad (16)$$

$$v_{el}^*(\lambda) = \frac{v_{el}(\lambda)}{\chi_y L^2} = m_a (-1+\lambda) \frac{\lambda^2}{4} \quad (17)$$

As equações (16) e (17) podem ser escritas sob forma dimensional, bastando para tal efectuar as substituições $\theta^* = \theta/(\chi_y L)$, $v^* = v/(\chi_y L^2)$, $\lambda = x/L$, $m_a = M_a/M_y$ e $\chi_y = M_y/EI$.

3.3. Distribuições das flechas e rotações em regime elastoplástico

Quando o valor reduzido do momento actuante é superior a 1 ($m_a > 1$), a viga encontra-se em regime elastoplástico. Depois de o limite elástico ter sido ultrapassado nas fibras mais deformadas das secções mais próximas do apoio simples, a plastificação da viga começa a expandir-se ao longo do seu comprimento e da altura das secções transversais mais deformadas, a partir das fibras onde vai sendo atingida a extensão de cedência ε_y do material.

Após o início da plastificação da viga, esta passa a ser constituída por um troço em regime elastoplástico (onde $m(\lambda) > 1$) e por um troço em regime elástico (onde $m(\lambda) \leq 1$). A localização da secção $\lambda_{1,e}$, que estabelece a fronteira entre estes dois troços, pode ser efectuada através da resolução da equação $m(m_a, \lambda_{1,e}) = 1$, que conduz à expressão (18).

$$\lambda_{1,e} = \frac{1/m_a + \alpha}{1 + \alpha} \quad (18)$$

No caso de uma secção se encontrar em regime elastoplástico, o momento interno m varia de forma não linear com a respectiva curvatura μ , devido á evolução progressiva da plastificação ao longo da altura da secção. Esta evolução depende da forma da secção transversal, pelo que deverão ser consideradas diferentes relações momento-curvatura $m(\mu)$ para cada tipo de secção transversal.

A determinação das relações constitutivas, em regime elastoplástico, entre os esforços (esforço normal n e momento flector m) e as deformações globais (deformação axial η e curvatura μ) de secções transversais de diferentes formas submetidas a flexão composta, constituídas por materiais com (ou sem) fase de endurecimento em regime elastoplástico, tem constituído objecto de outros trabalhos do autor [1, 2, 3, 4, 5], para os quais se remete uma leitura mais aprofundada sobre este assunto.

No caso particular de secções rectangulares sujeitas a flexão simples ($\eta = 0$ e $n = 0$), constituídas por um material elastoplástico perfeito (sem endurecimento), a relação momento-curvatura em regime elastoplástico é expressa, em termos de variáveis reduzidas, através da expressão (19), ou da correspondente relação inversa (20):

$$m = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\mu^2} \quad (19)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{3-2m}} \quad (20)$$

Quando a viga se encontra no domínio elastoplástico, as distribuições das rotações e das flechas podem ser obtidas de modo idêntico ao utilizado para o domínio elástico, através das expressões (9) e (11).

Neste caso, os integrais são decompostos em duas partes, relativas às secções em regime elástico ($0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,e}$), θ_{el} e v_{el} , e às secções no domínio elastoplástico ($\lambda_{1,e} \leq \lambda \leq 1$), θ_{ep} e v_{ep} . Na primeira parte a função $\mu(m)$ é dada pela equação (6), $\mu = m$, enquanto que na segunda parte a função $\mu(m)$ é dada pela expressão (20).

A distribuição das rotações, obtida por integração da curvatura das secções (9), é dada por:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,e} \Rightarrow \theta_{el}(\lambda) = \chi_y L m_a \lambda (-\alpha + (1+\alpha)\lambda/2) + C_3 \\ \lambda_{1,e} < \lambda \leq 1 \Rightarrow \theta_{ep}(\lambda) = \frac{\chi_y L}{(1+\alpha)m_a} \left(1 - \sqrt{3-2m(\lambda)} - \alpha m_a (1+\alpha m_a) + \frac{(1+\alpha m_a)^2}{2} \right) + C_5 \end{cases} \quad (21)$$

A distribuição das flechas, obtida por integração das rotações das secções (11), é dada por:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,e} \Rightarrow v_{el}(\lambda) = \chi_y L^2 m_a \lambda^2 (-\alpha/2 + (1+\alpha)\lambda/6) + C_3 L \lambda + C_4 \\ \lambda_{1,e} < \lambda \leq 1 \Rightarrow v_{ep}(\lambda) = \frac{\chi_y L^2}{6(1+\alpha)^2 m_a^2} \left[6(m(\lambda) + \alpha m_a) \left(-\alpha m_a (1+\alpha m_a) + \frac{(1+\alpha m_a)^2}{2} + 1 \right) + \dots + 2(3-2m(\lambda))^{3/2} + (1+\alpha m_a) \left(3\alpha m_a (1+\alpha m_a) - 2(1+\alpha m_a)^2 - 6 \right) - 2 \right] + C_5 L \lambda + C_6 \end{cases} \quad (22)$$

em que o valor de $m(\lambda)$ é dado pela expressão (5).

As constantes de integração C_3 a C_6 são obtidas através das condições de fronteira:

$$\theta_{el}(\lambda = 0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad (23)$$

$$v_{el}(\lambda = 0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \quad (24)$$

$$\theta_{el}(\lambda = \lambda_{1,e}) = \theta_{ep}(\lambda = \lambda_{1,e}) \Rightarrow C_5 = \frac{\chi_y L}{(1+\alpha)m_a} \left(1 - \alpha m_a (1+\alpha m_a) + \frac{(1+\alpha m_a)^2}{2} \right) \quad (25)$$

$$v_{el}(\lambda = \lambda_{1,e}) = v_{ep}(\lambda = \lambda_{1,e}) \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow C_6 = \frac{\chi_y L^2}{6(1+\alpha)^2 m_a^2} \left[(1+\alpha m_a) \left(3\alpha m_a (1+\alpha m_a) - 2(1+\alpha m_a)^2 - 6 \right) - 2 \right] \quad (26)$$

Por sua vez, a relação α entre os momentos m_r e m_a em regime elastoplástico pode ser obtida através da condição de fronteira:

$$\begin{aligned} v_{ep}(\lambda = 1) = 0 \Rightarrow & 6 m_a (1+\alpha) \left(-\alpha m_a (1+\alpha m_a) + (1+\alpha m_a)^2/2 + 1 \right) + \dots \\ & \dots + 2(3-2m_a)^{3/2} + (1+\alpha m_a) \left(3\alpha m_a (1+\alpha m_a) - 2(1+\alpha m_a)^2 - 6 \right) - 2 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Esta expressão fornece, sob forma implícita, o valor da variável α em função do momento actuante m_a . Em face da dificuldade de determinação do valor de α a partir desta expressão, a equação (27) pode, para efeitos práticos, ser substituída pela expressão (28), ajustada através de um método de regressão polinomial aos valores de $\alpha(m_a)$ no intervalo $1 \leq m_a \leq m_u$, em que m_u representa o momento máximo suportado pela secção.

$$\alpha = -2,614502 + 13,111876 m_a - 22,036588 m_a^2 + 18,494051 m_a^3 - 7,757566 m_a^4 + 1,302685 m_a^5 \quad (28)$$

O valor de m_u pode ser obtido através da introdução na equação (19) da curvatura máxima $\mu = \mu_u = \varepsilon_u / \varepsilon_y$, suportada pela secção transversal quando as fibras mais deformadas da secção atingem a extensão máxima suportada pelo material antes de entrar em rotura, ε_u . Para outras secções, constituídas por materiais com (ou sem) endurecimento em regime elastoplástico, o valor de m_u pode ser obtido através de expressões apresentadas nas referências [1, 2, 3, 4, 5].

O valor médio da diferença relativa entre os valores de α fornecidos pelas expressões (27) e (28), obtidos numa amostra de cinquenta valores de m_a compreendidos no intervalo $1 \leq m_a \leq m_u$, foi de $4,4 \times 10^{-9}$. O máximo valor absoluto desta diferença relativa foi de 0,028%.

3.4. Relações de flexibilidade e de rigidez da viga em regime elástico e elastoplástico

As relações de flexibilidade, em regime elástico e elastoplástico, entre os valores reduzidos do momento aplicado, m_a , e da rotação θ_2^* na extremidade da viga onde aquele se encontra aplicado, podem ser obtidas através da introdução da condição $\lambda=1$ nas equações (16) e (21). Na prática, estas relações podem ser sintetizadas numa única expressão (29):

$$\theta_2^* = \frac{\theta_2}{\chi_y L} = \frac{f}{4} m_a \quad (29)$$

em que $\theta_2 = \theta(\lambda=1)$ e

$$\begin{cases} 0 \leq m_a \leq 1 \Rightarrow f = f_{el} = 1 \\ 1 \leq m_a \leq m_u \Rightarrow f = f_{ep} = \frac{4}{(1+\alpha) m_a^2} \left(1 - \sqrt{3-2m_a} - \alpha m_a (1+\alpha m_a) + \frac{(1+\alpha m_a)^2}{2} \right) \end{cases} \quad (30)$$

Recorda-se que em regime elastoplástico o valor do parâmetro α pode ser obtido, através da equação (28), em função do momento aplicado m_a .

Por sua vez, as relações de rigidez, em regime elástico e elastoplástico, podem ser obtidas através da expressão (31), inversa da equação (29):

$$m_a = 4 k \frac{\theta_2}{\chi_y L} = 4 k \theta_2^* \quad (31)$$

em que:

$$\begin{cases} 0 \leq m_a \leq 1 \Rightarrow k = k_{el} = 1 \\ 1 \leq m_a \leq m_u \Rightarrow k = k_{ep} = 1/f_{ep} \end{cases} \quad (32)$$

O coeficiente k_{ep} indicado nesta última expressão, sendo calculado a partir do inverso do coeficiente f_{ep} indicado na expressão (30), apresenta a desvantagem de ser uma função do momento aplicado m_a em vez da rotação reduzida $\theta_2^* = \theta_2 / \chi_y L$, como seria mais conveniente na aplicação da equação (31). Em alternativa e para efeitos práticos, é possível recorrer à expressão (33), ajustada através de um método de regressão polinomial aos valores de $k_{ep}(\theta_2^*)$ no intervalo $1 \leq m_a \leq m_u$.

$$k_{ep} = 0,14826167 + 7,4304112 \theta_2^* - 19,792265 (\theta_2^*)^2 + 14,662209 (\theta_2^*)^3 \quad (33)$$

O valor médio da diferença relativa entre os valores de k_{ep} fornecidos pela expressão (33) e pelo inverso do valor de f_{ep} calculado através da expressão (30), obtidos numa amostra de cinquenta valores de m_a compreendidos no intervalo $1 \leq m_a \leq m_u$, foi de $3,4 \times 10^{-5}$. O máximo valor absoluto obtido para esta diferença relativa foi inferior a 0,21%.

Chama-se a atenção para o facto de a equação (31) se poder escrever sob forma dimensional, dando lugar à expressão (34), bem conhecida através da Teoria da Elasticidade (quando $k=k_{el}=1$):

$$M_a = k \frac{4EI}{L} \theta_2 \quad (34)$$

A figura 3 mostra uma representação da função $m_a(\theta_2^*)$ (31) em regime elastoplástico ($1 \leq m_a \leq m_u$), permitindo observar a não linearidade introduzida nesta função pelo coeficiente k_{ep} (33) em lugar do coeficiente $k_{el}=1$ utilizado em regime elástico.

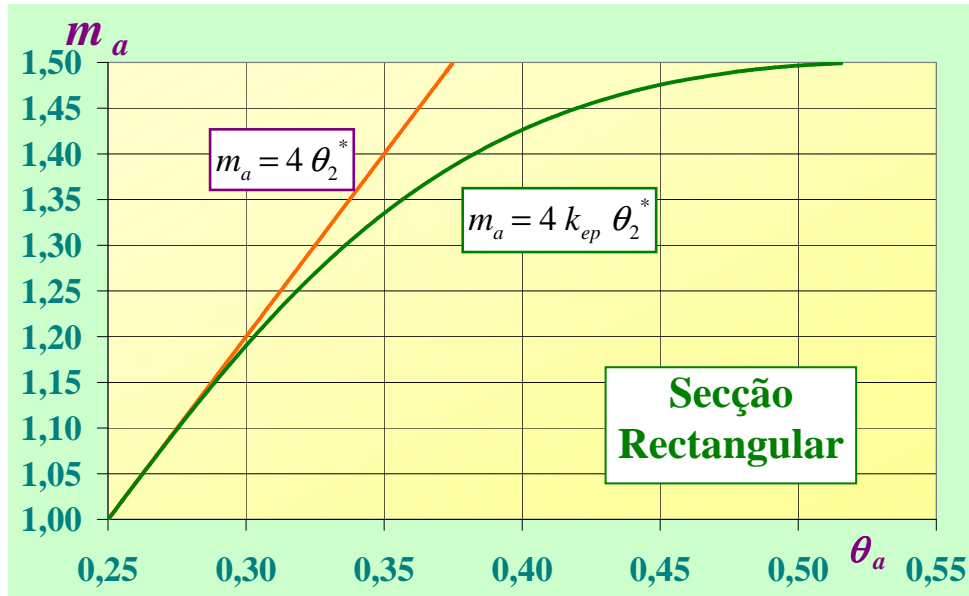


Figura 3. Relação momento-curvatura em regime elastoplástico (expressa em variáveis reduzidas)

Finalmente, faz-se notar que uma vez conhecido o valor de m_a em função da rotação θ_2^* é possível determinar o coeficiente α , através de uma das expressões (15) ou (28), e, consequentemente, determinar o valor do momento flector (5), da rotação (16 ou 21) ou da flecha (17 ou 22) de qualquer secção transversal da viga, bem como das reacções nos apoios.

Para estas variáveis, em particular, é possível definir as seguintes relações, (35) e (36), igualmente bem conhecidas através da Teoria da Elasticidade (quando $k=k_{el}=1$ e $\alpha=1/2$).

$$M_r = \alpha M_a = k \alpha \frac{4EI}{L} \theta_2 \quad (35)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{1+\alpha}{L} M_a = k \frac{1+\alpha}{L} \frac{4EI}{L} \theta_2 = k \frac{4(1+\alpha)EI}{L^2} \theta_2 \quad (36)$$

4. VIGA SUBMETIDA A MOMENTO CONCENTRADO NUMA EXTREMIDADE

4.1. Descrição geral do problema

O segundo modelo analítico apresentado neste trabalho é aplicável a vigas encastradas em ambas as extremidades, com possibilidade de deslocamentos transversais numa destas extremidades, onde se encontram submetidas a uma força concentrada transversal, P . Na fig. 4 são indicadas as principais variáveis do problema, na sua forma dimensional, bem como a orientação dos eixos dos sistemas de coordenadas x e z , e a convenção de sinais positivos das rotações θ e das flechas v das secções transversais da viga. Na fig. 5 são indicadas as mesmas variáveis, na sua forma reduzida.

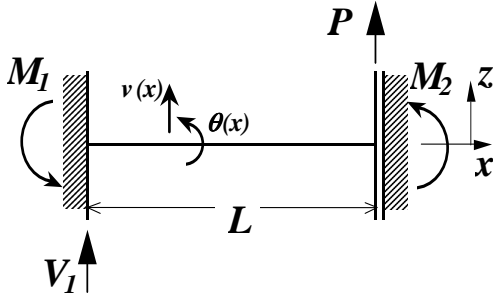


Figura 4. Variáveis dimensionais

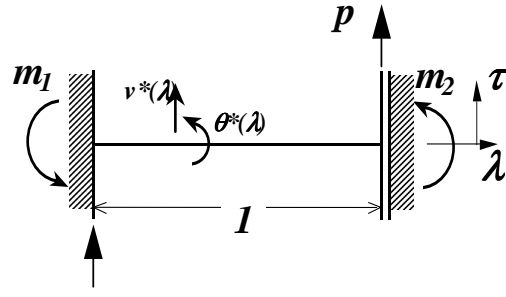


Figura 5. Variáveis reduzidas

A distribuição dos momentos flectores é representada pela equação (37), em que os valores da reacção vertical $V_1 = -P$ e dos momentos flectores $M_1 = M_2 = -PL/2$ podem ser obtidos através das condições de equilíbrio estático e de anti-simetria do comportamento da viga.

A equação (37) pode ser escrita sob forma reduzida, através da expressão (38), em que $\lambda = x/L$ é a coordenada reduzida de cada secção transversal e $p = P/P_y = PL/(2M_y)$ representa o valor reduzido da força actuante, P .

$$M(x) = -M_1 + V_1 x \quad (37)$$

$$m(\lambda) = (1 - 2\lambda) p \quad (38)$$

4.2. Distribuições das flechas e rotações em regime elástico

O momento máximo na viga ocorre simultaneamente nas secções $\lambda=0$ e $\lambda=1$, onde $|m(\lambda)| = p$. Deste modo, a viga encontra-se em regime elástico quando $m(\lambda=0) \leq 1$ ou seja, quando $p \leq p_e$, em que $p_e = 1$ (38). Neste caso, todas as secções transversais se encontram em regime elástico, pelo que a respectiva relação momento-curvatura, expressa em variáveis reduzidas, é dada pela equação (6).

As flechas e rotações das secções transversais podem, uma vez mais, ser determinadas com base na integração das equações (7) e (8).

Assim, a distribuição das rotações, θ_{el} , pode ser obtida através da expressão (39):

$$\theta_{el}(\lambda) = \chi_y \int p(1-2\lambda) \frac{dx}{d\lambda} d\lambda + C_1 = \chi_y L p (\lambda - \lambda^2) + C_1 \quad (39)$$

Por sua vez, a distribuição dos deslocamentos verticais das secções, v_{el} , pode ser obtida através da expressão (40):

$$v_{el}(\lambda) = \int \theta_{el}(\lambda) \frac{dx}{d\lambda} d\lambda + C_2 = \chi_y L^2 p \left(\lambda^2/2 - \lambda^3/3 \right) + C_1 L \lambda + C_2 \quad (40)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 são obtidas através das condições de fronteira da viga:

$$\theta_{el}(\lambda = 0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (41)$$

$$v_{el}(\lambda = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (42)$$

Mais uma vez, as equações (39) e (40) podem ser escritas sob forma dimensional, bastando para isso efectuar as substituições $\lambda = x/L$, $p = PL/(2M_y)$ e $\chi_y = M_y/EI$.

4.3. Distribuições das flechas e rotações em regime elastoplástico

Quando o valor reduzido da força actuante é superior a 1 ($p > 1$), a viga encontra-se em regime elastoplástico. Uma vez ultrapassado o limite elástico nas fibras mais deformadas das secções mais próximas dos apoios, a plastificação da viga começa a expandir-se ao longo do seu comprimento, a partir das duas extremidades, e ao longo da altura das secções mais deformadas, a partir das fibras onde vai sendo atingida a extensão de cedência ε_y do material.

Após o início da plastificação da viga, esta passa a ser constituída por dois troços em regime elastoplástico (onde $|m(\lambda)| > 1$) e por um troço em regime elástico (onde $|m(\lambda)| \leq 1$). A localização das secções $\lambda_{1,e}^+$ e $\lambda_{1,e}^-$, que estabelecem as fronteiras entre o troço elástico e cada um dos troços elastoplásticos, pode ser efectuada através da resolução das equações $m(p, \lambda_{1,e}^+) = +1$ e $m(p, \lambda_{1,e}^-) = -1$, que conduz às expressões (43) e (44).

$$\lambda_{1,e}^+ = \frac{1}{2} \frac{p-1}{p} \quad (43)$$

$$\lambda_{1,e}^- = \frac{1}{2} \frac{p+1}{p} \quad (44)$$

No caso de uma secção se encontrar em regime elastoplástico, a relação momento-curvatura é expressa, em termos de variáveis reduzidas, através da expressão (19), como foi já anteriormente referido.

Quando a viga se encontra no domínio elastoplástico, as distribuições das rotações e das flechas podem ser obtidas de modo idêntico ao utilizado para o domínio elástico, através das expressões (9) e (11). No presente caso, os integrais são decompostos em três partes, relativas às secções em regime elástico ($\lambda_{1,e}^+ \leq \lambda \leq \lambda_{1,e}^-$), θ_{el} e v_{el} , e às secções nos dois domínios elastoplásticos ($0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,e}^+$), θ_{ep}^+ e v_{ep}^+ , e ($\lambda_{1,e}^- \leq \lambda \leq 1$), θ_{ep}^- e v_{ep}^- . No troço elástico a função $\mu(m)$ é dada pela equação (6), $\mu = m$; no primeiro troço elastoplástico, onde $m > 1$, $\mu(m)$ é representada pela expressão (20), enquanto que no segundo troço elastoplástico, onde $m < -1$, $\mu(m)$ é representada pela expressão (45):

$$\mu = -1/\sqrt{3+2m} \quad (45)$$

A distribui33o das rota33es, obtida por integra33o da curvatura das sec33es (9), 3 dada por:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,e}^+ \Rightarrow \theta_{ep}^+(\lambda) = \frac{\chi_y L}{2p} \sqrt{3-2m(\lambda)} + C_3 \\ \lambda_{1,e}^+ \leq \lambda \leq \lambda_{1,e}^- \Rightarrow \theta_{el}(\lambda) = \chi_y L p (\lambda - \lambda^2) + C_5 \\ \lambda_{1,e}^- < \lambda \leq 1 \Rightarrow \theta_{ep}^-(\lambda) = \frac{\chi_y L}{2p} \sqrt{3+2m(\lambda)} + C_7 \end{cases} \quad (46)$$

A distribui33o das flechas, obtida por integra33o das rota33es das sec33es (11), 3 dada por:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,e}^+ \Rightarrow v_{ep}^+(\lambda) = \frac{\chi_y L^2}{12p^2} (3-2m(\lambda))^{3/2} + C_3 L \lambda + C_4 \\ \lambda_{1,e}^+ \leq \lambda \leq \lambda_{1,e}^- \Rightarrow v_{el}(\lambda) = \chi_y L^2 p (\lambda^2/2 - \lambda^3/3) + C_5 L \lambda + C_6 \\ \lambda_{1,e}^- < \lambda \leq 1 \Rightarrow v_{ep}^-(\lambda) = -\frac{\chi_y L^2}{12p^2} (3+2m(\lambda))^{3/2} + C_7 L \lambda + C_8 \end{cases} \quad (47)$$

em que o valor de $m(\lambda)$ 3 dado pela express3o (38).

As constantes de integra33o C_3 a C_8 s3o obtidas atrav3s das condi33es de fronteira:

$$\theta_{ep}^+(\lambda = 0) = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{\chi_y L}{2p} \sqrt{3-2p} \quad (48)$$

$$v_{ep}^+(\lambda = 0) = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{\chi_y L^2}{12p^2} (3-2p)^{3/2} \quad (49)$$

$$\theta_{ep}^+(\lambda = \lambda_{1,e}^+) = \theta_{el}(\lambda = \lambda_{1,e}^+) \Rightarrow C_5 = -\frac{\chi_y L}{2p} \left(\sqrt{3-2p} - \frac{3-p^2}{2} \right) \quad (50)$$

$$v_{ep}^+(\lambda = \lambda_{1,e}^+) = v_{el}(\lambda = \lambda_{1,e}^+) \Rightarrow C_6 = -\frac{\chi_y L^2}{12p^2} \left((3-2p)^{3/2} - \frac{1}{2}(p^3 - 9p + 10) \right) \quad (51)$$

$$\theta_{el}(\lambda = \lambda_{1,e}^-) = \theta_{ep}^-(\lambda = \lambda_{1,e}^-) \Rightarrow C_7 = -\frac{\chi_y L}{2p} \sqrt{3-2p} \quad (52)$$

$$v_{el}(\lambda = \lambda_{1,e}^-) = v_{ep}^-(\lambda = \lambda_{1,e}^-) \Rightarrow C_8 = -\frac{\chi_y L^2}{12p^2} \left[(3-2p)^{3/2} - 10 \right] \quad (53)$$

4.4. Relações de flexibilidade e de rigidez da viga em regime elástico e elastoplástico

As relações de flexibilidade, em regime elástico e elastoplástico, entre os valores reduzidos da força aplicada, p , e do deslocamento transversal v_2^* na extremidade da viga onde a força se encontra aplicada, podem ser obtidas através da introdução da condição $\lambda=1$ nas equações (40) e (47). Na prática, estas relações podem ser sintetizadas numa única expressão (54):

$$v_2^* = \frac{v_2}{\chi_y L^2} = \frac{f}{6} p \quad (54)$$

em que $v_2=v(\lambda=1)$ e

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 1 \Rightarrow f = f_{el} = 1 \\ 1 \leq p \leq p_u \Rightarrow f = f_{ep} = \frac{5 - (3+p)\sqrt{3-2p}}{p^3} \end{cases} \quad (55)$$

A variável p_u representa o valor reduzido da força aplicada P_u no estado limite último da viga, quando $p_u=m(\lambda=0)=-m(\lambda=1)=m_u$ (§3.3.).

Por sua vez, as relações de rigidez, em regime elástico e elastoplástico, podem ser obtidas através da expressão (56), inversa da expressão (54):

$$p = 6 k \frac{v_2}{\chi_y L^2} = 6 k v_2^* \quad (56)$$

em que:

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 1 \Rightarrow k = k_{el} = 1 \\ 1 \leq p \leq m_u \Rightarrow k = k_{ep} = 1/f_{ep} \end{cases} \quad (57)$$

O coeficiente k_{ep} indicado nesta última expressão, sendo calculado a partir do inverso do coeficiente f_{ep} indicado na expressão (55), apresenta a desvantagem de ser uma função da força aplicada p em vez do deslocamento reduzido $v_2^*=v_2/\chi_y L^2$, como seria mais conveniente na aplicação da equação (56). Em alternativa e para efeitos práticos, é possível recorrer à expressão (58), ajustada através de um método de regressão polinomial aos valores de $k_{ep}(v_2^*)$ no intervalo $1 \leq p \leq p_u$.

$$k_{ep} = 0,15994962 + 11,113201 v_2^* - 44,895867 (v_2^*)^2 + 50,479880 (v_2^*)^3 \quad (58)$$

O valor médio da diferença relativa entre os valores de k_{ep} fornecidos pela expressão (58) e pelo inverso do valor de f_{ep} calculado através da expressão (55), obtidos numa amostra de cinquenta valores de p compreendidos no intervalo $1 \leq p \leq p_u$, foi de $4,7 \times 10^{-5}$. O máximo valor absoluto obtido para esta diferença relativa foi inferior a 0,20%.

Chama-se a atenção para o facto de a equação (56) se poder escrever sob forma dimensional, dando lugar à expressão (59), bem conhecida através da Teoria da Elasticidade (quando $k=k_{el}=1$):

$$P = k \frac{12EI}{L^3} v_2 \quad (59)$$

A figura 6 mostra uma representação da função $p(v_2^*)$ (56) em regime elastoplástico ($1 \leq p \leq p_u$), permitindo observar a não linearidade introduzida nesta função pelo coeficiente k_{ep} (58) em lugar do coeficiente $k_{el}=1$ utilizado em regime elástico.

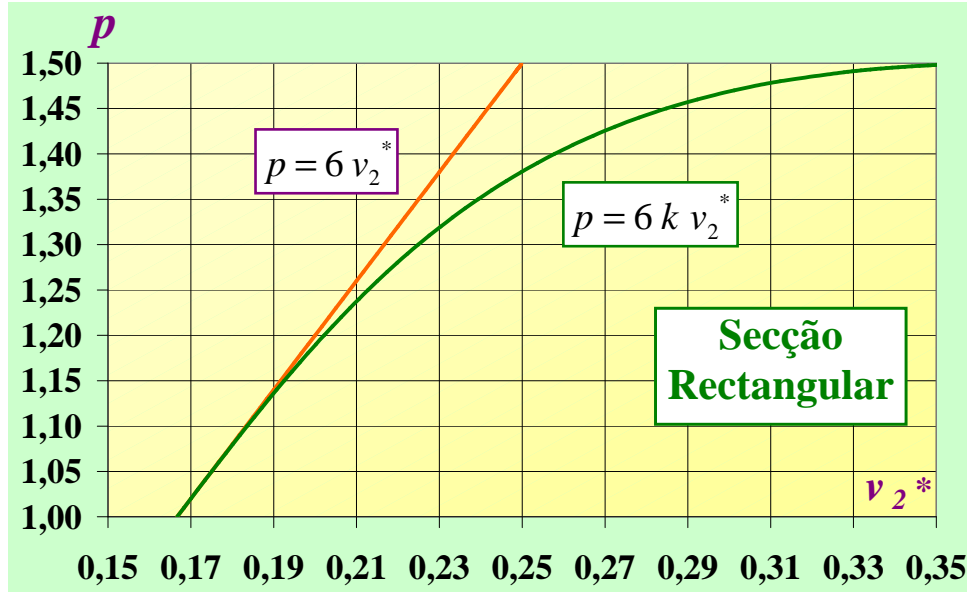


Figura 3. Relação força aplicada-deslocamento transversal em regime elastoplástico (expressa em variáveis reduzidas)

Finalmente, faz-se notar que uma vez conhecido o valor de p em função da rotação v_2^* é possível determinar o valor do momento flector (38), da rotação (39 ou 46) ou da flecha (40 ou 47) de qualquer secção transversal da viga, bem como das reacções nos apoios, M_1 , V_1 e V_2 .

Para estas variáveis, em particular, é possível definir as seguintes relações, (60) e (61), igualmente bem conhecidas através da Teoria da Elasticidade (quando $k=k_{el}=1$).

$$V_1 = P = k \frac{12EI}{L^3} v_2 \quad (60)$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{PL}{2} = k \frac{6EI}{L^2} v_2 \quad (61)$$

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta dois modelos analíticos para o cálculo elastoplástico de vigas de aço hiperestáticas. O primeiro modelo é aplicável a vigas encastradas numa extremidade e simplesmente apoiadas na outra extremidade, onde se encontram submetidas a um momento externo concentrado; o segundo modelo refere-se a vigas encastradas em ambas as extremidades, com possibilidade de deslocamentos transversais numa destas extremidades, onde se encontram submetidas a uma força concentrada transversal. Supõe-se que o comportamento do material constituinte é elastoplástico perfeito (sem endurecimento).

As expressões analíticas apresentadas permitem determinar os deslocamentos, flechas e rotações, de qualquer secção transversal, e, portanto, estabelecer as relações de rigidez da viga em flexão simples para qualquer nível de carga, em regime elástico ou elastoplástico. As relações de rigidez correspondentes a uma resposta elástica e a uma resposta elastoplástica perfeita da viga fornecem as fronteiras do comportamento de uma viga real, constituída por um aço com as fases típicas de comportamento elástico, eventual patamar de cedência e comportamento elastoplástico acompanhado de endurecimento.

A aplicação destas expressões analíticas pode revelar-se particularmente útil na realização de um cálculo expedito do comportamento de uma viga em regime elastoplástico, através do recurso a uma simples folha de cálculo. Além disso, estas expressões permitem controlar directamente os estados limites de deformação, associados a qualquer deslocamento da viga em regime elástico ou elastoplástico, bem como detectar os estados limites últimos da viga associados à capacidade máxima de deformação do material constituinte.

REFERÊNCIAS

- [1] A.M. Baptista e J.P. Muzeau, *Modèle de comportement non-linéaire matériel d'une section rectangulaire fondé sur une analyse des déformations*. *Construction Métallique* n°1/1992, p. 29-40.
- [2] A.M. Baptista, *Modèle non linéaire géométrique et matériel fondé sur l'analyse des déformations globales des sections*, Tese de doutoramento da Universidade Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (França), 1994, 480 p.
- [3] A.M. Baptista, *Modèle analytique en déformations globales pour l'étude élastique non linéaire de sections industrielles*. *Construction Métallique* n°4/1996, p. 29-40.
- [4] A.M. Baptista e J.P. Muzeau, *Formulation analytique pour le calcul élastoplastique de sections en I ou en H fléchies autour de l'axe fort*. *Construction Métallique* n°4/2001, p. 31-57.
- [5] A.M. Baptista e J.P. Muzeau, *Formulação analítica do cálculo de secções tubulares circulares em regime elastoplástico*. III Encontro Nacional de Construção Metálica e Mista, Aveiro, 2001, p. 513-522.
- [6] A.M. Baptista e J.P. Muzeau, *Formulação analítica do comportamento elastoplástico de vigas de aço isostáticas planas em flexão simples*. III Encontro Nacional de Construção Metálica e Mista, Aveiro, 2001, p. 533-542.
- [7] A.M. Baptista e J.P. Muzeau, *Analytical model for the elastic-plastic analysis of simply supported I-shaped beams in simple bending*. 3rd European Conference on Steel Structures - Eurosteel, Coimbra, 2002, p. 129-138.
- [8] A.M. Baptista e J.P. Muzeau, *Equations to evaluate elastic-plastic deformations of cantilever steel beams in simple bending*. International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures, Budapest, 2002.
- [9] A.M. Baptista, *Formulação analítica do comportamento elastoplástico de vigas-consola de secção em I, sujeitas a cargas uniformemente distribuídas*. IV Congresso de Construção Metálica e Mista, Lisboa, 2003, p. 389-398.