

FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE VIGAS-CONSOLA DE SECÇÃO EM I SUJEITAS A CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS

António M. Baptista¹

RESUMO

O presente trabalho destina-se a apresentar um conjunto de expressões analíticas para o cálculo de vigas-consola de secção em I, sujeitas a cargas uniformemente distribuídas, em regime elástico ou elastoplástico. A sua dedução baseou-se na integração de relações analíticas, estabelecidas pelo autor, entre os esforços e as deformações globais de secções de perfis em I, em regime elástico e elastoplástico.

Os resultados obtidos através destas expressões foram comparados com os fornecidos por um programa de elementos finitos. O excelente acordo entre os resultados destes dois métodos justifica a aplicação destas expressões, em alternativa aos modelos numéricos, no cálculo das flechas e rotações das secções deste tipo de elementos estruturais, em regime elastoplástico.

1. INTRODUÇÃO

A análise do comportamento de vigas-consola em regime elástico encontra-se actualmente bastante simplificada, graças às expressões analíticas desenvolvidas no âmbito da Teoria da Elasticidade. No entanto, é actualmente reconhecido que, no caso de vigas de aço, algumas das secções transversais podem ultrapassar o estado limite elástico, desde que a sua segurança não seja condicionada por fenómenos de instabilidade ou por um valor excessivo dos deslocamentos da viga. A aceitação do funcionamento destes elementos estruturais em regime elastoplástico, em determinadas condições particulares, permite justificar uma prática de dimensionamento menos conservativa e, portanto, mais económica.

No entanto, uma das dificuldades que resultam desta opção reside no facto de as expressões analíticas existentes, fornecidas pela Teoria da Elasticidade, não serem apropriadas para o cálculo elastoplástico deste tipo de elementos, uma vez que as relações constitutivas da viga deixam de ser lineares.

Uma solução para este problema consiste na utilização de métodos de cálculo numéricos. Porém, são ainda raros os programas de cálculo elastoplástico de estruturas, à disposição da generalidade dos projectistas, que permitem considerar os efeitos da evolução progressiva da plastificação, ao longo das secções transversais e do comprimento da viga, sobre a perda gradual

¹Doutor Eng. Civil, Investigador Principal do LNEC, Av. Brasil nº101, 1700-066 Lisboa

da sua rigidez e, conseqüentemente, sobre o cálculo dos respectivos deslocamentos. Além disso, a utilização destes programas é habitualmente demorada, devido ao tempo requerido pela preparação de dados e tratamento de resultados.

O presente trabalho apresenta um conjunto de expressões analíticas para o cálculo de vigas-consola de secção em I, sujeitas a cargas uniformemente distribuídas. Estas expressões permitem determinar os deslocamentos, flechas e rotações, de qualquer secção da viga, em regime elástico ou elastoplástico. A sua dedução foi realizada através da integração de outras expressões analíticas, desenvolvidas pelo autor, que estabelecem a relação entre os esforços e as deformações globais de secções de perfis em I, em regime elástico e elastoplástico, e permitem determinar a evolução dos limites das zonas plastificadas, ao longo das secções transversais das vigas, em função da intensidade da carga aplicada.

Os resultados fornecidos pelas expressões apresentadas neste trabalho foram comparados com as soluções fornecidas por um programa de cálculo numérico, em regime elastoplástico [1]. As diferenças obtidas são reduzidas, justificando a aplicação destas expressões, em alternativa aos modelos numéricos, no cálculo elastoplástico deste tipo de elementos estruturais.

2. VARIÁVEIS DO PROBLEMA

As expressões analíticas apresentadas no presente trabalho são aplicáveis a vigas de aço em consola, constituídas por elementos lineares de secção transversal em I, simétrica em relação a ambos os eixos principais de inércia. O comportamento destas vigas depende essencialmente das extensões normais às secções transversais, podendo-se desprezar a influência das restantes componentes do tensor de extensões, nomeadamente no que se refere às deformações resultantes de sollicitações de corte ou de torção. O único esforço interno relevante é o momento flector M . As variáveis cinemáticas do problema são as rotações θ e as flechas v das secções transversais.

As vigas encontram-se isentas de quaisquer fenómenos de instabilidade que possam limitar a sua capacidade de deformação em regime elástico ou elastoplástico.

O comportamento do aço é elastoplástico perfeito (sem endurecimento), e simétrico em tracção e em compressão. A extensão de cedência ε_y estabelece a fronteira entre o comportamento elástico linear, caracterizado pelo módulo de elasticidade E , e o comportamento plástico perfeito, caracterizado por um módulo de elasticidade tangente nulo, $E=0$. A extensão máxima ε_u representa o limite máximo de capacidade de deformação do aço, após o qual ocorre a sua rotura.

As expressões analíticas para o cálculo da viga são escritas em função de variáveis reduzidas (adimensionais), obtidas a partir da divisão das variáveis de base do problema por factores de escala adequados [1],[2], [3].

O factor de escala seleccionado para o momento flector M é o momento elástico M_y , correspondente ao estado limite elástico da secção em flexão simples, quando é atingida a extensão de cedência ε_y nas fibras da secção mais afastadas do seu centro de gravidade, de coordenada z_M . O momento flector reduzido é definido através da expressão (1):

$$m = M/M_y = M/EI\chi_y \quad (1) \quad \mu = \chi/\chi_y \quad (2)$$

Na expressão (1), a variável I indica o momento de inércia da secção em relação ao eixo de flexão, e $\chi_y = \varepsilon_y/z_M$ representa a curvatura da secção no correspondente estado limite elástico. A variável μ indicada na expressão (2) representa a curvatura reduzida da secção.

Em regime elástico tem-se $m \leq 1$ e $\mu \leq 1$, e em regime plástico $m > 1$ e $\mu > 1$. O estado limite elástico corresponde à situação em que $m=1$ e $\mu=1$. Em regime elastoplástico, as fronteiras entre a zona elástica da secção transversal e as zonas plastificadas, em tracção ou em compressão, é dada pelas coordenadas reduzidas $\tau = 1/\mu$ e $\tau = -1/\mu$, em que $\tau = z/z_M$.

3. DISTRIBUIÇÃO DOS MOMENTOS FLECTORES

A distribuição dos momentos flectores numa viga em consola com carga transversal uniformemente distribuída ao longo de todo o vão L é representada pela equação (3). Esta expressão pode ser escrita numa forma reduzida, através da equação (4), em que $\lambda = x/L$ é a coordenada reduzida de cada secção transversal e $q = Q/Q_y$ representa o valor reduzido da carga transversal. O factor de escala $Q_y = 2M_y/L^2$ corresponde ao valor da carga transversal Q no instante em que a secção mais deformada ($\lambda=0$) atinge o seu estado limite elástico ($m(0)=1$).

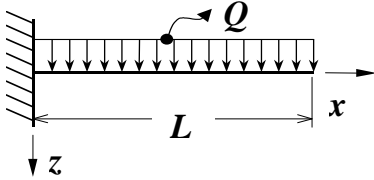


Fig. 1 – Variáveis dimensionais

$$M(x) = Q (L - x)^2 / 2 \quad (3)$$

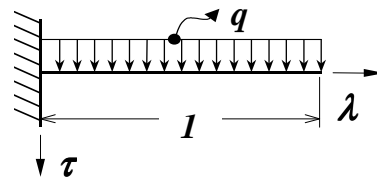


Fig. 2 – Variáveis reduzidas

$$m(\lambda) = q(1 - \lambda)^2 \quad (4)$$

4. DISTRIBUIÇÕES DAS FLECHAS E ROTAÇÕES EM REGIME ELÁSTICO

Uma vez que o momento máximo ocorre na secção $\lambda=0$, a viga encontra-se em regime elástico quando $m(0) \leq 1$ ou seja, quando $q \leq q_{l,e}$, em que $q_{l,e} = 1$ (4). Neste caso, todas as secções transversais da viga se encontram em regime elástico, pelo que a respectiva relação momento-curvatura, expressa em variáveis reduzidas, é dada pela equação (5) [3], [7]:

$$m(\lambda) = \mu(\lambda) \quad (5)$$

As flechas e rotações das secções transversais podem ser determinadas com base numa hipótese clássica dos modelos de cálculo de primeira ordem, segundo a qual a rotação θ e curvatura χ de uma secção de coordenada x podem ser obtidas através da primeira (6) e da segunda (7) derivadas da distribuição dos deslocamentos verticais v das secções transversais da viga:

$$\theta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad (6) \quad \chi(x) = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (7)$$

As equações (6) e (7) podem ser escritas sob as seguintes formas:

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad (8) \quad \chi_y \mu = \frac{\partial \theta}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad (9)$$

em que:

$$\lambda = 1 - \sqrt{\frac{m}{q}} \quad (10) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial m} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{q}}} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial \lambda} = -2 \sqrt{\frac{m}{q}} q \quad (11)$$

A distribuição das rotações, θ_{el} (13), pode ser obtida através da integração da eq. (9):

$$\theta_{el}(m) = \chi_y \int \mu(m) \frac{dx}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dm} dm + k_1 \quad (12)$$

$$\theta_{el}(m) = \chi_y L \left(-\frac{1}{3} m \sqrt{\frac{m}{q}} + C_1 \right) \quad (13)$$

Por sua vez, a distribuição dos deslocamentos verticais das secções, v_{el} (15), pode ser obtida através da integração da equação (8), formulada através da expressão (14):

$$v_{el}(m) = \int \theta_{el}(m) \frac{dx}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dm} dm + k_2 \quad (14)$$

$$v_{el}(m) = \chi_y L^2 \left(\frac{1}{12} \frac{m^2}{q} - C_1 \sqrt{\frac{m}{q}} + C_2 \right) \quad (15)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 são obtidas através das condições de fronteira (16) e (17):

$$\theta_{el}(m=q) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{q}{3} \quad (16) \quad v_{el}(m=q) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{q}{4} \quad (17)$$

As distribuições das rotações, θ_{el} , e das flechas, v_{el} , podem também ser escritas em função da coordenada λ da secção em questão, e da carga transversal q , bastando para isso substituir as variáveis m , C_1 e C_2 pelas respectivas expressões, fornecidas pelas equações (4), (16) e (17):

$$\frac{\theta_{el}(m)}{\chi_y L} = \frac{q}{3} (1 - (1 - \lambda)^3) \quad (18)$$

$$\frac{v_{el}(m)}{\chi_y L^2} = \frac{q}{12} ((1 - \lambda)^4 - 4(1 - \lambda) + 3) \quad (19)$$

Finalmente, as equações (18) e (19) poderiam também ser escritas sob forma dimensional, bastando para isso efectuar as substituições $\chi_y = (Q_y L^2)/(2E I)$, $\lambda = x/L$ e $q = Q/Q_y$.

5. FLECHAS E ROTAÇÕES NO PRIMEIRO DOMÍNIO ELASTOPLÁSTICO

Quando o valor reduzido da carga, q , é superior a 1 ($q > q_{l,e}$) a viga encontra-se em regime elastoplástico. Depois de o limite elástico ter sido ultrapassado nas fibras mais deformadas das secções mais próximas do apoio, a plastificação da viga começa a expandir-se ao longo do comprimento da viga e da altura das secções transversais mais deformadas, a partir das fibras onde vai sendo atingida a extensão de cedência ϵ_y do material. A análise dos efeitos da plastificação progressiva das secções transversais foi já abordada noutros trabalhos do autor, [2] e [3], para os quais se remete uma leitura mais pormenorizada sobre este assunto.

Enquanto a plastificação de uma secção evolui ao longo dos banzos, mantendo-se a alma em regime elástico, considera-se que esta secção se encontra no seu primeiro domínio elastoplástico. O limite inferior deste domínio coincide com o estado limite elástico da secção ($m_{l,e} = m_y = 1$), enquanto que o seu limite superior é atingido no instante em que os banzos da secção ficam totalmente plastificados. Neste instante, a curvatura reduzida da secção, μ , é dada pela expressão (20); o parâmetro α_h desta expressão é definido através da equação (21), em que t_f e h representam, respectivamente, a espessura dos banzos e a altura da secção transversal:

$$\mu = 1/\alpha_h \quad (20) \quad \alpha_h = 1 - 2t_f/h \quad (21)$$

A relação momento-curvatura de uma secção em I, sujeita a flexão simples no seu primeiro domínio elastoplástico, é dada pela expressão (22) [2]:

$$m = \frac{1}{1 - \alpha_b \alpha_h^3} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\mu^2} - \alpha_b \alpha_h^3 \mu \right) \quad (22)$$

O parâmetro α_b da expressão (22) é definido através da equação (23), em que t_w e b representam, respectivamente, a espessura da alma e a largura dos banzos da secção transversal

$$\alpha_b = 1 - t_w / b \quad (23)$$

No limite superior do primeiro domínio elastoplástico, o momento reduzido da secção, $m_{1,i}$, pode ser obtido através da introdução da relação (20) na expressão (22):

$$m_{1,i} = \frac{(3 - \alpha_h^2 (1 + 2\alpha_b))}{2 (1 - \alpha_b \alpha_h^3)} \quad (24)$$

Após o início da plastificação da viga ($q > 1$), esta passa a ser constituída por um troço em regime elastoplástico (onde $m > 1$) e por um troço em regime elástico (onde $m \leq 1$). A localização da secção $\lambda_{1,e}$ que estabelece a fronteira entre estes dois troços pode ser efectuada através da resolução da equação $m(q, \lambda_{1,e}) = 1$.

A viga atinge o limite superior do seu primeiro domínio elastoplástico quando o momento na secção mais deformada atinge o valor: $m(\lambda=0) = m_{1,i}$. De acordo com a equação (4), o valor da carga reduzida neste instante é $q_{1,i} = m_{1,i}$.

Quando a viga se encontra no seu primeiro domínio elastoplástico ($q_{1,e} \leq q \leq q_{1,i}$), as secções de coordenada $\lambda_{1,e} \leq \lambda \leq 1$ encontram-se em regime elástico; a curvatura destas secções é dada pela expressão $\mu(\lambda) = m(\lambda)$ (5).

As restantes secções, de coordenada $0 \leq \lambda < \lambda_{1,e}$, encontram-se no primeiro domínio elastoplástico; a sua curvatura pode ser obtida através da equação (22). Uma vez que a manipulação de uma expressão analítica da função inversa desta equação se torna difícil, a função $\mu(m)$ pode ser representada através de uma função polinomial $\mu^*(m)$, do tipo da equação (25), obtida através de técnicas numéricas de ajustamento à função $m^{-1}(\mu)$, inversa da equação (22).

$$\mu^*(m) = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 \quad (25)$$

Uma vez que a relação momento-curvatura, fornecida pela equação (22) depende da geometria da secção transversal, através dos parâmetros α_b e α_h , é conveniente determinar o valor dos coeficientes a_i da expressão (25) em função das características específicas de cada secção transversal. Assim, no caso de uma secção IPE300, por exemplo, para a qual $\alpha_b = 0,95267$ e $\alpha_h = 0,92867$, a função $m^{-1}(\mu)$ pode ser aproximada pela seguinte expressão polinomial $\mu^*(m)$:

$$\mu^*(m) = -922,307531 + 2735,869972 m - 2703,275259 m^2 + 890,711948 m^3 \quad (25)$$

É possível constatar que, no intervalo de valores de m compreendidos entre $m_{1,e} = 1$ e $m_{1,i} = 1,043$, correspondente ao primeiro domínio elastoplástico da secção IPE300, a diferença relativa $(\mu^* - \mu) / \mu \times 100\%$, entre os valores da curvatura μ que satisfazem a equação (22) e os fornecidos pela expressão (25), é muito pequena, sendo inferior a 0,1% em valor absoluto [\$\$].

Quando a viga se encontra no primeiro domínio elastoplástico, as distribuições das rotações, θ_{el} , e das flechas, v_{el} , podem ser obtidas de modo idêntico ao utilizado para o domínio elástico, através das expressões (12) e (14). Neste caso, os integrais são decompostos em duas partes, relativas às secções em regime elástico ($0 \leq m \leq 1$) e no primeiro domínio elastoplástico ($1 \leq m \leq m_{1,i}$). Na primeira parte a função $\mu(m)$ é dada pela equação $\mu = m$ (5), enquanto que na segunda parte a função $\mu(m)$ é dada pela expressão (25).

A distribuição das rotações, obtida por integração da curvatura das secções (12), é dada por:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,e} \Rightarrow \theta_{ep1}(m) = \chi_y L \left(-\sqrt{\frac{m}{q}} \left(a_0 + \frac{a_1}{3}m + \frac{a_2}{5}m^2 + \frac{a_3}{7}m^3 \right) + C_5 \right) \\ \lambda_{1,e} < \lambda \leq 1 \Rightarrow \theta_{el}(m) = \chi_y L \left(-\frac{1}{3}m\sqrt{\frac{m}{q}} + C_3 \right) \end{cases} \quad (26)$$

A distribuição das flechas, obtida por integração das rotações das secções (14), é dada por:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,e} \Rightarrow v_{ep1}(m) = \chi_y L^2 \left(\frac{1}{2q} \left(a_0 m + \frac{a_1}{6}m^2 + \frac{a_2}{15}m^3 + \frac{a_3}{28}m^4 \right) - C_5 \sqrt{\frac{m}{q}} + C_6 \right) \\ \lambda_{1,e} < \lambda \leq 1 \Rightarrow v_{el}(m) = \chi_y L^2 \left(\frac{1}{12} \frac{m^2}{q} - C_3 \sqrt{\frac{m}{q}} + C_4 \right) \end{cases} \quad (27)$$

As constantes de integração C_3 a C_6 são obtidas através das condições de fronteira:

$$\theta_{ep1}(m=q) = 0 \Rightarrow C_5 = a_0 + \frac{a_1}{3}q + \frac{a_2}{5}q^2 + \frac{a_3}{7}q^3 \quad (28)$$

$$\theta_{ep1}(m=1) = \theta_{el}(m=1) \Rightarrow C_3 = C_5 - \frac{1}{\sqrt{q}} \left(a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{7} - \frac{1}{3} \right) \quad (29)$$

$$v_{ep1}(m=q) = 0 \Rightarrow C_6 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{4}q + \frac{a_2}{6}q^2 + \frac{a_3}{8}q^3 \quad (30)$$

$$v_{ep1}(m=1) = v_{el}(m=1) \Rightarrow C_4 = C_6 - \frac{1}{2q} \left(a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} - \frac{1}{2} \right) \quad (31)$$

Como foi já referido, as distribuições das rotações e das flechas podem também ser escritas em função da carga transversal q e da coordenada λ da secção em questão, bastando para isso substituir, nas equações (26) a (31), a variável m pela respectiva expressão (4).

5. FLECHAS E ROTAÇÕES NO SEGUNDO DOMÍNIO ELASTOPLÁSTICO

Enquanto a viga se encontra no seu primeiro domínio elasto-plástico ($q \leq q_{1,i}$) a curvatura reduzida μ das secções transversais é sempre inferior a $1/\alpha_h$. As secções transversais onde $0 \leq \mu \leq 1$ encontram-se em regime elástico, e aquelas onde $1 < \mu \leq 1/\alpha_h$ encontram-se no seu primeiro domínio elasto-plástico. As almas destas últimas encontram-se em regime elástico e os banzos parcialmente plastificados.

Quando a curvatura da secção mais deformada ultrapassa o limite $1/\alpha_h$ a plastificação desta secção passa a progredir ao longo da respectiva alma; neste caso, a secção encontra-se no segundo domínio elasto-plástico, caracterizado pelo facto de os banzos se encontrarem totalmente plastificados e a alma parcialmente plastificada, na vizinhança das suas fibras mais deformadas.

A relação momento-curvatura da secção no segundo domínio elasto-plástico é dada por:

$$m = \frac{1}{2(1-\alpha_b\alpha_h^3)} \left(3(1-\alpha_b\alpha_h^2) - \frac{1-\alpha_b}{\mu^2} \right) \quad (32)$$

O limite superior deste domínio coincide com o estado limite último de deformação da secção transversal $\mu_u = \epsilon_u / \epsilon_y$, quando as fibras mais deformadas da secção atingem a extensão máxima suportada pelo material, ϵ_u , antes de entrar em rotura. O momento máximo suportado pela secção, m_u , pode ser obtido através da introdução da curvatura $\mu = \mu_u$ na equação (32).

Quando o valor reduzido da carga, q , ultrapassa o limite $q_{1,i} = m_{1,i}$, a viga entra no seu segundo domínio elastoplástico e passa a ser constituída por três troços: um primeiro troço, $0 \leq \lambda < \lambda_{1,i}$, onde as secções se encontram no segundo domínio elastoplástico ($m > m_{1,i}$), um segundo troço, $\lambda_{1,i} \leq \lambda < \lambda_{1,e}$, onde as secções se encontram no primeiro domínio elastoplástico ($1 < m \leq m_{1,i}$), e por um terceiro troço, $\lambda_{1,e} \leq \lambda \leq 1$, onde as secções se encontram em regime elástico ($m \leq 1$). A localização das secções $\lambda_{1,i}$ e $\lambda_{1,e}$ que estabelecem as fronteiras entre estes troços pode ser efectuada através da resolução das equações $m(q, \lambda_{1,i}) = m_{1,i}$ e $m(q, \lambda_{1,e}) = 1$.

A viga atinge o limite superior do seu segundo domínio elastoplástico quando o momento na secção mais deformada atinge o valor $m(\lambda=0) = m_u$. De acordo com a equação (4), o valor da carga reduzida neste instante é $q_u = m_u$, valor este que corresponde ao estado limite último de resistência da viga.

Quando a viga se encontra no seu segundo domínio elastoplástico ($q_{1,i} < q \leq q_u$), a curvatura das secções de coordenada $\lambda_{1,e} \leq \lambda \leq 1$ é dada pela expressão $\mu = m$ (5); a curvatura das secções de coordenada $\lambda_{1,i} \leq \lambda < \lambda_{1,e}$ é dada pela função inversa da equação (22) ou, em alternativa, pela expressão (25); por último, a curvatura das secções de coordenada $0 \leq \lambda < \lambda_{1,i}$ é dada pela função inversa da equação (33), a seguir indicada:

$$\mu = \sqrt{\frac{1 - \alpha_b}{3(1 - \alpha_b \alpha_h^2) - 2m(1 - \alpha_b \alpha_h^3)}} \quad (33)$$

Quando a viga se encontra no segundo domínio elastoplástico, as distribuições das rotações, θ_{el} , e das flechas, v_{el} , podem ser obtidas de modo idêntico ao utilizado para o primeiro domínio elastoplástico, através das expressões (12) e (14). Neste caso, os integrais são decompostos em três partes, relativas às secções em regime elástico ($0 \leq m \leq 1$), no primeiro domínio elastoplástico ($1 \leq m \leq m_{1,i}$), e no segundo domínio elastoplástico ($m_{1,i} \leq m \leq m_u$). Na primeira parte a função $\mu(m)$ é dada pela equação $\mu = m$ (5), na segunda parte $\mu(m)$ é substituída pela expressão (25), e na terceira parte a função $\mu(m)$ é definida através da expressão (33).

A distribuição das rotações, obtida por integração da curvatura das secções (12), é dada por:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,i} \Rightarrow \theta_{ep2}(m) = \chi_y L \left(-\sqrt{\frac{K_2}{2q}} \arcsen \sqrt{\frac{2m}{K_1}} + C_{11} \right) \\ \lambda_{1,i} \leq \lambda < \lambda_{1,e} \Rightarrow \theta_{ep1}(m) = \chi_y L \left(-\sqrt{\frac{m}{q}} \left(a_0 + \frac{a_1}{3}m + \frac{a_2}{5}m^2 + \frac{a_3}{7}m^3 \right) + C_9 \right) \\ \lambda_{1,e} < \lambda \leq 1 \Rightarrow \theta_{el}(m) = \chi_y L \left(-\frac{1}{3}m \sqrt{\frac{m}{q}} + C_7 \right) \end{cases} \quad (34)$$

em que:

$$K_1 = \frac{3(1 - \alpha_b \alpha_h^2)}{1 - \alpha_b \alpha_h^3} \quad (35)$$

$$K_2 = \frac{1 - \alpha_b}{1 - \alpha_b \alpha_h^3} \quad (36)$$

A distribuição das flechas, obtida por integração das rotações das secções (14), é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,i} \Rightarrow v_{ep2}(m) = \chi_y L^2 \left(\frac{\sqrt{K_1 K_2}}{2q} \left(\sqrt{\frac{2m}{K_1}} \arcsen \sqrt{\frac{2m}{K_1}} + \sqrt{1 - \frac{2m}{K_1}} \right) - C_{11} \sqrt{\frac{m}{q}} + C_{12} \right) \\ \lambda_{1,i} \leq \lambda \leq \lambda_{1,e} \Rightarrow v_{ep1}(m) = \chi_y L^2 \left(\frac{1}{2q} \left(a_0 m + \frac{a_1}{6} m^2 + \frac{a_2}{15} m^3 + \frac{a_3}{28} m^4 \right) - C_9 \sqrt{\frac{m}{q}} + C_{10} \right) \\ \lambda_{1,e} < \lambda \leq 1 \Rightarrow v_{el}(m) = \chi_y L^2 \left(\frac{1}{12} \frac{m^2}{q} - C_7 \sqrt{\frac{m}{q}} + C_8 \right) \end{array} \right. \quad (37)$$

As constantes de integração C_3 a C_6 são obtidas através das condições de fronteira:

$$\theta_{ep2}(m=q) = 0 \Rightarrow C_5 = a_0 + \frac{a_1}{3} q + \frac{a_2}{5} q^2 + \frac{a_3}{7} q^3 \quad (28)$$

$$\theta_{ep1}(m=1) = \theta_{el}(m=1) \Rightarrow C_3 = C_5 - \frac{1}{\sqrt{q}} \left(a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{7} - \frac{1}{3} \right) \quad (29)$$

$$\theta_{ep1}(m=1) = \theta_{el}(m=1) \Rightarrow C_3 = C_5 - \frac{1}{\sqrt{q}} \left(a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{7} - \frac{1}{3} \right) \quad (29)$$

$$v_{ep1}(m=q) = 0 \Rightarrow C_6 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{4} q + \frac{a_2}{6} q^2 + \frac{a_3}{8} q^3 \quad (30)$$

$$v_{ep1}(m=1) = v_{el}(m=1) \Rightarrow C_4 = C_6 - \frac{1}{2q} \left(a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} - \frac{1}{2} \right) \quad (31)$$

$$v_{ep1}(m=1) = v_{el}(m=1) \Rightarrow C_4 = C_6 - \frac{1}{2q} \left(a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} - \frac{1}{2} \right) \quad (31)$$

Como foi já referido, as distribuições das rotações e das flechas podem também ser escritas em função da carga transversal q e da coordenada λ da secção em questão, bastando para isso substituir, nas equações (26) a (31), a variável m pela respectiva expressão (4).

3.3 Comparação com resultados numéricos

A fim de avaliar a qualidade dos resultados fornecidos pelas expressões (44) e (45) foi efectuada uma comparação com os resultados de um programa de cálculo elastoplástico [1] baseado no método dos elementos finitos. A viga calculada é uma viga em consola, com um comprimento $L=2,000$ m, e uma secção rectangular de largura $b=200$ mm e altura $h=300$ mm.

O comportamento do aço é elastoplástico perfeito, com $\sigma_y=235$ N/mm² e $\epsilon_u=200 \times 10^{-3}$.

A viga encontra-se submetida a uma carga transversal P concentrada na extremidade livre. O estado limite elástico da viga ($p=1$) é atingido quando $P=P_y=352,5$ kN. Sendo $\epsilon_y=1,12 \times 10^{-3}$, tem-se que $\epsilon_u/\epsilon_y=178,6$ pelo que $\mu_u=178,6$ (2) e $m_u=1,49998$ (20).

Sendo $p_u=m_u$ (ver secção 2.2.3), o estado limite último de deformação da viga é atingido quando $P=P_u=p_u P_y=1,49998 \times 352,5$ kN=528,7 kN.

No quadro 1 apresentam-se as diferenças relativas entre os resultados fornecidos pelas expressões (44) e (45) e os obtidos através do programa de elementos finitos, relativos a três patamares de carga em regime elastoplástico ($p=1,294$, $p=1,416$ e $p=1,494$), em quatro secções transversais diferentes. É possível constatar o excelente acordo entre os dois tipos de resultados.

As diferenças maiores, relativas ao patamar $p=1,494$, são, em princípio, devidas a erros numéricos do método dos elementos finitos, resultantes dos elevados gradientes de deformações na zona do apoio. Com efeito, constatou-se que refinando a malha de elementos finitos nesta zona era possível reduzir todas as diferenças relativas para valores inferiores a 0,01%.

Quadro 1

	P	1,294		1,416		1,494	
x (mm)	λ	$\Delta\theta/\theta$ (%)	$\Delta v/v$ (%)	$\Delta\theta/\theta$ (%)	$\Delta v/v$ (%)	$\Delta\theta/\theta$ (%)	$\Delta v/v$ (%)
50	0,025	0,00	0,00	0,00	0,02	2,32	4,95
150	0,075	0,00	0,00	0,00	0,00	1,15	2,05
250	0,125	0,00	0,00	0,00	0,00	0,85	1,44
1000	0,500	0,00	0,00	0,00	0,00	0,39	0,61
2000	1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,31	0,43

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta um método de dedução de expressões analíticas para o cálculo de vigas isostáticas em regime elástico ou elastoplástico, e exemplifica a sua aplicação ao caso de uma viga em consola submetida a uma carga concentrada.

O excelente acordo entre os resultados fornecidos pelas expressões analíticas obtidas e por um programa de elementos finitos justifica a utilização destas expressões analíticas, em alternativa aos modelos numéricos, no cálculo elastoplástico deste tipo de elementos estruturais.

Os autores desenvolveram expressões analíticas aplicáveis a outros tipos de vigas isostáticas (secções em I, p. ex.) sujeitas a diferentes tipos de cargas, cuja publicação se prevê para breve.

5. REFERÊNCIAS

- [1] Baptista, A.M., “Modèle non linéaire géométrique et matériel fondé sur l'analyse des déformations globales des sections”, Tese de doutoramento da Universidade Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (França), 1994, 480 p.
- [2] Baptista, A.M. e Muzeau, J.P., “Modèle analytique en déformations globales pour l'étude élastique non linéaire de sections industrielles”. Construction Métallique, n°4, 1996, pp. 29-40.
- [3] Baptista, A.M. e Muzeau, J.P., “Modèle analytique de comportement élastoplastique en déformations globales pour l'étude de sections en acier”. Const. Métallique n°1/1997, pp. 21-38.
- [4] Baptista, A.M. e Muzeau, J.P., “Modèle de comportement non-linéaire matériel d'une section rectangulaire fondé sur une analyse des déformations”. Const. Métallique n°1/1992, pp. 29-40.
- [5] Baptista, A.M., Muzeau, J.P. e Camotim, D., “Modelo analítico de análise não linear de secções de elementos estruturais de aço”, ENCMM'99, Coimbra, 1999, pp.357-366.
- [6] Baptista, A.M. e Muzeau, J.P., “Analytical model for non-linear analysis of steel cross-sections”. International Conference NEW TECH'97, IABSE-FIP, LNEC, Lisboa, 1997, pp. 1061-1068.