

NÃO CONFIDENCIAL



Laboratório Nacional de Engenharia Civil

MODELO TRIDIMENSIONAL DE ELEMENTOS DE FRONTEIRA PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SUBTERRÂNEAS

Lisboa, Outubro de 1984

Estudo subsidiado pelo PIDDAC

I&D
BARRAGENS
RELATÓRIO 230/84 — NOS

MINISTÉRIO DO EQUIPAMENTO SOCIAL
LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL

NÃO CONFIDENCIAL

DEPARTAMENTO DE BARRAGENS
NÚCLEO DE OBRAS SUBTERRÂNEAS

Proc. 47/11/7315

MODELO TRIDIMENSIONAL DE ELEMENTOS DE FRONTEIRA
PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SUBTERRÂNEAS

Relatório

ESTUDO SUBSIDIADO PELO PIDDAC

LISBOA, OUTUBRO DE 1984

Copyright © LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL, I. P.
AV DO BRASIL 101 • 1700-066 LISBOA
e-mail: lnec@lnec.pt
www.lnec.pt

Digitalizado no Setor de Divulgação Científica e Técnica do LNEC

2023

ÍNDICE DO TEXTO

| | Pág. |
|--|------|
| 1 - INTRODUÇÃO | 1 |
| 2 - FORMULAÇÕES DE ELEMENTOS DE FRONTEIRA | 5 |
| 2.1 - Considerações iniciais | 5 |
| 2.2 - Método indirecto | 7 |
| 2.3 - Método directo | 11 |
| 2.3.1 - Introdução | 11 |
| 2.3.2 - Identidade de Somigliana | 11 |
| 2.3.3 - Soluções fundamentais | 13 |
| 2.3.4 - Equação integral na fronteira | 15 |
| 2.3.4.1 - Domínio finito | 15 |
| 2.3.4.2 - Domínio infinito | 17 |
| 2.3.5 - Discretização da equação integral na fronteira | 19 |
| 2.3.6 - Equações integrais para pontos interiores | 29 |
| 2.3.7 - Discretização das equações integrais para pontos interiores | 30 |
| 3 - MODELO TRIDIMENSIONAL POR ELEMENTOS DE FRONTEIRA | 32 |
| 3.1 - Generalidades | 32 |
| 3.2 - Discretização da fronteira | 32 |
| 3.3 - Métodos de integração numérica | 34 |
| 3.3.1 - Integração da equação integral na fronteira | 34 |
| 3.3.2 - Integração das equações integrais para pontos interiores | 41 |
| 3.3.3 - Determinação da ordem de integração numérica | 42 |
| 3.4 - Sistema computacional desenvolvido | 47 |
| 3.4.1 - Características gerais | 47 |
| 3.4.2 - Análise dos dados definidores da estrutura (BE3DA) | 48 |
| 3.4.3 - Cálculo dos deslocamentos e pressões nos pontos de fronteira (BE3DB) | 51 |
| 3.4.4 - Cálculo dos deslocamentos e tensões em pontos interiores e análise de resultados | 52 |
| 4 - TESTES AO MODELO DE CÁLCULO DESENVOLVIDO | 53 |
| 4.1 - Introdução | 53 |
| 4.2 - Cavidade esférica | 53 |
| 4.2.1 - Cálculos efectuados | 53 |
| 4.2.2 - Análise de resultados | 57 |
| 4.2.2.1 - Tensões | 57 |
| 4.2.2.2 - Deslocamentos | 60 |

| | Pág. |
|---------------------------------------|------|
| 4.3 - Túnel circular | 63 |
| 4.3.1 - Discretização utilizada | 63 |
| 4.3.2 - Análise de resultados | 63 |
| 4.3.2.1 - Tensões | 63 |
| 4.3.2.2 - Deslocamentos | 71 |
| 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS | 74 |
| NOTA FINAL | 75 |
| BIBLIOGRAFIA | 77 |
| ANEXO | 81 |

ÍNDICE DE QUADROS

QUADRO

- 3.1 - Coordenadas dos pontos de integração numérica e seus pesos para a fórmula da quadratura de Gauss.
- 4.1 - Variação das ordens de integração utilizadas nos diferentes cálculos.
- 4.2 - Cavidade esférica. Tensões tangenciais e radiais.
- 4.3 - Cavidade esférica. Deslocamentos radiais.

ÍNDICE DE FIGURAS

FIG.

- 2.1 - Definição dos pontos x_i e y : (a) sistemas de eixos; (b) ponto interior; (c) ponto na fronteira.
- 2.2 - Ilustração do método dos elementos de fronteira para o problema de uma cavidade bidimensional: (a) problema físico; (b) modelo numérico.
- 2.3 - Caso tridimensional: (a) definições geométricas; (b) soluções fundamentais.
- 2.4 - Ponto singular sobre a fronteira; superfície esférica $\bar{\Gamma}_\xi$.
- 2.5 - Intersecção da superfície de uma esfera de raio r_0 com um oitavo de espaço.
- 2.6 - Definições geométricas para cálculo do integral azimutal no caso tridimensional.
- 2.7 - Definições geométricas para cálculo do integral azimutal no caso bidimensional.
- 3.1 - Elemento quadrangular de oito pontos nodais.
- 3.2 - Funções interpoladoras do tipo parabólico para elementos quadrangulares.
- 3.3 - Definições geométricas; vectores tangentes e vector normal.
- 3.4 - Divisão dos elementos quadrangulares em triângulos para integração numérica: (a) ponto x_i no canto; (b) ponto x_i a meio do lado.
- 3.5 - Esquema de integração numérica nos subelementos triangulares.
- 3.6 - Definições geométricas para o cálculo simplificado da ordem de integração numérica.
- 3.7 - Definição dos lados L_r para cálculo do seu comprimento.
- 3.8 - Definição do ponto central de um elemento quadrangular.
- 3.9 - Organigrama do subprograma BE3DA.
- 3.10 - Organigrama do subprograma BE3DB.
- 3.11 - Organigrama do subprograma BE3DC.

FIG.

- 4.1 - Cavidade esférica. Discretização em 8 elementos. Perspectiva da malha de cálculo.
- 4.2 - Cavidade esférica. Discretização em 8 elementos. Projecção da malha de cálculo segundo um dos planos coordenados.
- 4.3 - Cavidade esférica. Discretização em 24 elementos. Perspectiva da malha de cálculo.
- 4.4 - Cavidade esférica. Discretização em 24 elementos. Projecção da malha de cálculo segundo um dos planos coordenados.
- 4.5 - Cavidade esférica. Perspectiva da malha de elementos finitos.
- 4.6 - Cavidade esférica. Convenções adoptadas.
- 4.7 - Tensões tangenciais e radiais para um estado de tensão hidrostático.
- 4.8 - Deslocamentos para um estado de tensão hidrostático.
- 4.9 - Túnel circular. Perspectiva da malha de cálculo.
- 4.10 - Túnel circular. Projecções da malha de cálculo segundo os planos coordenados.
- 4.11 - Túnel circular. Malha de elementos finitos.
- 4.12 - Túnel circular. Convenções adoptadas.
- 4.13 - Túnel circular. Tensões principais.
- 4.14 - Tensões em secções transversais de túnel circular.
- 4.15 - Tensões em secção transversal de túnel circular; comparação de valores.
- 4.16 - Túnel circular. Deslocamentos.
- 4.17 - Deslocamentos radiais e longitudinais em secções transversais de túnel circular.
- 4.18 - Deslocamentos radiais e longitudinais em secção transversal de túnel circular; comparação de valores.
- 4.19 - Deslocamentos radiais em secção longitudinal ao longo da parede de túnel circular.
- 4.20 - Deslocamentos longitudinais em secção longitudinal ao longo da parede de túnel circular.

FIG.

4.21 - Deslocamentos radiais e longitudinais na frente de túnel circular.

MODELO TRIDIMENSIONAL DE ELEMENTOS DE FRONTEIRA
PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SUBTERRÂNEAS

1 - INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, tem-se assistido a um aumento generalizado da utilização de métodos numéricos no cálculo de estruturas subterrâneas. Com efeito, é cada vez mais fácil ter acesso a sistemas computacionais, os quais vão evoluindo continuamente no sentido do aumento das suas potencialidades, permitindo a utilização de modelos cada vez mais complexos.

Os modelos numéricos, que recorrem ao uso do computador, são idealizações do que se passa na realidade, dependendo as suas características e complexidade, do tipo de aproximação que é feita na idealização. Assim, para a análise do comportamento de estruturas subterrâneas, dois tipos principais de aproximação podem ser feitas: aproximação de meio contínuo e aproximação de meio descontínuo.

No caso da aproximação de meio contínuo podem utilizar-se métodos diferenciais, tais como o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos, e métodos integrais, geralmente na forma do método dos elementos de fronteira.

Dos métodos diferenciais, o método das diferenças finitas está hoje praticamente abandonado no domínio das estruturas subterrâneas, devido à sua gradual substituição, de uma forma vantajosa, pelo método dos elementos finitos. Neste método, as relações governativas da Teoria da Elasticidade são expressas por sistemas de equações diferenciais, com determinadas condições de fronteira no seu domínio de aplicação. A aproximação das funções é feita de uma forma discreta, que consiste na definição dos seus valores em pontos nodais, sendo aproximada localmente, em cada elemento finito, a partir dos valores nodais.

No método integral dos elementos de fronteira, aquelas equações diferenciais são transformadas num sistema de equações integrais, só com incógnitas sobre a fronteira, reduzindo de um a dimensionalidade do problema. A fronteira da estrutura é discretizada por elementos, designados por elementos de fronteira, sendo as soluções aproximadas, interpoladas em cada elemento a partir dos valores nodais, utilizando-se funções de interpolação idênticas às utilizadas no método dos elementos finitos.

Tanto o método integral dos elementos de fronteira como os métodos diferenciais das diferenças finitas e dos elementos finitos se podem considerar, do ponto de vista matemático, oriundos do método dos resíduos pesados. Com efeito, a sistematização dos métodos numéricos pode ser feita com base na admissibilidade das funções pesadas e de aproximação e também nas bases analíticas envolvidas.

No caso da aproximação de meio descontínuo podem também ser utilizados modelos de elementos finitos e de elementos de fronteira. Nos modelos de elementos finitos, as descontinuidades são consideradas pela utilização de um tipo de elemento que simula o seu comportamento e que é conhecido por elemento de junta. Nos modelos de elementos de fronteira, também se podem utilizar elementos especiais, que procuram simular o comportamento das descontinuidades.

Outro tipo de modelos, destinados ao estudo dos meios descontínuos, são os modelos clásticos. Baseiam-se na mecânica dos meios descontinuos e admitem que a rotura dos maciços rochosos é condicionada, em grande medida, pelas superfícies de descontinuidade e não pela matriz rochosa. Deste modo, na maioria destes modelos, despreza-se a deformabilidade da matriz rochosa, bem como a rigidez normal das juntas, simulando-se apenas os grandes movimentos dos blocos de rocha através das superfícies de descontinuidade, resultantes de escorregamentos, aberturas, rotações e interligações entre blocos. O movimento entre blocos processa-se até ser atingido novo equilíbrio global da estrutura. Estes modelos são aplicáveis, fundamentalmente, a estruturas subterrâneas localizadas em zonas onde a densidade de fracturação seja elevada e o confinamento seja reduzido. De facto, em zonas onde estas condições se verifiquem, a maior parte do movimento resulta da ocorrência de escorregamentos e aberturas nas fracturas e rotações entre blocos, resultando inadequada a modelação do maciço por um meio contínuo equivalente.

Dos métodos existentes para o cálculo estrutural de obras subterrâneas, o mais difundido é, actualmente, o método dos elementos finitos, devido à sua grande versatilidade para tratar problemas dos mais diversos tipos e com graus de complexidade elevados.

No entanto, há alguns tipos de problemas para os quais o método dos elementos finitos não é particularmente adequado. Um exemplo deste tipo de problemas, é o das estruturas em que a relação entre a sua superfície e o seu domínio é pequena, visto que o método exige que se discretize todo o domínio. Este problema é muito comum em obras subterrâneas, adquirindo a maior importância no caso de mode

los tridimensionais, em que o esforço dispendido para a discretização se torna, por vezes, in comportável. Outro exemplo importante é o das estruturas inseridas em meios infinitos. Neste caso, utilizando a aproximação de elementos finitos, é necessário considerar uma fronteira exterior, suficientemente afastada da superfície das aberturas, para que o seu efeito não se faça sentir na zona a estudar. Resulta daqui um volume de dados a tratar extremamente elevado, tornando o método pouco económico. Nestes casos é possível usar com vantagem o método dos elementos de fronteira.

O método dos elementos de fronteira possui algumas vantagens importantes que justificam a sua crescente popularidade. Entre elas são de salientar as seguintes:

a) Só é necessário discretizar a fronteira da estrutura, tornando muito simples o trabalho de preparação de dados. Este factor é da maior importância na análise de estruturas tridimensionais.

b) O sistema de equações gerado é pequeno.

c) O tratamento de problemas envolvendo domínios infinitos é feito automaticamente, sendo, por vezes, apenas necessário discretizar as fronteiras das cavidades nele inseridas.

d) Só são calculados valores nos pontos em que realmente se pretende conhecê-los, não resultando o excesso de informação que geralmente se obtém em cálculos por elementos finitos.

e) As soluções obtidas para problemas de concentrações de tensões e para problemas de singularidades na mecânica da fractura são particularmente económicas e correctas.

Aliadas a estas vantagens, o método dos elementos de fronteira tem alguns inconvenientes que, no estado actual do seu desenvolvimento, ainda não foi possível ultrapassar. Entre eles são de citar os seguintes:

a) É difícil tratar problemas não lineares complexos como sejam os resultantes das variações de geometria relativos a diferentes sequências de escavação.

b) O tratamento de domínios anisotrópicos, embora possível, quer em problemas bidimensionais, quer tridimensionais, é complexo, obrigando, por vezes, a esquemas de integração numérica bastante demorados.

Tendo em vista aproveitar as vantagens do método dos elementos de fronteira no cálculo de estruturas subterrâneas, desenvolveu-se um modelo para estudo de problemas tridimensionais. Este trabalho insere-se no processo de investigação, subsidiado pelo PIDDAC e denominado "Concepção e cálculo de grandes estruturas subterrâneas", e aparece no seguimento de outros trabalhos, já realizados, no âmbito deste processo, tendo em vista o desenvolvimento de técnicas numéricas de cálculo para a previsão do comportamento destas obras.

O modelo tridimensional desenvolvido é aplicável a domínios constituídos por material homogêneo e isotrópico com comportamento elástico linear, inserido num meio contínuo. Paralelamente a este modelo, foi desenvolvido no Núcleo de Obras Subterrâneas um modelo bidimensional de características idênticas.

Realizaram-se aplicações do modelo a algumas estruturas simples, visando essencialmente o seu teste e comparação dos resultados obtidos com os de outros modelos e com soluções analíticas.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, dos quais o primeiro é a presente Introdução. No capítulo 2 apresentam-se as duas principais formulações de elementos de fronteira (indirecta e directa), sendo o capítulo 3 destinado a apresentar o modelo tridimensional desenvolvido. No capítulo 4 incluem-se algumas aplicações do modelo a várias estruturas e finalmente, no capítulo 5, apresentam-se algumas ideias sobre os estudos que se acha que deveriam executar-se no seguimento deste trabalho.

2 - FORMULAÇÕES DE ELEMENTOS DE FRONTEIRA

2.1 - Considerações iniciais

A utilização de métodos numéricos, envolvendo a resolução de equações integrais em problemas de Teoria da Elasticidade, teve início no final da década de cinquenta, princípio da década de sessenta, tendo-se desenvolvido várias formulações para análise de problemas bidimensionais. No entanto, só em 1969 foi apresentada uma metodologia para a solução de problemas tridimensionais (Cruse, 1969). Neste trabalho, Cruse apresenta um método directo, discretizando a fronteira em elementos triangulares, nos quais os valores dos deslocamentos e das pressões aplicadas são representados por um valor constante, referido ao seu ponto central. As integrações são efectuadas numericamente, à excepção dos integrais referentes a certos pontos singulares, que são calculados por via analítica. Mais tarde, utiliza pela primeira vez um elemento triangular mais eficiente (Cruse, 1974), onde se permite já uma variação linear dos valores de fronteira, referidos aos vértices de cada elemento triangular (pontos nodais). É também apresentada uma forma indirecta de calcular os valores de certas constantes de caracterização geométrica, mediante considerações de movimento de corpo rígido.

Os elementos triangulares lineares foram sendo gradualmente substituídos por elementos mais complexos, que permitem uma melhor discretização das fronteiras. É assim que, nos trabalhos de Lachat (1975) e de Lachat e Watson (1976), são utilizados elementos quadrangulares e triangulares, em que é possível ter uma variação parabólica dos valores de fronteira, e com os quais se podem discretizar com melhor aproximação superfícies curvas. Nestes trabalhos, são utilizadas considerações de movimento de corpo rígido para determinação das submatrizes diagonais referentes aos integrais nos pontos singulares. É ainda apresentado um algoritmo para optimização do método de integração numérica, com o qual se procura que as precisões obtidas em todas as integrações sejam semelhantes. Este método é bastante trabalhoso e consiste na subdivisão dos elementos em subdomínios de integração e na escolha adequada da ordem de integração numérica a utilizar em cada caso, de acordo com a rapidez da variação do integrando. Foi apresentada por Watson (1979) uma versão simplificada deste algoritmo, de fácil aplicação, e que é inclusivamente utilizada no presente trabalho. Watson apresenta ainda uma formulação para

simular domínios envolvendo a totalidade ou parte do espaço infinito tridimensional, discretizando unicamente a fronteira interior do domínio. Este autor desenvolveu também elementos de fronteira infinitos, que permitem discretizar superfícies tais como a superfície livre de um semi-espaço.

A dificuldade da extensão do método dos elementos de fronteira ao tratamento de domínios anisotrópicos, principalmente no caso de equilíbrios tridimensionais, constituiu, durante algum tempo, uma limitação importante na utilização do método, nomeadamente no domínio da Mecânica das Rochas. No entanto, Wilson e Cruse apresentaram, em 1978, uma formulação que permite tratar problemas envolvendo domínios transverso-isotrópicos. Este é, aliás, o único tipo de simetria elástica, além da isotrópica, para a qual existe uma expressão para as soluções fundamentais. No caso de graus de anisotropia mais elevados, há que proceder a uma avaliação numérica das soluções fundamentais, o que é um processo bastante complexo e que exige, actualmente, tempos de cálculo de tal modo elevados, que impedem a sua utilização de uma forma generalizada (Banerjee e Butterfield, 1981).

Hoje em dia, existem muitos autores a trabalhar no desenvolvimento de novos modelos e novas possibilidades do método dos elementos de fronteira. Inclusivamente, existem já modelos aperfeiçoados, que permitem tratar problemas dos mais diversos campos dentro da Mecânica dos Sólidos, como sejam, problemas de viscoelasticidade (Banerjee e Butterfield, 1981), elastoplasticidade (Swedlow e Cruse, 1971), (Banerjee et al., 1979), (Telles, 1983), viscoplasticidade (Telles e Brebbia, 1982), (Brunet, 1982), análise dinâmica de estruturas (Brebbia e Walker, 1980), (Banerjee e Butterfield, 1981), termoelasticidade (Rizzo e Shippy, 1977), mecânica da fractura (Cruse, 1979), (Bernitez e Ruiz, 1982), estudo de meios descontínuos (Crouch, 1976), (Hocking, 1978), (Crouch e Starfield, 1983), estudo de meios sem resistência à tracção (Venturini e Brebbia, 1983) e muitos outros.

No Laboratório Nacional de Engenharia Civil, o estudo e a aplicação do método dos elementos de fronteira não tem sido feito de uma forma continuada. No entanto, deve-se citar o trabalho desenvolvido por Oliveira (1968), onde é apresentado um algoritmo para resolução de problemas de elasticidade plana utilizando uma formulação indirecta. Mais recentemente, Portela e Romãozinho (1979) desenvolveram um trabalho em que apresentam as bases teóricas das formulações directa e indirecta para problemas potenciais e da Teoria da

Elasticidade.

Nas secções seguintes apresentam-se as duas principais formulações de elementos de fronteira. Em 2.2 é tratado, de uma forma sucinta, o método indirecto, dando uma especial atenção ao método das tensões fictícias. Em 2.3 apresenta-se, desenvolvidamente, a formulação do método directo, pois é com base nela que foi elaborado o modelo de cálculo apresentado no Capítulo 3.

2.2 - Método indirecto

Na formulação indirecta do método dos elementos de fronteira, as equações integrais expressam-se em termos de uma solução analítica conhecida para um dado problema, correspondente a uma solicição unitária, distribuída ao longo da fronteira, com densidades de distribuição desconhecidas. Estas densidades de distribuição não têm significado físico mas, uma vez conhecidas, permitem calcular as tensões e os deslocamentos.

As soluções analíticas mais usadas são a de Kelvin e a de Mindlin, que representam os efeitos de uma força concentrada num meio homogêneo e elástico infinito ou semi-infinito, respectivamente (quer em 2 quer em 3 dimensões).

Uma das formulações indirectas mais aplicadas é conhecida por método das tensões fictícias. Considere-se uma carga unitária actuando num ponto x_i , segundo a direcção 1. Seja u_{1k}^* a componente do deslocamento segundo a direcção k num ponto y e seja s_{1km}^* o tensor das tensões σ_{km} em y (Fig. 2.1a). Considerando um corpo inserido num espaço infinito e aplicando forças fictícias δ_1 distribuídas ao longo da sua fronteira T, os deslocamentos e as tensões num ponto interior y (Fig. 2.1b) serão:

$$u_k = \int_T u_{1k}^* \delta_1 dT \quad (2.1)$$

$$(1, k, m = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_{km} = \int_T s_{1km}^* \delta_1 dT \quad (2.2)$$

Seja p_{1k}^* a componente segundo k da pressão num ponto da superfície do corpo, devida à aplicação da carga unitária em x_i , segundo a direcção 1 (Fig. 2.1c). Então, a pressão na superfície do corpo, devida à aplicação das tensões fictícias δ_1 , é dada por:

$$p_k = \int_{\Gamma} p_{lk}^* \delta_l d\Gamma + \frac{1}{2} \delta_k \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

em que o último termo diz respeito à descontinuidade das tensões na fronteira, devida à carga fictícia δ_k aplicada no ponto y , sobre a fronteira (Banerjee e Butterfield, 1977).

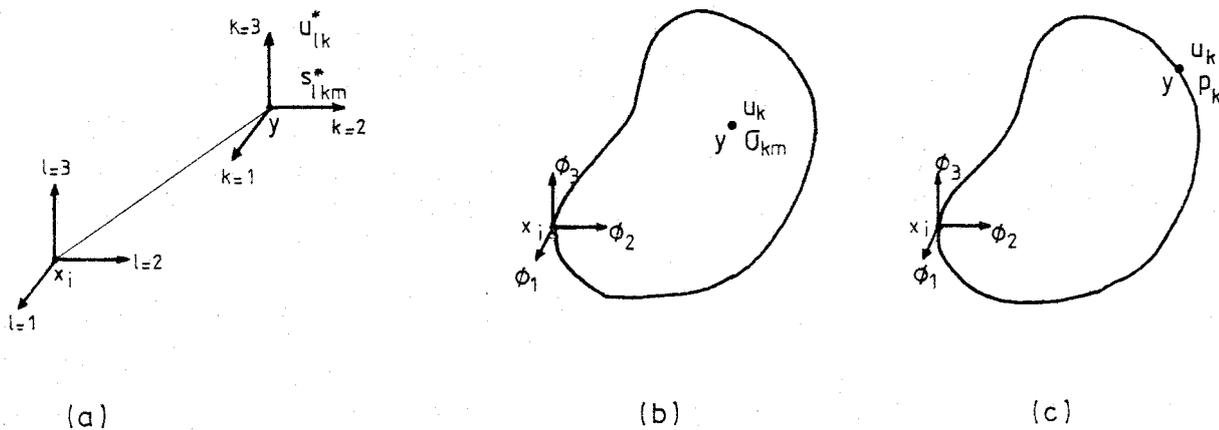


Fig. 2.1 - Definição dos pontos x_i e y : (a) sistemas de eixos; (b) ponto interior; (c) ponto na fronteira.

As equações (2.1) e (2.3) permitem calcular os deslocamentos e as tensões na fronteira devidos a uma determinada distribuição de tensões fictícias. A distribuição correcta será aquela que der origem aos valores de p_k e u_k prescritos como condições de fronteira do problema (Lemos, 1982). Uma vez determinados os valores correctos das tensões fictícias, calculam-se os deslocamentos u_k e as tensões σ_{km} em qualquer ponto do corpo através das expressões (2.1) e (2.2).

A integração destas equações, para determinação das tensões fictícias, só em casos extremamente simples pode ser feita por via analítica, havendo portanto necessidade de proceder às integrações por via numérica. O método utilizado consiste em discretizar a superfície da fronteira, sobre a qual se vai fazer a integração, em elementos que se designam habitualmente por elementos de fronteira.

Na Fig. 2.2a), está indicada a discretização da superfície de uma cavidade num meio infinito que se considerou, por simplicidade,

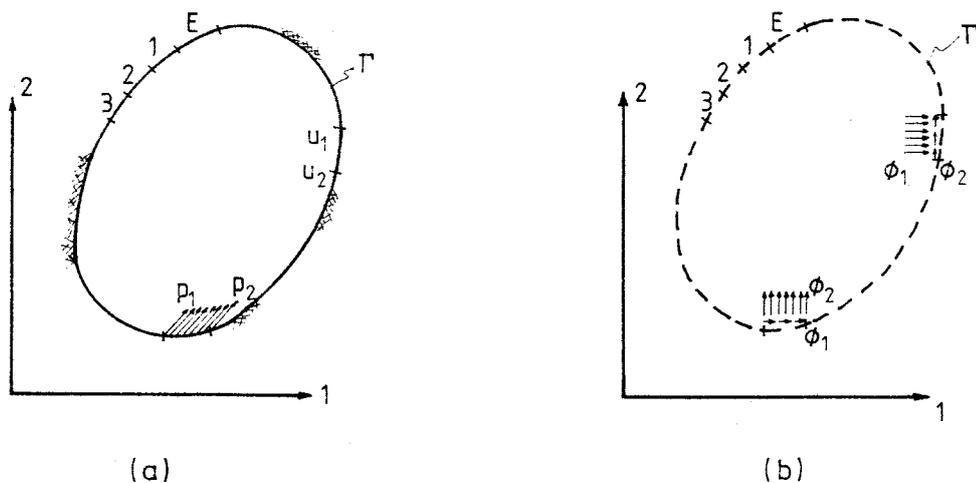


Fig. 2.2 - Ilustração do método dos elementos de fronteira para o problema de uma cavidade bidimensional: (a) problema físico; (b) modelo numérico.

bidimensional, num número E de elementos, suficientemente pequenos para que as condições de fronteira se possam considerar de valor constante no seu comprimento (Crouch and Starfield, 1983), mas variável de elemento para elemento. No caso geral são impostas, numa parte da fronteira, condições em deslocamentos (u_k) e, na parte restante, condições em pressões (p_k). As tensões fictícias ϕ_1 e ϕ_2 consideram-se também constantes em cada elemento.

Este problema assim especificado pode ser resolvido através do modelo da Fig. 2.2b), em que T' é uma superfície com a mesma forma de T . Note-se porém, que a superfície T' em que estão aplicadas as tensões fictícias não representa uma fronteira, mas sim a idealização de uma superfície, cujo significado é meramente o da localização dos elementos de fronteira da superfície T num meio infinito.

Considere-se, agora, a aplicação das tensões fictícias ϕ_1^e ($e = 1, 2, \dots, E$) em cada elemento e da superfície T' . As pressões p_k^e e os deslocamentos u_k^e em cada um dos elementos, devidos à aplicação dos ϕ_1^e na fronteira, são obtidos a partir das expressões (2.1) e (2.3), discretizando o integral num somatório nos elementos:

$$u_k^e = \sum_{i=1}^E u_{1k}^* \vartheta_1^i \Delta S_i \quad (2.4)$$

$$p_k^e = \sum_{i=1}^E p_{1k}^* \vartheta_1^i \Delta S_i + \frac{1}{2} \vartheta_k^e \quad (2.5)$$

$$(1, k = 1, 2, 3)$$

em que ΔS_i é a dimensão do elemento i (comprimento ou área, conforme se trate de um problema a 2 ou 3 dimensões) e u_{1k}^* e p_{1k}^* são calculados no centro do elemento.

Em cada elemento da fronteira em que a condição imposta seja em deslocamentos, tem-se uma equação (2.4). Em pontos em que a condição de fronteira imposta seja em pressões, tem-se uma equação (2.5). Obtém-se, assim, um sistema de $3E$ equações a $3E$ incógnitas ($2E$ no caso bidimensional), em que estas são as tensões fictícias ϑ_1^i em todos os elementos e segundo as direcções dos eixos coordenados. A partir das tensões fictícias calculadas obtêm-se os deslocamentos e as tensões em qualquer ponto do corpo a partir das expressões (2.1) e (2.2) convenientemente discretizadas:

$$u_k = \sum_{i=1}^E u_{1k}^* \vartheta_1^i \Delta S_i \quad (2.6)$$

$$\sigma_{km} = \sum_{i=1}^E s_{1k}^* \vartheta_{1km}^i \vartheta_1^i \Delta S_i \quad (2.7)$$

Além desta formulação aqui apresentada, há outros tipos de formulações indirectas do método dos elementos de fronteira apresentadas por diferentes autores. Salienta-se o "discontinuity displacement method" que permite abordar o problema de meios intersectados por superfícies de descontinuidade o que, em estruturas subterrâneas, permite simular a ocorrência de descontinuidades nos maciços rochosos, nomeadamente falhas e diaclases (Crouch e Starfield, 1983).

Outro tipo de formulação apresentada por Tomlin e Butterfield (Lemos, 1982) permite abordar o problema de meios zonados com materiais com diferentes características, o que é da maior importância no estudo de estruturas subterrâneas para a simulação de problemas em que existem camadas de materiais com propriedades mecânicas diferentes.

2.3 - Método directo

2.3.1 - Introdução

Na formulação directa do método dos elementos de fronteira, as equações integrais expressam-se em termos de funções que estão directamente relacionadas com as grandezas físicas do problema. No caso da Teoria de Elasticidade estas grandezas são os deslocamentos e as pressões nos pontos da fronteira. Os deslocamentos e as tensões em pontos interiores são calculados, posteriormente, a partir dos valores de fronteira.

A formulação directa pode ter como base o teorema da reciprocidade (ou de Betti) ou o teorema dos trabalhos virtuais. No entanto, com maior generalidade, a formulação pode basear-se no método dos resíduos pesados (Portela e Romãozinho, 1979), (Portela, 1980), (Brebbia, 1978); a equação dos resíduos é escrita tendo como função pesada a solução fundamental do campo elástico.

2.3.2 - Identidade de Somigliana

Apresenta-se, nesta secção, a dedução das expressões básicas do método dos elementos de fronteira, a partir do Teorema de Betti.

Considere-se um campo elástico instalado num domínio com fronteira Γ e satisfazendo as condições:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_1} + b_k &= 0 && \text{em } \Omega \\ \epsilon_{1k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) && \text{em } \Omega \\ \sigma_{1k} &= c_{1kmn} \epsilon_{mn} && \text{em } \Omega \\ u_k &= \bar{u}_k && \text{em } \Gamma_1 \\ p_k &= \sigma_{1k} n_1 = \bar{p}_k && \text{em } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1, k, m, n = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

em que σ_{1k} e ϵ_{1k} são os tensores das tensões e das deformações, b_k representa as forças aplicadas no domínio, p_k representa as pressões aplicadas na fronteira, c_{1kmn} é a matriz de elasticidade e n_1 são os co-senos directores da normal à superfície. Os deslocamentos e as pressões impostas na fronteira são representados respectivamente por \bar{u}_k e \bar{p}_k . Γ_1 é a parte onde são impostas condições em des

locamentos e T_2 a parte onde são impostas condições em pressões.

Considere-se, agora, outro campo elástico, independente do anterior, representado por σ^* , ϵ^* , b^* , p^* e u^* , instalado no mesmo domínio e obedecendo às mesmas condições. Então, o teorema de Betti postula que o trabalho realizado pelo primeiro campo elástico na deformação do segundo é igual ao trabalho realizado pelo segundo campo elástico na deformação do primeiro. Tem-se, então:

$$\int_{\Omega} \sigma_{1k}^* \epsilon_{1k} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{1k} \epsilon_{1k}^* d\Omega \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.9)$$

Integrando ambos os membros da equação (2.9) por partes, utilizando o teorema de Green e tendo em consideração as expressões (2.8), obtém-se:

$$\int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega + \int_T p_k^* u_k dT = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_T p_k u_k^* dT \quad (k=1,2,3) \quad (2.10)$$

o que corresponde à forma externa do Teorema de Betti.

A equação (2.10) foi estabelecida para dois campos exactos distintos admissíveis no mesmo domínio Ω . No entanto, essa equação pode generalizar-se ao caso em que um dos domínios é infinito Ω_{∞} , contendo o domínio Ω . Em Ω define-se o campo elástico que se pretende analisar e em Ω_{∞} o campo estrutural fundamental, o qual é regido pela seguinte equação:

$$b_k^* = \delta_1(x - x_i) \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

em que $\delta_1(x - x_i)$ representa a função delta de Dirac, que corresponde à aplicação de uma força unitária segundo a direcção 1 no ponto $x_i \in \Omega_{\infty}$. A função delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \delta_1(x - x_i) &= 0 & \text{se } x &\neq x_i \\ \delta_1(x - x_i) &= \infty & \text{se } x &= x_i \end{aligned} \quad (l=1,2,3) \quad (2.12)$$

sendo:
$$\int_{\Omega_{\infty}} g_k(x) \delta_1(x - x_i) d\Omega = g_1(x_i)$$

Se o ponto $x_i \in \Omega$, o primeiro integral da equação (2.10), devido às propriedades selectivas da função delta de Dirac, toma o valor:

$$\int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} u_k \delta_1(x - x_i) d\Omega = u_1(x_i) = u_1^i \quad (2.13)$$

(1, k = 1, 2, 3)

em que u_1^i representa o deslocamento no ponto x_i segundo a direcção 1. Substituindo (2.13) em (2.10) vem:

$$u_1^i + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (k=1,2,3) \quad (2.14)$$

Note-se que u_k^* e p_k^* são as soluções fundamentais.

Se se considerarem as três direcções de um espaço tridimensional, pode-se escrever:

$$u_1^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_{ik}^* d\Gamma \quad (1, k=1,2,3) \quad (2.15)$$

em que u_{ik}^* e p_{ik}^* representam o deslocamento e a tensão na direcção k , devidos à aplicação de uma carga no ponto x_i segundo a direcção 1.

A equação (2.15) é conhecida como a identidade de Somigliana para deslocamentos e é através dela que se irão calcular os deslocamentos em pontos interiores do corpo.

2.3.3 - Soluções fundamentais

As soluções fundamentais podem ser classificadas de acordo com a região Ω_{∞} envolvida.

Se o domínio Ω_{∞} é tomado como sendo todo o meio elástico infinito, então tem-se a solução fundamental de Kelvin para o espaço inteiro. Representa o efeito (u^* ou p^*) em qualquer ponto do domínio infinito, devido a uma sollicitação unitária aplicada noutro ponto do mesmo domínio infinito (Fig. 2.3b). As expressões u_{ik}^* e p_{ik}^* , para um espaço tridimensional isotrópico, são (Brebbia, 1978):

$$u_{ik}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (1, k=1,2,3)$$

$$p_{ik}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_{ik} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1-2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_1} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_1 \right\} \right] \quad (2.16)$$

em que n_j são os co-senos directores da normal exterior à superfí-

cie, δ_{1k} é o símbolo de Kronecker, r é a distância do ponto de aplicação da carga ao ponto em consideração (Fig. 2.3a) e $\partial r / \partial n$ e $\partial r / \partial x_i$ são as derivadas desta distância em relação à normal e em relação aos eixos coordenados, respectivamente.

As derivadas de r são dadas por:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_i} n_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

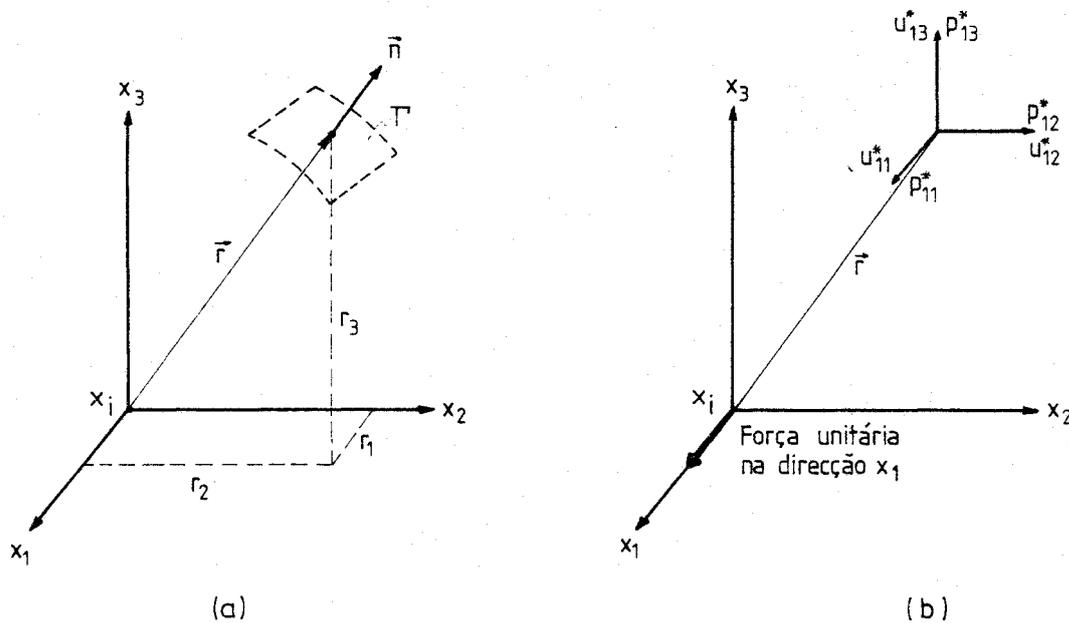


Fig. 2.3 - Caso tridimensional: (a) definições geométricas; (b) soluções fundamentais.

Para um espaço bidimensional isotrópico com estado plano de deformação tem-se:

$$u_{1k}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{1k} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (1, k = 1, 2) \quad (2.18)$$

$$p_{1k}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{1k} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1-2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_1} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_1 \right\} \right]$$

No caso de se ter um estado plano de tensão, basta substituir nas expressões anteriores ν por $\bar{\nu} = \nu / (1+\nu)$ e E por $\bar{E} = E(1-\bar{\nu}^2)$.

É interessante notar que, enquanto no caso tridimensional os

deslocamentos u_{1k}^* tendem para zero quando r tende para infinito, no caso bidimensional u_{1k}^* tende para $-\infty$. Isto deve-se ao termo $\ln(1/r)$ incluído na primeira das expressões (2.18). Assim, o significado de u_{1k}^* não é o de um deslocamento de um ponto, mas sim o seu deslocamento relativo a outro ponto que se considere fixo (Telles, 1983).

Esta solução fundamental permite simular o comportamento de cavidades em meios infinitos, o que é de grande utilidade em obras subterrâneas, nomeadamente em cavernas profundas, em que a influência da superfície livre do terreno não tem significado.

Outra solução fundamental existe para o caso em que o domínio Ω_∞ é um meio espaço. Corresponde ao domínio da solução fundamental anterior cortado por um plano horizontal infinito que é considerado à partida como livre, isto é, sem tensões aplicadas e com deslocamentos permitidos em todas as direcções. A solução fundamental para este caso é a solução de Mindlin para um meio semi-infinito.

Esta solução fundamental permite tratar mais facilmente problemas de obras subterrâneas a pouca profundidade, em que o efeito da superfície livre do terreno é importante. Como exemplo de aplicação da solução fundamental de Mindlin para um meio espaço citam-se os trabalhos de Banerjee e Butterfield (1977) e Nakaguma (1979).

No presente trabalho a solução fundamental utilizada será a de Kelvin, correspondente a um espaço infinito.

2.3.4 - Equação integral na fronteira

2.3.4.1 - Domínio finito

A equação (2.14), que representa a identidade de Somigliana, foi deduzida considerando que o ponto singular x_i onde é aplicada a força unitária, está localizado no interior do domínio do corpo. Se o ponto x_i estiver situado sobre a fronteira Γ , aquela equação sofre algumas alterações.

Considere-se novamente a equação (2.10) correspondente à forma externa do Teorema de Betti. Se o ponto singular x_i se localizar sobre a fronteira Γ do corpo, então o primeiro integral de (2.10) anula-se, ficando:

$$\int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (k=1,2,3) \quad (2.19)$$

Para se deduzir a expressão correspondente a x_i sobre a fron -

teira vai-se assumir que a força unitária não é aplicada em x_i , mas sim sobre uma superfície esférica \bar{T}_ϵ com um raio ϵ , centrada em x_i , e fazer tender ϵ para zero (Fig. 2.4). A expressão (2.19), transforma-se em:

$$\int_{(T-T_\epsilon)+\bar{T}_\epsilon} p_{1k}^* u_k dT = \int_{\Omega_\epsilon} b_k u_{1k}^* d\Omega + \int_{(T-T_\epsilon)+\bar{T}_\epsilon} p_k u_{1k}^* dT \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.20)$$

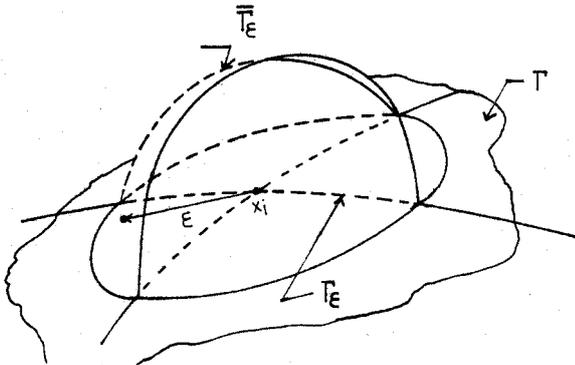


Fig. 2.4 - Ponto singular sobre a fronteira; superfície esférica \bar{T}_ϵ .

tendo já em conta que as forças unitárias actuam independentemente em cada direcção.

Tomem-se separadamente os integrais anteriores quando $\epsilon \rightarrow 0$. Para o primeiro integral virá:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{(T-T_\epsilon)+\bar{T}_\epsilon} p_{1k}^* u_k dT = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{T}_\epsilon} p_{1k}^* u_k dT + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{T-T_\epsilon} p_{1k}^* u_k dT \quad (2.21)$$

(1, k = 1, 2, 3)

Pode demonstrar-se que o primeiro integral do segundo membro toma um valor finito não nulo, o que tem como consequência que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{T}_\epsilon} p_{1k}^* u_k dT = \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{T}_\epsilon} p_{1k}^* dT \right) u_k = c_{1k}^i u_k \quad (2.22)$$

(1, k = 1, 2, 3)

No caso de uma fronteira regular (isto é, que tenha tangente única no ponto i) o valor de c_{1k}^i é:

$$c_{1k}^i = \frac{1}{2} \delta_{1k} \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.23)$$

No entanto, na prática, não há necessidade de calcular c_{1k}^i pois, através de um processo indirecto de representação de um movimento de corpo rígido, determina-se o seu valor juntamente com o correspondente valor de $\int_T p_{1k}^* u_k dT$. Este procedimento será o uti

lizado adiante na secção 2.3.5.

Os restantes integrais da expressão (2.21) não apresentam singularidades, podendo ser tomados no sentido usual.

Então, substituindo (2.21) e (2.22) na equação (2.20), quando $\epsilon \rightarrow 0$ virá:

$$c_{1k}^i u_k + \int_{\Gamma} p_{1k}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{1k}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{1k}^* b_k d\Omega \quad (1, k=1, 2, 3) \quad (2.24)$$

Esta é a equação integral que relaciona deslocamentos e tensões na fronteira e forças de massa num corpo elástico. Uma vez que o termo das forças de massa seja conhecido, esta equação fica só com incógnitas na fronteira. Esta é uma das características mais importantes do método das equações integrais na fronteira e que permite que seja aproximado numericamente.

2.3.4.2 - Domínio infinito

No caso do domínio Ω do corpo elástico ser infinito, englobando algumas cavidades finitas, há que ter em atenção que é necessário integrar o segundo e o terceiro termo da expressão (2.24), não só na fronteira Γ das cavidades finitas, mas também numa fronteira imaginária do corpo, no infinito.

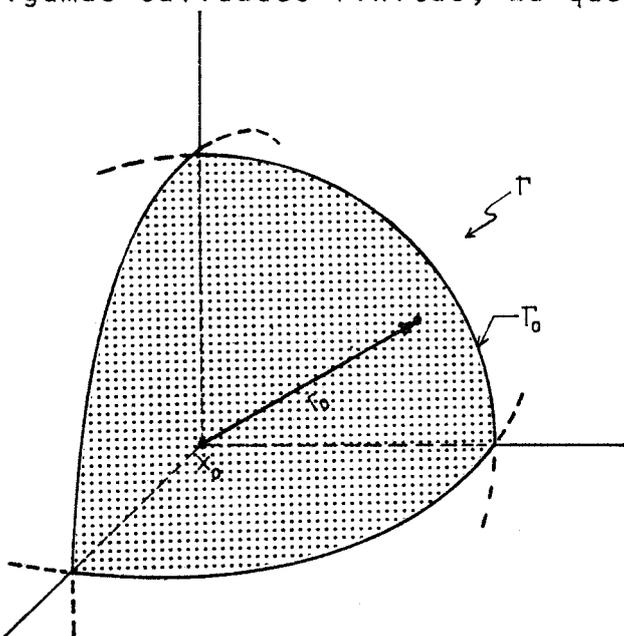


Fig.2.5 - Intersecção da superfície de uma esfera de raio r_0 com um oitavo de espaço.

Considerando, por simplicidade, o ponto x_0 coincidente com o ponto de intersecção dos 3 planos que constituem a fronteira. Γ_0 será a intersecção da superfície desta esfera com o domínio do corpo. Considerando, por simplicidade, que não existem forças de massa, a expressão (2.24) escreve-se:

Considere-se um ponto de localização arbitrária x_0 no domínio deste corpo e seja r_0 o raio de uma esfera centrada em x_0 . Na figura 2.5 o corpo infinito é representado por um oitavo de espaço tendo-se

$$c_{lk}^i u_k + \int_{T} p_{lk}^* u_k dT + \int_{T_0} p_{lk}^* u_k dT = \int_{T} u_{lk}^* p_k dT + \int_{T_0} u_{lk}^* p_k dT \quad (2.25)$$

$$(1, k = 1, 2, 3)$$

Esta equação poderá ser expressa apenas em termos da fronteira T se, quando $r_0 \rightarrow \infty$, se tiver:

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{T_0} \left[p_{lk}^* u_k - u_{lk}^* p_k \right] dT = 0 \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.26)$$

Esta equação traduz as condições de regularidade das funções numa superfície infinitamente distante (Telles, 1983).

Em problemas tridimensionais, para um ponto pertencente a T_0 , tem-se:

$$dT = |J| d\varphi d\psi, \quad |J| = O(r_0^2)$$

$$u_{lk}^* = O(r_0^{-1}) \quad (2.27)$$

$$p_{lk}^* = O(r_0^{-2})$$

em que φ e ψ são coordenadas esféricas e $O(\)$ representa o comportamento assintótico quando $r_0 \rightarrow \infty$.

Se a resultante das pressões aplicadas na fronteira for nula, os valores de u_k e p_k em T_0 , quando $r_0 \rightarrow \infty$, serão forçosamente nulos, sendo a condição (2.26) imediatamente satisfeita, anulando-se separadamente ambos os termos do integral. No caso de a resultante não ser nula, pelo princípio de Saint-Venant, tem-se que o comportamento de u_k e p_k em T_0 , quando $r_0 \rightarrow \infty$, será idêntico ao da solução fundamental correspondente a uma força aplicada na direcção da resultante. Assim, tem-se que $u_k = O(r_0^{-1})$ e $p_k = O(r_0^{-2})$, o que faz com que os dois termos da expressão (2.26) se anulem separadamente quando $r_0 \rightarrow \infty$.

Para problemas bidimensionais, tem-se:

$$dT = |J| d\varphi, \quad |J| = O(r_0)$$

$$u_{lk}^* = \begin{cases} O(\ln(1/r_0) + 1) & \text{se } l = k \\ O(1) & \text{se } l \neq k \end{cases} \quad (2.28)$$

$$p_{lk}^* = O(r_0^{-1})$$

em que φ é uma coordenada polar.

Neste caso, os 2 termos do integral da equação (2.26) não se anulam separadamente, mas sim a sua diferença. De facto, com base novamente no princípio de Saint-Venant e nas conclusões tiradas no caso tridimensional, pode-se substituir u_k e p_k na expressão (2.26) pelos tensores correspondentes à solução fundamental bidimensional u_{lk}^* e p_{lk}^* . Verifica-se, assim, que a equação (2.26) é identicamente satisfeita.

Conclui-se, desta forma, que a equação integral na fronteira (2.24) é também válida para meios infinitos, quer em duas, quer em três dimensões. Esta conclusão também se aplica à identidade de Somigliana.

2.3.5 - Discretização da equação integral na fronteira

Expõe-se, nesta secção, a metodologia adoptada para a discretização e resolução das equações integrais apresentadas na secção anterior.

A equação integral na fronteira, deduzida em 2.3.4, é:

$$C_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (2.29)$$

(1, k = 1, 2, 3)

em que os símbolos utilizados têm o seguinte significado:

- i - ponto singular de aplicação da carga unitária (x_i).
- l - direcção de aplicação da carga unitária no ponto x_i .
- p_{lk}^* - pressão num ponto da fronteira, na direcção k , devida à aplicação de uma força unitária em x_i , actuando segundo a direcção l (solução fundamental em pressões).
- u_{lk}^* - deslocamento num ponto da fronteira, na direcção k , devido à aplicação de uma força unitária em x_i , actuando segundo a direcção l (solução fundamental em deslocamentos).
- C_{lk}^i - coeficiente dependente da geometria do contorno.
- u_k^i - deslocamento no ponto x_i segundo a direcção k .
- u_k, p_k - deslocamentos e pressões no contorno na direcção k .
- b_k - forças de massa na direcção k , aplicadas no domínio.

As direcções l e k ($l, k = 1, 2, 3$) são as direcções do sistema

de eixos cartesianos global adoptado para a estrutura.

Na formulação numérica que se vai expôr, considera-se, por simplicidade, que não existem forças de massa aplicadas no domínio do corpo elástico. Obtém-se uma equação só com incógnitas sobre a fronteira (u_k e p_k):

$$c_{1k}^i u_k^i + \int_T p_{1k}^* u_k dT = \int_T u_{1k}^* p_k dT \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.30)$$

A aproximação do método dos elementos de fronteira consiste em dividir a fronteira em elementos de superfície, discretizados num conjunto de pontos nodais, sendo as funções u_k e p_k aproximadas à custa dos seus valores nos pontos nodais, utilizando funções interpoladoras.

A equação integral é aplicada de uma forma discretizada a cada um dos pontos nodais x_i da fronteira T , segundo as direcções dos três eixos coordenados, sendo os integrais calculados numericamente sobre cada elemento. Sendo N o número total de pontos nodais, resultantes da discretização da fronteira T em elementos, obtém-se um sistema de $3N$ equações lineares envolvendo os $3N$ valores de deslocamentos e os $3N$ valores de pressões. Como num problema correctamente formulado se impõem condições de fronteira num total de $3N$ valores nodais, obtém-se um sistema de $3N$ equações a $3N$ incógnitas que, uma vez resolvido, fornece os restantes $3N$ valores de fronteira.

Note-se que a existência de forças de massa aplicadas no domínio Ω pode ser tratada por um processo simples de integração sobre células em que o domínio é dividido (Brebbia, 1978), gerando uma contribuição adicional para o termo independente do sistema de equações. Estas células não são elementos finitos mas sim subdomínios utilizados apenas para a integração numérica.

No que se segue, tratar-se-á da discretização para o caso tridimensional, mas os conceitos continuam a ser válidos no caso bidimensional.

Em primeiro lugar há, pois, que dividir a fronteira em elementos de superfície. Estes elementos, como já foi referido, podem ter várias formas (triangular ou quadrangular), e admitir vários graus de variação das funções no seu domínio (constantes, lineares, parabólicos, etc.).

As coordenadas cartesianas x_k de um ponto arbitrário, localizado sobre um elemento de fronteira, são dadas a partir das coordenadas dos

pontos nodais x_{jk}^e :

$$x_k = N_j x_{jk}^e \quad \begin{matrix} (j = 1, 2, \dots, P) \\ (k = 1, 2, 3) \end{matrix} \quad (2.31)$$

em que N_j representa as funções interpoladoras expressas nas coordenadas locais y_m ($m = 1, 2$) do elemento e cujo significado é idêntico ao utilizado na técnica dos elementos finitos e P é o número de pontos nodais do elemento.

Para os deslocamentos e as pressões, a interpolação é, em geral, feita de modo idêntico a partir dos valores nodais:

$$\begin{aligned} u_k &= N_j u_{jk}^e & (j = 1, 2, \dots, P) \\ p_k &= N_j p_{jk}^e & (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Supondo que se discretiza a fronteira T num número E de elementos de fronteira, a equação (2.30) pode escrever-se da seguinte forma:

$$C_{1k}^i u_k^i + \sum_{e=1}^E \left[\int_{T_e} p_{1k}^* u_k dT \right] = \sum_{e=1}^E \left[\int_{T_e} u_{1k}^* p_k dT \right] \quad (2.33)$$

(1, k = 1, 2, 3)

Substituindo as equações (2.32) em (2.33) obtêm-se:

$$C_{1k}^i u_k^i + \left[\sum_{e=1}^E \int_{T_e} p_{1k}^* N_j dT u_{jk}^e \right] = \sum_{e=1}^E \left[\int_{T_e} u_{1k}^* N_j dT p_{jk}^e \right] \quad (2.34)$$

(i = 1, 2, ..., N)
(j = 1, 2, ..., P)
(1, k = 1, 2, 3)

Os integrais sobre os elementos são calculados por técnicas de integração numérica explicitadas adiante, utilizando-se o método da quadratura de Gauss.

A equação (2.34) é válida para o ponto nodal i sobre a fronteira e para o grau de liberdade l . Efectuando o espalhamento das matrizes pelos pontos nodais, obtêm-se uma equação genérica:

$$C_{1k}^i u_{ik} + \hat{H}_{iljk} u_{jk} = G_{iljk} p_{jk} \quad \begin{matrix} (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ (1, k = 1, 2, 3) \end{matrix} \quad (2.35)$$

em que u_{jk} e p_{jk} representam, respectivamente, o deslocamento e a

pressão no nó j da estrutura, segundo a direcção k . Os termos \hat{H}_{iljk} e G_{iljk} são:

$$\hat{H}_{iljk} = \int_{T_e} p_{ik}^* N_j dT \quad (2.36)$$

$$G_{iljk} = \int_{T_e} u_{ik}^* N_j dT$$

Considerando uma equação matricial global pode escrever-se:

$$(C + \hat{H}) U = GP \quad (2.37)$$

em que os vectores U e P contêm todos os deslocamentos e pressões em todos os pontos nodais. C é uma matriz quase-diagonal em que sô os termos das submatrizes diagonais de 3×3 contêm elementos não nulos, podendo deste modo ser somada a \hat{H} . Então, a equação matricial que se obtém é:

$$HU = GP \quad (2.38)$$

No caso de existirem forças de massa aplicadas no domínio Ω , a equação tem mais um termo respeitante à já referida integração so bre as células. Este termo será um vector B dado por:

$$B_{il} = \sum_{d=1}^D \int_{\Omega_d} u_{ik}^* b_k d\Omega \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.39)$$

em que D é o número total de células em que o domínio é dividido. Adicionando este termo ao segundo membro da equação (2.38), obtém - se em forma matricial:

$$HU = GP + B \quad (2.40)$$

A equação (2.40) representa o sistema de $3N$ equações já referi do, em que existem $3N$ valores de pressões $3N$ valores de deslocamen tos. Como se disse, num problema correctamente formulado são sempre impostos à partida um número total de $3N$ valores de pressões e des locamentos, restando $3N$ incôgnitas em que algumas são pressões e ou tras são deslocamentos. Assim, têm-se algumas incôgnitas U no pri meiro membro e algumas incôgnitas P no segundo membro. Para se resol

ver o sistema de equações, impõe-se um reordenamento das equações, de tal modo que se obtenham todas as incógnitas no primeiro membro e todos os valores conhecidos no segundo:

$$AX = MY + B \quad (2.41)$$

em que X é o vector das incógnitas, Y é o vector dos valores conhecidos e A e M são duas matrizes resultantes de H e G por troca de algumas das suas colunas. Sendo assim, é possível efectuar o produto MY e somar a B, obtendo-se um vector F dos termos independentes do sistema de equações:

$$AX = F \quad (2.42)$$

A matriz A é uma matriz cheia e não simétrica, sendo o sistema de equações, normalmente, resolvido pelo algoritmo de Gauss.

Uma vez calculados os valores das incógnitas X do sistema de equações (2.42), têm-se os deslocamentos e as pressões em todos os pontos nodais da fronteira, sendo os valores de u e p em qualquer ponto da fronteira determinados a partir dos valores nodais do elemento sobre o qual se encontra, com base nas expressões (2.32).

Nota-se que, para o cálculo total da matriz H, é ainda necessário determinar os valores das submatrizes da sua diagonal principal. Estas submatrizes são constituídas pela soma de duas parcelas, a primeira das quais diz respeito à matriz C e a segunda à matriz \hat{H} . Os valores da matriz C, ou seja C_{ik}^i , dizem respeito, como já foi referido, à configuração da fronteira em cada ponto x_i , podendo ser deduzidos por via analítica para configurações simples. Por outro lado, para o cálculo dos termos das submatrizes da diagonal principal de \hat{H} , ou seja \hat{H}_{ijkl} , alguns dos integrandos tendem para infinito pois, quando $r \rightarrow 0$, vem que $p_{ik}^* = 0(1/r^2) \rightarrow \infty$. No entanto, não é necessário determinar nenhum destes valores separadamente. A soma das duas parcelas que constituem estas submatrizes H_{ilik} da matriz H, podem ser determinadas, de uma forma indirecta, por considerações de translações de corpo rígido segundo as direcções dos eixos coordenados.

Assim, considere-se um corpo elástico finito ao qual é aplicada uma translação de corpo rígido de valor unitário segundo cada um dos três eixos coordenados. A equação (2.38) transforma-se em:

$$HI_1 = 0 \quad (2.43)$$

visto que de um deslocamento de corpo rígido não resultam quaisquer pressões na fronteira do corpo. l_j representa um vector que corresponde aos deslocamentos unitários nos pontos de fronteira segundo o eixo coordenado l . Decompondo H e escrevendo em notação indicial, tem-se, para cada ponto x_i :

$$c_{lk}^i + \hat{H}_{iljk} = 0 \quad \begin{matrix} (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ (l, k = 1, 2, 3) \end{matrix} \quad (2.44)$$

Passando para o segundo membro os termos de \hat{H} em que $i \neq j$ vem:

$$c_{lk}^i + \hat{H}_{iljk} \delta_{ij} = - (1 - \delta_{ij}) \hat{H}_{iljk} \quad (2.45)$$

ou seja:

$$H_{ilik} = c_{lk}^i + \hat{H}_{ilik} = - (1 - \delta_{ij}) \hat{H}_{iljk} \quad (2.46)$$

Esta expressão é válida para domínios finitos. No entanto, para domínio infinitos ou parcialmente infinitos, é necessário adicionar um termo correspondente à integração sobre a fronteira no infinito, seguindo o procedimento utilizado na secção 2.3.4.2, na medida em que as condições de regularidade, definidas na expressão (2.26), já não são satisfeitas, visto que, neste caso, o valor do deslocamento quando $r_0 \rightarrow \infty$ não tende para zero, tomando um valor constante, unitário. Consequentemente, a expressão (2.25) transforma-se, nestes casos, em:

$$c_{lk}^i u_k + u_k \int_T p_{lk}^* dT + \lim_{r_0 \rightarrow \infty} u_k \int_{T_0} p_{lk}^* dT = 0 \quad (2.47)$$

$$(l, k = 1, 2, 3)$$

pois que os p_k são nulos. Os u_k correspondem à translacção de corpo rígido e, como os seus valores são unitários em todo o domínio infinito, pode-se escrever:

$$c_{lk}^i + \hat{H}_{iljk} + \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{T_0} p_{lk}^* dT = 0 \quad \begin{matrix} (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ (l, k = 1, 2, 3) \end{matrix} \quad (2.48)$$

ou, separando os termos com $i = j$ dos termos com $i \neq j$:

$$H_{i1ik} = - \left[(1 - \delta_{ij}) H_{i1ik} + \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{T_0} p_{1k}^* dT \right] \quad (2.49)$$

Este último integral sobre T_0 é um integral azimutal (Watson, 1979) e tem de ser calculado para cada caso. No caso do domínio do corpo elástico ser todo o espaço tridimensional, a menos de algumas cavidades finitas, o valor do integral azimutal pode ser deduzido por condições de equilíbrio, atendendo a que p_{1k}^* corresponde a uma força unitária aplicada na direcção 1. Virá, então:

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{T_0} p_{1k}^* dT = - \delta_{1k} \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.50)$$

No caso geral de o domínio do corpo elástico ser só uma parcela do espaço infinito tridimensional, o valor do integral azimutal tem de ser determinado analiticamente. Considere-se um corpo com um domínio parcialmente infinito e incluindo algumas cavidades finitas. Tome-se um ponto arbitrário x_0 no domínio do corpo e seja r_0 o raio de uma esfera centrada em x_0 . Seja T_0 a intersecção da superfície da esfera com o domínio do corpo elástico. É esta parcela da superfície da esfera que constitui o domínio da integração azimutal, achando-se depois o seu limite quando $r_0 \rightarrow \infty$. Como se verifica facilmente, o valor deste integral é independente da existência de cavidades finitas.

Vai-se determinar o valor do integral azimutal para o tipo de domínios tridimensionais parcialmente infinitos mais correntemente utilizados (Fig. 2.6). Com este tipo de domínio poder-se-ão tratar, entre outros, os casos de um oitavo, um quarto, ou meio espaço, que são comumente utilizados. Como o ponto x_0 é arbitrário, considera-se, por simplicidade, coincidente com a origem de sistema de eixos $OX_1X_2X_3$. A superfície de integração é a calote esférica representada na fig. 2.6 e é definida por quatro ângulos ($\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ e ψ_2) e pelo raio r . No cálculo dos integrais usam-se coordenadas esféricas (r, φ, ψ) , sendo o determinante do Jacobiano da transformação de coordenadas cartesianas para esféricas dado por:

$$|J| = r^2 \cos \psi \quad (2.51)$$

Escrevendo o integral azimutal em coordenadas esféricas vem:

$$\int_{T_0} p_{1k}^* dT = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_{1k}^* |J| d\varphi d\psi = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_{1k}^* r^2 \cos\psi d\varphi d\psi \quad (2.52)$$

(1, k = 1, 2, 3)

Como o Jacobiano é $|J| = 0(r^2)$ e a solução fundamental em pressões é $p_{1k}^* = 0(1/r^2)$, o integrando fica independente do raio, o mesmo acontecendo com o valor do integral, não havendo, portanto, necessidade de proceder ao cálculo do seu limite quando $r_0 \rightarrow \infty$.

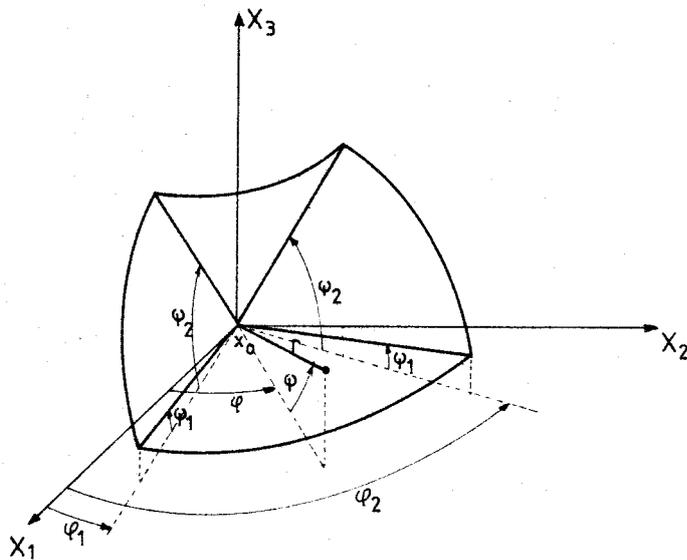


Fig. 2.6 - Definições geométricas para cálculo do integral azimutal no caso tridimensional.

normal são os seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos\varphi \cos\psi = n_1 \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} = \text{sen}\varphi \cos\psi = n_2 \\ \frac{\partial r}{\partial x_3} = \text{sen}\psi = n_3 \end{array} \right. \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 1 \quad (2.54)$$

Recorde-se a expressão (2.16) da solução fundamental em pressões p_{1k}^* para o caso tridimensional. As derivadas do raio em relação a x_1 , x_2 e x_3 e em relação à normal, são calculadas a partir das expressões (2.17). A normal é definida como vector unitário, perpendicular à superfície T_0 em cada ponto e orientada para o exterior do corpo elástico. No caso da calote esférica da fig. 2.6, os valores das derivadas de r e dos versores da

Substituindo (2.53) e (2.54) na expressão (2.16) da solução fundamental em pressões, e integrando da forma indicada na expressão (2.52), obtêm-se a seguinte expressão:

$$\int_{T_0} P_{1k}^* dT = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \begin{bmatrix} (1-2\nu)+3\cos^2\varphi\cos^2\psi & 3\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi & 3\cos\varphi\sin\psi\cos\psi \\ & (1-2\nu)+3\sin^2\varphi\cos^2\psi & 3\sin\varphi\sin\psi\cos\psi \\ \text{Sim.} & & (1-2\nu)+3\sin^2\psi \end{bmatrix} \cos\psi \, d\varphi \, d\psi \quad (2.55)$$

Procedendo à integração desta matriz obtêm-se:

$$\int_{T_0} P_{1k}^* dT = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \dot{c}_{1k} \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.56)$$

em que:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} &= (1-2\nu)(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1) + \frac{1}{2} \left[(\varphi_2 - \varphi_1) + (\sin\varphi_2 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_1) \right] \left[3(\sin\psi_2 - \sin\psi_1) - (\sin^3\psi_2 - \sin^3\psi_1) \right] \\ \dot{c}_{22} &= (1-2\nu)(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1) + \frac{1}{2} \left[(\varphi_2 - \varphi_1) - (\sin\varphi_2 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_1) \right] \left[3(\sin\psi_2 - \sin\psi_1) - (\sin^3\psi_2 - \sin^3\psi_1) \right] \\ \dot{c}_{33} &= (\varphi_2 - \varphi_1) \left[(1-2\nu)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1) + (\sin^3\psi_2 - \sin^3\psi_1) \right] \\ \dot{c}_{12} &= \dot{c}_{21} = \frac{1}{2} (\sin^2\varphi_2 - \sin^2\varphi_1) \left[3(\sin\psi_2 - \sin\psi_1) - (\sin^3\psi_2 - \sin^3\psi_1) \right] \\ \dot{c}_{13} &= \dot{c}_{31} = -(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)(\cos^3\psi_2 - \cos^3\psi_1) \\ \dot{c}_{23} &= \dot{c}_{32} = (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)(\cos^3\psi_2 - \cos^3\psi_1) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Estas expressões foram deduzidas para valores de ψ entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ e sô para valores entre estes limites poderão ser utilizadas.

A expressão final para cálculo dos termos das submatrizes de 3×3 da diagonal principal de H , no caso de equilíbrios tridimensionais, é obtida substituindo (2.56) em (2.49):

$$H_{i1ik} = - \left[(1-\delta_{ij}) \hat{H}_{i1jk} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \dot{c}_{1k} \right] \quad (i, j=1, 2, 3, \dots, N) \quad (1, k=1, 2, 3) \quad (2.58)$$

No caso bidimensional, o procedimento adoptado para cálculo dos termos das submatrizes de 2×2 da diagonal principal de H , é idêntico ao seguido para o caso tridimensional. Determinou-se o valor do integral azimutal para sectores circulares, que constituem um tipo de domínio bastante utilizado (Fig. 2.7). Com este tipo de domínio, poder-se-ão tratar os casos de um quarto, ou meio espaço bidimensional. As integrações foram feitas em coordenadas polares na fronteira constituída pelo arco de circunferência representado na fig. 2.7 e definido pelos ângulos α e β e pelo raio r . O determinante do Jacobiano da transformação de coordenadas cartesianas para polares é:

$$|J| = r \quad (2.59)$$

Em coordenadas polares, o integral azimutal vem:

$$\int_{T_0} p_{1k}^* dT = \int_{\beta}^{\alpha} p_{1k}^* |J| d\varphi = \int_{\beta}^{\alpha} p_{1k}^* r d\varphi \quad (2.60)$$

(1, k = 1, 2, 3)

Identicamente ao que se passa no caso tridimensional, como $|J| = r$ e $p_{1k}^* = 0(1/r)$, também aqui o integrando é independente do raio, não havendo necessidade de proceder ao cálculo do seu limite quando $r_0 \rightarrow \infty$.

Recorde-se a expressão (2.18) da solução fundamental em pressões p_{1k}^* para o caso bidimensional. As derivadas que aparecem nesta expressão, bem como a normal, têm o mesmo significado que no caso tridimensional. Para o arco de circunferência da fig. 2.7, os seus valores são:

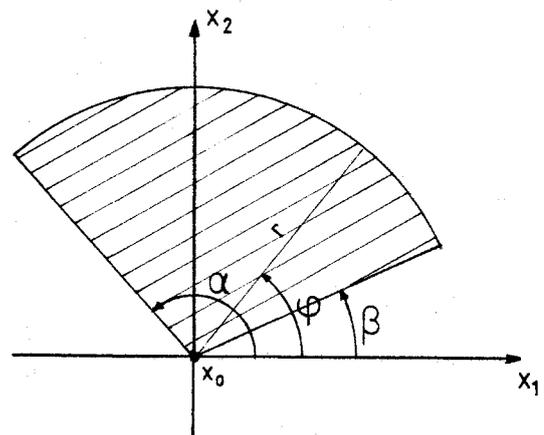


Fig. 2.7 - Definições geométricas para cálculo do integral azimutal no caso bidimensional.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos \varphi = n_1 \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin \varphi = n_2 \end{array} \right. \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 1 \quad (2.62)$$

Substituindo (2.61) e (2.62) na expressão (2.18) da solução fundamental em pressões, e integrando da forma indicada na expressão (2.60), obtêm-se:

$$\int_{T_0} p_{1k}^* dT = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_{\beta}^{\alpha} \begin{bmatrix} (1-2\nu)+2 \cos^2\varphi & 2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ \operatorname{Sim.} & (1-2\nu)+2 \operatorname{sen}^2\varphi \end{bmatrix} d\varphi \quad (2.63)$$

Procedendo à integração, vem:

$$\int_{T_0} p_{1k}^* dT = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \dot{c}_{1k} \quad (1, k = 1, 2, 3) \quad (2.64)$$

em que:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} &= 2(1-\nu)(\alpha-\beta) + (\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta \cos\beta) \\ \dot{c}_{22} &= 2(1-\nu)(\alpha-\beta) - (\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta \cos\beta) \\ \dot{c}_{12} &= \dot{c}_{21} = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta \end{aligned} \quad (2.65)$$

A expressão final, para cálculo dos termos das submatrizes de 2×2 da diagonal principal de H , no caso de equilíbrios bidimensionais, é obtida substituindo (2.64) em (2.49):

$$H_{i1ik} = - \left[(1 - \delta_{ij}) \hat{H}_{i1jk} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \dot{c}_{1k} \right] \quad \begin{matrix} (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ (1, k = 1, 2) \end{matrix} \quad (2.66)$$

2.3.6 - Equações integrais para pontos interiores

Conforme se viu em 2.3.2, a identidade de Somigliana fornece o campo de deslocamentos no interior do campo elástico (expressão (2.15)). Passando o integral do primeiro membro da equação para o segundo, vem:

$$u_1^i = \int_T u_{1k}^* p_k dT - \int_T p_{1k}^* u_k dT + \int_{\Omega} u_{1k}^* b_k d\Omega \quad (2.67)$$

$$\begin{matrix} (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ (1, k = 1, 2, 3) \end{matrix}$$

O tensor das tensões é obtido por diferenciação desta equação de deslocamentos, de modo a obter-se o tensor das deformações ϵ_{1k} e multiplicando este pela matriz de elasticidade. Para um meio isotrópico, as tensões são dadas por:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j, l = 1, 2, 3) \quad (2.68)$$

Diferenciando directamente dentro dos integrais da equação (2.67) e, tendo em atenção a forma como são calculadas as derivadas de r , obtém-se a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (2.69)$$

(i, j, l, k = 1, 2, 3)

em que as componentes dos tensores de terceira ordem D_{kij} e S_{kij} são:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\alpha r(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left[\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \right] + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (2.70)$$

$$S_{kij} = \frac{G}{2\alpha r(1-\nu)} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \beta \nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) \right. \\ \left. (\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \quad (2.71)$$

em que $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$. Os valores de α , β e γ para os casos bi e tridimensionais são:

- Caso bidimensional : $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = 4$
- Caso tridimensional : $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $\gamma = 5$

2.3.7 - Discretização das equações integrais para pontos interiores

A equação integral para cálculo de deslocamentos em pontos interiores é a indicada em (2.67). Não se considerando a existência de forças de massa, reduz-se a:

$$u_l^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma \quad (l, k = 1, 2, 3) \quad (2.72)$$

Neste caso, o ponto x_i de aplicação da carga unitária da solução fundamental, é o ponto interior onde se vai determinar a componente do deslocamento segundo a direcção 1.

Tal como para a equação integral na fronteira, esta equação é aplicada de uma forma discretizada a cada um dos pontos interiores x_i , calculando-se os integrais numericamente em cada elemento de fronteira, a partir dos valores já conhecidos dos deslocamentos e das pressões em todos os pontos nodais. A equação discretizada tem a seguinte forma:

$$u_1^i = \sum_{e=1}^E \left[\int_{T_e} u_{1k}^* N_j dT \right] p_{jk}^e - \sum_{e=1}^E \left[\int_{T_e} p_{1k}^* N_j dT \right] u_{jk}^e \quad (2.73)$$

(j = 1, 2, ..., P)
(1, k = 1, 2, 3)

Para calcular o tensor das tensões nos pontos interiores utiliza-se a expressão (2.69) a qual, no caso de não se considerarem forças de massa, se transforma, para cada ponto interior, em:

$$\sigma_{ij} = \int_T D_{kij} p_k dT - \int_T S_{kij} u_k dT \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.74)$$

em que D_{kij} e S_{kij} são definidos pelas expressões (2.70) e (2.71). A discretização da equação é efectuada de forma idêntica à da equação de deslocamentos, obtendo-se a expressão seguinte:

$$\sigma_{ij} = \sum_{e=1}^E \left[\int_{T_e} D_{kij} N_j dT \right] p_{jk}^e - \sum_{e=1}^E \left[\int_{T_e} S_{kij} N_j dT \right] u_{jk}^e \quad (2.75)$$

A variação dos índices é idêntica à da expressão (2.73).

3 - MODELO TRIDIMENSIONAL POR ELEMENTOS DE FRONTEIRA

3.1 - Generalidades

Com base na formulação directa do método dos elementos de fronteira, descrita no capítulo anterior, elaborou-se um modelo para estudo de equilíbrios tridimensionais aplicável a estruturas constituídas por material isótropo, com comportamento elástico linear, inserido num meio homogêneo e contínuo. De facto, este é o caso mais simples de abordar e pensa-se que, no imediato, será útil explorar todas as suas capacidades antes de passar para formulações mais complexas, pois um modelo deste tipo constituirá sempre a base de qualquer modelo mais sofisticado.

Por outro lado, em problemas tridimensionais, os casos a analisar circunscrevem-se, geralmente, a uma zona limitada da estrutura, isto é, pretende-se conhecer o seu comportamento numa zona localizada onde o efeito da tridimensionalidade é importante. Nestes casos, esta formulação, apesar das suas limitações, poderá dar uma boa imagem dos comportamentos tridimensionais. Aliado a estas considerações, há ainda a salientar o facto de o volume de cálculo, neste tipo de problemas, ser bastante grande, o que dificulta sempre a implementação de procedimentos mais complexos.

Nas secções seguintes descreve-se o modelo de cálculo elaborado. Assim, em 3.2 apresenta-se a metodologia seguida para a discretização da fronteira, tratando-se em 3.3 do problema da integração numérica das equações. Finalmente, na secção 3.4, apresentam-se as características gerais do programa de cálculo automático desenvolvido.

3.2 - Discretização da fronteira

Utilizam-se para discretização da fronteira elementos superficiais de 8 nós, quadrangulares, de lados curvos, definidos sobre um sistema de coordenadas naturais η (Fig. 3.1). Estes elementos podem ser planos ou exibir simples ou dupla curvatura. As coordenadas cartesianas x_k de um ponto arbitrário de um elemento são dadas a partir das coordenadas dos pontos nodais x_{jk}^e :

$$x_k = N_j x_{jk}^e \quad \begin{matrix} (j = 1, 2, \dots, 8) \\ (k = 1, 2, 3) \end{matrix} \quad (3.1)$$

em que os N_j representam as funções interpoladoras que são expressas

COORDENADAS LOCAIS

COORDENADAS NATURAIS

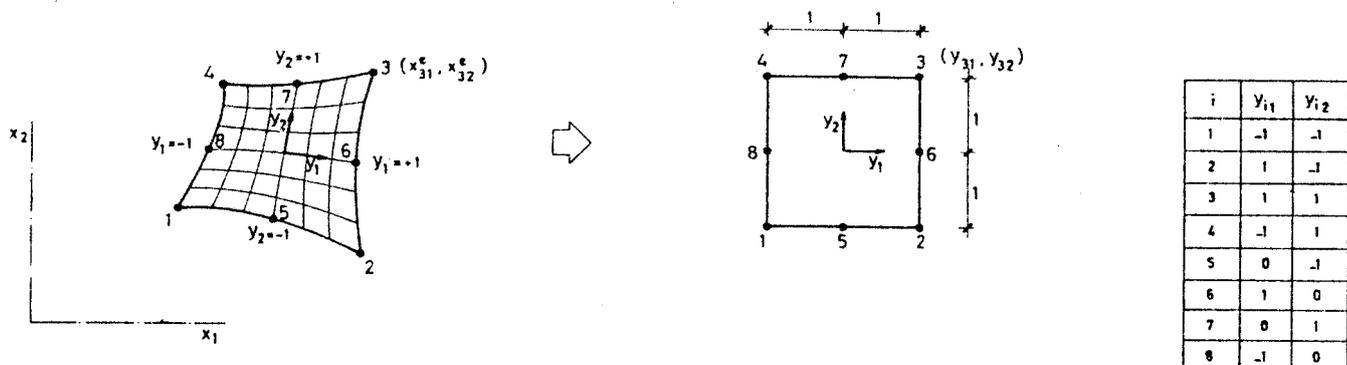


Fig. 3.1 - Elemento quadrangular de oito pontos nodais.

nas coordenadas naturais y_m ($m = 1, 2$) do elemento, e cujo significado é idêntico ao utilizado na técnica dos elementos finitos.

As funções interpoladoras utilizadas são do tipo parabólico, dadas por:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+y_{i1}y_1)(1+y_{i2}y_2)(y_{i1}y_1+y_{i2}y_2-1) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.2)$$

$$N_i = \frac{1}{2} y_{im}^2 (1 - y_{3-m}^2) (1 + y_{im}y_m) \quad \begin{matrix} (i = 5, 6, 7, 8) \\ (m = 1, 2) \end{matrix}$$

sendo y_{im} as coordenadas naturais dos pontos nodais.

Para os deslocamentos e as pressões a interpolação é feita de modo idêntico a partir dos valores nodais através das mesmas funções interpoladoras N_j :

$$u_k = N_j u_{jk}^e \quad (j = 1, 2, \dots, 8) \quad (3.3)$$

$$p_k = N_j p_{jk}^e \quad (k = 1, 2, 3)$$

As funções interpoladoras N_j têm a propriedade de tomar o valor unitário no nó j e zero nos restantes. A sua variação está in

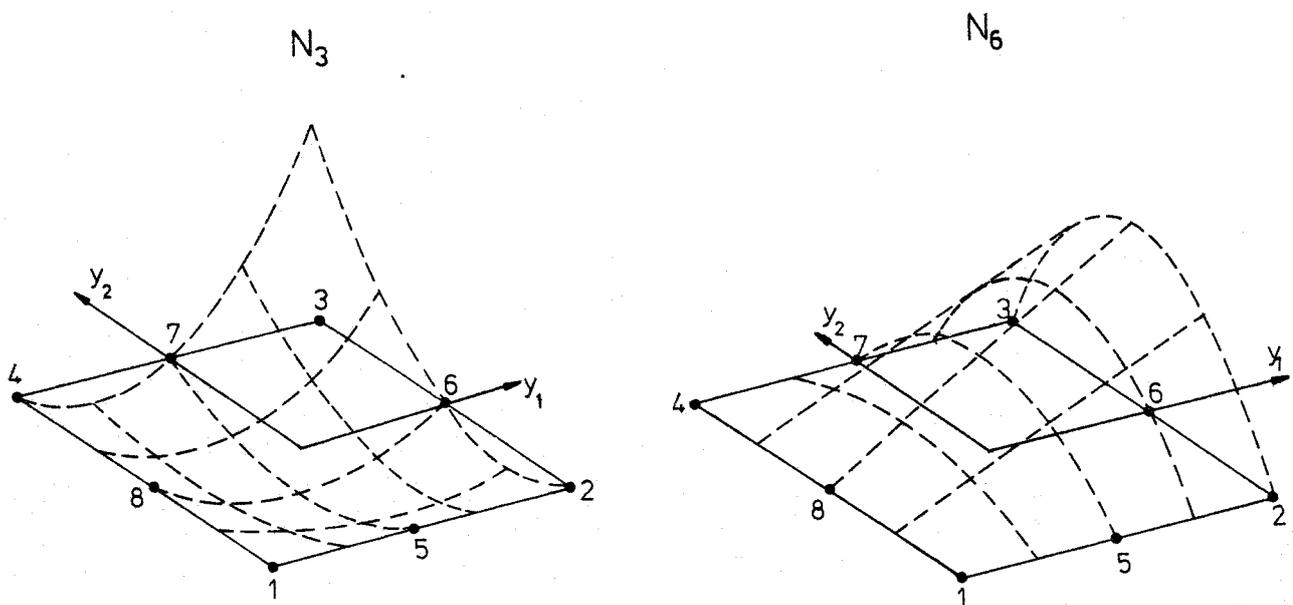


Fig. 3.2 - Funções interpoladoras do tipo parabólico para elementos quadrangulares.

dicada na Fig. 3.2.

3.3 - Métodos de integração numérica

3.3.1 - Integração da equação integral na fronteira

Os integrais da equação integral na fronteira (2.34) são produtos das soluções fundamentais pelas funções de interpolação, e são calculados nos elementos de fronteira quadrangulares pelo método da quadratura de Gauss.

O cálculo numérico do integral de uma função baseia-se na sua substituição por um somatório extendido a um conjunto de pontos do domínio de integração. No caso geral, para um domínio de integração unidimensional, a expressão a aplicar é:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{NG} H_n f(x_n) \quad (3.4)$$

em que H_n são os coeficientes de peso dependentes do número de pon-

tos de integração NG, da sua localização e da amplitude do domínio de integração (b-a).

No método de Gauss, a localização dos pontos de integração é escolhida de tal forma, que permite a integração exacta de polinómios de grau $2n-1$ com n pontos de integração. No Quadro 3.1 é dada uma tabela com os coeficientes de peso e a localização dos pontos até $n = 24$, relativamente ao intervalo de integração $[-1,1]$.

É também possível, com base nestas tabelas, proceder à integração de funções em domínios bidimensionais:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \sum_{a=1}^{NG1} \sum_{b=1}^{NG2} H_a H_b f(y_1, y_2) \quad (3.5)$$

em que NG1 e NG2, H_a e H_b são o número de pontos de integração e os seus pesos utilizados na direcção 1 e na direcção 2 respectivamente.

Os integrais de superfície que é necessário calcular para a equação integral na fronteira são os indicados na expressão (2.36) e que aqui são repetidos:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ijkl} &= \int_{T_e} p_{ik}^* N_j dT \\ G_{ijkl} &= \int_{T_e} u_{ik}^* N_j dT \end{aligned} \quad (3.6)$$

A integração das expressões (3.6) vai fazer-se nas coordenadas locais y_m de cada elemento, definidas na secção 3.2. Sendo T_e uma superfície paramétrica, isto é, definida pelos parâmetros y_1 e y_2 sobre a superfície e sendo f uma função escalar, define-se o integral de superfície de f sobre T_e da seguinte forma (Apostol, 1973):

$$\iint_{T_e} f[x_1, x_2, x_3] dT = \iint_{T_e} f[\vec{r}(y_1, y_2)] \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_2} dy_1 dy_2 \quad (3.7)$$

em que $\vec{r}(y_1, y_2)$ é o raio vector que une a origem do sistema de eixos coordenados cartesianos globais a um ponto genérico (x_1, x_2, x_3) da superfície.

Define-se também o produto vectorial fundamental \vec{G} , que consta da expressão (3.7):

QUADRO 3.1 - Coordenadas dos pontos de integração numérica e seus pesos para a fórmula da quadratura de Gauss

| n | $\pm y_k$ | H_k | n | $\pm y_k$ | H_k |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 2 | 0.5773502692 | 1.0000000000 | 12 | 0.1252334085 | 0.2491470458 |
| 3 | 0.0000000000 | 0.8888888889 | | 0.3678314990 | 0.2334925365 |
| | 0.7745966692 | 0.5555555556 | | 0.5873179543 | 0.2031674267 |
| 4 | 0.3399810436 | 0.6521451549 | 0.7699026742 | 0.1600783285 | |
| | 0.8611363116 | 0.3478548451 | 0.9041172564 | 0.1069393260 | |
| 5 | 0.0000000000 | 0.5688888889 | 0.9815606342 | 0.0471753364 | |
| | 0.5384693101 | 0.4786286705 | 16 | 0.0950125098 | 0.1894506105 |
| | 0.9061798459 | 0.2369268850 | | 0.2816035508 | 0.1826034150 |
| 6 | 0.2386191861 | 0.4679139346 | | 0.4580167777 | 0.1691565194 |
| | 0.6612093865 | 0.3607615730 | 0.6178762444 | 0.1495959888 | |
| | 0.9324695142 | 0.1713244924 | 0.7554044084 | 0.1246289713 | |
| 7 | 0.0000000000 | 0.4179591837 | 0.8656312024 | 0.0951585117 | |
| | 0.4058451514 | 0.3818300505 | 0.9445750231 | 0.0622535239 | |
| | 0.7415311856 | 0.2797053915 | 0.9894009350 | 0.0271524594 | |
| | 0.9491079123 | 0.1294849662 | 20 | 0.0765265211 | 0.1527533871 |
| 8 | 0.1834346425 | 0.3626837834 | | 0.2277858511 | 0.1491729865 |
| | 0.5255324099 | 0.3137066459 | | 0.3737060887 | 0.1420961093 |
| | 0.7966664774 | 0.2223810345 | | 0.5108670020 | 0.1316886384 |
| | 0.9602898565 | 0.1012285363 | 0.6360536807 | 0.1181945320 | |
| 9 | 0.0000000000 | 0.3302393550 | 0.7463319065 | 0.1019301198 | |
| | 0.3242534234 | 0.3123470770 | 0.8391169718 | 0.0832767416 | |
| | 0.6133714327 | 0.2606106964 | 0.9122344283 | 0.0626720483 | |
| | 0.8360311073 | 0.1806481607 | 0.9639719273 | 0.0406014298 | |
| 10 | 0.1488743390 | 0.2955242247 | 0.9931285992 | 0.0176140071 | |
| | 0.4333953941 | 0.2692667193 | 24 | 0.0640568929 | 0.1279381953 |
| | 0.6794095683 | 0.2190863625 | | 0.1911188675 | 0.1258374563 |
| | 0.8650633667 | 0.1494513492 | | 0.3150426797 | 0.1216704729 |
| 0.9739065285 | 0.0666713443 | 0.4337935076 | | 0.1155056681 | |
| 11 | 0.0000000000 | 0.2729250868 | 0.5454214714 | 0.1074442701 | |
| | 0.2695431560 | 0.2628045445 | 0.6480936519 | 0.0976186521 | |
| | 0.5190961292 | 0.2331937646 | 0.7401241916 | 0.0861901615 | |
| | 0.7301520056 | 0.1862902109 | 0.8200019860 | 0.0733464814 | |
| | 0.8870625998 | 0.1255803695 | 0.8864155270 | 0.0592985849 | |
| | 0.9782286581 | 0.0556685671 | 0.9382745520 | 0.0442774388 | |

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_2} \quad (3.8)$$

O seu valor é dado por:

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \end{vmatrix} = g_1 \vec{e}_1 + g_2 \vec{e}_2 + g_3 \vec{e}_3 \quad (3.9)$$

em que:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \frac{\partial x_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ g_2 &= \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} - \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \\ g_3 &= \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

O módulo do produto vectorial fundamental é:

$$G = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \quad (3.11)$$

A função escalar f , dada de uma forma paramétrica, e que constitui o integrando é, no caso presente, o produto das soluções fundamentais pelas funções de interpolação das expressões (3.6). Como as coordenadas locais que definem os elementos de fronteira têm uma variação entre -1 e +1, o integral da expressão (3.7) transforma-se em:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f G dy_1 dy_2 \quad (3.12)$$

Note-se que \vec{r} não tem nada a ver com o raio definido nas expressões (2.16) das soluções fundamentais, sendo o seu significado simplesmente o de raio vector definido atrás.

As derivadas das coordenadas globais x_k em relação às coordenadas locais y_i são calculadas em cada ponto de integração numérica usando as funções de interpolação N_j e os valores nodais x_{jk}^e :

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \frac{\partial N_j}{\partial y_i} x_{jk}^e \quad \begin{matrix} (k = 1, 2, 3) \\ (i = 1, 2) \\ (j = 1, 2, \dots, 8) \end{matrix} \quad (3.13)$$

Uma vez definidos todos estes conceitos respeitantes ao método de integração numérica e ao modo como se calculam os integrais de superfície, podem-se escrever os integrais das expressão (3.6) da seguinte forma:

$$\hat{H}_{ijklk} = \int_{T_e} p_{lk}^* N_j dT = \sum_{a=1}^{NG1} \sum_{b=1}^{NG2} p_{lk}^* N_j G H_a H_b \quad (3.14)$$

$$G_{ijklk} = \int_{T_e} u_{lk}^* N_j dT = \sum_{a=1}^{NG1} \sum_{b=1}^{NG2} u_{lk}^* N_j G H_a H_b$$

Para calcular p_{lk}^* e u_{lk}^* num dado ponto de integração numérica Q dum elemento T_e é necessário fazer uma série de definições geométricas (Fig. 3.3).

O cálculo da normal exterior à superfície do elemento num dado ponto P é feito através do cálculo dos vectores tangentes \vec{t}_1 e \vec{t}_2 segundo os eixos locais y_1 e y_2 :

$$n = \frac{\vec{t}_1 \wedge \vec{t}_2}{|\vec{t}_1 \wedge \vec{t}_2|} \quad (3.15)$$

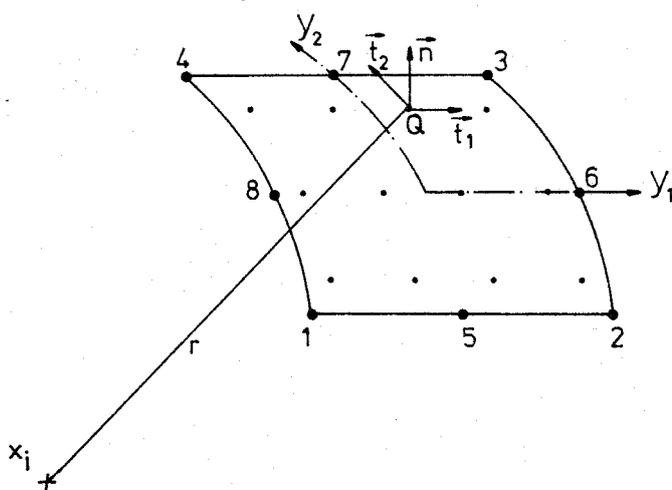


Fig. 3.3 - Definições geométricas; vectores tangentes e vector normal.

em que:

$$\vec{t}_i = \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \vec{e}_k \quad \begin{matrix} (i = 1, 2) \\ (k = 1, 2, 3) \end{matrix} \quad (3.16)$$

Na fig. 3.3, a numeração dos pontos nodais do elemento foi feita no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, obtendo-se o sistema de eixos (y_1, y_2) indicado, e consequentemente, devido à definição de produto vectorial, um vector \vec{n} com o sentido indi-

cado na figura. No caso de a normal exterior ao corpo elástico não ter este sentido, mas sim o sentido inverso, há que numerar os pontos nodais do elemento no sentido dos ponteiros do relógio.

Como a variação dos integrandos de (3.14) no domínio de um elemento T_e é muito diferente conforme a localização relativa do elemento de fronteira sobre o qual se está a proceder à integração e do ponto x_i de aplicação da carga unitária, usam-se dois esquemas de integração numérica distintos consoante o ponto x_i pertence ou não ao elemento T_e .

No primeiro caso, em que o ponto x_i não pertence ao elemento T_e , a integração é feita, sobre o elemento, utilizando directamente as expressões (3.14).

No segundo caso, em que o ponto x_i pertence ao elemento T_e , a variação do integrando no domínio do elemento é muito maior, pelo que se utiliza um esquema de integração alternativo. O elemento quadrangular é dividido em 2 ou 3 subelementos triangulares, conforme se indica na Fig. 3.4.

A integração em cada subelemento é feita relativamente ao sis-

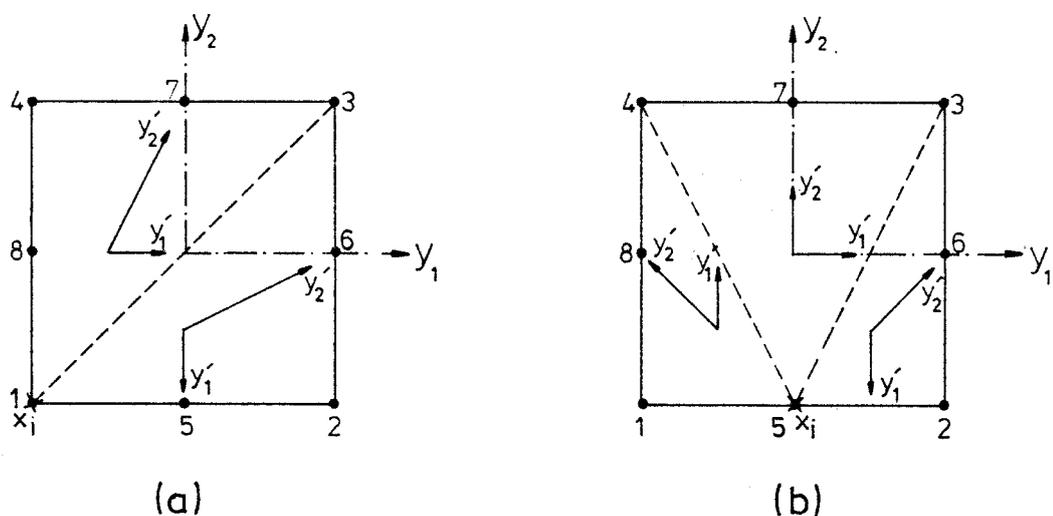


Fig. 3.4 - Divisão dos elementos quadrangulares em triângulos para integração numérica; (a) ponto x_i no canto; (b) ponto x_i a meio do lado.

tema de coordenadas (y'_1, y'_2) obtidas por uma transformação das coordenadas naturais (y_1, y_2) do elemento T_e . Para o subelemento triangular definido pelos pontos nodais 1, 2 e 3 da fig. 3.4(a), a transformação é a representada na Fig. 3.5.

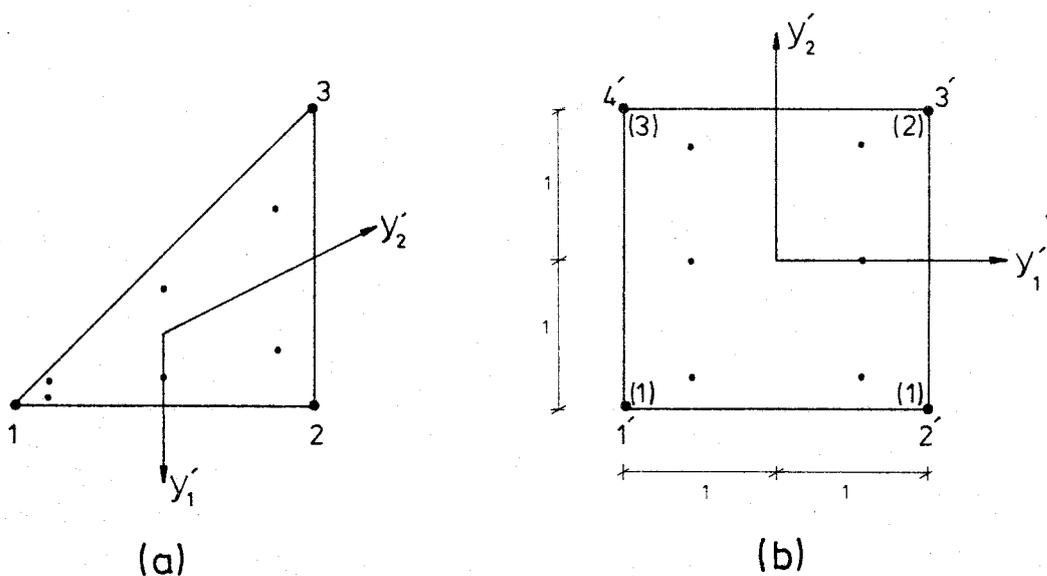


Fig. 3.5 - Esquema de integração numérica nos subelementos triangulares.

Através desta transformação, o elemento triangular passou a ser representado por um domínio rectangular com 4 pontos nodais nos vértices. Na fig. 3.5(b) estão representados, entre parêntesis, os números dos nós do subelemento triangulares, correspondendo os restantes à numeração do novo elemento quadrangular. Esta transformação permite obter uma maior concentração de pontos de integração numérica junto ao ponto singular x_i , onde a variação dos integrandos é mais rápida, conduzindo a um valor mais correcto do integral.

Para proceder à integração nas coordenadas (y_1', y_2') é necessário proceder ao cálculo do Jacobiano da transformação:

$$\iint dy_1 dy_2 = \iint |J| dy_1' dy_2' \quad (3.17)$$

em que $|J|$ é o determinante do Jacobiano, dado por:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_1'} & \frac{\partial y_2}{\partial y_1'} \\ \frac{\partial y_1}{\partial y_2'} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2'} \end{vmatrix} = \frac{\partial y_1}{\partial y_1'} \frac{\partial y_2}{\partial y_2'} - \frac{\partial y_2}{\partial y_1'} \frac{\partial y_1}{\partial y_2'} \quad (3.18)$$

As coordenadas y_i ($i = 1, 2$) são definidas, para cada subelemento, em função das coordenadas y_{ji}^e , dos pontos nodais $1', 2', 3'$ e $4'$ da

fig. 3.5:

$$y_i = N_j^i y_{ji}^e \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.19)$$

em que N_j^i são as funções de interpolação utilizadas para elementos quadrangulares lineares:

$$N_j^i = \frac{1}{4} (1 + y_{j1}^i y_1^i) (1 + y_{j2}^i y_2^i) \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.20)$$

De forma idêntica à expressão (3.13), as derivadas de y_k relativamente a y_i^i são calculadas pela expressão:

$$\frac{\partial y_k}{\partial y_i^i} = \frac{\partial N_j^i}{\partial y_i^i} y_{jk}^e \quad \begin{matrix} (i, k = 1, 2) \\ (j = 1, 2, 3, 4) \end{matrix} \quad (3.21)$$

As expressões homólogas a (3.14), para o caso de o ponto x_i pertencer ao elemento T_e , serão:

$$\begin{aligned} H_{i1jk} &= \int_{T_e} p_{1k}^* N_j dT = \sum_{n_t=1}^{NT} \left[\begin{array}{cc} NG1 & NG2 \\ \sum_{a=1} & \sum_{b=1} \end{array} p_{1k}^* N_j G |J| H_a H_b \right] \\ G_{i1jk} &= \int_{T_e} u_{1k}^* N_j dT = \sum_{n_t=1}^{NT} \left[\begin{array}{cc} NG1 & NG2 \\ \sum_{a=1} & \sum_{b=1} \end{array} u_{1k}^* N_j G |J| H_a H_b \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

em que NT é o número de triângulos em que o elemento quadrangular é dividido.

3.3.2 - Integração das equações integrais para pontos interiores

Os integrais da equação (2.73), para cálculo dos deslocamentos em pontos interiores, são idênticos aos da equação integral na fronteira, pelo que a sequência utilizada para os calcular é idêntica à exposta na secção anterior. Neste caso, como o ponto singular x_i de aplicação da carga unitária não pertence à fronteira T , nunca se utiliza o esquema de divisão dos elementos de fronteira quadrangulares em subelementos triangulares. As expressões que se utilizam para cálculo dos integrais são portanto, idênticas às expressões (3.14).

Os integrais da equação (2.75), para cálculo das tensões em pontos interiores, são ainda idênticos aos da equação integral na fronteira, com a única diferença de nos integrandos não aparecerem as

soluções fundamentais, mas sim os tensores D_{kij} e S_{kij} definidos pelas expressões (2.70) e (2.71). Assim, há que calcular os seus valores nos pontos de integração numérica, e proceder à integração, de forma idêntica à utilizada para o cálculo dos deslocamentos em pontos interiores.

3.3.3 - Determinação da ordem de integração numérica

Até aqui ainda não se referiu qual a ordem das fórmulas de integração de Gauss a utilizar, ou seja, qual o número de pontos de integração numérica que deverão ser utilizados em cada elemento, para cada direcção y_i e cada ponto singular x_i . É evidente que, se se usarem em todas as integrações fórmulas da mesma ordem, haverá um desperdício de tempo de processamento, visto que, para elementos de grandes dimensões, é necessário usar fórmulas de ordem elevada que, aplicadas a elementos pequenos e com pequena variação do integrando, não melhoram substancialmente a precisão obtida com uma ordem de integração bastante menor. No caso tridimensional, este acréscimo de cálculo desnecessário é proporcional ao quadrado da ordem de integração. Como, especialmente em problemas tridimensionais, o tempo de processamento para construção do sistema de equações é bastante superior ao da sua resolução, é conveniente incorporar um algoritmo que escolha automaticamente a ordem da fórmula de integração numérica a utilizar em cada caso, de forma a obter-se uma precisão uniforme, em todas as integrações.

A dedução das fórmulas que vão permitir a elaboração deste algoritmo foi apresentada por Lachat (1975), apresentando-se aqui os seus tópicos principais.

A escolha da ordem de integração a utilizar baseia-se na fórmula do limite superior do erro da integração dada por Stroud e Secrest (Lachat, 1975). Este limite é função das derivadas de ordem $2n$ do integrando, sendo n a ordem da fórmula de integração:

$$\left| \int_{-1}^{+1} f(y) dy - \sum_{k=1}^n H_k f(y_k) \right| \leq C M \quad (3.23)$$

em que:

$$\left| \frac{\partial^{2n} f}{\partial y^{2n}} \right| \leq M \quad (3.24)$$

A função C é dada de uma forma aproximada por:

$$C \approx \frac{4}{2^{2n} n!} \quad (3.25)$$

Estas expressões podem ser generalizadas para o caso bidimensional:

$$\left| \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 - \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} H_k H_l f(y_1, y_2) \right| \leq 2 \sum_{r=1}^2 C_r M_r \quad (3.26)$$

em que:

$$\left| \frac{\partial^{2n_r} f}{\partial y_r^{2n_r}} \right| \leq M_r \quad (3.27)$$

$$C_r = \frac{4}{2^{2n_r} (2n_r)!} \quad (3.28)$$

Seria impraticável calcular o limite do erro das funções completas (produto das soluções fundamentais pelas funções de interpolação), havendo portanto necessidade de fazer algumas simplificações. Assim, considera-se representativa do integrando a função $1/r^2$, pois esta é a sua parcela que varia mais rapidamente. Outra simplificação, que é necessário fazer, é considerar o Jacobiano da transformação das coordenadas locais para globais $\partial s / \partial y_r$ (em que s é o comprimento do arco), constante em todo o elemento, e igual ao seu valor na origem dos eixos locais.

Lachat, além destas simplificações, adopta ainda dois critérios:

- 1) O limite superior do erro é proporcional ao produto de $1/R^2$ pela área do elemento (em que R é a mínima distância do ponto singular x_i ao elemento).
- 2) Tanto quanto possível $C_1 M_1 = C_2 M_2$, isto é, a integração é igualmente precisa em ambas as direcções.

Com base nas simplificações referidas e nestes dois critérios, chegou-se a uma expressão simplificada, a partir da qual se pode determinar a ordem de integração a utilizar em cada caso e para a direcção r .

$$(2n_r + 1) \alpha_r^{2n_r} \leq K \quad (3.29)$$

em que

$$\alpha_r = \frac{\partial s}{\partial y_r} \frac{1}{2R} \quad (3.30)$$

K é uma constante que deverá ser escolhida com base na experiência e que traduz a precisão que se pretende obter na integração.

Com base nesta expressão, Watson (1979) fez uma série de simplificações, obtendo uma fórmula de mais fácil aplicação. Considera que o elemento é um rectângulo de lados L_1 e L_2 (cujo cálculo será explicitado adiante), de Jacobiano constante, e que o ponto singular x_i está a uma distância R de um dos lados (Fig. 3.6).

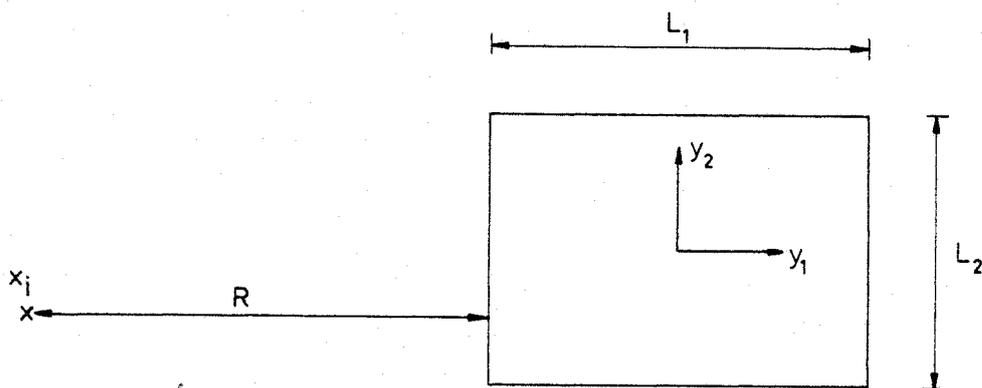


Fig. 3.6 - Definições geométricas para o cálculo simplificado da ordem de integração numérica

A fórmula que se obtém é:

$$(2n_r + 1) \left(\frac{L_r}{4R}\right)^{2n_r} \leq K L_1 L_2 \quad (3.31)$$

em que K tem o mesmo significado que na expressão (3.29).

Esta é a expressão utilizada no modelo de cálculo desenvolvido, para de terminação das ordens de integração numérica a utilizar, apenas com uma pequena alteração. Em vez de se utilizar o produto $L_1 L_2$, que representa as dimensões da região de integração, utilizou-se a sua

área A, obtendo-se a expressão final:

$$\frac{(2n_r + 1)}{A} \left(\frac{L_r}{4R}\right)^{2n_r} \leq K \quad (3.32)$$

Para cálculo dos deslocamentos e tensões em pontos interiores, Lachat deduz também a expressão a utilizar:

$$\frac{1}{2}(2n_r + 1)(2n_r + 2) \alpha_r^{2n_r} \leq K \quad (r = 1, 2) \quad (3.33)$$

em que todos os símbolos têm o mesmo significado que na expressão (3.29). Introduzindo as modificações feitas por Watson e substituindo do $L_1 L_2$ pela área A, obtém-se a expressão final:

$$\frac{(2n_r + 1)(2n_r + 2)}{2A} \left(\frac{L_r}{4R}\right)^{2n_r} \leq K \quad (3.34)$$

Na aplicação da expressão (3.32) considerou-se como limite mínimo de R o valor do lado L_r :

$$R \geq L_r \quad (3.35)$$

Esta limitação do valor mínimo de R evita que o termo $L_r/4R$ da expressão (3.32) tome valores maiores que 0,25, que conduziriam a valores de n_r extremamente elevados. No caso de o ponto singular pertencer ao elemento sobre o qual se está a proceder à integração, arbitrou-se para o valor do raio $R = L_r$ pois, uma vez que os elementos quadrangulares são, neste caso, divididos em subelementos triangulares, a precisão obtida tomando este valor de R é suficiente.

No caso da aplicação da expressão (3.34) para pontos interiores considerou-se como limite mínimo para o valor do raio:

$$R \geq L_r/2 \quad (3.36)$$

Foi adoptado este valor e não o mesmo de (3.35), pois o cálculo de tensões em pontos interiores próximos da fronteira é geralmente afectado de um erro considerável, obrigando-se deste modo a uma integração mais precisa.

Para aplicação das fórmulas (3.32) e (3.34), calculam-se em primeiro lugar as áreas A e os comprimentos dos lados L_r de todos os elementos. Os valores de L_r calculados são o comprimento entre os

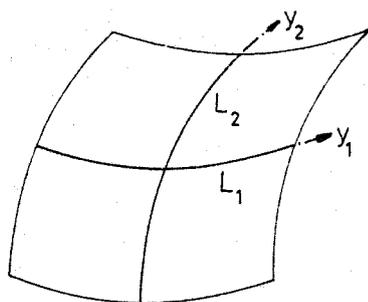


Fig. 3.7 - Definição dos lados L_r para cálculo do seu comprimento.

dois lados extremos do elemento, medidos sobre os eixos locais (Fig. 3.7).

A área é calculada pela expressão:

$$A = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G \, dy_1 \, dy_2 \quad (2.37)$$

em que G é dado por (3.11). O integral desta expressão é calculado, numericamente, com dois pontos de integração em cada direcção. Para $n = 2$, integram-se exactamente polinómios de grau 3, o que é suficiente.

Para determinação de L_1 e L_2 calculam-se primeiro as coordenadas de um ponto auxiliar 0 localizado na origem do sistema de eixos locais (Fig. 3.8). Esse ponto formará,

com os dois pontos extremos, uma linha no espaço tridimensional cujo comprimento é dado por:

$$L_r = \int_{-1}^{+1} G_r \, dy_r \quad (3.38)$$

em que:

$$G_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial y_r}\right)^2} \quad (3.39)$$

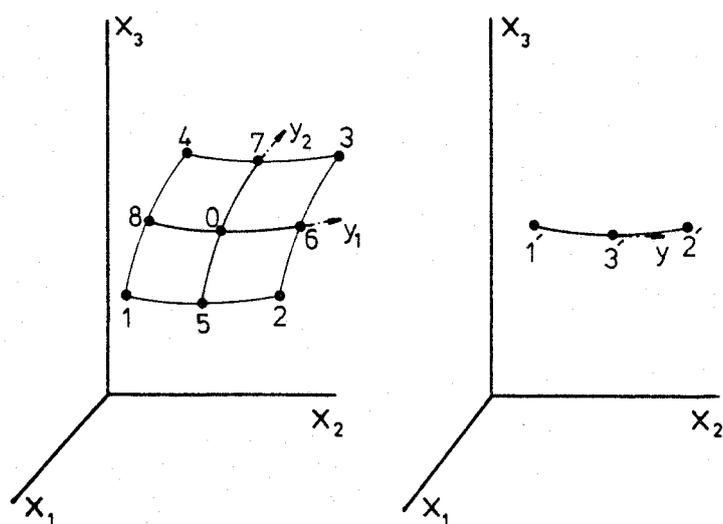


Fig. 3.8 - Definição do ponto central de um elemento quadrangular.

O integral da expressão (3.38) é calculado, numericamente, com dois pontos de integração, utilizando-se para este tipo de elemento de linha, para cálculo das derivadas da expressão (3.39), funções interpoladoras definidas por:

$$x_i = N_j x_{ij}^e \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3) \\ (j = 1, 2, 3) \end{matrix} \quad (3.40)$$

$$N_1 = \frac{1}{2} y(y - 1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} y(1 + y) \quad (3.41)$$

$$N_3 = (1 - y)(1 + y)$$

em que os x_{ij}^e são as coordenadas globais dos pontos 1', 2' e 3' da fig. 3.8.

Uma vez determinados os valores de A , L_1 e L_2 , só falta conhecer o valor de R para se aplicarem as fórmulas (3.32) e (3.34). Para cada ponto singular x_i e cada elemento T_e , R deveria ser a mínima distância x_i e T_e . Como seria muito moroso determinar exactamente o seu valor, considerou-se que, com uma aproximação razoável, R seria a mínima distância de x_i aos pontos nodais do elemento.

Neste momento, está-se em condições de resolver as equações (3.32) e (3.34). Como se trata de uma equação não linear, seria necessário recorrer a um método iterativo para obter os valores exactos de n_r . No entanto, o valor de n_r que nos interessa, é o inteiro imediatamente superior à solução exacta. Por outro lado, considerou-se que n_r varia entre um mínimo de 2 pontos e um máximo de 12 pontos. Assim sendo, o número de pontos de integração a utilizar é determinado, calculando valores de K para n_r de 2 a 12, sendo escolhido o menor valor de n_r que conduza a um valor de K inferior ao imposto.

3.4 - Sistema computacional desenvolvido

3.4.1 - Características gerais

O sistema computacional que traduz o modelo descrito nas secções anteriores foi escrito em linguagem FORTRAN para utilização nos computadores DEC10 e VAX11 do LNEC. O sistema de cálculo consta de três subprogramas distintos, executáveis sequencialmente, designados por BE3DA, BE3DB e BE3DC. Cada um destes subprogramas é constituído por várias subrotinas, num total de 45, tendo sido, na sua maioria, criadas especificamente para este programa. As restantes subrotinas resultaram da adaptação ou da utilização de subrotinas já existentes no LNEC (Sousa e Teles, 1980), (Vaz, 1979) e (Ocampo, 1982).

Apresenta-se, nas secções seguintes, uma descrição de cada um dos subprogramas referidos e, num Anexo, uma descrição das funções das várias subrotinas utilizadas, bem como a indicação da estrutura dos

ficheiros de dados e de desenho.

3.4.2 - Análise dos dados definidores da estrutura (BE3DA)

O objectivo do subprograma BE3DA, cujo organigrama se apresenta na Fig. 3.9, é fundamentalmente o da verificação dos dados que de

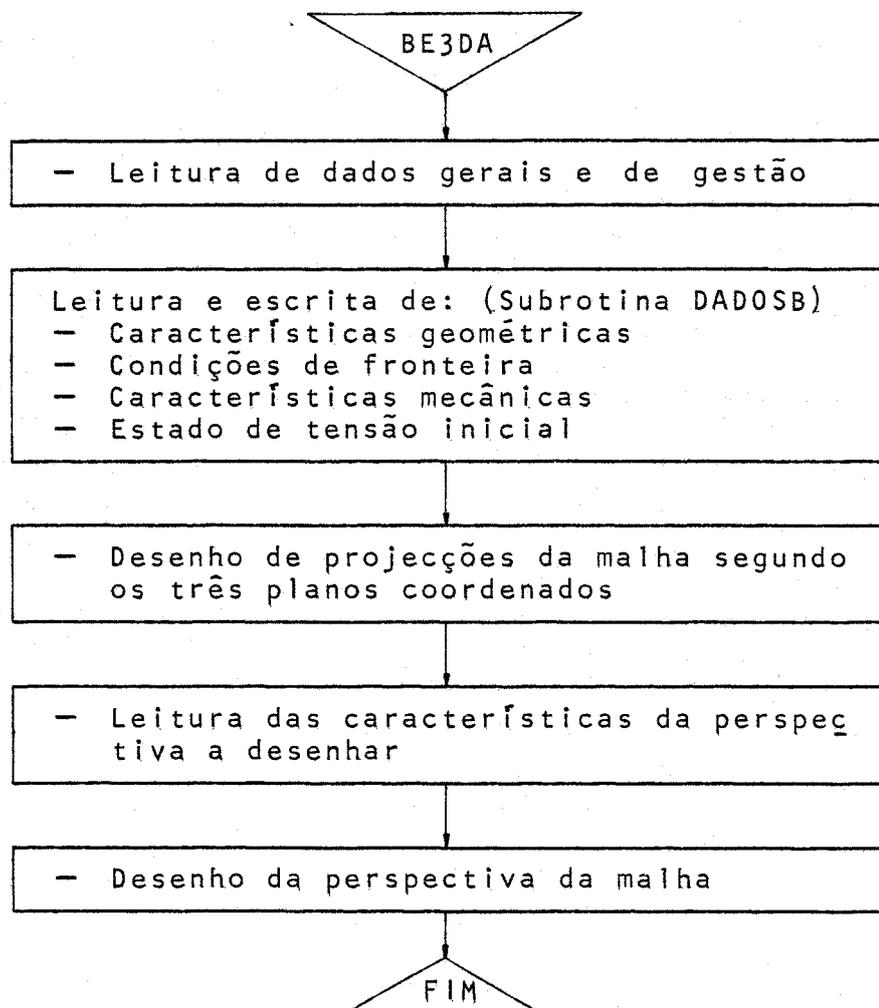


Fig. 3.9 - Organigrama do subprograma BE3DA

finem a estrutura, contidos no ficheiro BE3D.DAD. Esta verificação consta, por um lado, da sua impressão formatada e, por outro lado, da análise gráfica da estrutura. A escrita dos dados é feita num ficheiro denominado BE3DA.RES e dele constam os dados gerais, as coordenadas dos pontos nodais, as coordenadas dos pontos interiores para cálculo de tensões e deslocamentos, a definição dos elementos, as condições de fronteira, o estado de tensão inicial suposto constante na estrutura e as características elásticas. A análise gráfica da estrutura consta do desenho de três projecções da malha, uma sobre cada um dos três planos coordenados, e de uma perspectiva de par

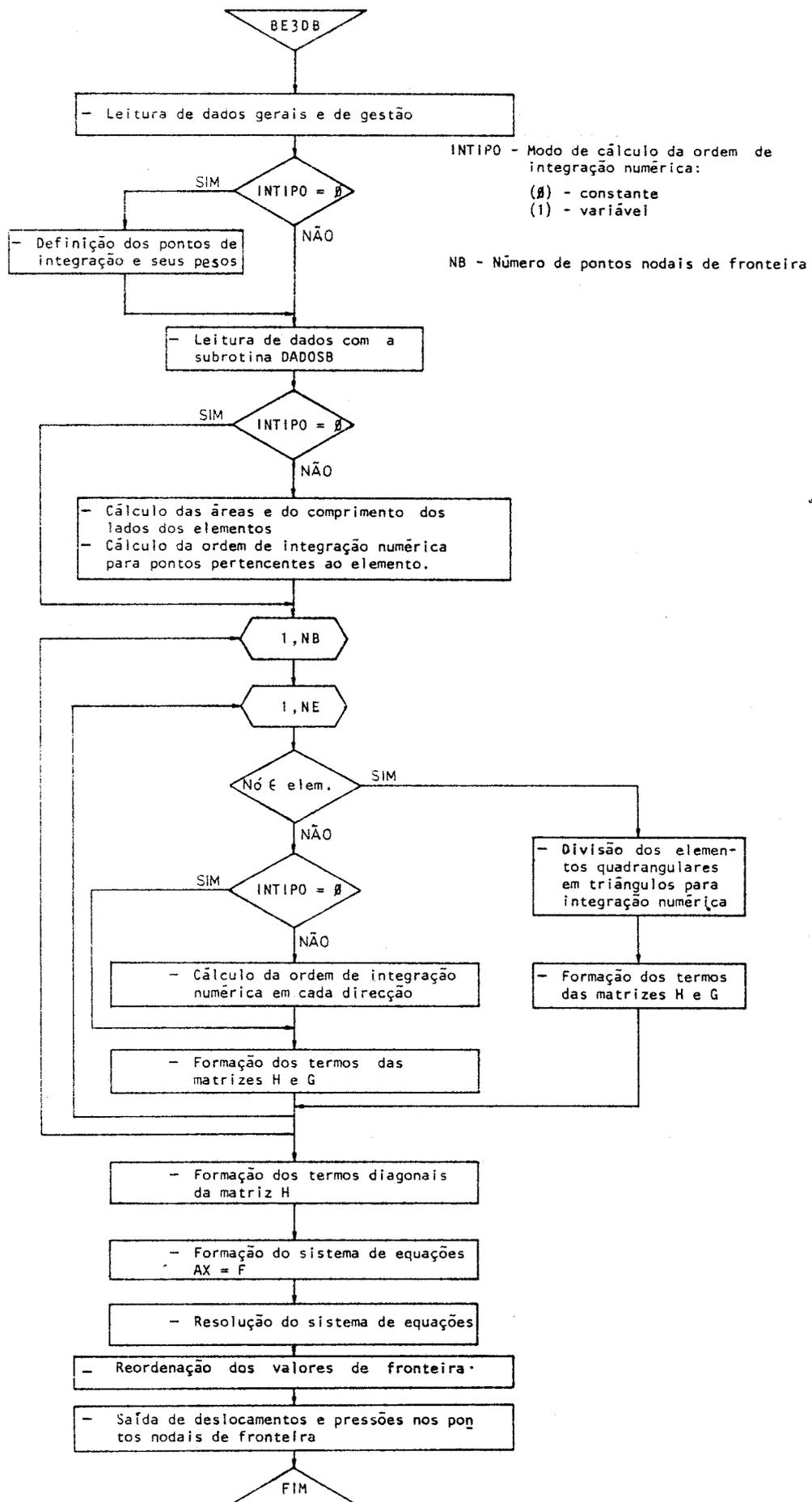
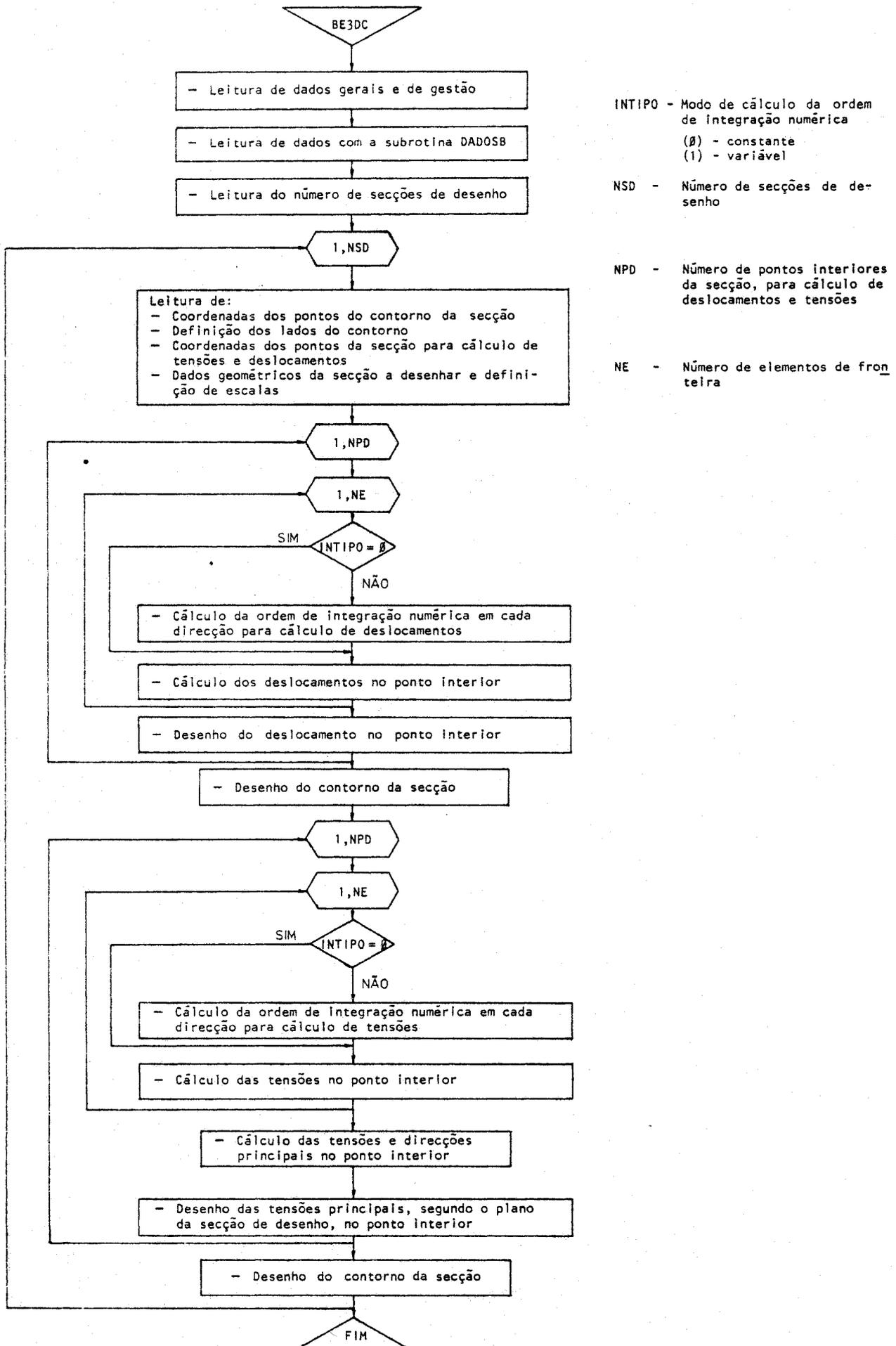


Fig. 3.10 - Organigrama do subprograma BE3DB.



INTIPO - Modo de cálculo da ordem de integração numérica
 (β) - constante
 (1) - variável

NSD - Número de secções de desenho

NPD - Número de pontos interiores da secção, para cálculo de deslocamentos e tensões

NE - Número de elementos de fronteira

Fig. 3.11 - Organigrama do subprograma BE3DC.

te ou da totalidade da malha, de acordo com as características dadas, tal como se indica em Anexo.

3.4.3 - Cálculo dos deslocamentos e pressões nos pontos de fronteira (BE3DB)

O objectivo do subprograma BE3DB, cujo organigrama se apresenta na Fig. 3.10, consiste no cálculo dos deslocamentos e das pressões nos pontos da fronteira utilizando o ficheiro de dados anteriormente testado em BE3DA, sendo os resultados escritos num ficheiro denominado BE3DB.RES. Este ficheiro de resultados é constituído pela listagem dos dados empregados nos cálculos e pelos valores calculados dos deslocamentos e das pressões nos pontos nodais da fronteira.

O subprograma começa por calcular a área e os comprimentos segundo os eixos locais de todos os elementos para o cálculo, em fase posterior, da ordem de integração numérica a utilizar em cada caso, determinando, seguidamente, no caso de se tratar de um meio infinito, o valor do integral azimutal. Calcula, em seguida, os valores da matriz G e os valores não diagonais da matriz H, para todos os pontos nodais, utilizando ordens de integração numérica calculadas caso a caso, procedendo posteriormente ao cálculo indirecto dos termos diagonais da matriz H. Procedem-se, então, a partir das matrizes H e G e dos valores das condições de fronteira impostas, à formação do sistema de equações, o qual é resolvido pelo algoritmo de Gauss por uma técnica de partição por blocos (Nakaguma, 1979). Estes blocos têm um número de colunas igual à dimensão das matrizes H e G e um número de linhas que constituem um dos dados ao programa. Os blocos são condensados um a um desde o primeiro até ao último, conjuntamente com o vector dos termos independentes, procedendo-se a seguir à retro-substituição. A partir dos valores resultantes da resolução do sistema de equações, é executada uma reordenação de todos os valores de fronteira, procedendo-se seguidamente à impressão dos deslocamentos e das pressões em todos os pontos nodais.

No caso de se declarar, no ficheiro de dados, que se pretende utilizar sempre a mesma ordem de integração numérica, o subprograma procede, no início, ao cálculo da tabela das abcissas e dos pesos dos diversos pontos de integração, não executando o cálculo das áreas e dos comprimentos dos elementos.

3.4.4 - Cálculo de deslocamentos e tensões em pontos interiores e análise de resultados

O objectivo do subprograma BE3DC, cujo organigrama se apresenta na Fig. 11, consiste no cálculo dos deslocamentos e das tensões nos pontos interiores definidos no ficheiro BE3D.DES, e na análise gráfica dos valores obtidos mediante desenhos de deslocamentos e de tensões principais segundo planos definidos no mesmo ficheiro.

Os resultados deste subprograma são escritos num ficheiro denominado BE3DC.RES e incluem, além da listagem dos dados, a indicação, para cada um dos pontos interiores de cada secção em análise, dos seguintes valores: i) deslocamentos segundo os eixos coordenados; ii) tensões segundo os eixos coordenados; iii) tensões principais e cossenos directores das suas direcções; iv) tensões principais segundo o plano de desenho e tangente trigonométrica do ângulo que a maior das tensões principais faz com um dos eixos coordenados.

4 - TESTES AO MODELO DE CÁLCULO DESENVOLVIDO

4.1 - Introdução

No capítulo 3 foi apresentado um modelo de cálculo tridimensional baseado no método dos elementos de fronteira, especialmente desenvolvido para análise do comportamento estrutural de obras subterâneas. Com base neste modelo, desenvolveram-se programas de cálculo automático. Com a finalidade de testar os programas, foram os mesmos aplicados a algumas situações para as quais se dispunham de soluções analíticas ou numéricas.

Indicam-se, nas secções seguintes, alguns testes efectuados relativos a: i) cavidade esférica submetida a um estado de tensão inicial hidrostático; ii) frente de um túnel circular submetido a um estado de tensão inicial hidrostático.

4.2 - Cavidade esférica

4.2.1 - Cálculos efectuados

Apresentam-se exemplos de aplicação a uma cavidade esférica de raio unitário, inserida num meio elástico homogêneo e isotrópico, submetido a um estado de tensão inicial hidrostático de 1MPa. O módulo de elasticidade adoptado foi de $E = 1\text{GPa}$ e o coeficiente de Poisson de $\nu = 0,20$.

Foram utilizadas duas malhas de cálculo diferentes. A primeira malha, de que se apresenta na Fig. 4.1 uma perspectiva e na Fig. 4.2 uma projecção segundo um dos planos coordenados, é constituída por 8 elementos com 26 pontos nodais. A outra malha utilizada é formada por um total de 24 elementos, com 74 pontos nodais, sendo a perspectiva e a projecção segundo um dos planos coordenados apresentados nas figuras 4.3 e 4.4, respectivamente.

Para a malha de 8 elementos, o cálculo foi efectuado com o esquema de integração exposto na secção 3.3.3, para um valor de $K = 10^{-10}$ (cálculo 1). Para a malha de 24 elementos executaram-se 3 cálculos. No primeiro (cálculo 2) utilizou-se uma ordem de integração constante em todas as integrações com $n = 7$. Nos outros dois cálculos utilizou-se o esquema de integração exposto em 3.3.3 para valores de $K = 10^{-8}$ e $K = 10^{-10}$ (cálculos 3 e 4).

Indicam-se no Quadro 4.1 os valores extremos das ordens de integração que o modelo utilizou nos diversos cálculos. Verifica-se

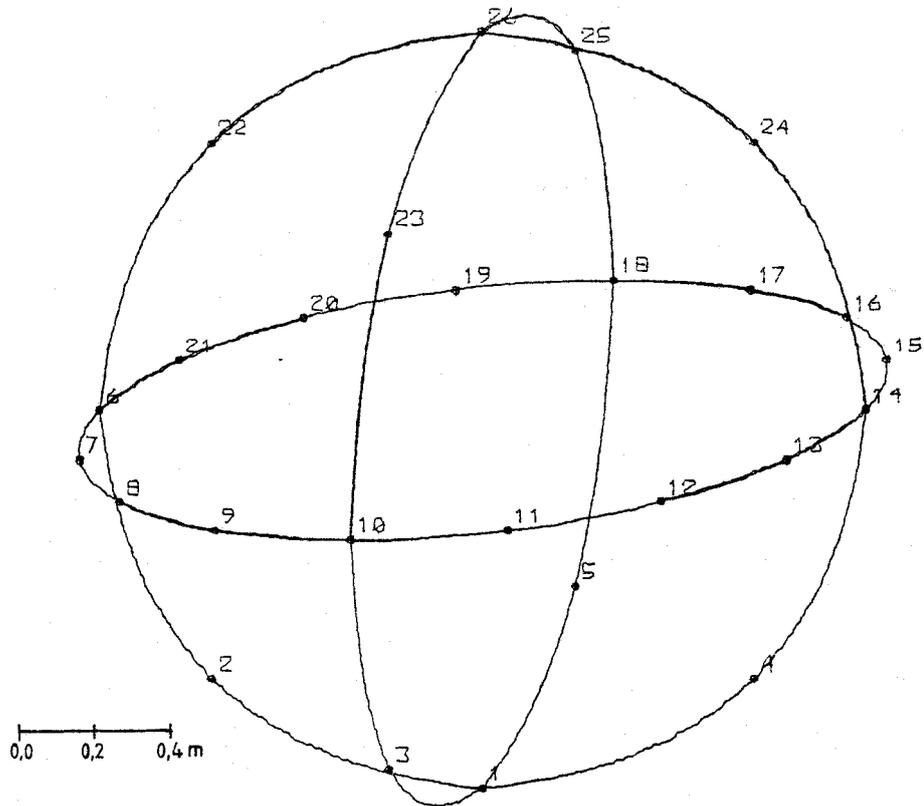


Fig. 4.1 - Cavidade esférica. Discretização em 8 elementos. Perspectiva da malha de cálculo.

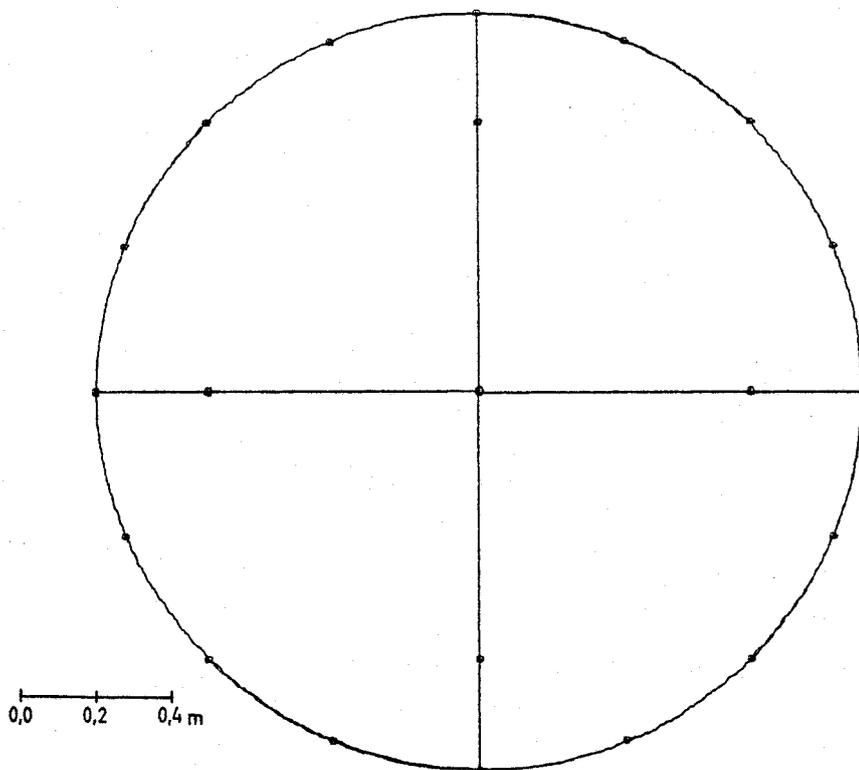


Fig. 4.2 - Cavidade esférica. Discretização em 8 elementos. Projecção da malha de cálculo segundo um dos planos coordenados.

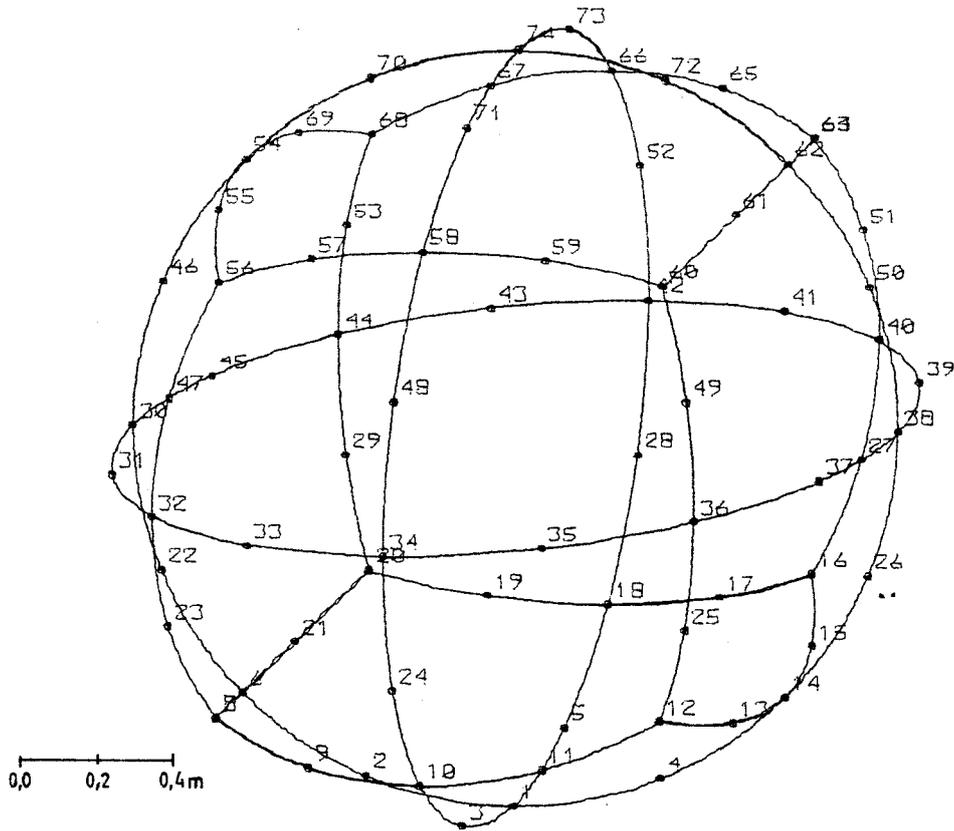


Fig. 4.3 - Cavidade esférica. Discretização em 24 elementos. Perspectiva da malha de cálculo.

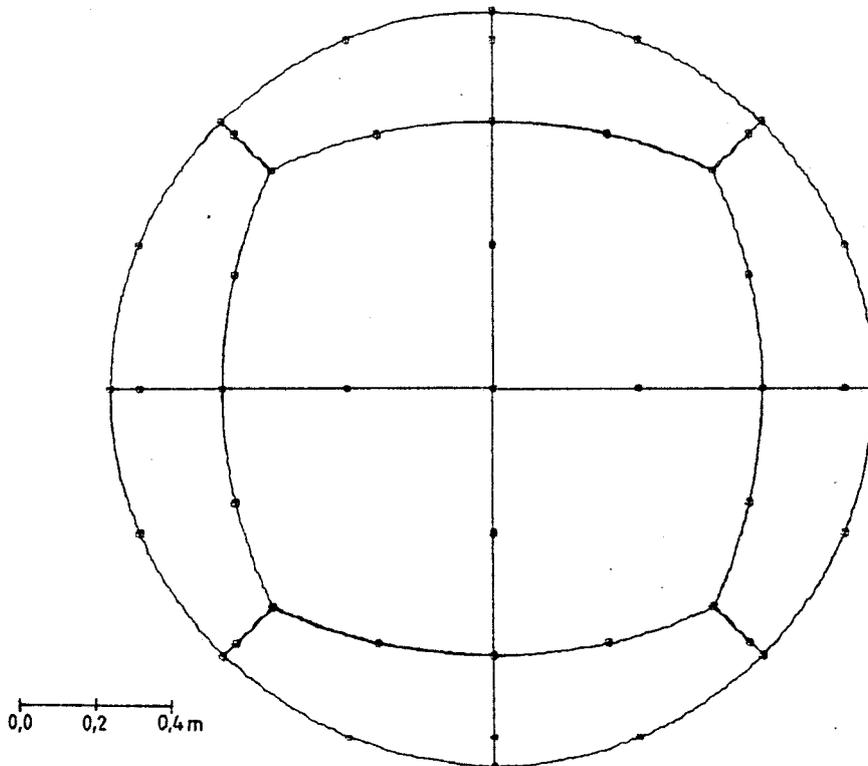


Fig. 4.4 - Cavidade esférica. Discretização em 24 elementos. Projecção da malha de cálculo segundo um dos planos coordenados.

que a sua variação é importante, principalmente no módulo C do modelo (módulo de cálculo para pontos interiores). A menor variação das ordens de integração no módulo B (módulo de cálculo dos valores de fronteira) deve-se à geometria da estrutura pois, numa esfera, não há grandes diferenças nas distâncias dos pontos nodais aos diversos elementos.

QUADRO 4.1 - Variação das ordens de integração utilizadas nos diferentes cálculos

| CÁLCULO Nº | Módulo B | | Módulo C | |
|---------------|----------|-----|----------|-----|
| | min | max | min | max |
| 1 | 7 | 8 | 4 | 12 |
| 2 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 3 | 4 | 7 | 3 | 10 |
| 4 | 5 | 8 | 4 | 12 |

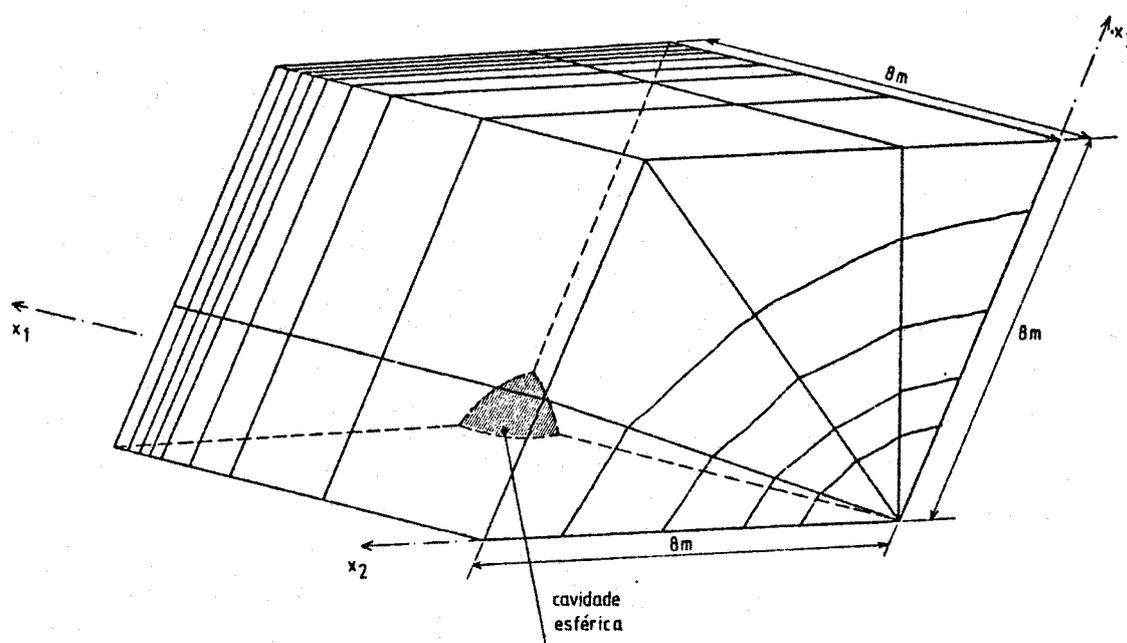


Fig. 4.5 - Cavidade esférica. Perspectiva da malha de elementos finitos.

Os resultados destes cálculos irão ser comparados, na secção seguinte, com os obtidos por Ocampo (1982) utilizando um modelo tri dimensional por elementos finitos. Devido às condições de simetria apenas foi discretizado um oitavo de espaço formando um cubo com 8 m de aresta com uma cavidade de raio 1,0 m. A malha de cálculo, cuja perspectiva se apresenta na Fig.4.5, é formada por 148 elementos fi nitos e 231 pontos nodais.

4.2.2 - Análise de resultados

4.2.2.1 - Tensões

A solução exacta da teoria da elasticidade para uma cavidade esférica submetida a um estado de tensão inicial hidrostático é da da por Obert e Duval (1967):

$$\sigma_r = p_i \left(1 + \frac{a^3}{r^3}\right) \quad (4.1)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = p_i \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) \quad (4.2)$$

sendo p_i a pressão hidrostática, a o raio da esfera e r a distân cia radial do ponto onde se pretende calcular o estado de tensão (Fig. 4.6).

No Quadro 4.2 apresentam-se os valores das tensões radiais e tangenciais obtidas nos diversos cálculos, tornadas adimensionais pela divisão por p_i , bem como os valores analíticos. Inclui-se tam bém o tempo de cálculo total do módulo B e o tempo médio de cálculo para cada um dos pontos interiores do módulo C do programa de cálcu lo automático.

Da observação dos valores deste quadro verifica-se que o cálcu lo 2 (24 elementos, $n = 7$) é o menos preciso no ponto mais próximo da cavidade, apesar de ser o que, no conjunto dos módulos B e C exi ge maior tempo de processamento. No entanto, para pontos mais afas tados da cavidade, os valores deste cálculo são bastante precisos. Isto deve-se ao facto de a ordem de integração numérica ser idênti ca em todas as integrações e independente da variação do integrando.

Relativamente aos cálculos 3 (24 elem., $K = 10^{-8}$) e 4 (24 elem., $K = 10^{-10}$), verifica-se que os valores obtidos são praticamente iguais à excepção do ponto mais próximo da cavidade, onde o valor do cálculo 4 é um pouco mais preciso que o obtido no cálculo 3. As-

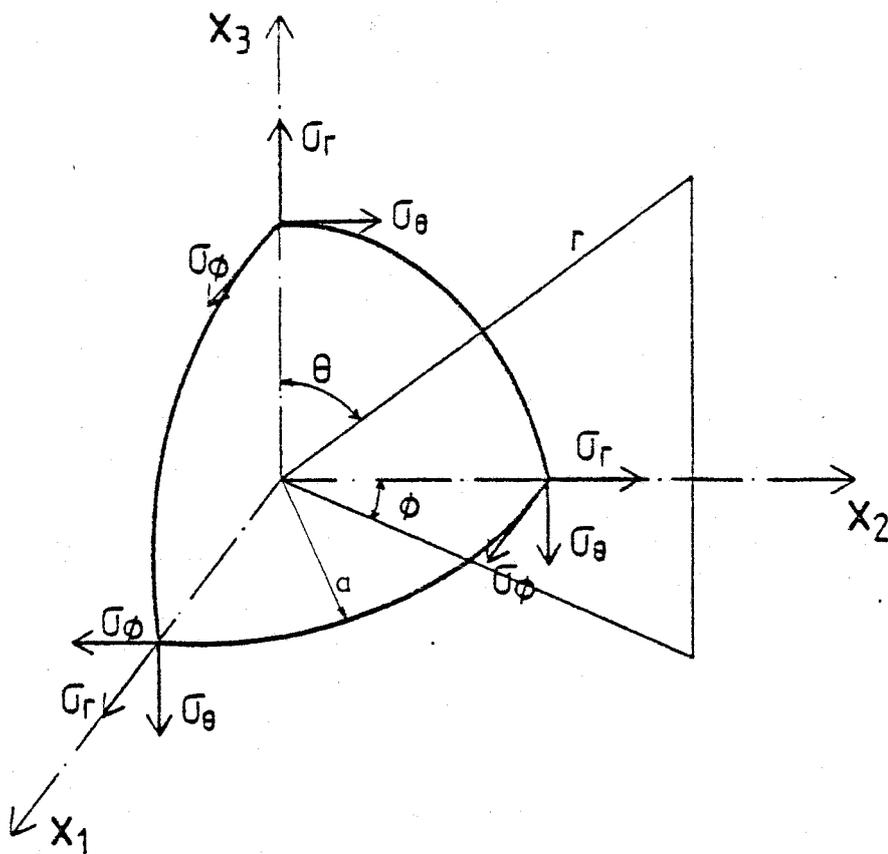


Fig. 4.6 - Cavidade esférica. Convenções adoptadas.

sim sendo, pensa-se que não se justifica o aumento de tempo de processamento exigido pelo cálculo 4, na medida em que a melhoria de precisão é pouco sensível.

O cálculo 1 (8 elementos, $K = 10^{-10}$), como seria de esperar, é o menos preciso de todos os cálculos efectuados, na medida em que a discretização utilizada é muito fraca. Tem, no entanto, a vantagem de conduzir a um tempo de processamento mais reduzido. A conclusão importante que se pode tirar deste cálculo é que, mesmo com uma discretização tão fraca, se conseguem obter valores bastante aceitáveis.

Dos resultados obtidos com os cálculos efectuados para a esfera submetida a uma pressão hidrostática, pensa-se que o mais razoável, tendo em atenção a precisão obtida e o tempo de cálculo, é o cálculo 3. Na Fig. 4.7 apresentam-se os resultados obtidos neste cálculo, que se comparam com os valores exactos da teoria da elasticidade. Apresentam-se também na figura os valores obtidos por 0campo

QUADRO 4.2 - Cavidade esférica. Tensões tangenciais e radiais (MPa)

| | | r/a | | | | | | | Tempo de C.P.U. | |
|--|-----------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------------------|-------------------------------|
| | | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,5 | 2,0 | 3,0 | 5,0 | Módulo B (tempo total) | Módulo C (tempo por ponto) |
| CÁLCULO 1 8 elementos K = 10 ⁻¹⁰ | σ_{θ}/p_i | - | 1,331 | 1,253 | 1,128 | 1,054 | 1,016 | 1,003 | 8 m 20 s | 61 s |
| | σ_r/p_i | 0 | 0,257 | 0,444 | 0,727 | 0,888 | 0,968 | 0,993 | | |
| CÁLCULO 2 24 elementos n = 7 | σ_{θ}/p_i | - | 1,422 | 1,280 | 1,145 | 1,061 | 1,018 | 1,004 | 39 m 51 s | 128 s |
| | σ_r/p_i | 0 | 0,134 | 0,434 | 0,710 | 0,878 | 0,964 | 0,992 | | |
| CÁLCULO 3 24 elementos K = 10 ⁻⁸ | σ_{θ}/p_i | - | 1,361 | 1,283 | 1,145 | 1,061 | 1,018 | 1,004 | 29 m 01 s | 72 s |
| | σ_r/p_i | 0 | 0,265 | 0,427 | 0,710 | 0,878 | 0,964 | 0,992 | | |
| CÁLCULO 4 24 elementos K = 10 ⁻¹⁰ | σ_{θ}/p_i | - | 1,368 | 1,283 | 1,145 | 1,061 | 1,018 | 1,004 | 40 m 38 s | 108 s |
| | σ_r/p_i | 0 | 0,247 | 0,427 | 0,710 | 0,878 | 0,964 | 0,992 | | |
| Valores Analíticos | σ_{θ}/p_i | 1,5 | 1,376 | 1,289 | 1,148 | 1,063 | 1,019 | 1,004 | | |
| | σ_r/p_i | 0 | 0,249 | 0,421 | 0,704 | 0,875 | 0,963 | 0,992 | | |

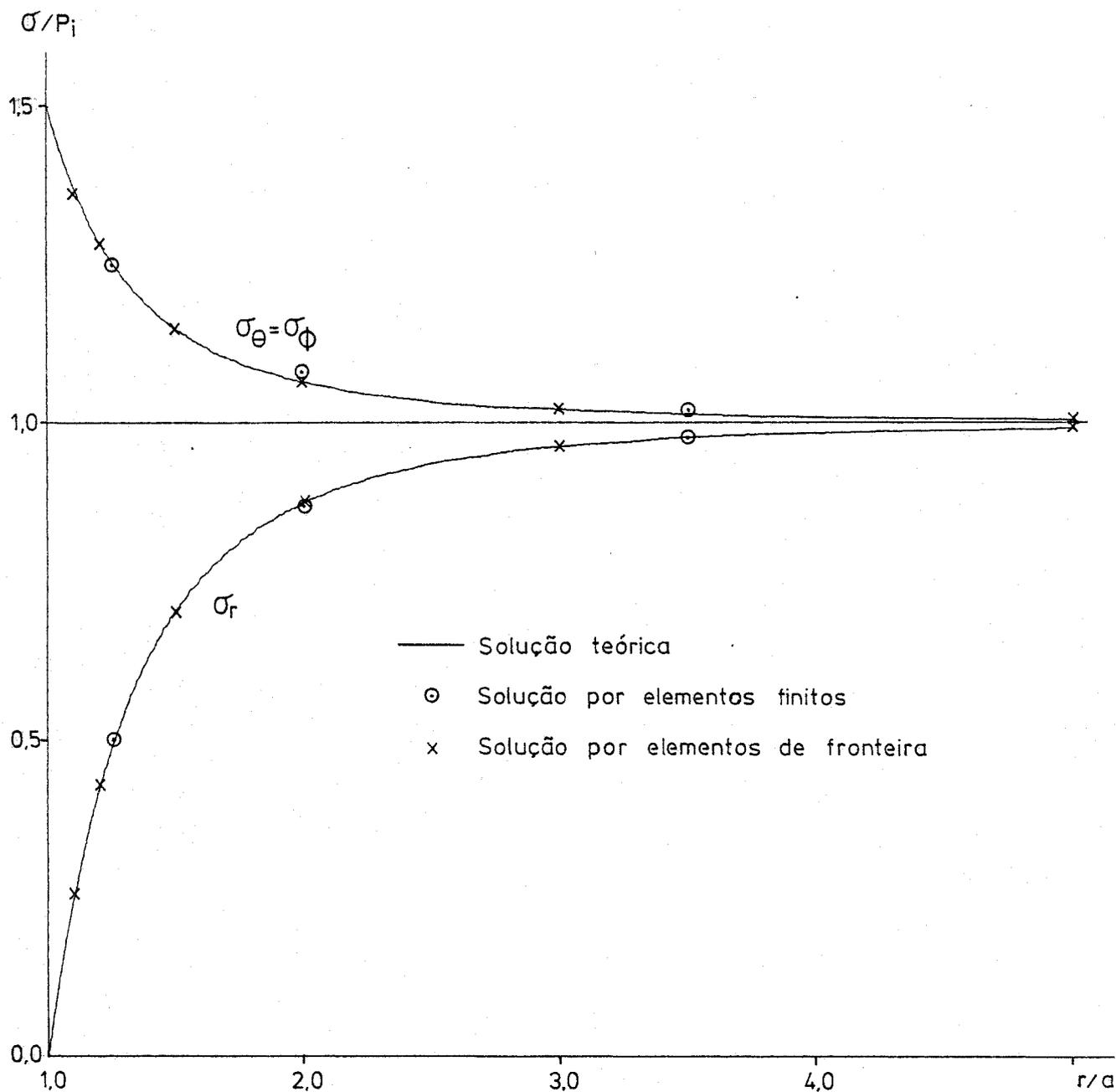


Fig. 4.7 - Tensões tangenciais e radiais para um estado de tensão hidrostático:

(1982) utilizando um modelo tridimensional por elementos finitos. Da observação da figura, verifica-se uma concordância muito boa entre os valores analíticos e os calculados pelo modelo de elementos de fronteira.

4.2.2.2 - Deslocamentos

Não se conhece a solução exacta da teoria da elasticidade pa-

ra deslocamentos no interior de um maciço, sujeito a um estado de tensão inicial hidrostático, devidos à abertura de uma cavidade esférica. O único valor de deslocamento que se conhece é na fronteira e é dado por:

$$\delta = \frac{1+\nu}{2E} a p_i \quad (4.3)$$

No Quadro 4.3 apresentam-se os valores dos deslocamentos radiais obtidos nos diversos cálculos, bem como o valor analítico na fronteira.

QUADRO 4.3 - Cavidade esférica. Deslocamentos radiais (mm)

| | r/a | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,5 | 2,0 | 3,0 | 5,0 |
| CÁLCULO 1 8 elementos K = 10 ⁻¹⁰ | 0,549 | 0,451 | 0,376 | 0,236 | 0,131 | 0,058 | 0,021 |
| CÁLCULO 2 24 elementos n = 7 | 0,591 | 0,486 | 0,408 | 0,260 | 0,146 | 0,065 | 0,023 |
| CÁLCULO 3 24 elementos K = 10 ⁻⁸ | 0,591 | 0,486 | 0,408 | 0,260 | 0,146 | 0,065 | 0,023 |
| CÁLCULO 4 24 elementos K = 10 ⁻¹⁰ | 0,591 | 0,486 | 0,408 | 0,260 | 0,146 | 0,065 | 0,023 |
| Valores Analíticos | 0,600 | - | - | - | - | - | - |

Verifica-se que os valores obtidos pelos cálculos 2, 3 e 4 são iguais até à milésima. O valor obtido sobre a fronteira é muito próximo do teórico, sendo o erro relativo de apenas 1,5 %. Com o cálculo 1 obtiveram-se valores piores, o que se deve à fraca discretização utilizada.

Na Fig. 4.8 apresentam-se os valores obtidos no cálculo 3, juntamente com os resultados obtidos por Ocampo (1982) com um modelo tridimensional por elementos finitos. Indica-se ainda o valor teórico na fronteira da cavidade.

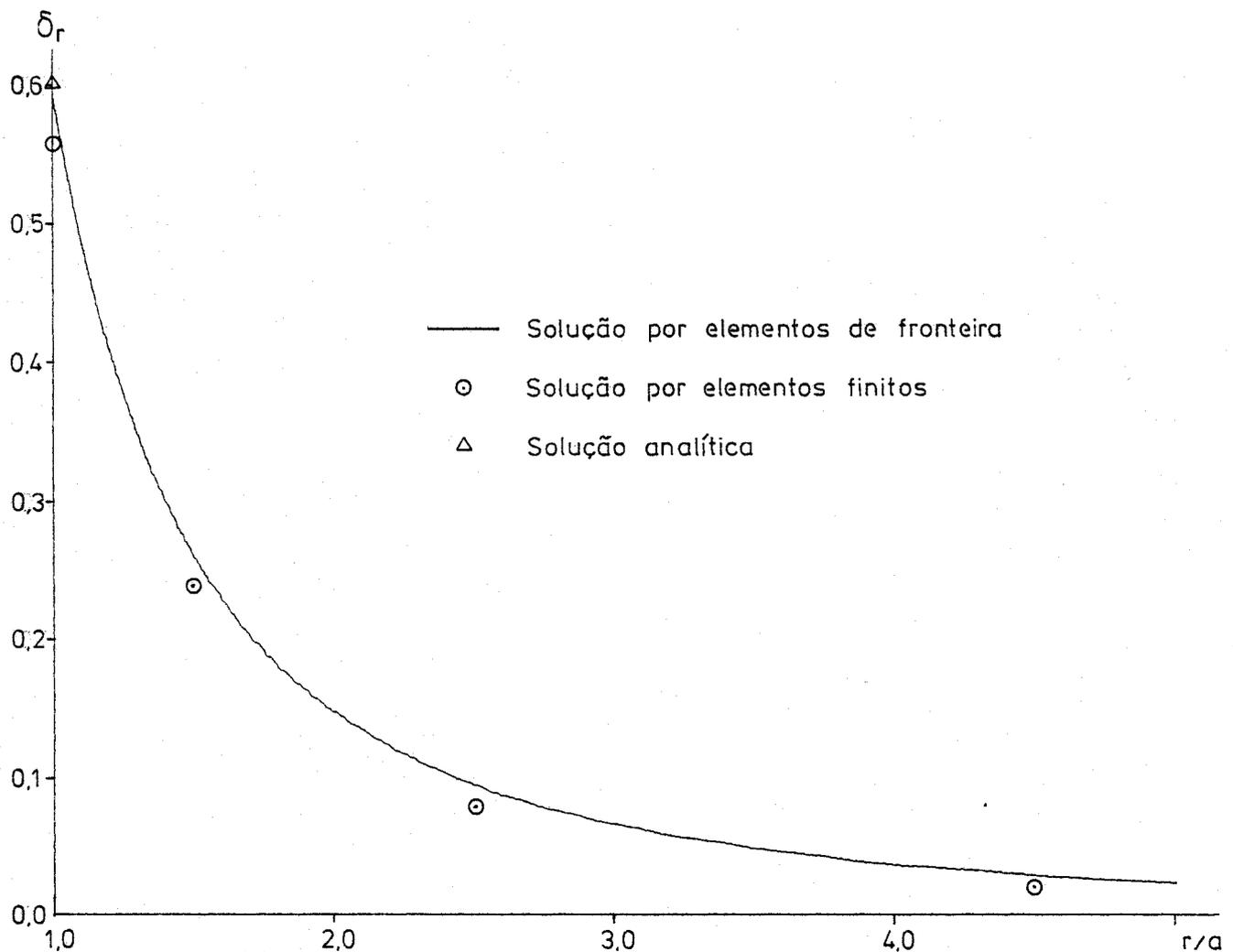


Fig. 4.8 - Deslocamentos para um estado de tensão hidrostática.

Verifica-se que os deslocamentos obtidos pelo modelo de elementos finitos são menores que os obtidos por elementos de fronteira. Uma das razões que pode explicar este facto é que, no modelo de elementos finitos, se impõe a condição de deslocamentos nulos a uma certa distância da cavidade. Tal imposição não é necessária utilizando o modelo de elementos de fronteira pelo que os seus valores serão mais correctos.

4.3 - Túnel circular

4.3.1 - Discretização utilizada

Apresenta-se nesta secção um exemplo de aplicação do modelo de cálculo à zona da frente de um túnel circular de raio unitário, inserido num meio elástico homogêneo e isótropo, submetido a um estado de tensão inicial hidrostático de 1MPa. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson adoptados são, respectivamente, $E = 1\text{GPa}$ e $\nu = 0,25$.

A malha de cálculo utilizada, de que se apresenta na Fig. 4.9 uma perspectiva e na Fig. 4.10 as suas projecções segundo os planos coordenados, é constituída por 69 elementos com 233 pontos nodais. Calcularam-se as tensões e os deslocamentos em 37 pontos interiores pertencentes ao plano definido pelos eixos X_1 e X_3 (figs. 4.9 e 4.10).

O esquema de integração numérica utilizado foi o exposto na secção 3.3.3 com um valor de $K = 10^{-6}$. Os valores extremos das ordens de integração que o modelo utilizou foram, no módulo B, um mínimo de 2 e um máximo de 7. No módulo C, estes valores foram, respectivamente, de 2 e 12.

O problema da frente de um túnel circular foi já estudado por diversos autores utilizando modelos de elementos de fronteira. Num trabalho de Hocking (1976), estuda-se o problema da concentração de tensões na zona da frente, para vários estados de tensão, utilizando elementos de fronteira quadrangulares e triangulares parabólicos. Niwa e Kobayashi (1979) estudaram o mesmo problema usando um modelo com elementos de fronteira quadrangulares constantes.

No que respeita a modelos por elementos finitos, é de referir o trabalho de Cunha (1981) que, utilizando um modelo de cálculo relativo a equilíbrios axissimétricos, estudou o problema do avanço de túneis circulares para várias situações de heterogeneidades, com portamentos não lineares, anisotropias e estados de tensão iniciais. A malha utilizada está representada na Fig. 4.11 e é composta por 1492 elementos finitos com 1441 pontos nodais.

4.3.2 - Análise de resultados

4.3.2.1 - Tensões

Apresenta-se na Fig. 4.12 as convenções adoptadas para definição das tensões em torno de um túnel circular de raio R . Na Fig. 4.13

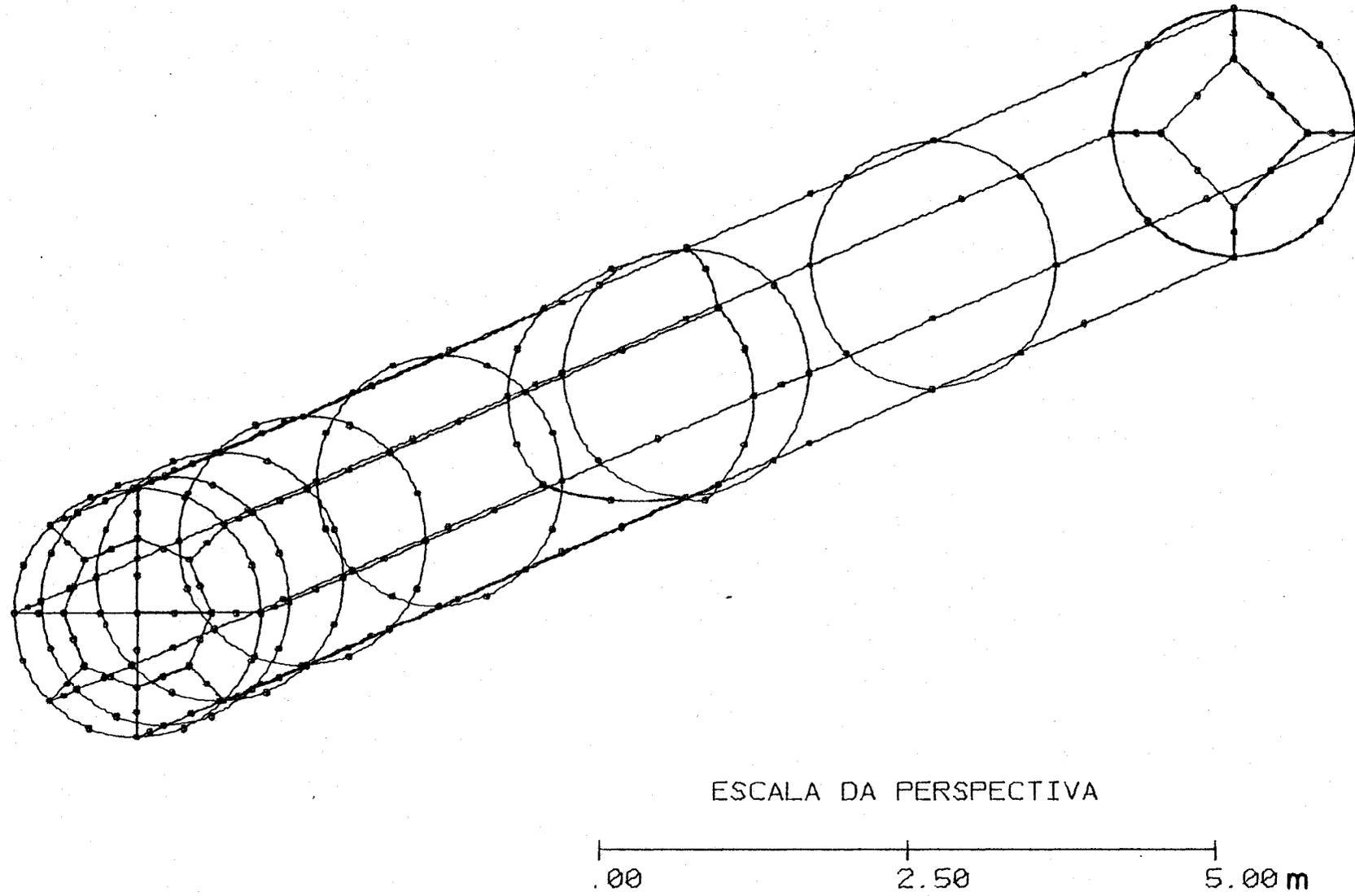


Fig. 4.9 - Túnel circular. Perspectiva da malha de cálculo

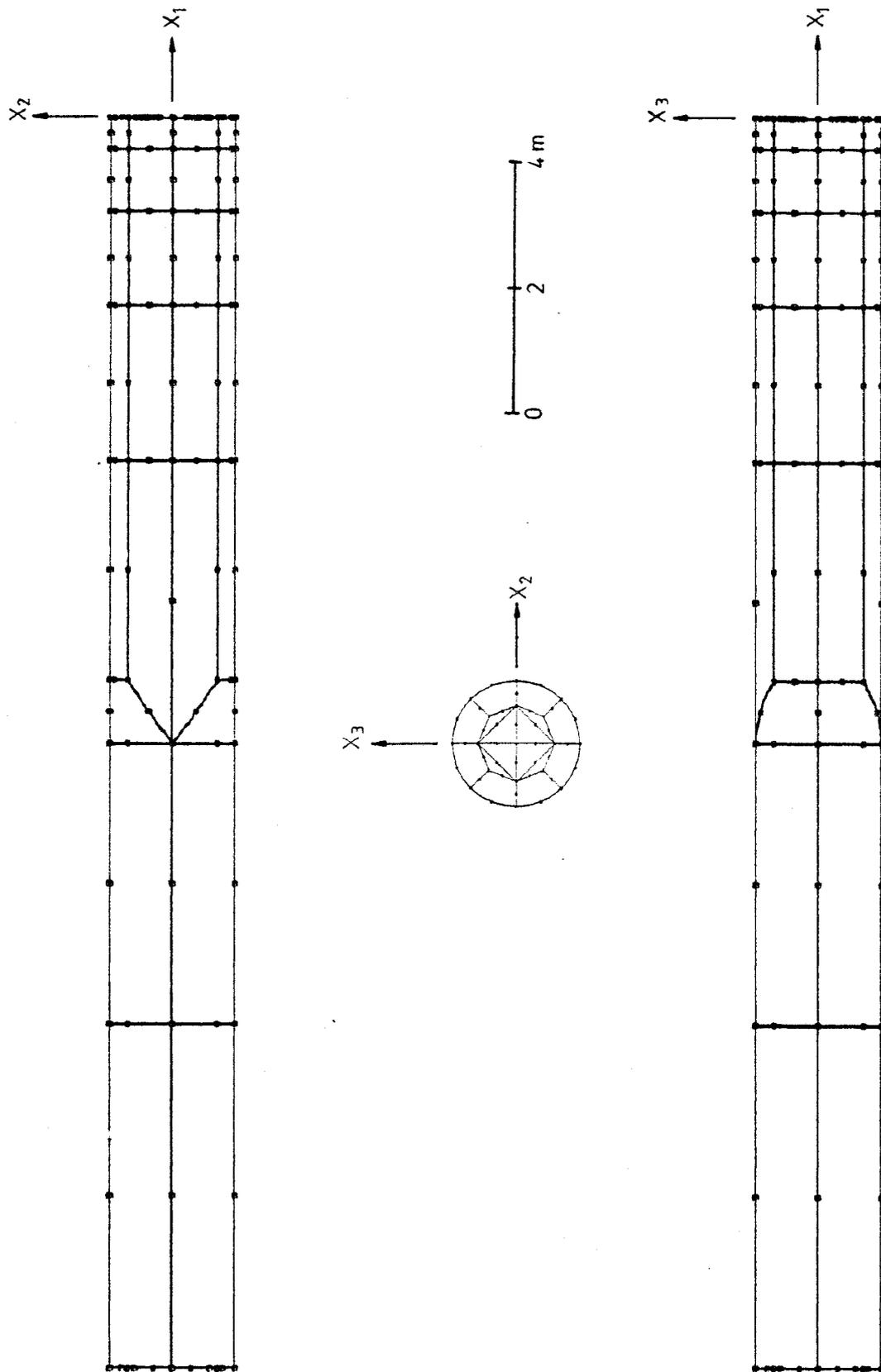


Fig. 4.10 - Túnel circular. Projeções da malha de cálculo segundo planos coordenados.

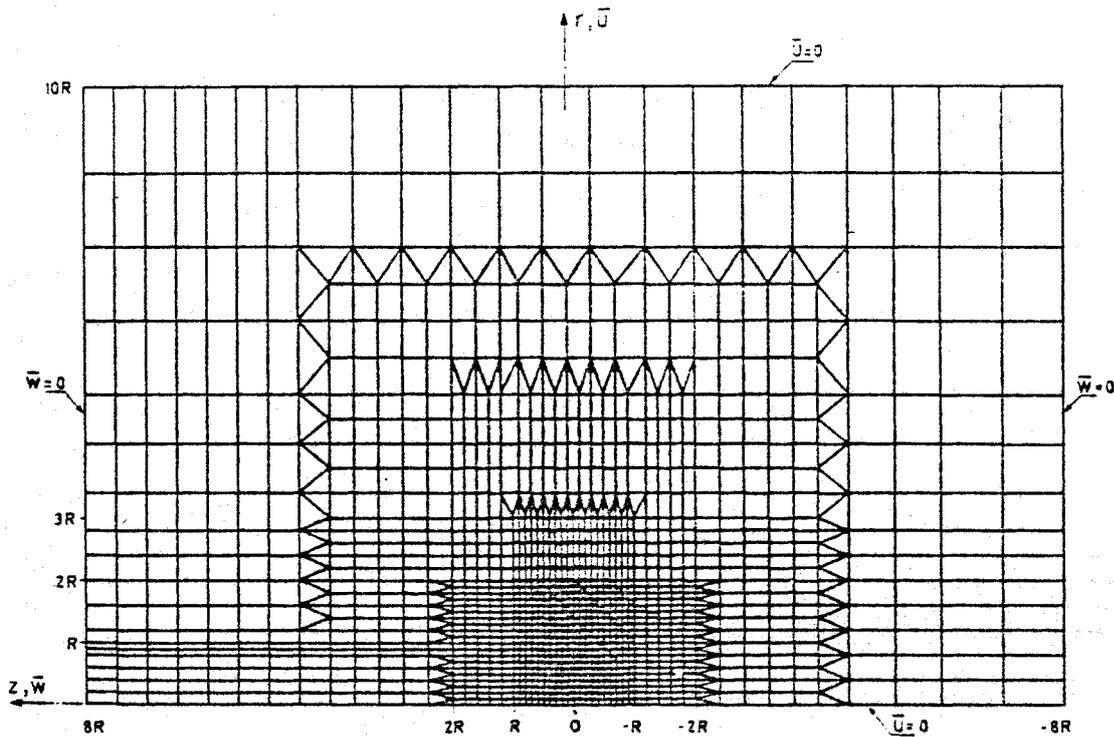


Fig. 4.11 - Túnel circular. Malha de elementos finitos.

estão representadas as tensões principais, nos pontos interiores, segundo o plano definido pelos eixos X_1 e X_3 . Os gráficos apresentados na Fig. 4.14 reproduzem a

evolução das tensões em secções transversais à distância d/R da frente, na zona escavada. Os valores das tensões foram tornados adimensionais pela divisão pelo estado de tensão inicial p_i . No gráfico da Fig. 4.15 comparam-se os valores obtidos pelo modelo de elementos de fronteira com os obtidos por Cunha (1981), pelo modelo de elementos finitos atrás referido, para uma secção transversal a uma distância $d/R = 0,5$ da frente.

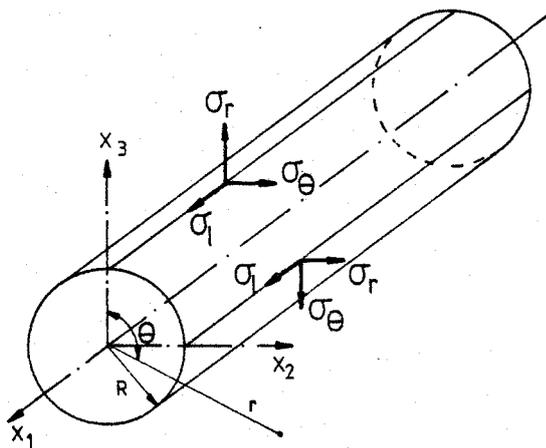


Fig. 4.12 - Túnel circular. Convenções adoptadas.

te. Pode-se verificar a boa concordância entre os valores calculados pelos dois métodos.

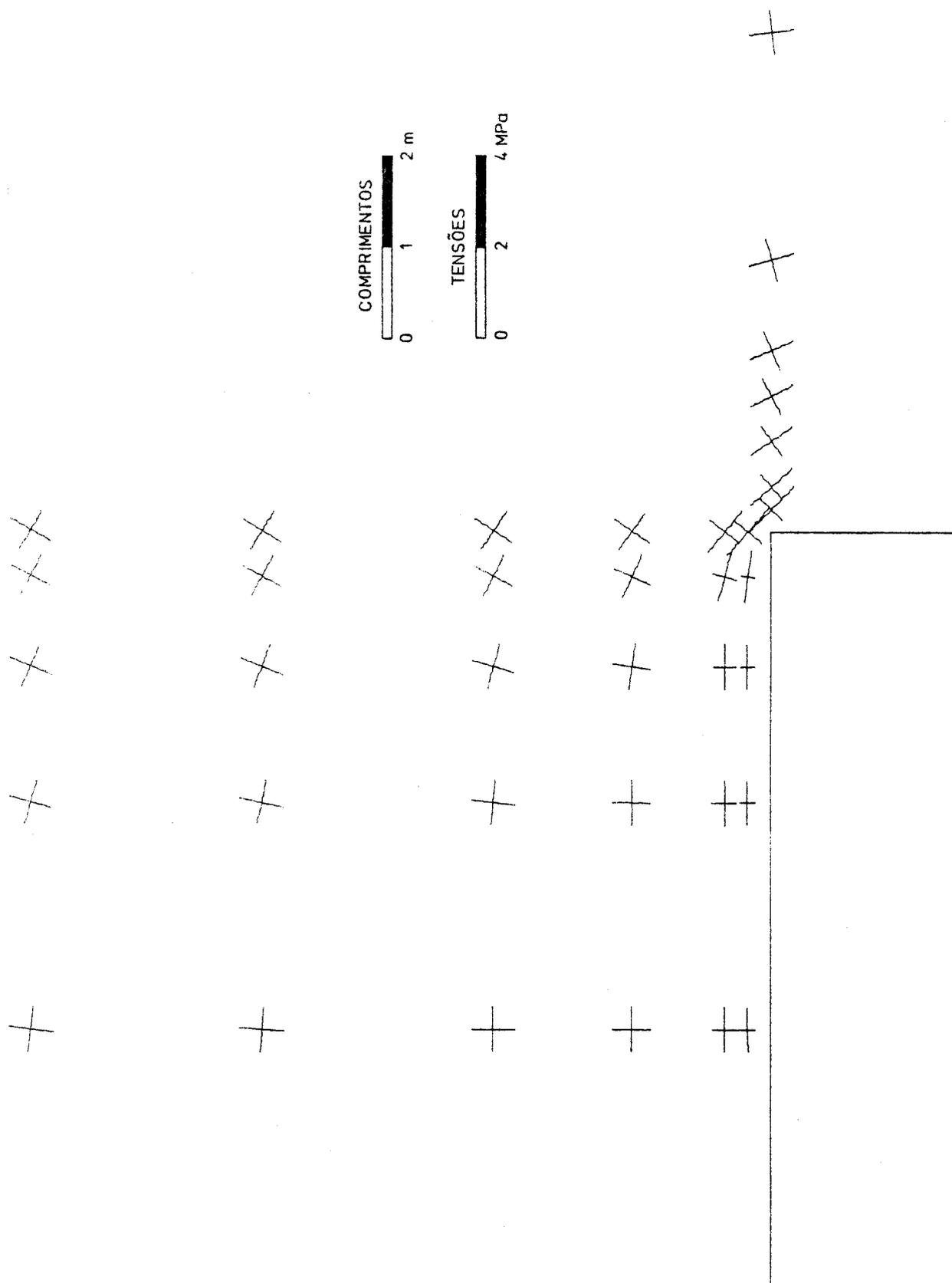


Fig. 4.13 - Túnel circular. Tensões principais.

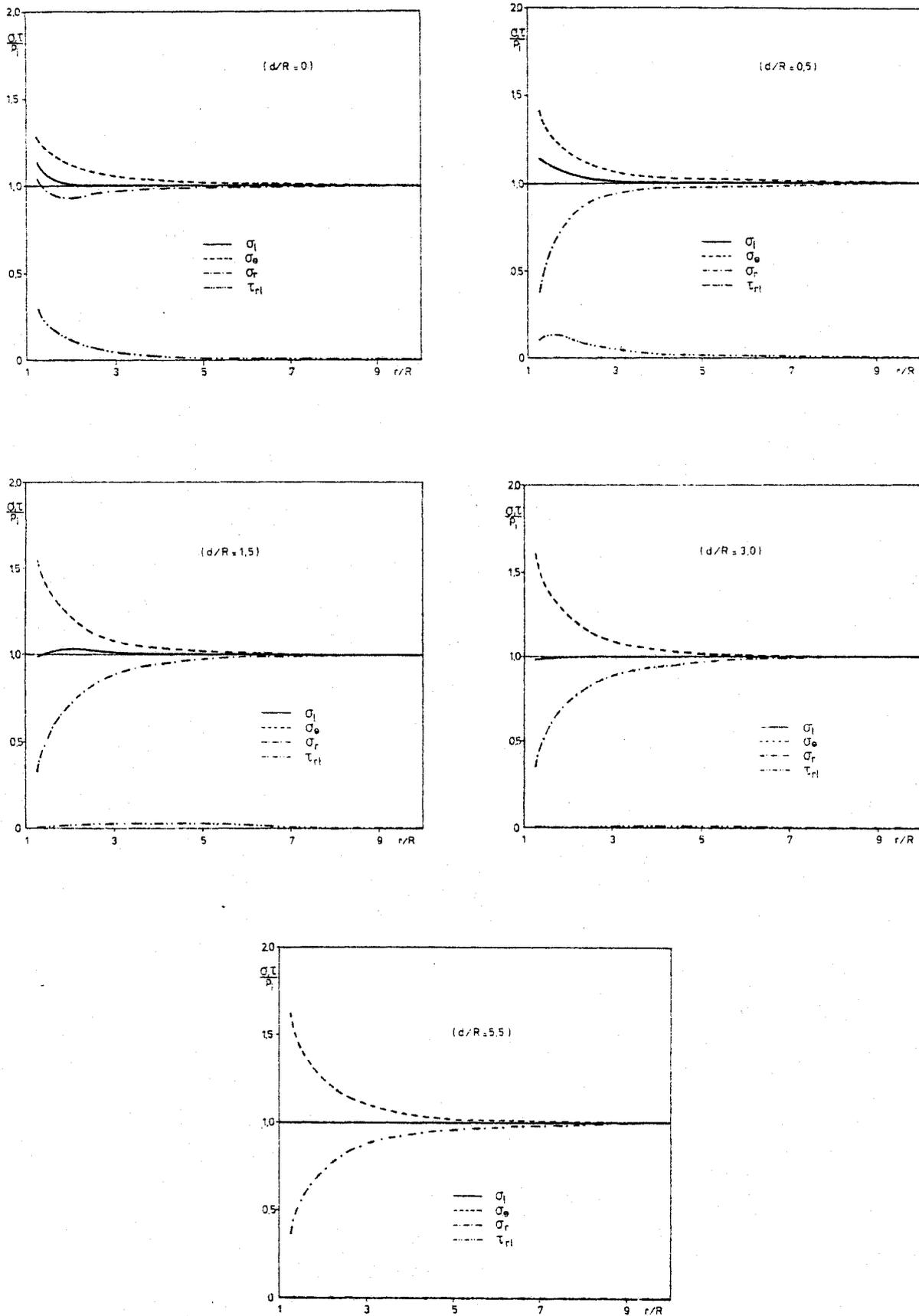


Fig. 4.14 - Tensões em secções transversais de túnel circular.

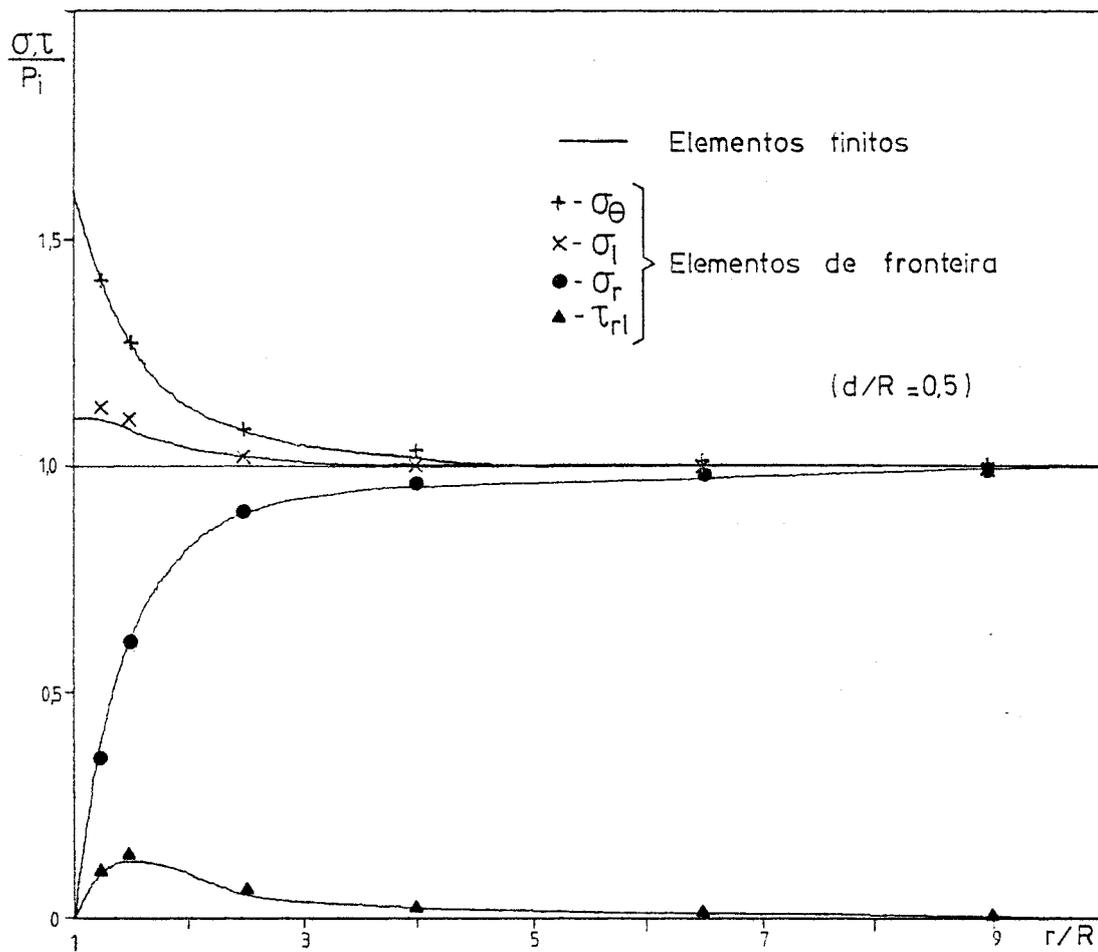


Fig. 4.15 - Tensões em secção transversal de túnel circular;
 Comparação de valores

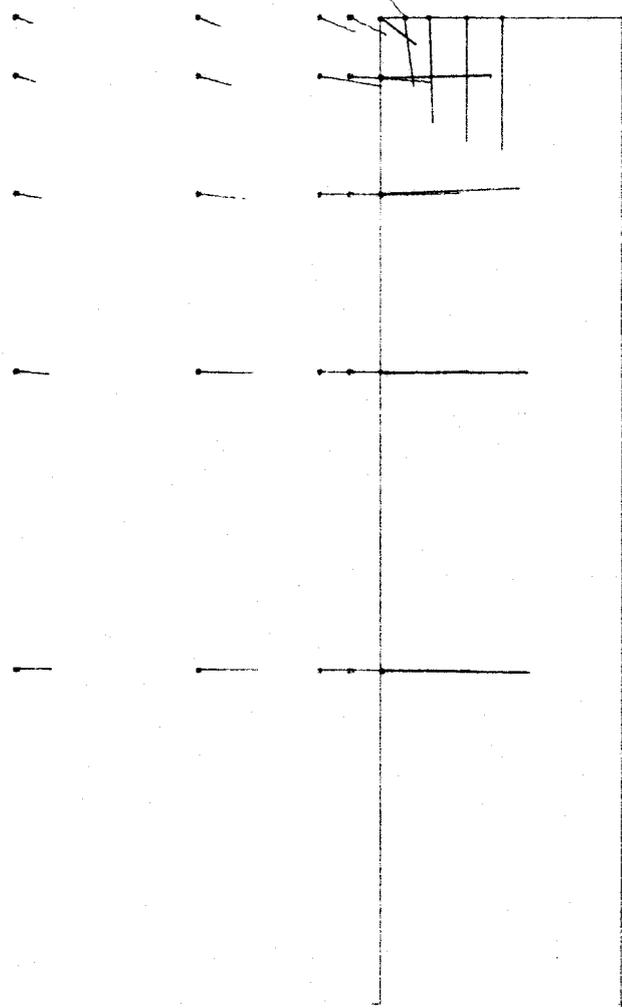
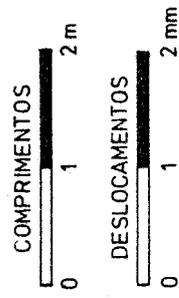


Fig. 4.16 - Túnel circular. Deslocamentos.

4.3.2.2 - Deslocamentos

Na Fig. 4.16 estão representados os deslocamentos em pontos do plano definido pelos eixos X_1 e X_3 . Apresentam-se na Fig. 4.17 os

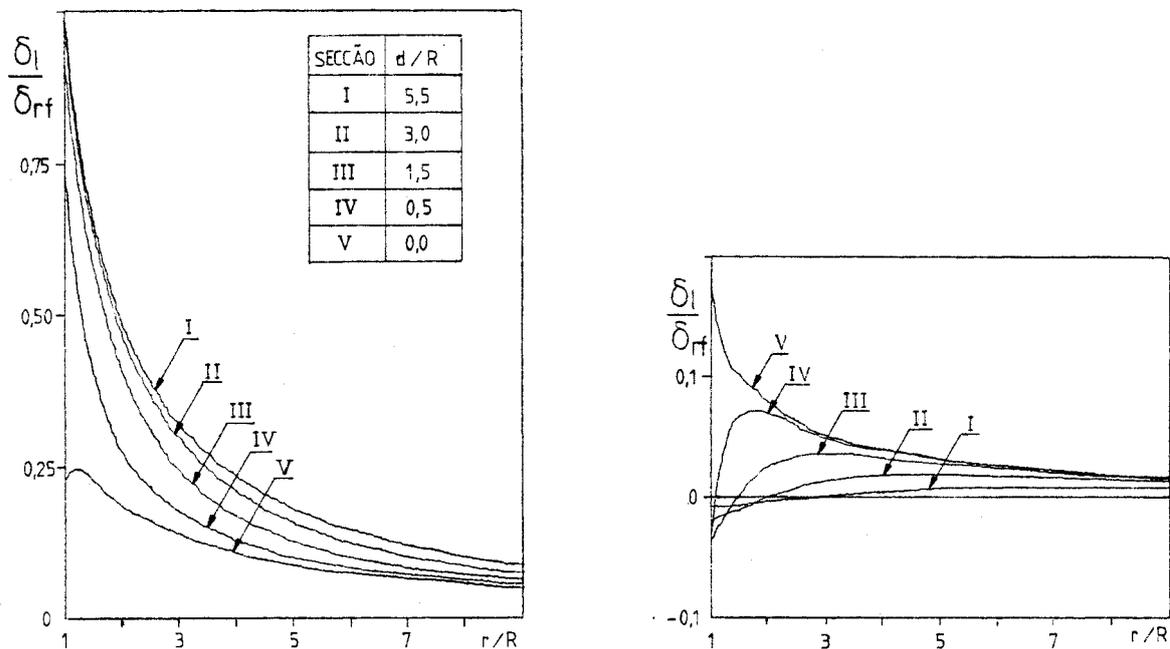


Fig. 4.17 - Deslocamentos radiais e longitudinais em secções transversais de túnel circular.

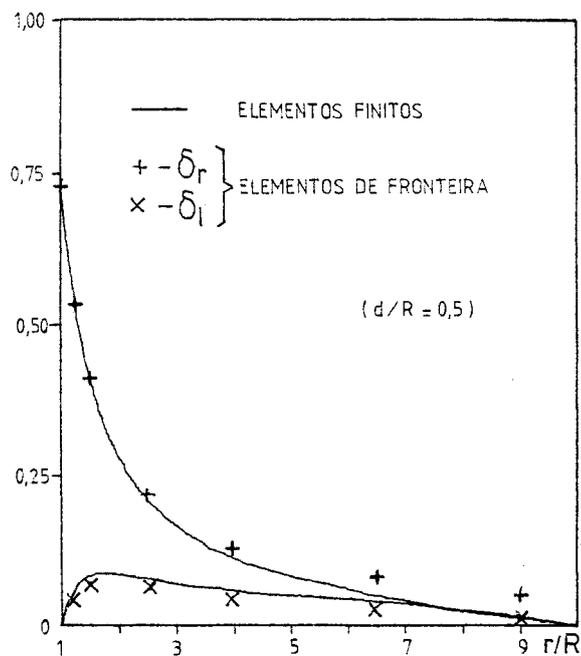


Fig. 4.18 - Deslocamentos radiais e longitudinais em secção transversal de túnel circular; comparação de valores .

deslocamentos segundo as direcções radial (δ_r) e longitudinal (δ_l) para as várias secções transversais. Estes deslocamentos foram tornados adimensionais através da divisão pelo valor do deslocamento radial final na parede do túnel fora da influência da frente (δ_{rf}). Este valor é o correspondente ao de uma abertura circular em equilíbrio plano, e é dado por:

$$\delta_{rf} = \frac{1+\nu}{E} R p_i \quad (4.4)$$

Na Fig. 4.18 apresenta-se, ainda, a comparação dos valores obtidos pelo modelo de elementos de fronteira com os obtidos pelo de elementos finitos para uma secção transversal a distância $d/R = 0,5$ da frente.

Na Fig. 4.19 comparam-se os valores dos deslocamentos radiais, tornados adimensionais com δ_{rf} , com os obtidos por Cunha (1981), verificando-se uma boa concordância entre os valores obtidos pelos dois modelos. O deslocamento na frente corresponde a 22,8% do deslocamen

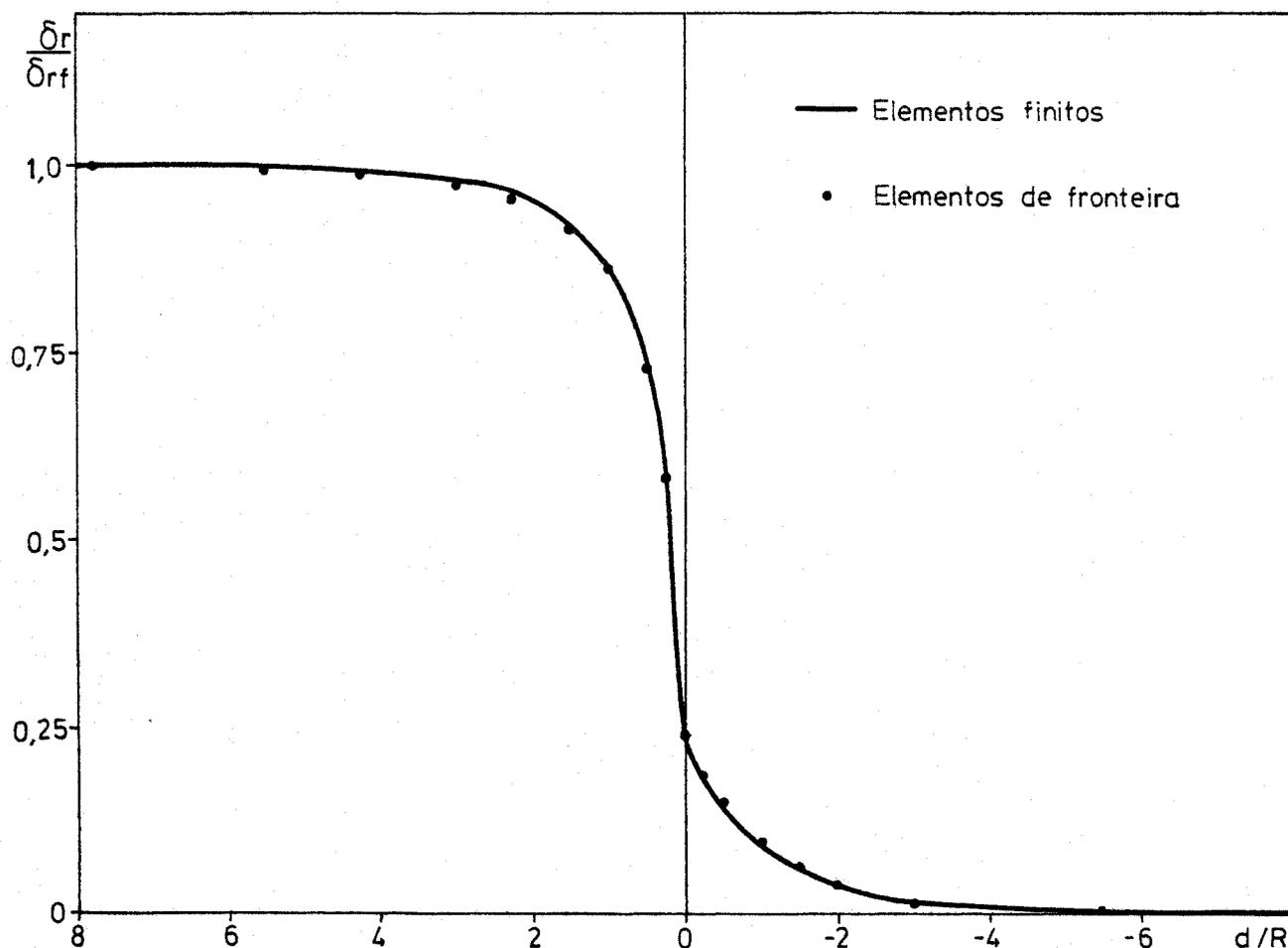


Fig. 4.19 - Deslocamentos radiais em secção longitudinal ao longo da parede de túnel circular.

to radial final, valor este que é da mesma ordem de grandeza que os 22% obtidos pelo modelo de elementos finitos.

Os deslocamentos longitudinais ao longo da parede estão representados na Fig. 4.20, de forma adimensional, apresentando a curva um andamento idêntico à obtida por Cunha (1981).

Finalmente, apresentam-se na Fig. 4.21 os deslocamentos radiais e longitudinais na frente do túnel.

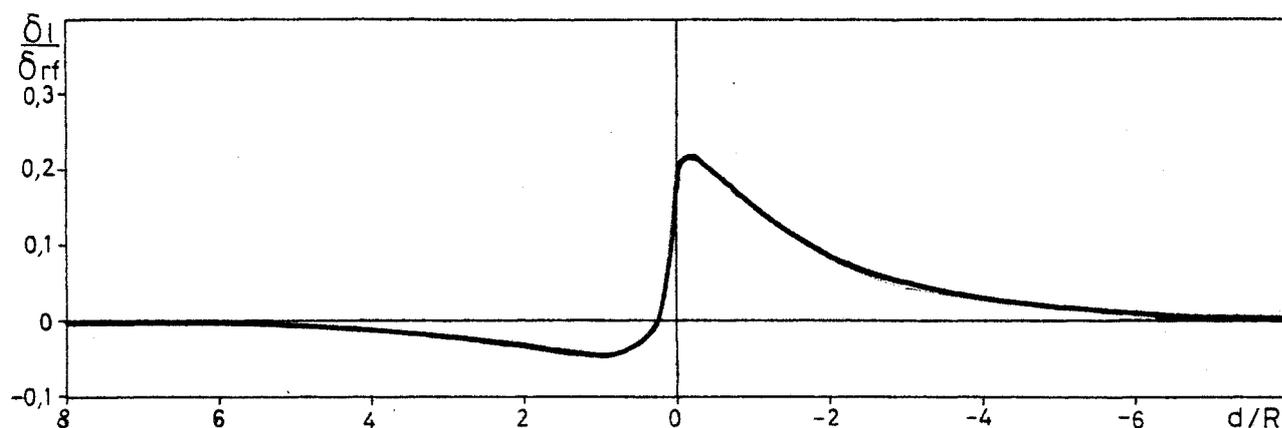


Fig. 4.20 - Deslocamentos longitudinais em secção longitudinal ao longo da parede de túnel circular.

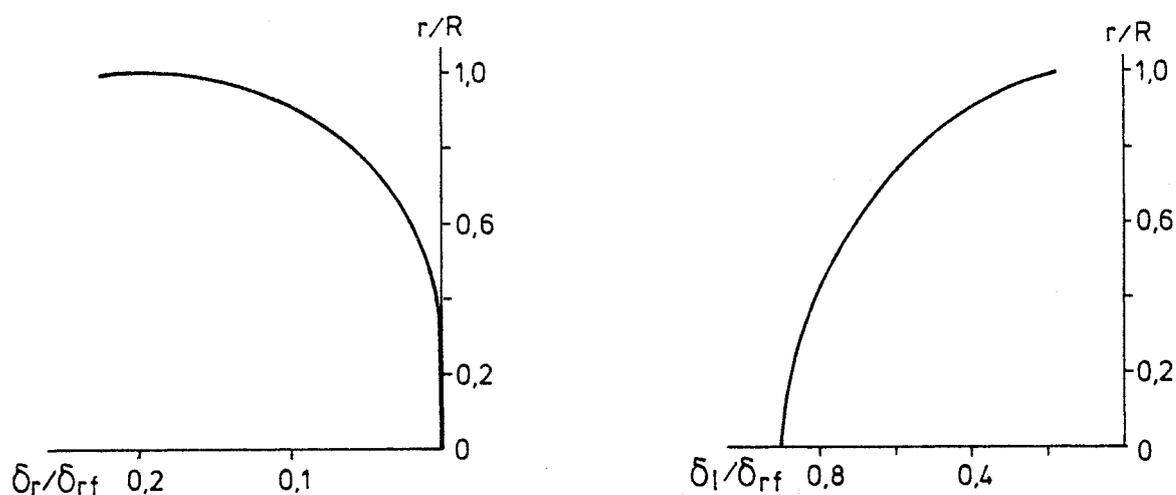


Fig. 4.21 - Deslocamentos radiais e longitudinais na frente de túnel circular.

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objectivo do presente trabalho foi elaborar um modelo de cálculo por elementos de fronteira para estudo de problemas de análise estrutural relativos a estruturas subterrâneas tridimensionais. Neste tipo de estruturas, a utilização de modelos por elementos de fronteira é, frequentemente, vantajosa relativamente à de modelos por elementos finitos pois, na maioria dos casos, só é necessário discretizar a superfície das cavidades, considerando o modelo automaticamente a situação de domínio infinito. Assim, o trabalho de discretização e de preparação de dados é claramente reduzido, quando comparado com o necessário nos modelos por elementos finitos. Por outro lado, a análise de resultados também é simplificada, devido à menor quantidade de valores a analisar.

Desenvolveu-se um modelo de cálculo que utiliza elementos de fronteira quadrangulares do tipo parabólico e que permite estudar equilíbrios tridimensionais em meios contínuos, homogêneos e isotrópicos com comportamento elástico linear. Efectuaram-se testes ao modelo de cálculo para os casos de uma cavidade esférica e de um túnel circular.

Este trabalho, juntamente com um outro desenvolvido no Núcleo de Obras Subterrâneas para estudo de equilíbrios planos (Frazílio e Martins, 1984), constitui um primeiro passo para dotar o LNEC de modelos de cálculo por elementos de fronteira para o estudo de estruturas subterrâneas. Pensa-se que, no que respeita ao modelo bidimensional, os trabalhos deverão prosseguir no sentido de melhorar a sua eficiência e de o generalizar para o estudo de meios anisotrópicos, de comportamentos não lineares, com inclusão de heterogeneidades e de descontinuidades. Pensa-se que também será importante considerar as acções devidas a forças mássicas ou a variações de temperatura.

No que respeita ao modelo tridimensional desenvolvido no presente trabalho, as perspectivas de desenvolvimento no futuro imediato são as seguintes:

i) Implementação do esquema de divisão do domínio em sub-regiões, possibilitando a consideração de heterogeneidades. Utilizando este procedimento, a matriz do sistema de equações deixa de ser cheia, passando a ser estruturada em banda, podendo acarretar economia na resolução do sistema de equações.

ii) Implementação de elementos triangulares do tipo parabólico. Com estes elementos, a discretização das fronteiras é facilitada, no meadamente na transição de zonas mais refinadas para zonas onde o grau de refinamento é menor.

iii) Implementação de elementos infinitos do tipo quadrangular parabólico. Estes elementos facilitam a discretização em problemas envolvendo meios que não englobam todo o espaço tridimensional. A sua utilização é particularmente importante no estudo de obras subterrâneas a pequena profundidade, em que é necessário discretizar a superfície livre do terreno.

iv) Implementação do tratamento automático de problemas que exibam simetria estrutural e de carregamento em relação aos planos coordenados, recorrendo ao método das imagens. Utilizando este método, discretiza-se apenas um quarto, metade, ou um oitavo da superfície da estrutura, conforme o tipo de simetria, executando-se automaticamente a integração sobre os elementos simétricos (imagens).

Prevê-se a utilização do modelo tridimensional por elementos de fronteira na interpretação de resultados obtidos por métodos experimentais. Com efeito, pensa-se, a curto prazo, utilizar este modelo no estudo do estado de tensão em maciços rochosos, em torno de cavidades, a partir de valores fornecidos por ensaios de macacos planos de pequena área (SFJ) e de defómetros (STT). Outro campo em que se prevê a utilização do modelo é o dos estudos de estruturas subterrâneas que o LNEC venha a efectuar, podendo servir como complemento do trabalho de observação, possibilitando uma comparação entre valores previstos teoricamente e valores observados.

NOTA FINAL

A elaboração do presente trabalho deve-se à iniciativa e permanente orientação do Eng^o Luís Ribeiro e Sousa, a quem desejo expressar o meu reconhecimento.

Luís Manuel Nolasco Lamas

Luís Manuel Nolasco Lamas
Estagiário de Investigação

VISTO

Investigador Principal, Chefe do
Núcleo de Obras Subterrâneas

Manuel Gonçalves Barroso

Manuel Gonçalves Barroso

VISTO

Per Investigador Coordenador, Chefe do
Departamento de Barragens

António Ferreira da Silveira

António Ferreira da Silveira

VISTO

al O ENGENHEIRO DIRECTOR

Artur Ravara

A. F. Ravara

BIBLIOGRAFIA

- APOSTOL, T.M. - "Calculus", Ed. Reverté, 1973.
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. - "Boundary element methods in Geomechanics". Finite Elements in Geomechanics, Cap. 16, ed. Gadehus, New York, 1977.
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. - "Boundary element methods in engineering science", McGraw-Hill, U.K., 1981.
- BANERJEE, P.K.; CATHIE, D.N.; DAVIES, T.G. - "Two-and three-dimensional problems of elastoplasticity". Developments in Boundary Element Methods - 1, Ed. P.K. Banerjee e R. Butterfield, 1979.
- BENITEZ, F.G.; RUIZ, C. - "Boundary element method for two-dimensional fracture mechanics". Boundary Element Methods in Engineering, 4th Int. Seminar, Ed. C.A. Brebbia, Southampton, 1982.
- BREBBIA, C.A. - "The boundary element method for engineers". Pentech Press, London, 1978.
- BREBBIA, C.A.; WALKER, S. - "Boundary Element Techniques in Engineering". Newnes-Butterworths, 1980.
- BRUNET, M. - "Numerical analysis of visco-plasticity using the boundary element method". Boundary Element Methods in Engineering, 4th International Seminar, Ed. C. Brebbia, Southampton, 1982.
- CROUCH, S.L. - "Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method". Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, 1976.
- CROUCH, S.L.; STARFIELD, A.M. - "Boundary element methods in solid mechanics". George Allen and Unwin, London, 1983.
- CRUSE, T.A. - "Numerical solutions in three dimensional elastostatics". Int. J. Solids and Structures, Vol. 5, 1969.
- CRUSE, T.A. - "An improved boundary-integral equation method for three dimensional stress analysis". Computers and Structures, Vol. 4, 1974.
- CRUSE, T.A. - "Two-and three-dimensional problems of fracture mechanics". Developments in Boundary Element Methods - 1, Ed. P. Banerjee e R. Butterfield, London, 1979.

- CUNHA, A.P. - "Aplicação de modelos matemáticos ao estudo de túneis em maciços rochosos". Tese para especialista, LNEC, Lisboa, 1981.
- FRAZÍLLIO, E.; MARTINS, C. - "Modelo por elementos de fronteira para análise de equilíbrios bidimensionais - aplicações a estruturas subterrâneas". Rel. Interno, LNEC, Lisboa, 1984.
- HOCKING, G. - "Three-dimensional elastic stress distribution around the flat end of a cylindrical cavity". Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., Vol. 13, Pergamon Press, 1976.
- HOCKING, G. - "Stress analysis of underground excavations incorporating slip and separation along discontinuities". 1st Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, Southampton, 1978.
- LACHAT, J.C. - "A further development of the boundary integral technique for elastostatics". Ph. D. Thesis, Univ. of Southampton, 1975.
- LACHAT, J.C.; WATSON, J.O. - "Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics". Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, 1976.
- LEMOS, J.V. - "Applications of the boundary element method to the analysis of elastic structures". Rel. Interno, LNEC, Lisboa, 1982.
- NAKAGUMA, R.K. - "Three dimensional elastostatics using the boundary element method". Ph. D. Thesis, Univ. of Southampton, 1979.
- NIWA, Y.; KOBAYSHI, S. - "Stresses and displacements around an advancing face of a tunnel". 4th Congress of ISRM, Montreux, 1979.
- OBERT, T.; DUVALL, W. - "Rock mechanics and the design of structures in rock". John Willey and Sons, New York, 1967.
- OCAMPO, F. - "Aplicação de modelos de cálculo tridimensionais na análise de grandes estruturas subterrâneas". Rel. Interno, LNEC, Lisboa, 1982.
- OLIVEIRA, E.R.A. - "Plane stress analysis by a general integral method". J. Eng. Mech. Div., Proc. A.S.M.E., EM1, 1968.

- PORTELA, A. - "Theoretical Basis of Boundary Solutions for Linear Theory of Structures". New Developments in Boundary Element Methods, Ed. C.A. Brebbia, Southampton, 1980.
- PORTELA, A.; ROMÃOZINHO, T. - "Tópicos sobre o método dos elementos de fronteira". LNEC, Lisboa, 1979.
- RIZZO, F.J.; SHIPPY, D. - "An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity". Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 11, 1977.
- SOUSA, L.R.; TELES, M. - "Modelo de cálculo para estudo de túneis pelo método dos elementos finitos". Rel. Interno, LNEC, Lisboa, 1980.
- SWEDLOW, J.L.; CRUSE, T.A. - "Formulation of boundary integral equation for three-dimension elasto-plastic flow". Int. J. Solids and Structures, Vol. 7, 1971.
- TELLES, J.C.F. - "The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems". Ed. C.A. Brebbia e S.A. Orszag, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. - "Viscoplastic analysis". Boundary Element Methods in Engineering, 4th Int. Seminar, Ed. C.A. Brebbia, Southampton, 1982.
- VAZ, A. - "Programa de cálculo automático para estudo de escoamentos tridimensionais em meios contínuos pelo método dos elementos finitos". Rel. Interno, LNEC, Lisboa, 1979.
- VENTURINI, W.S.; BREBBIA, C.A. - "Some applications of the boundary element method in Geomechanics", Int. J. Num. Analytical Meth. in Geomechanics, Vol. 7, 1983.
- WATSON, J.O. - "Advanced implementation of the boundary element method for two-and three-dimensional elastostatics". Developments in Boundary Element Methods - 1, Ed. P.K. Banerjee e R. Butterfield, London, 1979.
- WILSON, R.B.; CRUSE, T.A. - "Efficient implementation of anisotropic three-dimensional boundary-integral equation stress analysis". Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 12, 1978.



A N E X O

PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO PARA ANÁLISE
TRIDIMENSIONAL DE ESTRUTURAS SUBTERRÂNEAS UTI
LIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE FRONTEIRA

ÍNDICE

| | Pág. |
|--|------|
| 1 - DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS | 85 |
| 2 - ESTRUTURA DO FICHEIRO BE3D.DAD | 93 |
| 3 - ESTRUTURA DO FICHEIRO BE3D.DES | 99 |

ÍNDICE DE QUADROS

QUADRO

- 1 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DA
- 2 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DB
- 3 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DC

1 - DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS

QUADRO 1 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DA

| SUBROTINA | FUNÇÃO |
|--------------|--|
| BE3DA | Efectua a leitura de dados gerais e de gestão, gera espaço para o dimensionamento variável das principais matrizes das subrotinas e define os ficheiros utilizados por este subprograma. |
| PROGA | Efectua a leitura dos dados de cálculo e dos dados referentes à perspectiva e às projecções a efectuar. Lista todos os dados e desenha a perspectiva e as projecções da estrutura. |
| DADOSB | Efectua a leitura dos dados de cálculo (coordenadas dos nós, coordenadas dos pontos interiores, características topológicas dos elementos, condições de fronteira, estado de tensão inicial e características elásticas) e procede à sua listagem. |
| MALHAB | Desenha 3 projecções da malha de elementos de fronteira nos 3 planos XY, YZ e XZ. |
| DELEM 8 (*) | Desenha a projecção num plano de um elemento de fronteira de 8 pontos nodais. |
| PERSP1 | Desenha a perspectiva da malha ou de parte da malha de elementos fronteira. |
| DELPER | Desenha a perspectiva de um elemento de fronteira de 8 nós. |
| MATYM (*) | Define as coordenadas naturais dos nós de um elemento quadrangular de 8 nós. |
| TRANCO (***) | Transforma coordenadas X_i num sistema de eixos ortogonal em coordenadas X'_i noutro sistema de eixos que pode não ser ortogonal. |
| FUFOR 8 (*) | Calcula o valor da função da forma N_i num ponto para o elemento de 8 nós. |
| CICLO (*) | Dado i , calcula j e k por permutação circular. |

(*) - Subrotina desenvolvida para um programa de cálculo automático para dimensionamento de túneis (Sousa e Teles, 1980).

(***) - Subrotina desenvolvida para um programa de cálculo automático para estudo de escoamentos tridimensionais (Vaz, 1979).

QUADRO 2 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DB

| SUBROTINA | FUNÇÃO |
|-----------|---|
| BE3DB | Efectua a leitura de dados gerais e de gestão, gera espaço para o dimensionamento variável das principais matrizes das subrotinas e define os ficheiros utilizados por este subprograma. |
| PROGB | Efectua a leitura dos dados de cálculo; calcula a área e os comprimentos segundo os eixos locais de todos os elementos para posterior cálculo da ordem de integração numérica a utilizar; calcula os valores do integral azimutal; calcula os valores da matriz G e os valores não diagonais da matriz H; calcula indirectamente os valores diagonais da matriz H; forma o sistema de equações; resolve o sistema de equações por blocos; reordena os valores de fronteira e escreve os valores dos deslocamentos e das pressões nos pontos nodais da fronteira; calcula e escreve os valores dos deslocamentos e das tensões nos pontos interiores da estrutura. |
| ALR | Calcula a área e os comprimentos segundo os eixos locais de todos os elementos de fronteira. |
| AZIMU | Calcula, no caso de o domínio da estrutura ser infinito, o valor do integral azimutal. |
| HG8 | Calcula, para um ponto nodal x_i e um dado elemento de fronteira, os valores correspondentes das matrizes H e G, com excepção dos valores diagonais de H, para o caso de o ponto x_i não pertencer ao elemento em causa. |
| HG8S | Calcula, para um ponto nodal x_i e um dado elemento de fronteira, os valores correspondentes das matrizes H e G, com excepção dos valores diagonais de H, para o caso de o ponto x_i pertencer ao elemento em causa. |
| HH1 | Calcula, indirectamente, para cada ponto nodal x_i , os correspondentes valores diagonais da matriz H. |
| AXF | Forma, para cada ponto nodal x_i , os valores correspondentes do sistema de equações pelo algoritmo de Gauss, utilizando um método de condensação da matriz por blocos, procedendo posteriormente à retrosubstituição. |
| REORD | Procede à reordenação dos valores de fronteira impostos à partida e dos obtidos da resolução do sistema de equações. |
| INTE | Calcula, para cada ponto interior, os valores dos deslocamentos e das tensões. |

(Continua)

QUADRO 2 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DB

(Continuação)

| SUBROTINA | FUNÇÃO |
|-----------|--|
| DDR | Calcula, entre um ponto x_i e um ponto de integração numérica pertencente a um elemento de fronteira, o valor da sua distância (raio) das derivadas do raio em relação aos eixos coordenados globais o valor da sua derivada segundo a normal ao elemento no ponto de integração e os cossenos directores da normal. |
| PP1 | Calcula a solução fundamental em tensões para um corpo isotrópico tridimensional, para um ponto x_i e um ponto de integração numérica pertencente a um elemento de fronteira. |
| UU1 | Calcula a solução fundamental em deslocamentos para um corpo isotrópico tridimensional, para um ponto x_i e um ponto de integração numérica pertencente a um elemento de fronteira. |
| DS | Calcula os valores dos tensores de terceira ordem D e S, para cálculo de tensões em pontos interiores, para um dado ponto interior x_i e um ponto de integração numérica pertencente a um elemento de fronteira. |
| GAUSSB | Determina, para uma dada ordem de integração numérica, a tabela de valores contendo a abcissa e o peso dos vários pontos de integração, nas coordenadas naturais. |
| NPIF | Calcula, para um ponto x_i pertencente à fronteira e para um dado elemento, a ordem de integração numérica a utilizar em cada direcção, bem como a tabela das abcissas e dos pesos dos vários pontos de integração, para o caso de o ponto x_i não pertencer ao elemento em causa. |
| NPIFS | Calcula, para um ponto x_i pertencente à fronteira e para um dado elemento, a ordem de integração numérica a utilizar em cada direcção, bem como a tabela das abcissas e dos pesos dos vários pontos de integração, para o caso de o ponto x_i pertencer ao elemento em causa. |
| NP11 | Calcula, para um ponto interior x_i e para um dado elemento, a ordem de integração numérica a utilizar em cada direcção, bem como a tabela das abcissas e dos pesos dos vários pontos de integração. |
| TRANC8 | Calcula, num dado ponto pertencente a um elemento de 8 nós, a matriz de transformação de coordenadas locais para globais e o módulo de G (produto vectorial fundamental). |
| TRAN33 | Calcula o módulo de G_r para os elementos lineares tridimensionais de 3 nós, utilizados na subrotina ALR. |
| FUFOR3 | Calcula o valor da função de forma N_i num ponto para o elemento linear de 3 nós. |

(Continua)

QUADRO 2 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DB

(Continuação)

| SUBROTINA | FUNÇÃO |
|---------------------------|---|
| EIGRS | Subrotina da biblioteca do DEC10, utilizada para cálculo de direcções principais. |
| DADOSB MATYM FUFOR8 | Descritas no Quadro 1 |

QUADRO 3 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DC

| SUBROTINA | FUNÇÃO |
|---------------------------|---|
| BE3DC | Efectua a leitura de dados gerais e de gestão, gera espaço para o dimensionamento variável das principais matrizes das subrotinas e define os ficheiros utilizados por este subprograma. |
| PROGC | Efectua a leitura dos dados de cálculo e do número de superfícies de desenho, das características do contorno, das coordenadas dos pontos interiores para cálculo de deslocamentos e tensões e das características geométricas do plano de desenho. Chama as subrotinas para cálculo de deslocamentos e tensões. |
| DESLB | Define as coordenadas dos pontos interiores de cada superfície de desenho e chama as subrotinas para cálculo e para desenho de deslocamentos bem como a subrotina de desenho do contorno. |
| INTED | Calcula, para cada ponto interior, o valor dos deslocamentos. |
| DESDES (**) | Desenha, em cada ponto interior, os deslocamentos segundo a superfície de desenho. |
| TENB | Define as coordenadas dos pontos interiores de cada superfície de desenho, chama a subrotina de cálculo das tensões, calcula as componentes das tensões na superfície de desenho, chama a subrotina de cálculo e desenho das tensões principais na superfície de desenho, e chama a subrotina de desenho do contorno. |
| INTEP | Calcula, para cada ponto interior, o valor das tensões. |
| DESPRI (*) | Desenha, em cada ponto interior, as tensões principais segundo a superfície de desenho (assinalando com uma seta as tracções). |
| TPRINC (*) | Calcula, em cada ponto interior, as tensões principais segundo a superfície de desenho, e a tangente trigonométrica do ângulo que a direcção de uma das tensões principais faz com um dos eixos coordenados. |
| CONTOR (**) | Desenha o contorno da fronteira segundo a superfície de corte. |
| ROTAD (*) | Auxilia a subrotina DESPRI no desenho das tensões principais |
| DADOSB MATYM FUFOR8 | Descritas no Quadro 1 |

(Continua)

QUADRO 3 - Descrição das subrotinas do subprograma BE3DC

(Continuação)

| SUBROTINA | FUNÇÃO |
|--|------------------------|
| GAUSSB TRANC8 DDR UU1 PP1 DS NP11 EIGRS | Descritas no Quadro 2. |

- (*) - Subrotina desenvolvida para um programa de cálculo automático para dimensionamento de túneis (Sousa e Teles, 1980).
- (**) - Subrotina desenvolvida para um programa de cálculo automático tridimensional para o dimensionamento de grandes estruturas subterrâneas (Ocampo, 1983).

2 - ESTRUTURA DO FICHEIRO BE3D.DAD

2.1 - Dados gerais

TÍTULO - Cadeia de caracteres alfanuméricos até um máximo de 80.

NB - Número de pontos nodais de fronteira

NE - Número de elementos de fronteira

NP - Número de pontos interiores para cálculo de deslocamentos e tensões.

INTIPO - Modo de cálculo do número de pontos de integração numérica:

(Ø) - número constante (NG)

(1) - número variável (RKG)

NTØ1 - Tipo de domínio

(Ø) - domínio infinito

(1) - domínio finito

NPB - Número de pontos nodais por cada bloco da matriz, para para resolução do sistema de equações. O número de linhas por cada bloco será $3 \times \text{NPB}$.

NG - Número constante de pontos de integração numérica, a utilizar se $\text{INTIPO} = \text{Ø}$.

RKG - Constante K definida em 3.3.3, a utilizar se $\text{INTIPO} = 1$.

F11, F12, PS11, PS12 - Ângulos φ_1 , φ_2 , ψ_1 e ψ_2 , definidos em 2.3.5, em graus, a utilizar no caso de domínios total ou parcialmente infinitos ($\text{NTØ1} = \text{Ø}$).

| | | | | | |
|--------|--|--|--|--|--|
| TÍTULO | | | | | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|----|----|----|--------|------|-----|
| NB | NE | NP | INTIPO | NTØ1 | NPB |
| | | | | | |

| |
|-----------|
| NG ou RKG |
| |

| | | | |
|-----|-----|------|------|
| F11 | F12 | PS11 | PS12 |
| | | | |

Só preencher se $\text{NTØ1} = \text{Ø}$

2.2 - Coordenadas dos pontos nodais

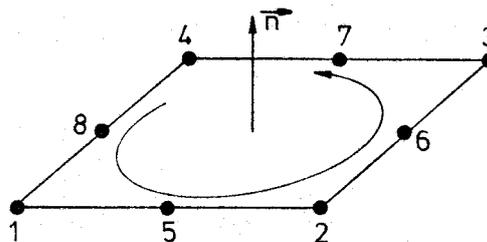
| Ponto | X | Y | Z |
|-------|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| NB | | | |

2.3 - Coordenadas dos pontos interiores

| Ponto | X | Y | Z |
|-------|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| NI | | | |

2.4 - Definição dos elementos

A definição do sentido da normal é dependente da sequência de numeração dos nós do elemento. A convenção adoptada para o definir é a indicada na figura.



| ELEM. | PONTOS NODAIS | | | | | | | |
|-------|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| NE | | | | | | | | |

2.5 - Condições de fronteira

| PONTO NODAL | DIRECÇÃO X | | DIRECÇÃO Y | | DIRECÇÃO Z | |
|-------------|------------|------|------------|------|------------|------|
| | VALOR | TIPO | VALOR | TIPO | VALOR | TIPO |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| NB | | | | | | |

TIPO - Ø - condição de fronteira em deslocamentos

1 - condição de fronteira em pressões.

2.6 - Tensões iniciais

| σ_x | τ_{xy} | τ_{xz} | σ_y | τ_{yz} | σ_z |
|------------|-------------|-------------|------------|-------------|------------|
| | | | | | |

NOTA: As tensões iniciais são supostas constantes em todo o domínio.

2.7 - Características elásticas

| MÓD. DE ELASTICIDADE | COEF. DE POISSON |
|----------------------|------------------|
| | |

2.8 - Desenho das projecções da malha segundo os planos coordenados

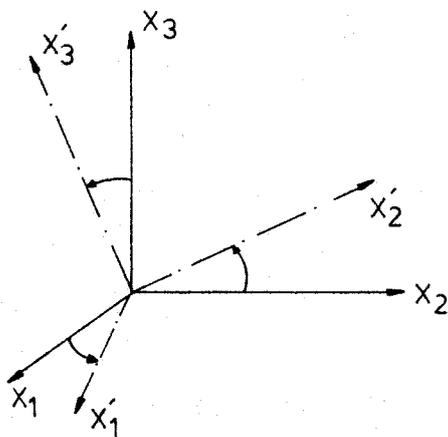
XP, YP - coordenadas da nova origem dos eixos de modo a que as coordenadas dos pontos do desenho sejam todas positivas.

DX, DY - dimensões do desenho.

EC - escala de comprimentos

| XP | YP | DX | DY | EC |
|----|----|----|----|----|
| | | | | |

2.9 - Desenho da perspectiva da malha



X_i - eixos coordenados

X'_i - eixos da perspectiva

O eixo 1 da perspectiva corresponde à direcção do raio visual e os eixos 2 e 3 definem o plano em que se obtém a perspectiva. O sistema de eixos X'_i pode não ser ortogonal.

α_{ij} - co-senos directores dos eixos da perspectiva

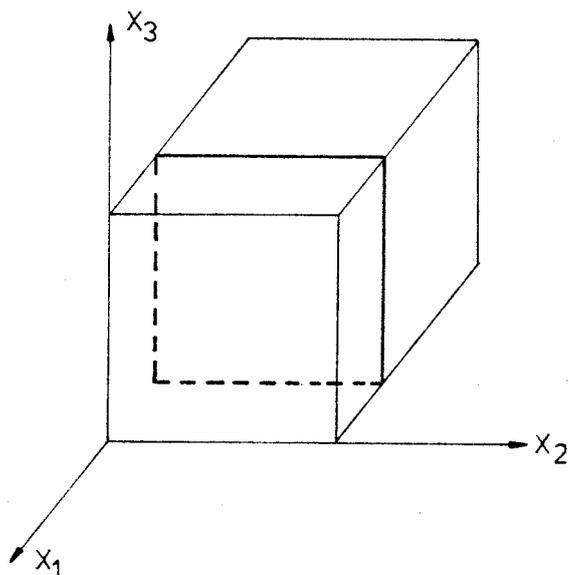
DX, DY - dimensões do desenho

NEI, NEF - número dos elementos inicial e final a desenhar.

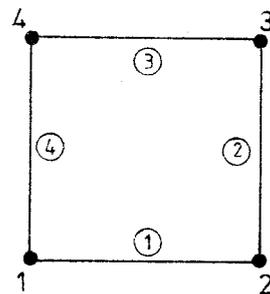
| α_{11} | α_{21} | α_{31} | α_{12} | α_{22} | α_{32} | α_{13} | α_{23} | α_{33} | DX | DY | NEI | NEF |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----|----|-----|-----|
| | | | | | | | | | | | | |

3 - ESTRUTURA DO FICHEIRO BE3D.DES

3.1 - Dados gerais e para desenho do contorno



SECÇÃO DE DESENHO
NORMAL AO EIXO X₁



DEFINIÇÃO DO CONTORNO

i-nº do ponto
Ⓛ-nº do lado

NSD - Número de secções de desenho

NLC - Número de linhas do contorno

NPC - Número de pontos do contorno

NPD - Número de ponto de desenho (pontos de cálculo de deslocamentos e tensões)

| |
|-----|
| NSD |
| |

| | | |
|-----|-----|-----|
| NLC | NPC | NPD |
| | | |

| PONTOS DO CONTORNO | | |
|--------------------|---|---|
| Ponto | X | Y |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| NPC | | |

| LADOS DO CONTORNO | | |
|-------------------|---|---|
| Lado | X | Y |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| NLC | | |

3.2 - Coordenadas dos pontos interiores no plano do desenho

| Nº | X | Y |
|-----|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| NPD | | |

3.3 - Dados para definição do plano de desenho e para os desenhos de deslocamentos e de tensões

NEX - Número de ordem do eixo coincidente com a normal à secção de desenho.

VEX - Valor da coordenada no eixo da secção intersectada pela secção de desenho.

$X\emptyset(1)$, $X\emptyset(2)$, $X\emptyset(3)$ - Coordenadas do ponto P que por translação não permite a existência de coordenadas negativas.

DX, DY - Dimensões do desenho

EC, ED, ET - Escalas multiplicativas de comprimentos, deslocamentos e tensões.

| NEX | VEX | XØ(1) | XØ(2) | XØ(3) | DX | DY | EC | ED | ET |
|-----|-----|-------|-------|-------|----|----|----|----|----|
| | | | | | | | | | |



www.lnec.pt

AV DO BRASIL 101 • 1700-066 LISBOA • PORTUGAL
tel. (+351) 21 844 30 00
lnec@lnec.pt www.lnec.pt