MINISTÉRIO DAS OBRAS PÚBLICAS, TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Laboratório Nacional de Engenharia Civil

NÃO CONFIDENCIAL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Núcleo de Engenharia Sísmica e Dinâmica de Estruturas

Proc. 0305/17/14483
Proc. 0402/14/13616

DINÁMICA DE BLOQUES DE PIEDRA
EXPERIMENTACIÓN Y SIMULACIÓN NUMÉRICA

RELATÓRIO 260/05 – NESDE

Lisboa, Junho de 2005

Projecto ECOLEADER – Grupo IV

I&D
ESTRUTURAS

ÍNDICE

Sumario v
Summary v
1. Introducción 1
Estado del arte 2
Alcances y objetivos 3
2. Ensayes Realizados 5
Características de las piedras 5
Equipo de medición y ensayes 7
Influencia de la mesa vibradora en la señal de entrada 8
3. Dinámica de Bloques Rígidos 13
Significado físico del parámetro α 14
4. Método de los Elementos Discretos 16
Descripción del MED 16
Definición de la rigidez 18
Definición del amortiguamiento 19
5. Movimiento Libre 21
Parámetros teóricos 21
Parámetros ajustados 24
6. Consideraciones para el Análisis en Régimen Forzado 29
Fórmula empírica para el amortiguamiento 29
Sensibilidad del modelo numérico al paso de tiempo Δt 30
Influencia del ruido mecánico en la respuesta numérica 32
7. Movimiento Armónico 36
Piedra 1 36
Piedra 2 40
Piedra 3 44
Piedra 4 45
8. Movimiento Aleatório 48
Piedra 2 49
Piedra 3 52
Piedra 4 55
9. Comportamiento Dinámico 59
Ajuste de parámetros 59
Efectos tridimensionales 60
Movimiento libre 65
Movimiento armónico 68
Movimiento aleatorio 71
10. Conclusiones 80
11. Agradecimientos 82
12. Referencias 83

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1-1. Arcadas formadas por bloques de piedra. 1
Fig. 1-2. Columnas de bloques de piedra. 1
Fig. 1-3. Colapso de elementos no estructurales y mobiliario. 2
Fig. 2-1. Bloques ensayados. 6
Fig. 2-2. Geometría de los bloques de piedra ensayados. a) piedras 1 a 3; b) piedra 4.... 6
Fig. 2-3. Sistema de referencia del sistema de medición. 7
Fig. 2-4. Localización de cámaras y leds. 8
Fig. 2-5. Vista general de una prueba. 8
Fig. 2-6. Señal de entrada y respuesta de la mesa vibradora. Seno constante 5.0 Hz, 5mm. 9
Fig. 2-7. Espectros de Fourier. Seno constante 5.0 Hz, 5mm. 9
Fig. 2-8. Espectro de respuesta de aceleración. Seno constante 5.0 Hz, 5mm. 10
Fig. 2-9. Señal de entrada y respuesta de la mesa vibradora. Sismo sintético 04. 10
Fig. 2-10. Espectros de Fourier. Sismo sintético 04. 11
Fig. 2-11. Espectro de respuesta de aceleración. Sismo sintético 04. 11
Fig. 2-12. Historia de aceleraciones. Sismo sintético 04. 12
Fig. 3-1. Modelos. a) Oscilador masa-resorte, b) Bloque Rígido, c) Modelo de Elementos Discretos 13
Fig. 3-2. Superficie de rotación. 14
Fig. 3-3. Superficies de contacto irregulares. 15
Fig. 4-1. Leyes constitutivas de los resortes. a) Cortante, b) Axial 17
Fig. 4-2. Variación del amortiguamiento crítico contra la frecuencia angular (normalizado). 17
Fig. 4-3. Momento de restitución contra ángulo de rotación 18
Fig. 5-1. Condición inicial, a) Piedra 2, b) Piedra 4 21
Fig. 5-2. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC. 22
Fig. 5-2. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC. 23
Fig. 5-3. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC. 25
Fig. 5-3. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC. 26
Fig. 5-4. Comparación de la aceleración, entre experimento y UDEC. 27
Fig. 5-4. Comparación de la aceleración, entre experimento y UDEC. 28
Fig. 6-1. Ajuste de la fórmula empírica para el amortiguamiento 29
Fig. 6-2. Ajuste de la fórmula empírica para el amortiguamiento, considerando $\Gamma = KR$. 30
Fig. 6-3. Sensibilidad de la respuesta numérica al Δt, piedra 2 sismo 21 31
Fig. 6-4. Influencia del ruido mecánico, piedra 2 seno constante 5 Hz, 5 mm. 33
Fig. 6-5. Influencia del ruido mecánico, piedra 2 sismo 04. 33
Fig. 6-6. Influencia del ruido mecánico 34
Fig. 6-7. Rocking producido por el ruido mecánico. Piedra 3, sismo 01. 35
Fig. 7-1. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC. 37
Fig. 7-2. Comparación de la aceleración horizontal entre experimento y UDEC. 38
Fig. 7-3. Comparación del ángulo de rocking. Seno Hanning 3.3 Hz y 9 mm. 39
Fig. 7-4. Seno Hanning 3.3 Hz y 9 mm, con parámetros ajustados. 39
Fig. 7-5. Ángulo de rocking para seno Hanning 3.3 Hz y 8 mm 40
Fig. 7-7. Seno hanning, 3.3 Hz y 6 mm 41
Fig. 7-8. Seno Hannning, 3.0 Hz y 5 mm. 42
Fig. 7-9. Run-down, 5.0 a 05 Hz y 3 mm. Ángulo de rocking. 42

Fig. 7-10. Run-down, 5.0 a 05 Hz y 3 mm. Aceleración horizontal. 43
Fig. 7-11. Run-up, 0.5 a 5.0 Hz y 6 mm. 43
Fig. 7-12. Seno constante, 5 Hz, 4 mm. 44
Fig. 7-13. Run-down, 7.0 a 0.7 Hz, 3 mm. 44
Fig. 7-14. Run-up, 0.7 a 7 Hz, 5 mm. 45
Fig. 7-15. Seno constante, 4 Hz, 5 mm, ángulo de rocking. 45
Fig. 7-16. Seno constante, 4 Hz, 5 mm, aceleración horizontal. 46
Fig. 7-17. Run-down, 7 a 07 Hz Hz, 2 mm, ángulo de rocking. 46
Fig. 7-18. Run-down, 7 a 07 Hz, 2 mm, aceleración horizontal 47
Fig. 7-19. Run-up, 0.7 a 7 Hz, 4 mm, ángulo de rocking. 47
Fig. 8-1. Típico acelerograma sintético (sismo 03). 48
Fig. 8-2. Típica historia de desplazamientos introducida a la mesa sísmica (sismo 03). 48
Fig. 8-3. Espectros de respuesta de aceleraciones, para tres sismos sintéticos. 49
Fig. 8-4. Sismo 04, ángulo de rocking 50
Fig. 8-5. Sismo 15, ángulo de rocking 50
Fig. 8-6. Sismo 21, ángulo de rocking 51
Fig. 8-7. Sismo 19, ángulo de rocking 51
Fig. 8-8. Sismo 24, ángulo de rocking 52
Fig. 8-9. Sismo 17, factor de aceleración de 0.6, ángulo de rocking. 53
Fig. 8-10. Sismo 04, factor de aceleración de 0.7, ángulo de rocking. 53
Fig. 8-11. Sismo 18, factor de aceleración de 0.5, ángulo de rocking. 54
Fig. 8-12. Sismo 13, factor de aceleración de 0.5, ángulo de rocking. 54
Fig. 8-13. Sismo 11, factor de aceleración de 0.5, ángulo de rocking. 55
Fig. 8-14. Sismo 10, factor de aceleración de 0.5, ángulo de rocking. 55
Fig. 8-15. Sismo 17, ángulo de rocking 56
Fig. 8-16. Sismo 20, ángulo de rocking 57
Fig. 8-17. Sismo 23, ángulo de rocking 57
Fig. 8-18. Sismo 10, ángulo de rocking 58
Fig. 9-1. Piedra 1. Seno Hanning 3.3 Hz, 10 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales 60
Fig. 9-2. Piedra 1. Seno Constante 3.3 Hz, 6 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales 61
Fig. 9-3. Piedra 2. Seno constante 3.0 Hz, 8 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales 61
Fig. 9-4. Amplitud del ángulo de torsión. Piedra 2, movimiento aleatorio. 62
Fig. 9-5. Piedra 4. Seno rundown 7-0.7 Hz 2 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales 63
Fig. 9-6. Piedra 3. Seno constante 5.0 Hz, 2 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales 63
Fig. 9-7. Piedra 3. Seno run-up 0.7-7, Hz 5 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales 64
Fig. 9-8. Piedra 3. Vibración alrededor del eje Y. 64
Fig. 9-9. Aceleración, velocidad y desplazamiento horizontal de la piedra 2. 66
Fig. 9-10. Aceleración E-W – rocking, piedra 1. 66
Fig. 9-11. Aceleración vertical – rocking, piedra 1. 67
Fig. 9-12. Aceleración N-S – rocking, piedra 1. 67
Fig. 9-13. Piedra 2, seno constante 2.5 Hz. 69
Fig. 9-14. Piedra 2, seno constante 5 mm de amplitud 69
Fig. 9-15. Piedra 4, seno constante 4 Hz, 3 mm de amplitud. Ángulo de Rocking 70
Fig. 9-16. Piedra 4, seno constante 4 Hz, 3 mm de amplitud. Espectros de Fourier. 71

Fig. 9-17. Piedra 2, Sismo 20. 72
Fig. 9-18. Piedra 3, varios sismos..... 72
Fig. 9-19. Sismo 20, factor de aceleración de 1.1, ángulo de rocking. 73
Fig. 9-20. Sismo 20, factor de aceleración de 1.2, ángulo de rocking. 73
Fig. 9-21. Sismo 20, factor de aceleración de 1.3, ángulo de rocking. 74
Fig. 9-22. Sismo 09, movimiento de la mesa. 75
Fig. 9-23. Sismo 09, ángulo de rocking medido..... 75
Fig. 9-24. Sismo 09 con un factor de aceleración de 1.1..... 76
Fig. 9-25. Sismo 09 con un factor de aceleración de 1.2..... 76
Fig. 9-26. Sismo 09, ángulo de rocking medido..... 77
Fig. 9-27. Sismo 09 con un factor de aceleración de 1.3..... 77
Fig. 9-28. Sismo 09 con un factor de aceleración de 1.4..... 78

INDICE DE TABELAS

Tabla 2-1. Tipo y número de ensayes realizados. 5
Tabla 2-2. Dimensiones de las piedras. 5
Tabla 5-1. Parámetros téoricos. 21
Tabla 5-2. ξ_{min} experimental con valores teóricos 21
Tabla 5-3. Parámetros ajustados. 24
Tabla 5-4. ξ_{min} experimental con valores ajustados 24
Tabla 6-1. Valores de los coeficientes C_1 y C_2 30
Tabla 7-1. Incremento de α para el ajuste de las curvas experimentales (%)..... 39
Tabla 9-1. Comparación entre parámetros teóricos y experimentales. 59
Tabla 9-2. Amplitud de la rotación alrededor del eje Y [°]. Piedra 2, movimiento armónico. 62
Tabla 9-3. Amplitud de la rotación [°]. Piedra 4, movimiento armónico. 63
Tabla 9-4. Características geométricas de las piedras. 65
Tabla 9-5. Ángulos máximos de rocking [°], movimiento armónico. Piedra 2. 68
Tabla 9-6. Ángulos máximos de rocking [°], movimiento armónico. Piedras 1, 3 y 4. . 68
Tabla 9-7. Ángulos críticos de rocking [°]. 78

Sumario

El estudio del movimiento de bloques rígidos ha sido estudiado durante largo tiempo, debido a la importancia que tiene este fenómeno, para la seguridad sísmica de cierto tipo de elementos estructurales. A pesar de esto, aún hace falta evidencia experimental para ayudar a comprender la dinámica de bloques rígidos. En este trabajo se presenta la serie de experimentos en bloques de piedra realizados en El Laboratorio Nacional de Engenharia Civil (LNEC) de Portugal. Se ensayaron cuatro bloques de piedra de granito azul, cada uno con características geométricas diferentes, sometidas a movimiento armónico y aleatorio.

Se presenta, también, la simulación numérica de los experimentos llevada al cabo con el método de los elementos discretos. Este método logra reproducir satisfactoriamente los resultados obtenidos en laboratorio. Se propone una metodología para obtener los parámetros del modelo de elementos discretos a través de los parámetros de la teoría clásica.

Summary

The dynamics of rigid bodies was studied by long time, because this phenomenon is important in the seismic security of some types of structures. However, there are few experimental studies. This job shows the experimental test carried out at the Laboratorio Nacional de Engenharia Civil (LNEC) of Portugal. Four blue granite stones were tested, each one with different geometrical characteristics, under harmonic and random motions.

A numerical simulation was carried out with the Discrete Element Method (DEM). This method has shown to be a good tool in the study of the dynamics of rigid bodies. It was proposed a new methodology to find the parameters of the DEM by using the parameters of the classical theory.

1. Introducción

Cuando un bloque rígido es sometido a una carga lateral, éste presenta un movimiento de rocking (cabeceo). Este movimiento se puede definir como la oscilación que presentan los cuerpos rígidos cuando el centro de rotación cambia instantáneamente de un punto a otro, al alcanzar una determinada posición; este cambio instantáneo viene acompañado de una pérdida de energía debido a una fuerza impulsiva (Prieto *et al.*, 2005). Así, no es posible estudiar una estructura o un elemento estructural que presente rocking como un oscilador de un grado de libertad (Makris y Konstantinidis, 2003).

El estudio del movimiento de bloques rígidos ha sido estudiado durante largo tiempo, debido a la importancia que tiene este fenómeno, para la seguridad sísmica de cierto tipo de elementos estructurales. En forma particular, este tipo de comportamiento se presenta en los edificios o elementos formados por bloques de piedra sometidos a cargas laterales (sismo); como pueden ser: construcciones de piedra (Fig. 1-1), columnas (Fig. 1-2), estatuas, etc. A pesar de esto, aún hace falta evidencia experimental, que ayude a comprender la dinámica de los bloques rígidos.

Fig. 1-1. Arcadas formadas por bloques de piedra.

Fig. 1-2. Columnas de bloques de piedra.

Fig. 1-3. Colapso de elementos no estructurales y mobiliario[1].

Cabe aclarar que, este comportamiento no esta asociado únicamente a este tipo de estructuras. Por ejemplo, la Fig. 1-3 muestra el ejemplo de un elemento no estructural y de mobiliario que se voltearon (colapsaron) debido a un sismo. Ambos elementos tuvieron un comportamiento de bloque rígido, lo cual muestra la necesidad de entender este fenómeno, para garantizar la seguridad de las personas, ante un sismo.

Finalmente, algunos autores han considerado a las estructuras de mampostería como un ensamble de elementos rígidos; incluso, si no esta formada por bloques de piedra. A partir de esta hipótesis han desarrollado trabajos analíticos (Doherty *et al.*, 2002; Makris y Roussos, 1998), numéricos (Lemos *et al.*, 2000; Casolo y Peña, 2004; de Felice, 2005) e incluso experimentales (Lam *et al.*, 2003). De este modo, se observa que el comportamiento dinámico de bloques rígidos tiene un papel fundamental en el estudio de la seguridad sísmica de estructuras de mampostería.

Estado del arte

Los primeros estudios sobre el movimiento de bloques rígidos datan de finales del siglo XIX. Pero fue hasta mediados de los años 60's, del siglo XX, con el trabajo de Housner (1963), que se estudia la dinámica de un bloque rígido en forma sistemática. Es en ese trabajo que se proponen las ecuaciones para el cálculo del periodo del sistema, que depende de la amplitud del rocking, y para el coeficiente de restitución. Así mismo, se proponen expresiones para el cálculo de la aceleración mínima requerida por un impulso, para hacer que un bloque rígido se voltee. Debido a que en la literatura, el trabajo de Housner es considerado como el primer estudio sobre la dinámica de bloques rígidos, en este trabajo se le llamará "teoría clásica".

Las principales hipótesis de la teoría clásica son:

a) El bloque es perfectamente rígido y se encuentra apoyado sobre una base perfectamente rígida.
b) La fricción entre la base y el bloque es infinita, por lo que no existe deslizamiento del bloque.
c) El movimiento es perfectamente plano; es decir, no existen efectos tridimensionales o movimientos fuera del plano.

[1] Estas fotografías fueron tomadas de la página electrónica del NISEE, Universidad de California, Berkeley. http://nisee.berkeley.edu

d) El impacto, debido al rocking, no es elástico. Es decir, el bloque no puede "rebotar". De este modo, en cualquier instante existe al menos un punto de contacto, entre el bloque rígido y la base en la que se apoya.
e) Existe conservación del momento angular, justo antes y justo después del impacto.

Debido a estas hipótesis, los parámetros de la teoría clásica dependen únicamente de la geometría del bloque; y no del material de la base o del mismo bloque. Así mismo, debido a estas hipótesis, el único movimiento que puede presentar un bloque rígido es el de rocking.

Después de Housner, diversos autores (Yim *et al.*, 1980; Ishiyama, 1982; Lipscombe, 1990; Pompei *et al.*, 1998; Winkler *et al.*, 1995; Zhang y Makris, 2001) han estudiado, tanto analítica como experimentalmente, la dinámica de un bloque rígido bajo diversas situaciones. De estos trabajos se puede resumir que:

a) Los parámetros teóricos de Housner difieren de los obtenidos experimentalmente; debido a que tanto el bloque, como la base, no son perfectamente rígidos. Por lo que dependen, también, del tipo de material.
b) La fricción entre la base y el bloque no es infinita, por lo que puede existir deslizamiento.
c) El impacto no es perfectamente inelástico, el cual depende de los materiales del bloque y de la base. Por lo que puede existir rebote.
d) El movimiento dinámico de un bloque rígido es una combinación del rocking, deslizamiento y rebote.
e) La respuesta de un bloque rígido es muy sensible a las condiciones de frontera, al impacto (coeficiente de restitución) y al tipo de movimiento de la base (armónico, aleatorio, contenido de frecuencias, etc.).

Por otra parte, algunos autores (Sincrain and Azevedo,1998; Azevedo *et al.*, 2000; Psycharis *et al.*, 2003; Papantonopoulos *et al.*, 2002) han utilizado el método de los elementos discretos (MED) para simular el comportamiento de estructuras formadas por bloques rígidos. Particularmente, Winkler *et al.* (1995) y el reporte NTUA (1997) utilizan el MED para analizar la respuesta de un bloque rígido; así como también un ensamble de ellos. Estos estudios muestran que el MED es capaz de reproducir satisfactoriamente la respuesta de bloques rígidos, tanto en régimen libre como en forzado.

La característica fundamental de estos estudios es que, ajustan los parámetros del modelo (rigidez y amortiguamiento de la junta) mediante pruebas experimentales de régimen libre. A partir de lo cual, logran reproducir las pruebas experimentales de régimen forzado. Esto significa que, para poder modelar la respuesta de una estructura formada por bloques rígidos es necesario conocer la respuesta del bloque en régimen libre. Sin embargo, esto no es siempre posible; además de que, los parámetros obtenidos no se encuentran relacionados de algún modo con los parámetros de la teoría clásica.

Alcances y objetivos

Debido a la importancia que tiene el estudio del movimiento de un cuerpo rígido en la seguridad estructural de algunas construcciones y elementos; así como a la falta de pruebas experimentales. La Universidade do Minho, en conjunto con El Laboratorio Nacional de Engenharia Civil (LNEC) de Portugal, dentro del ámbito del proyecto "ECOLEADER - Grupo 4", desarrolló una serie de experimentos en bloques de piedra; con el fin de estudiar la dinámica de éstas ante excitaciones en su base, tanto armónicas como aleatorias. De este modo, los objetivos de este proyecto son:

a) Contribuir a un mejor conocimiento sobre el comportamiento de construcciones históricas de mampostería, ante cargas dinámicas.

b) Permitir la calibración y verificación de las herramientas analíticas y numéricas, que pueden ser usadas en la simulación dinámica no-lineal de construcciones históricas.
c) El uso de las herramientas numéricas, una vez calibradas, para la realización de estudios paramétricos, con el fin de desarrollar reglas básicas a ser usadas en la práctica.

Para llevar a cabo estos objetivos, el proyecto se dividió en dos etapas: la primera corresponde al ensaye de bloques simples de piedra; mientras que la segunda corresponde a estructuras multibloque (dos bloques, dolmen y arco). En este trabajo se presentan los resultados experimentales y numéricos de la primera fase del proyecto. Por tanto, los objetivos y alcances de este trabajo son:

a) Describir las pruebas experimentales y el equipo utilizado en el ensaye de bloques simples de piedra.
b) Describir y analizar los resultados experimentales, con el fin de entender la dinámica de un bloque rígido.
c) Con las pruebas experimentales, obtener los parámetros utilizados en la teoría clásica.
d) Reproducir numéricamente la respuesta obtenida en laboratorio, utilizando el Método de los Elementos Discretos.
e) Desarrollar una metodología para obtener los parámetros asociados al MED, a partir de los parámetros de la teoría clásica.

Este trabajo se divide en tres partes principales. En la primera se describen los especimenes y el equipo utilizado para la realización de las pruebas, así como también incluye una breve descripción teórica sobre el movimiento de un bloque rígido y del Método de los Elementos Discretos (secciones 2 a 4); la segunda parte abarca la modelación numérica de los ensayes realizados (secciones 5 a 8); finalmente, la tercera parte describe el comportamiento dinámico de los bloques de piedra, a partir de los resultados obtenidos experimentalmente (sección 9).

2. Ensayes Realizados

Con el fin de estudiar el comportamiento dinámico de bloques de piedra, se llevaron a cabo ensayes en la mesa sísmica del LNEC. Tres tipos de ensayes se realizaron con las piedras: movimiento libre, movimiento armónico y movimiento aleatorio. Las pruebas de movimiento libre (free rocking) se llevaron a cabo con el fin de obtener los parámetros de la teoría clásica y para calibrar los modelos numéricos.Las pruebas de movimiento armónico permiten estudiar en forma sencilla el comportamiento de un bloque ante movimiento forzado; ya que la respuesta de éste depende de la frecuencia y amplitud del movimiento de la base. Finalmente, las pruebas de movimiento aleatorio, permiten conocer la respuesta de los bloques ante un sismo de diseño. A continuación se hace una descripción de las piedras ensayadas, así como de las características de la mesa y el sistema de medición usado.

Características de las piedras

Se ensayaron cuatro bloques de piedra de granito azul (Fig. 2-1). La Tabla 2-1 hace un resumen del número y tipo de ensayes que se realizaron con cada una de las piedras. Cada uno de los bloques posee características geométricas diferentes. Todas ellas son rectangulares, excepto la piedra 4, la cual tiene un corte de 45° en la base, con el fin de observar la variabilidad de la respuesta ante una geometría irregular (Fig. 2-2, Tabla 2-2). Las piedras fueron pulidas en su base para conseguir una mejor calidad en la respuesta, al no tener impurezas en las zonas de contacto. Así mismo, además de las cuatro piezas, se tiene una base del mismo material, la cual también fue pulida. Sobre esta base, que se fijó a la mesa sísmica con cuatro anclas, se colocaron las piedras para la realización de las pruebas. De este modo, se asegura tener una zona de contacto (junta) del mismo material.

Tabla 2-1. Tipo y número de ensayes realizados.

Piedra	Libre	Armónico	Aleatorio	Total
1	3	19	---	22
2	7	39	44	90
3	3	11	103	117
4	5	16	31	52
Total	18	85	178	281

Tabla 2-2. Dimensiones de las piedras.

Piedra	Ancho *2b* (m)	Alto *2h* (m)	Espesor *2d* (m)
1	0.25	1.00	0.754
2	0.17	1.00	0.502
3	0.12	1.00	0.375
4	0.16	0.457	0.750
Base	1.00	0.250	0.750

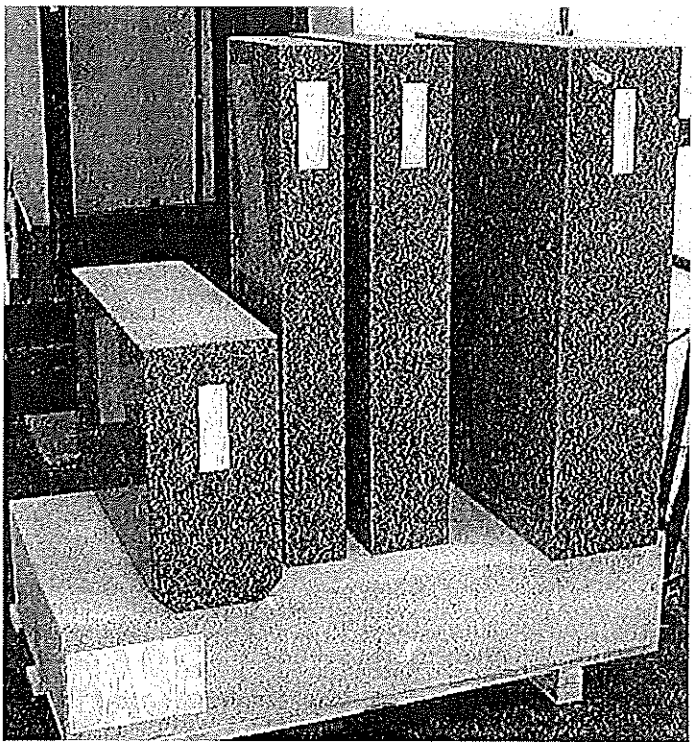


Fig. 2-1. Bloques ensayados.

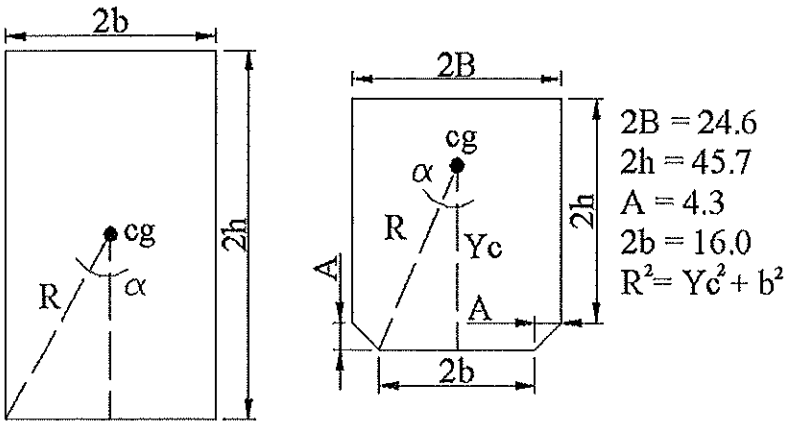


Fig. 2-2. Geometría de los bloques de piedra ensayados. a) piedras 1 a 3; b) piedra 4

Para evitar una rápida degradación de las piedras durante los ensayos, las aristas de las mismas se cortaron a 45°, siendo este corte de aproximadamente 1 cm. Con el fin de minimizar los efectos tridimensionales, la relación entre el espesor ($2d$) y el ancho ($2b$) de las piedras es igual a tres veces.

Las características mecánicas de este tipo de granito son (Transgranitos, 2005):

a) Densidad de masa (ρ) = 2670 kg/m^3
b) Resistencia a compresión ($f'm$) = 1341 kg/cm^2
c) Resistencia a flexión ($f'b$) = 147 kg/cm2
d) Porosidad aparente = 0.40 %
e) Absorción de agua = 0.20 %
f) Resistencia al desgaste = 1.72 mm
g) Resistencia al choque = 30 cm

Equipo de medición y ensayes

Los ensayos se realizaron en una mesa sísmica uniaxial, cuyas dimensiones entre ejes son de 3 x 2 m y un peso propio de 3 T. La fuerza útil de ensayo es de 6 T y se encuentra limitada por la capacidad de los desplazamientos internos. La mesa tiene un desplazamiento máximo de ±10 cm y puede desarrollar una aceleración máxima de 4.5 g, para una frecuencia de 20 Hz aproximadamente. La mesa cuenta con un sistema de adquisición de datos *National Instruments*, el cual cuenta con los programas de cómputo necesarios.

Las piedras se instrumentaron en modo de obtener la posición geométrica en cada instante (Fig. 2-3):

a) Rotación sobre los ejes Y y Z
b) Desplazamientos lineales X y Y
c) Aceleraciones en X y Y, de la parte superior del bloque.

Para evitar que el sistema de medición influyera sobre la respuesta de las piedras; se utilizó un sistema óptico de medida. Este sistema óptico se basa en LED – Cámara. El LED proporciona un rayo de luz, el cual es registrado por la cámara; la cual es capaz de registrar dos coordenadas en el plano perpendicular al rayo del LED. Por otra parte, las aceleraciones del bloque se midieron con dos acelerómetros biaxiales (X, Y), colocados en la cara superior del bloque, a ambos extremos (Norte y Sur).

Se utilizaron tres cámaras; dos cámaras se colocaron en la cara Norte con el fin de medir los desplazamientos lineales de la piedra (Fig. 2-4). Con estas cámaras es posible medir un posible deslizamiento de las mismas; además de obtener en forma indirecta el ángulo de rocking. Para medir directamente el ángulo de rocking, se utilizó un sistema LED – Cámara – Espejo, el cual se colocó en el lado Este de la piedra (Fig. 2-5). En este caso se utilizó un espejo, con el fin de obtener un mayor campo de lectura; pues colocando directamente el LED en la cara de la piedra, con ángulos muy pequeños, el rayo de luz salía del campo de la cámara. Por otra parte, debido a que el LED, proporciona dos lecturas, es posible también medir un posible ángulo de torsión. De este modo se obtiene una medida redundante del ángulo de rocking, con el fin de tener un mayor control sobre esta lectura.

La mesa sísmica se instrumentó con un deformímetro con el fin de conocer los desplazamientos reales de la misma. Cuando se aplicaron movimientos aleatorios en la base, se instaló también un acelerómetro, con el fin de registrar las aceleraciones de la mesa. De este modo, se tiene una medida redundante de la historia temporal de salida del sistema.

Se colocaron dos marcos de seguridad a los lados (Este y Oeste) de las piedras, con el fin de evitar una caída total del espécimen en caso de volteo. Dichos marcos están formados por perfiles metálicos, recubiertos con una mica plástica para proteger a las piedras en caso de impacto (Fig. 2-5).

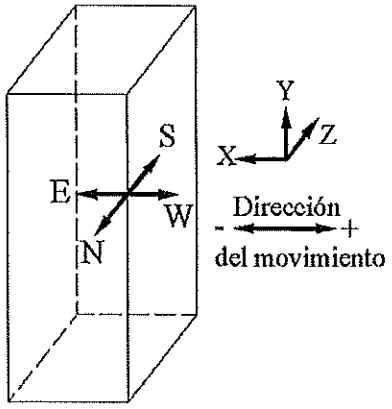


Fig. 2-3. Sistema de referencia del sistema de medición.

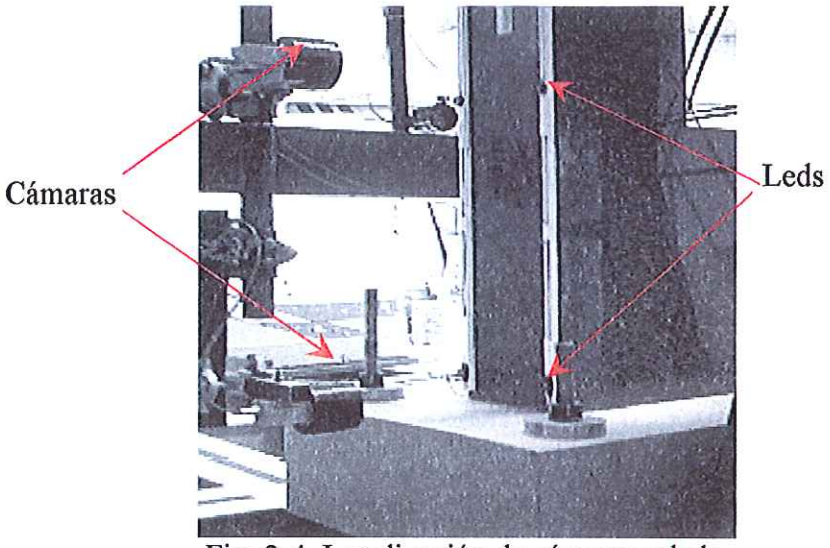


Fig. 2-4. Localización de cámaras y leds.

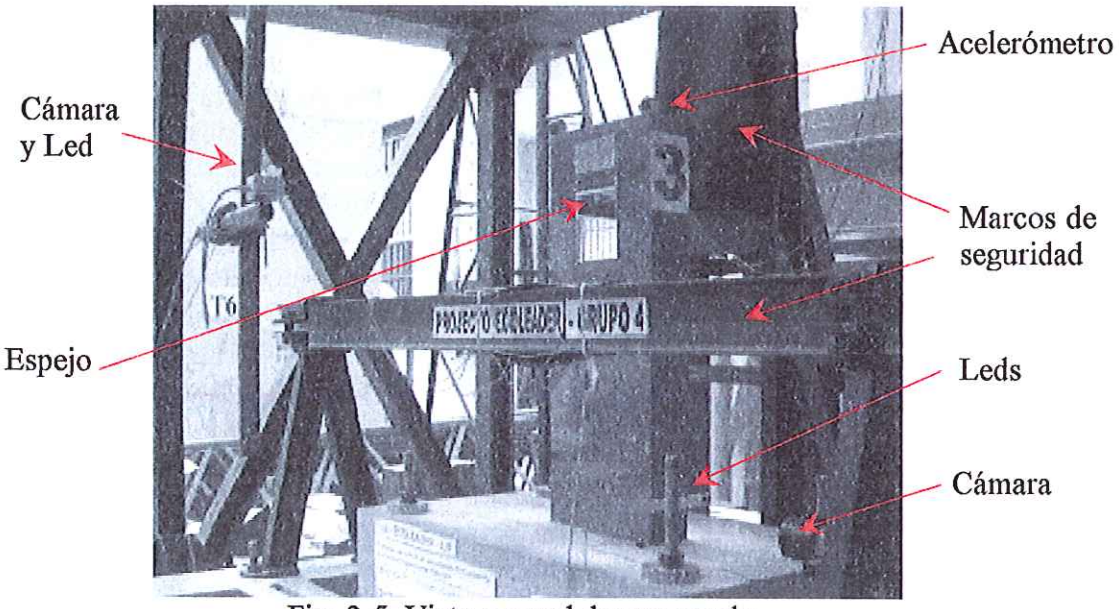


Fig. 2-5. Vista general de una prueba.

Influencia de la mesa vibradora en la señal de entrada

Con el fin de establecer la influencia de la respuesta de la mesa vibradora, al reproducir la señal de entrada, se hace un análisis de los registros de entrada dadas a la mesa y el movimiento de la mesa ante esa señal de entrada. Para esto, se estudian un registro de seno constante y un registro de movimiento aleatorio.

La Fig. 2-6 muestra la señal de entrada y el movimiento medido de la mesa, para un seno constante de 5.0 Hz con 5 mm de amplitud. Se observa que la mesa reproduce satisfactoriamente la señal de entrada. Cabe hacer notar que la señal de entrada, comienza y termina en forma instantánea; sin embargo, la mesa vibradora, por cuestiones mecánicas no logra reproducir este fenómeno. Por tal motivo, al final de la señal, la mesa tiene un movimiento brusco para detenerse instantáneamente, lo que provoca que la señal se contamine de un ruido mecánico.

Este ruido mecánico se puede apreciar con la función de transferencia entre la señal registrada en la mesa con la señal de entrada (Fig. 2-7). La función de transferencia presenta

tres picos, a 15, 20 y 25 Hz. Los dos primeros picos están asociados al movimiento inicial (aceleración) y frenado de la mesa. El tercero está asociado a la vibración natural que presenta la mesa por el simple hecho de estar en funcionamiento.

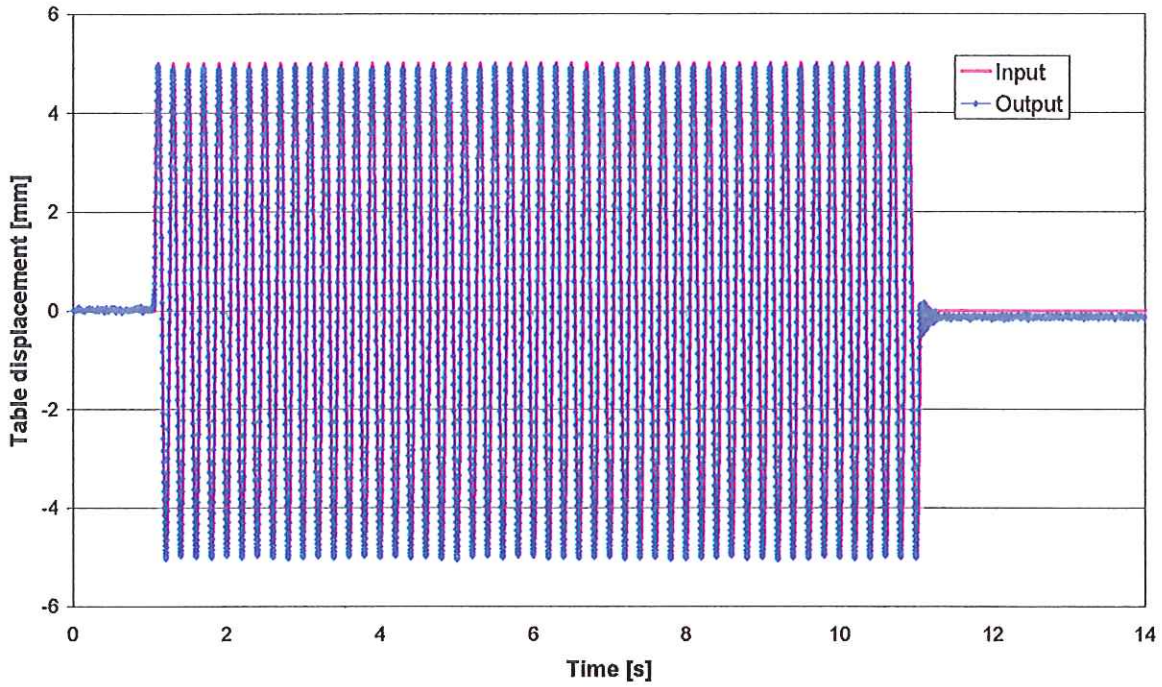


Fig. 2-6. Señal de entrada y respuesta de la mesa vibradora. Seno constante 5.0 Hz, 5mm.

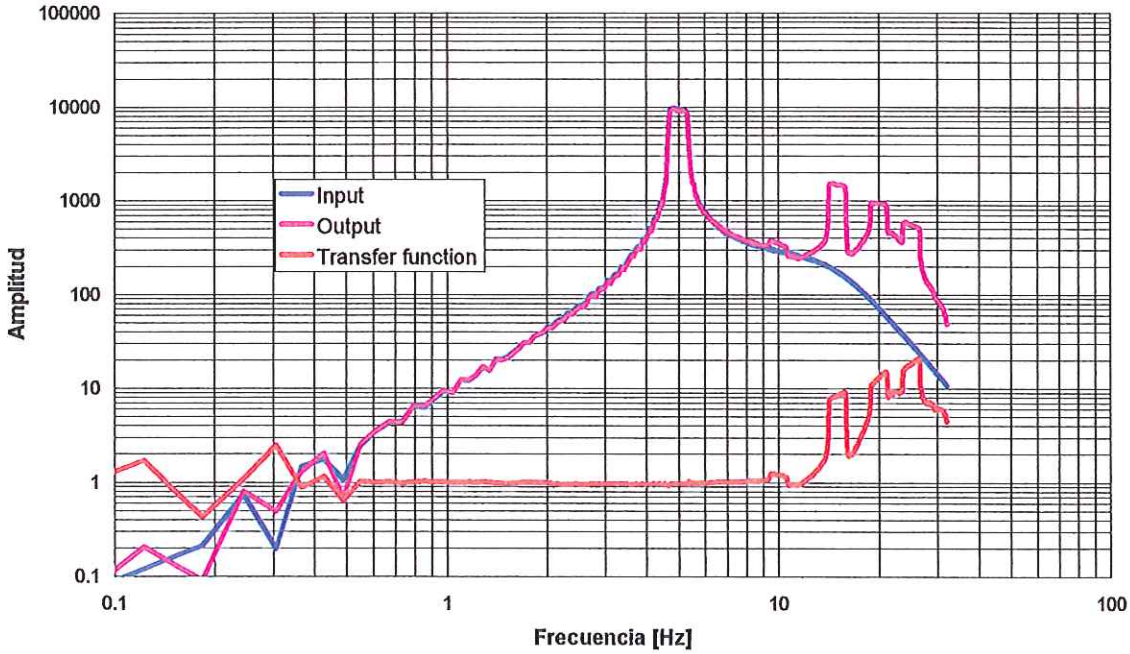


Fig. 2-7. Espectros de Fourier. Seno constante 5.0 Hz, 5mm.

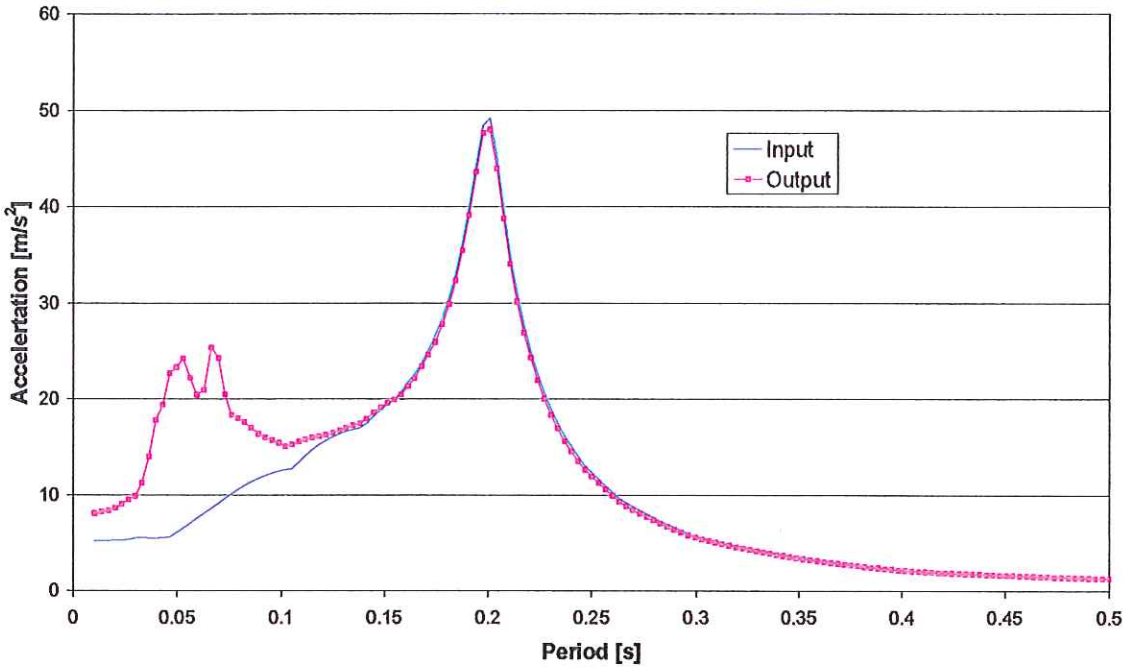


Fig. 2-8. Espectro de respuesta de aceleración. Seno constante 5.0 Hz, 5mm.

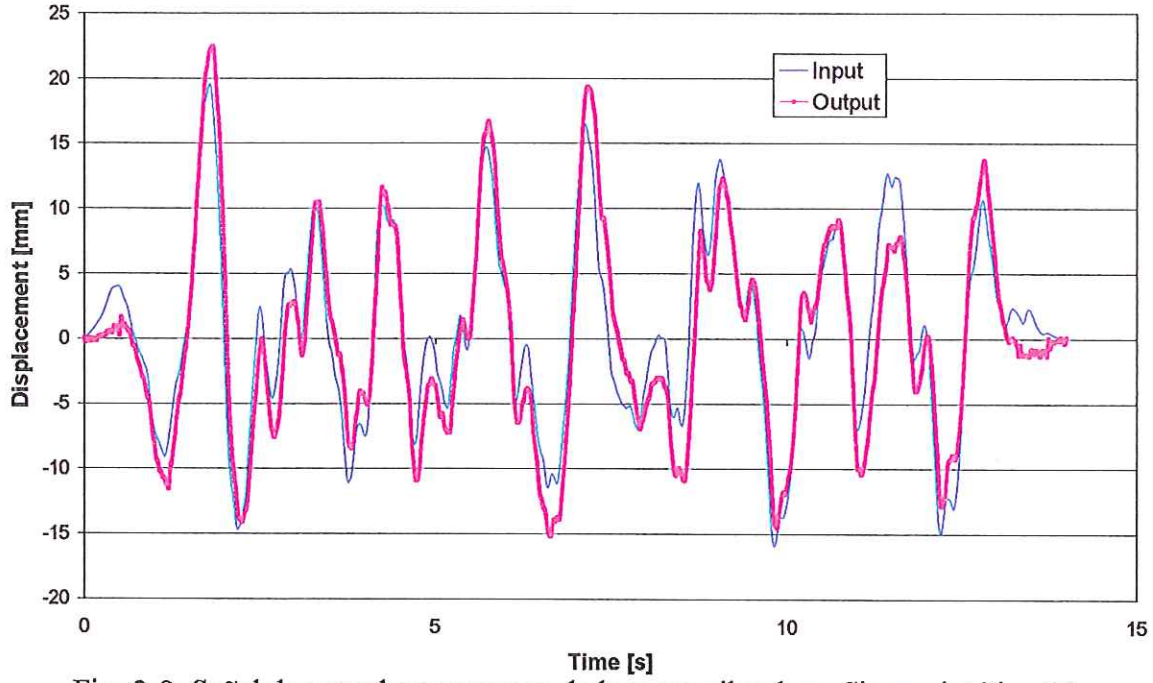


Fig. 2-9. Señal de entrada y respuesta de la mesa vibradora. Sismo sintético 04.

La Fig. 2-8 presenta el espectro de respuesta de aceleraciones de la señal de entrada y la registrada en la mesa. Se observa que ambos espectros son prácticamente los mismos para periodos mayores a 0.1 s. Para periodos menores, el ruido mecánico que presenta la mesa, hace que el espectro presente dos picos correspondientes a las frecuencias de 15 y 20 Hz.

Los movimientos armónicos impuestos a las piedras tienen frecuencias que varían de 2 a 7 Hz, es decir, frecuencias alejadas de las del ruido mecánico. Razón por la cual, este ruido modifica poco la respuesta del bloque de piedra. Sin embargo, cuando se hacen pruebas de movimiento aleatorio este ruido modifica considerablemente la respuesta de los bloques.

La Fig. 2-9 presenta la señal de entrada para el sismo sintético número 4 (ver sección 8) y el movimiento medido de la mesa. Se observa que, la mesa vibradora reproduce satisfactoriamente la señal de entrada. El espectro de Fourier de ambas señales se muestra en la Fig. 2-10. Se aprecia que ambas señales tienen el mismo contenido de frecuencias en un rango de 0.5 a 10 Hz. La función de transferencia de estas señales muestra que la mesa tiene una amplificación de las frecuencias comprendidas entre 13 y 25 Hz. Estas frecuencias corresponden a las frecuencias de la mesa.

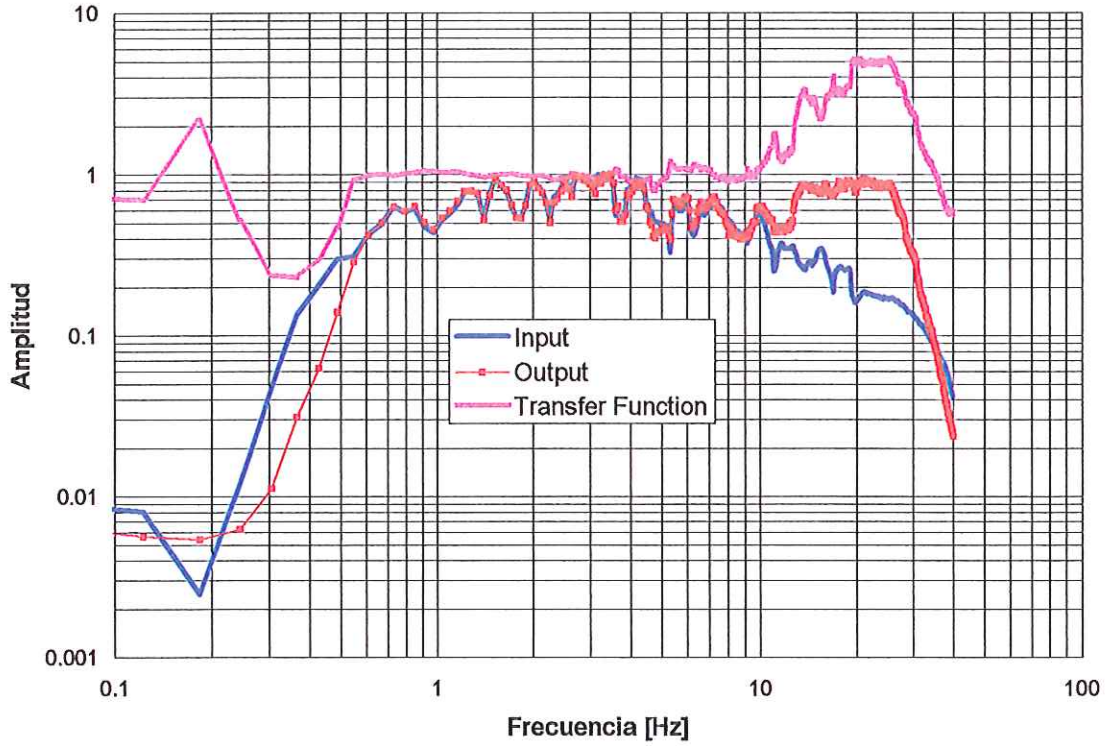


Fig. 2-10. Espectros de Fourier. Sismo sintético 04.

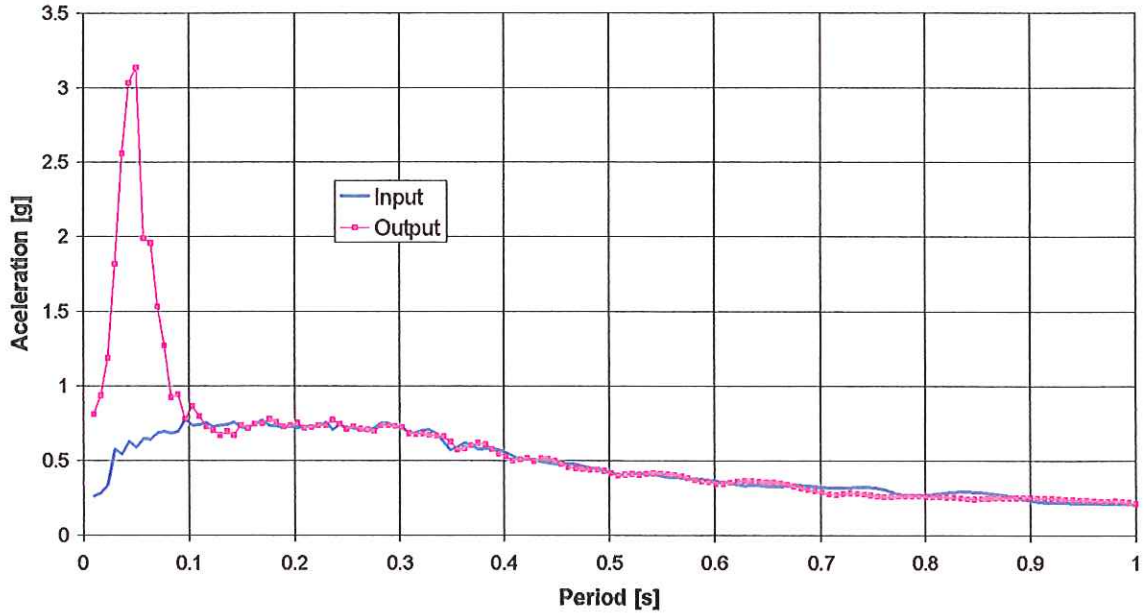


Fig. 2-11. Espectro de respuesta de aceleración. Sismo sintético 04.

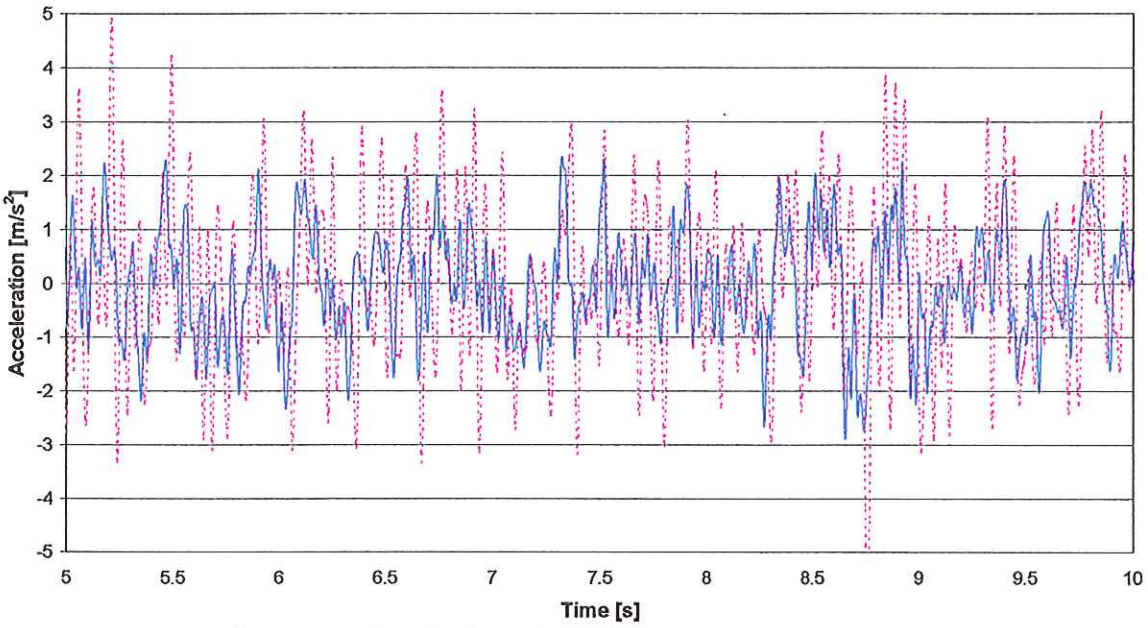


Fig. 2-12. Historia de aceleraciones. Sismo sintético 04.

Si bien, los movimientos aleatorios comienzan y terminan con una forma muy suavizada, la mesa presenta un impulso inicial y final, que corresponden al inicio del movimiento y frenado de la mesa vibradora. Por otra parte, debido a la complejidad de las señales aleatorias, en cada ciclo se presentan estas aceleraciones impulsivas (Fig. 2-12). Así, existe una amplificación de las frecuencias por arriba de 10 Hz (Fig. 2-10). La Fig. 2-11 presenta el espectro de respuesta de aceleraciones, de las señales de entrada y medidas de la mesa. Se observa claramente un pico correspondiente a 0.5 s (20 Hz), el cual corresponde a la frecuencia de la mesa.

Cabe aclarar, que este ruido al ser de origen mecánico y no eléctrico o numérico no es recomendable filtrarlo; ya que, éste modifica el contenido de frecuencias del movimiento de la mesa. Como se mostrará en la sección 6, este ruido mecánico afecta poco el comportamiento dinámico de los bloques ante cargas aleatorias, pero influyen de manera determinante en el comportamiento ante movimientos aleatorios.

3. Dinámica de Bloques Rígidos

La dinámica de un bloque rígido (BR) difiere significativamente de la dinámica de un oscilador masa-resorte de un grado de libertad (OMR). La ecuación de equilibrio dinámico, para vibración libre, de un OMR (Eq 3-1) depende de la masa (M), del amortiguamiento viscoso (C) y de la Rigidez (K) del sistema y está en función de las condiciones iniciales de desplazamiento (u), velocidad ($\dot{u}$) y aceleración ($\ddot{u}$) de la masa (Fig. 3-1a).

Eq 3-1 $$\ddot{u} + \frac{C}{M}\dot{u} + \frac{K}{M}u = 0$$

Por otra parte, la ecuación de equilibrio dinámico para un BR (Eq 3-2) depende del ángulo de rotación (θ) y de la aceleración de rotación ($\ddot{\theta}$) del bloque; así como también, de los parámetros p y α (Fig. 3-1b).

Eq 3-2 $$\ddot{\theta} - p^2\theta = -p^2\alpha$$

Donde α y p se definen como:

Eq 3-3 $$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{h}\right);\quad p = \sqrt{\frac{3g}{4R}};\quad R = \sqrt{b^2 + h^2};\quad W = Mg$$

El parámetro α relaciona el centro de rotación O (u O') con el centro de gravedad del bloque rígido. Por su parte, el parámetro p se puede definir como la frecuencia asociada al sistema debida a la interacción del bloque con la junta.

Se observa que la Eq 3-2 no es amortiguada; por tanto, en la teoría clásica se introduce el concepto de coeficiente de restitución (μ). Este coeficiente es la relación que existe entre la velocidad después del impacto ($\dot{\theta}_b$) y antes del impacto ($\dot{\theta}_a$). Considerando que existe conservación del momento angular, justo antes y después de cada impacto, se obtiene que μ depende solo de la geometría del bloque (Housner, 1963):

Eq 3-4 $$\mu = \frac{\dot{\theta}_b}{\dot{\theta}_a} = 1 - \frac{3}{2}sen^2(\alpha)$$

De acuerdo con Prieto *et al.* (2004), la variación de la velocidad antes y después del impacto es debida a una fuerza de amortiguamiento generalizado (Q_δ) que presenta la forma de una delta de Dirac (F_δ) y depende del momento de restitución:

Eq 3-5 $$Q_d = WR\sin(\alpha)F_\delta$$

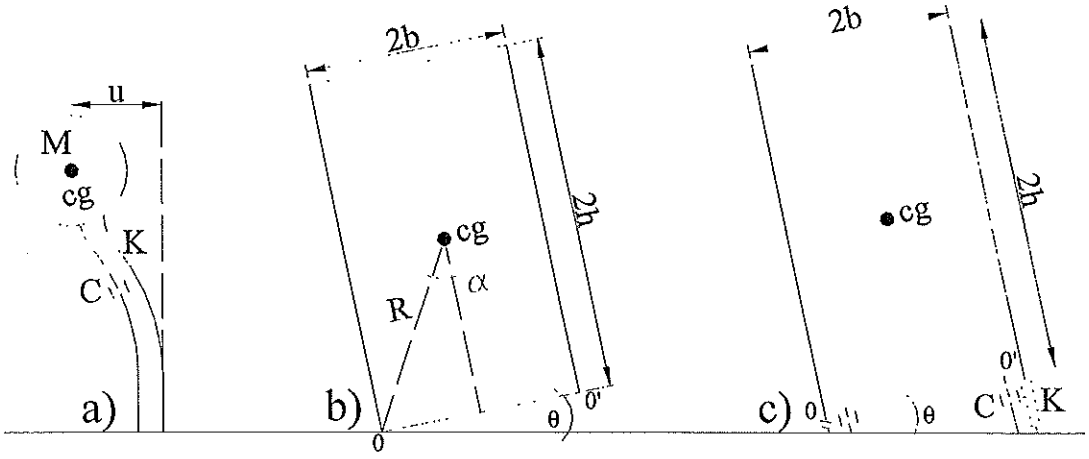


Fig. 3-1. Modelos. a) Oscilador masa-resorte, b) Bloque Rígido, c) Modelo de Elementos Discretos

Siendo F_δ igual a (Prieto *et al.*, 2004):

Eq 3-6 $$F_\delta = \dot{\theta}^2 \ln(\mu)\delta(x)$$

Las Eq 3-3 y Eq 3-4 proporcionan los valores téoricos de los parámetros α, μ y p. Sin embargo, los valores obtenidos de pruebas experimentales, generalmente no coinciden con estos valores teóricos (Aslam *et al.*, 1980; Tso *et al.*, 1989; Lipscombe, 1990).

Debido a esto, Prieto *et al.* (2005) proponen un procedimiento sistemático para recabar estos datos a partir de pruebas de vibración libre. El criterio que ellos adoptan es el que los valores ajustados de α, μ y p produzcan el máximo acuerdo entre teoría y experimento. Sin embargo, indican que valores demasiado alejados de los valores teóricos llevan a situaciones que no son realistas.

Significado físico del parámetro α

La teoría clásica presenta tres parámetros principales que modifican el comportamiento de un BR: α, μ y p. Estos parámetros se derivan de la formulación matemática; sin embargo, están estrechamente ligados a cuestiones físicas.

El parámetro α es un parámetro geométrico que expresa el ángulo crítico a partir del cual el bloque se vuelve estáticamente inestable y por tanto se voltea (Fig. 3-1b). Este parámetro esta definido como la relación entre la posición de los puntos de rotación de la base (0 -0') y la altura al centro de gravedad (cg) del elemento.

Desde un punto de vista teórico, estos puntos de rotación se encuentran localizados justo en los extremos de la base. Por otra parte, si se considera una sección paralelepípeda de un material homogéneo, entonces, el centro de gravedad se encuentra al centro del elemento. Razón por la cual, α se puede obtener en forma simplificada con la Eq 3-3.

Desde un punto de vista práctico, los puntos de rotación no necesariamente se encuentran localizados en los extremos de la base. Esto se puede deber a que en la base se presenten, dos condiciones principalmente:

a) Superficie de rotación; es decir, contacto no puntual
b) Contacto entre superficies irregulares.

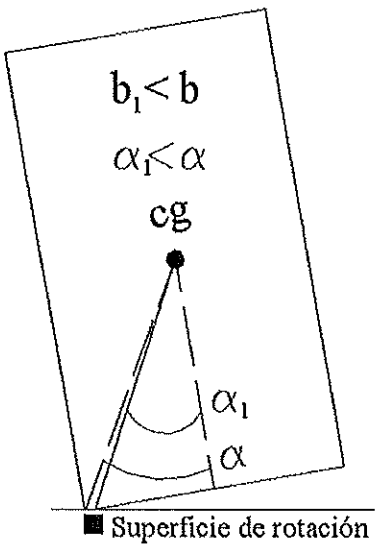


Fig. 3-2. Superficie de rotación.

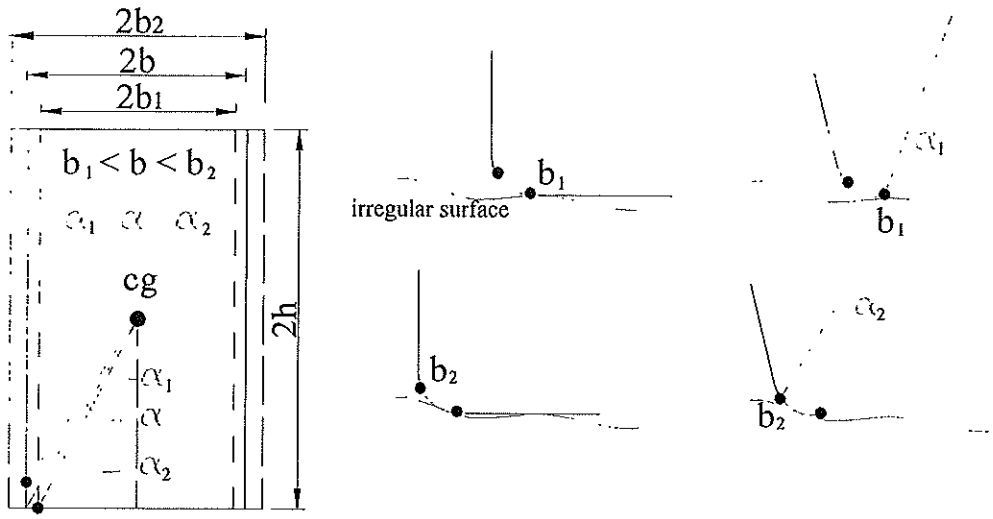


Fig. 3-3. Superficies de contacto irregulares.

Teóricamente los centros de rotación de la piedra se presentan en forma puntual. Sin embargo, físicamente estos centros de rotación se dan en una superficie finita de la piedra (Fig. 3-2). El tamaño de la superficie de rotación dependerá de la rigidez del bloque y la base; siendo puntual, cuando ambos sean infinitamente rígidos. En este caso, para calcular α, se puede considerar que el punto de rotación se encuentra localizado al centro de la superficie de rotación. Esto conlleva a tener un parámetro α menor que el teórico (cuando los puntos de rotación están localizados en los extremos de la base).

El caso b) se presenta cuando las superficies de contacto (bloque – base) no son perfectamente lisas y presentan alguna irregularidad. Estas irregularidades pueden provocar que los puntos o superficies de rotación se muevan de posición, como se encuentra esquemáticamente representado en la Fig. 3-3. Esto se traduce en un cambio de α. Sin embargo, el cambio de este parámetro no es constante, ni permanente; ya que, dependerá de la zona de contacto (condiciones de frontera). La irregularidad de las superficies se encuentra asociada con el desgaste de los bloques.

4. Método de los Elementos Discretos

Debido a las diferencias implícitas entre un sistema masa-resorte y un bloque rígido; no es posible hallar un sistema MR equivalente a un BR (Makris y Konstantinidis, 2003). De estudios anteriores (Winkler *et al.*, 1995; NTUA, 1997; Papantonopoulos *et al.*, 2002; Psycharis *et al.*, 2003; de Felice, 2005) se desprende que el método de los elementos discretos (MED) es una poderosa herramienta para la simulación de la dinámica de bloques rígidos.

La simulación numérica realizada en este trabajo se llevó a cabo mediante el Método de Elementos Discretos (MED). Para tal propósito se utilizó el programa de cómputo UDEC (Universal Distinct Element Code). En esta sección se presenta brevemente la filosofía del MED; así como también se presenta la forma en que se definieron los distintos parámetros asociados al modelo numérico. La primera parte de esta sección esta tomada del Manual del UDEC (2000) y los trabajos realizados por Cundall (1988) y por Sincraian y Lemos (LNEC, 1998).

Descripción del MED

El Método de los Elementos Discretos (MED) es considerado como un método discontinuo; es decir, que permite un movimiento relativo entre elementos, los cuales pueden cambiar de posición e incluso de conectividades. El MED es útil cuando se trabaja con materiales formados con bloques o partículas, pues se logra tomar en cuenta el movimiento relativo entre ellos. El MED presenta dos ventajas principales:

a) Permite grandes desplazamiento y rotaciones entre bloques, incluyendo la separación total entre ellos.
b) Durante el análisis, el programa calcula automáticamente la nueva geometría y contactos entre bloques.

Estos dos puntos son de gran relevancia en el estudio del movimiento de bloques de piedra, pues permite simular el rocking, el deslizamiento e incluso el volteo.

En el programa UDEC existe la posibilidad de modelar los bloques como infinitamente rígidos o con un material deformable. Para nuestro caso, se utilizó la primera opción debido a que la mayor parte de los desplazamientos del bloque se deben a movimientos relativos entre el bloque y la base y no a una deformación del bloque.

El contacto entre elementos (junta) es considerado con una rigidez axial finita. En este caso, puede existir una pequeña sobreposición de elementos en caso de fuerzas de compresión. Para nuestro caso, no se consideró una rigidez infinita en la junta, debido a que la disipación de energía en cada impacto depende de los materiales del bloque y la base (Yim *et al.*, 1980).

El contacto entre bloques se encuentra definido por puntos de contacto. Estos puntos de contacto pueden ser de dos formas diferentes. La primera se presenta cuando una esquina de un bloque entra en contacto con otra esquina o con un lado de otro bloque. En este caso el punto de contacto es la esquina del primer bloque. La segunda forma se presenta cuando un lado de un bloque se encuentra totalmente en contacto con un lado de otro bloque. En este caso, los puntos de contacto se definen en las esquinas del lado de contacto (Fig. 3-1c).

Para cada uno de estos puntos de contacto se definen dos resortes lineales, uno axial y uno de cortante. El resorte axial presenta un comportamiento elástico-lineal a compresión, mientras que no resiste tensiones. Por su parte, el comportamiento del resorte a cortante es elasto-plástico perfecto, con un comportamiento tipo Mohr-Coulomb (Fig. 4-1). De este modo, los parámetros que definen el comportamiento de la junta son: rigidez axial (K), rigidez de cortante (Ks), ángulo de fricción interna (φ) y cohesión (c).

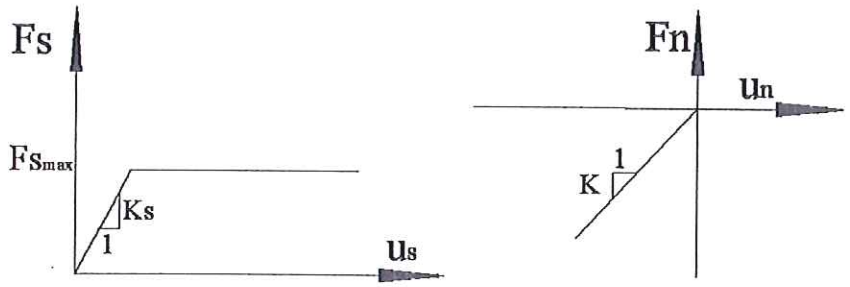


Fig. 4-1. Leyes constitutivas de los resortes. a) Cortante, b) Axial

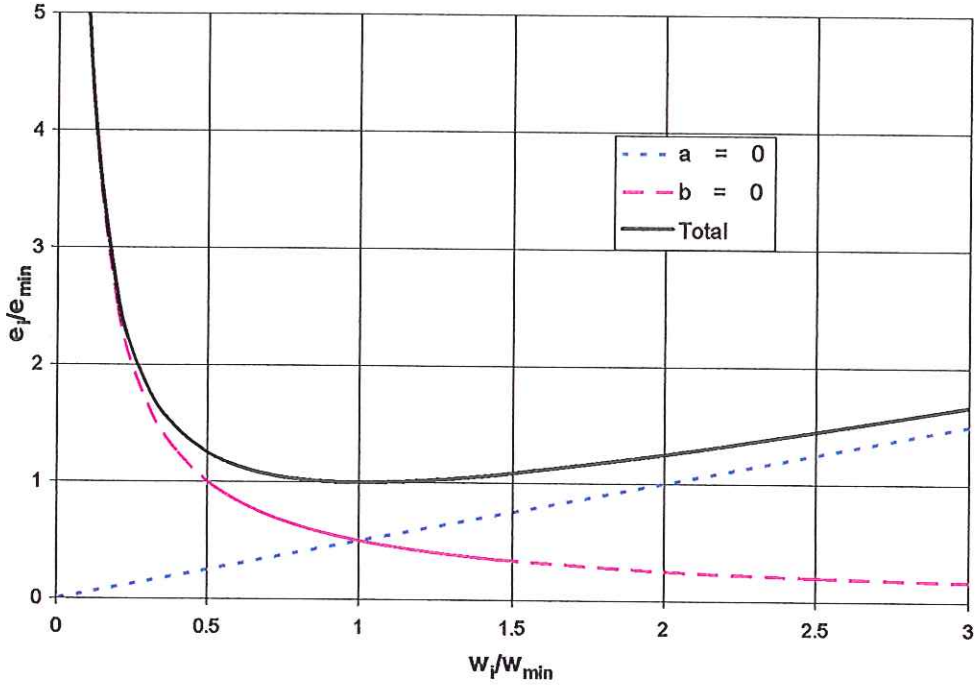


Fig. 4-2. Variación del amortiguamiento crítico contra la frecuencia angular (normalizado).

El amortiguamiento (C) se define de acuerdo con Rayleigh:

Eq 4-1 $$C = \alpha M + \beta K$$

Donde α es la constante de amortiguamiento proporcional a la masa y β es la constante de amortiguamiento proporcional a la rigidez; definidos como:

Eq 4-2 $$\alpha = \xi_{\min}\omega_{\min}; \quad \beta = \frac{\xi_{\min}}{\omega_{\min}}; \quad \omega_{\min} = 2\pi f_{\min}$$

ξ_{min} es la fracción del amortiguamiento crítico asociado a la frecuencia f_{min}. Esta pareja de valores se obtienen de $\alpha M = \beta K$ (Fig. 4-2) y son los parámetros de amortiguamiento que se deben proporcionar al programa de cómputo.

El programa UDEC utiliza un algoritmo de solución de las ecuaciones diferenciales con un paso de tiempo constante (algoritmo de diferencias centrales). Este paso de tiempo (Δt) debe ser lo suficientemente pequeño en modo de garantizar la estabilidad numérica del sistema. La estabilidad numérica del programa considera dos estados. El primero se refiere a la deformación de cada uno de los bloques y el segundo a los desplazamientos relativos entre bloques.

La primera condición es estable cuando se cumple la siguiente ecuación:

Eq 4-3 $$\Delta t_n = 2\min\left(\sqrt{\frac{m_i}{k_i}}\right)$$

Donde m_i es la masa asociada al punto de conexión i, k_i es la rigidez de todos los elementos conectados en ese punto y *min(*)* es la función que encuentra el valor mínimo de un conjunto de datos.

Por otra parte, el segundo estado de estabilidad se cumple cuando:

Eq 4-4 $$\Delta t_b = (frac)2\sqrt{\frac{M_{\min}}{K_{\max}}}$$

Donde M_{min} es la masa del bloque más pequeño del sistema y K_{max} es la máxima rigidez de un punto de contacto. El factor *frac* es un factor de reducción que toma en cuenta el hecho de que un bloque puede estar en contacto con varios bloques a la vez. El manual del UDEC indica que con un valor de 0.1, es un valor suficiente para la mayoría de los casos.

Finalmente, el paso de tiempo (Δt) se obtiene escogiendo el valor mínimo de los dos anteriores:

Eq 4-5 $$\Delta t = \min(\Delta t_n, \Delta t_b)$$

Resumiendo, un elemento discreto se puede considerar como un bloque rígido apoyado sobre una fundación elástica de dos resortes y dos amortiguadores (Fig. 3-1c). La dinámica de este modelo se obtiene resolviendo la Eq 3-1; por tanto, es necesario definir los parámetros K y C.

Definición de la rigidez

La rigidez "rotacional" (Kr) de un BR no es constante y depende del ángulo de rocking, siendo infinita, cuando el ángulo vale cero y cero cuando el ángulo vale α (Fig. 4-3). Sin embargo, nuestro sistema requiere de una rigidez "lineal" constante de la junta y no del sistema; ya que, la rigidez del sistema depende del peso (Mg), de las dimensiones de la piedra (R y α) y del ángulo de rocking (θ).

De acuerdo con Housner (1963), el periodo del sistema es igual a:

Eq 4-6 $$T = \frac{4}{p}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{1-\theta/\alpha}\right)$$

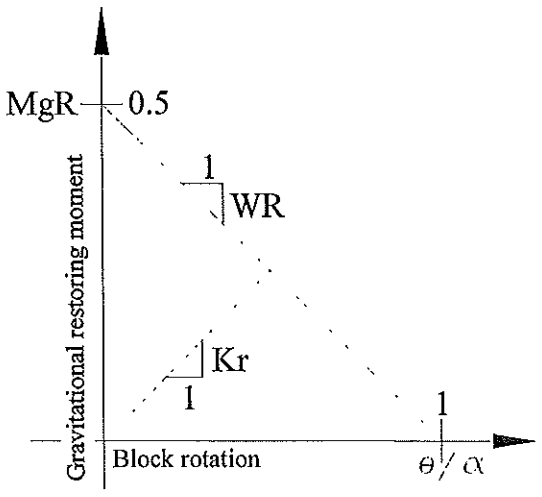


Fig. 4-3. Momento de restitución contra ángulo de rotación

Por tanto, el periodo del sistema depende de dos parámetros: θ/α y p. El parámetro θ/α es proporcional a la rigidez rotacional del sistema, según el ángulo de rocking (Fig. 4-3). Si este parámetro vale 1, el periodo es infinito ($Kr = 0$). Si vale cero, el periodo es cero ($Kr = \infty$). El parámetro p, define la relación del bloque rígido con la junta. De modo que, si el bloque se encuentra empotrado, entonces $K = \infty$, $T = 0$, por lo que $p = \infty$. Si el bloque se encuentra desligado de la junta, entonces $K = 0$, $T = \infty$ y $p = 0$.

De acuerdo con esto, podemos definir el parámetro p como la frecuencia asociada al sistema, debido a la interacción del bloque con la junta. El parámetro p, tiene unidades de 1/seg (Hz). Por lo que, la rigidez de la junta se puede considerar como:

Eq 4-7 $$K = Mp^2 = K_1$$

Considerando el valor teórico de p (Eq 3-3), tenemos que:

Eq 4-8 $$K = \frac{3W}{4R} = K_2$$

Ahora bien, K_1 será igual a K_2, solamente cuando se tenga el valor teórico de p. En caso de usar los valores ajustados de los parámetros α, μ y p (Prieto *et al.*, 2005), entonces K_1 y K_2 serán diferentes. Por lo que el valor de la rigidez de la junta se puede definir como:

Eq 4-9 $$K = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

En la sección 5 se justifica el uso de la Eq 4-9. Por otra parte, comparando los términos de desplazamiento y ángulo, de la Eq 3-1 y Eq 3-2, resulta obvia la Eq 4-7.

La rigidez a cortante de la junta (Ks) se calcula en forma simplificada como:

Eq 4-10 $$K_S = K$$

Diversos autores (Winkler *et al.*, 1995; Papantonopoulos *et al.*, 2002; Psycharis *et al.*, 2003), que han utilizado el MED como herramienta de análisis, han utilizado la Eq 4-10 con óptimos resultados. Por ejemplo, Winkler *et al.* (1995) calculan la rigidez de la junta (tanto axial como a cortante) midiendo la velocidad de propagación de ondas P y S a través del espécimen. Las mediciones por ellos recabados muestran que las diferencias entre las ondas P y S son tan pequeñas que utilizan la Eq 4-10 para el cálculo de la rigidez a cortante. Por otra parte, Papantonopoulos *et al.* (2002) y Psycharis *et al.* (2003) obtienen esta equivalencia ajustando los parámetros del modelo UDEC con pruebas experimentales.

Definición del amortiguamiento

Para la definición del amortiguamiento, es necesario proporcionar f_{min} (Eq 4-2). Por tanto, debido a que se considera que p es la frecuencia asociada al sistema debida a la interacción del bloque con la junta, entonces podemos forzar la condición:

Eq 4-11 $$f_{\min} = p$$

Por otra parte, cuando el BR se encuentra en rocking, la fuerza de amortiguamiento asociada a uno de los puntos de conexión (F_{dk}), deberá ser cero cuando el punto de conexión se encuentre en tensión (desligado de la base). Así, para que esta fuerza sea cero en tensión, es necesario que α y K sean igual a cero (Eq 4-12); debido a que se considera que el BR tiene una masa finita. Es decir, consideramos que la junta no tiene resistencia a la tensión y que el amortiguamiento solo depende de la rigidez.

Eq 4-12 $$F_{dk} = \frac{C}{M}\dot{u} = \frac{\alpha M + \beta K}{M}\dot{u} = \left(\alpha + \beta\frac{K}{M}\right)\dot{u}$$

Por tanto, la Eq 3-1 se puede rescribir como:

Eq 4-13 $$\ddot{u} + \beta p^2 \dot{u} + p^2 u = 0$$

De este modo se fijan tres (f_{min}, K, Ks) de los cuatro parámetros requeridos; faltando encontrar ξ_{min}. Debido a que este parámetro es de vital importancia para lograr una buena simulación numérica y que está relacionado con el tipo de material del bloque (M), la geometría del bloque (R), el coeficiente de restitución (μ) y la rigidez de la junta (K); en este trabajo se propone una función empírica para obtener ξ_{min} en función de los parámetros de la teoría clásica. Por tanto, como primer paso, se encuentra el valor de ξ_{min} experimental, ajustando la respuesta numérica a la experimental, de las pruebas de free-rocking. Tal y como se presenta en la sección 5.

5. Movimiento Libre

Parámetros teóricos

La primera simulación del movimiento libre se realizó utilizando los parámetros teóricos de α, μ y p. La Tabla 5-1 presenta los valores de los parámetros teóricos. Con estos valores se calcularon las constantes para el modelo de elementos discretos. La Fig. 5-1 muestra el modelo UDEC para las piedras 2 y 4 en la condición inicial del movimiento libre. Estas primeras simulaciones se realizaron con el afán de encontrar el valor de ξ_{min}, ajustando las curvas numéricas con las experimentales.

La Tabla 5-2 presenta el ξ_{min} obtenido para cada una de las pruebas de vibración libre. Como se puede observar, la diferencia entre valores experimentales para cada piedra es pequeña y se puede atribuir a la variabilidad propia de los experimentos. La Fig. 5-2 presenta la comparación entre la rotación medida experimentalmente y la calculada con el UDEC, para la primera prueba de cada una de las piedras. Se puede observar que en general, para las cuatro piedras las amplitudes de los ciclos se ajustan muy bien a las medidas experimentalmente. Esto debido a que el amortiguamiento se ajustó para cada uno de los experimentos. Sin embargo, los periodos de cada ciclo son los que presentan las mayores diferencias; principalmente para las piedras tres y cuatro.

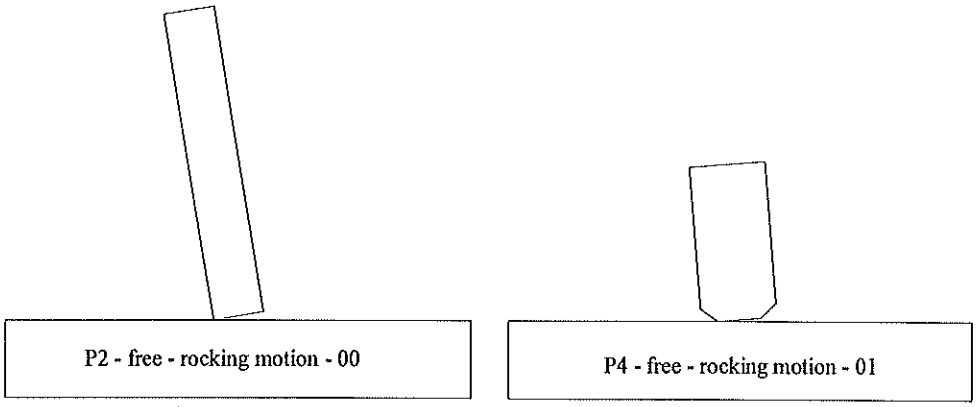


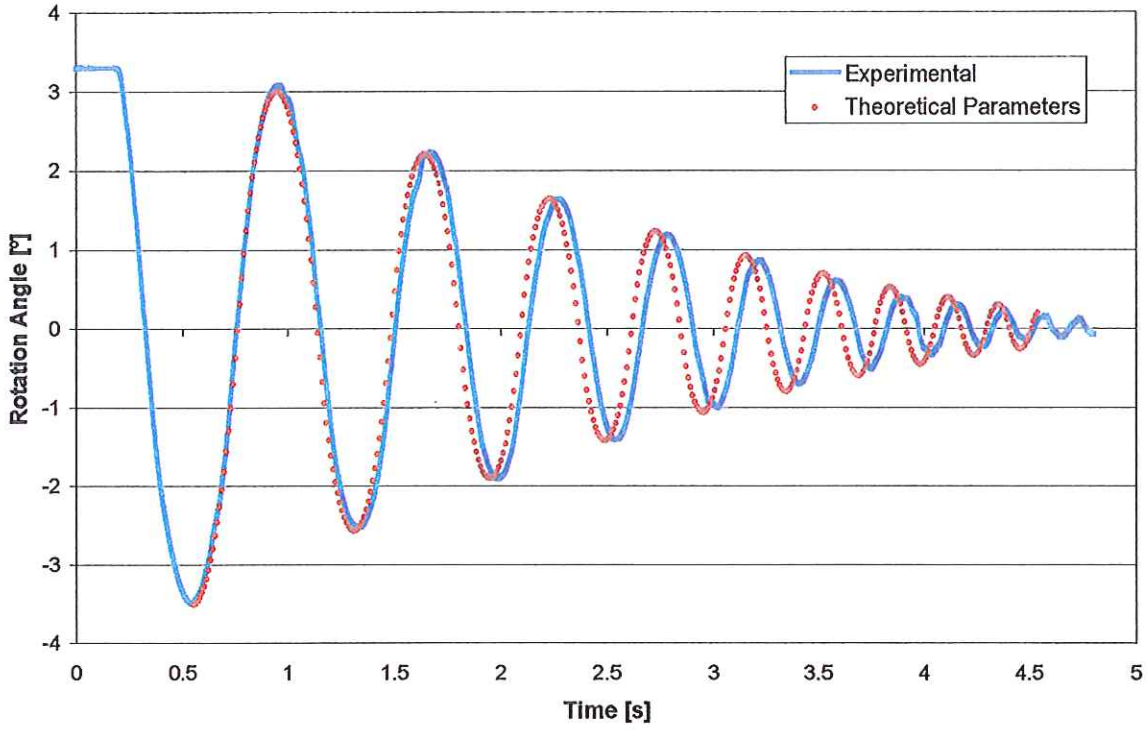
Fig. 5-1. Condición inicial, a) Piedra 2, b) Piedra 4

Tabla 5-1. Parámetros téoricos.

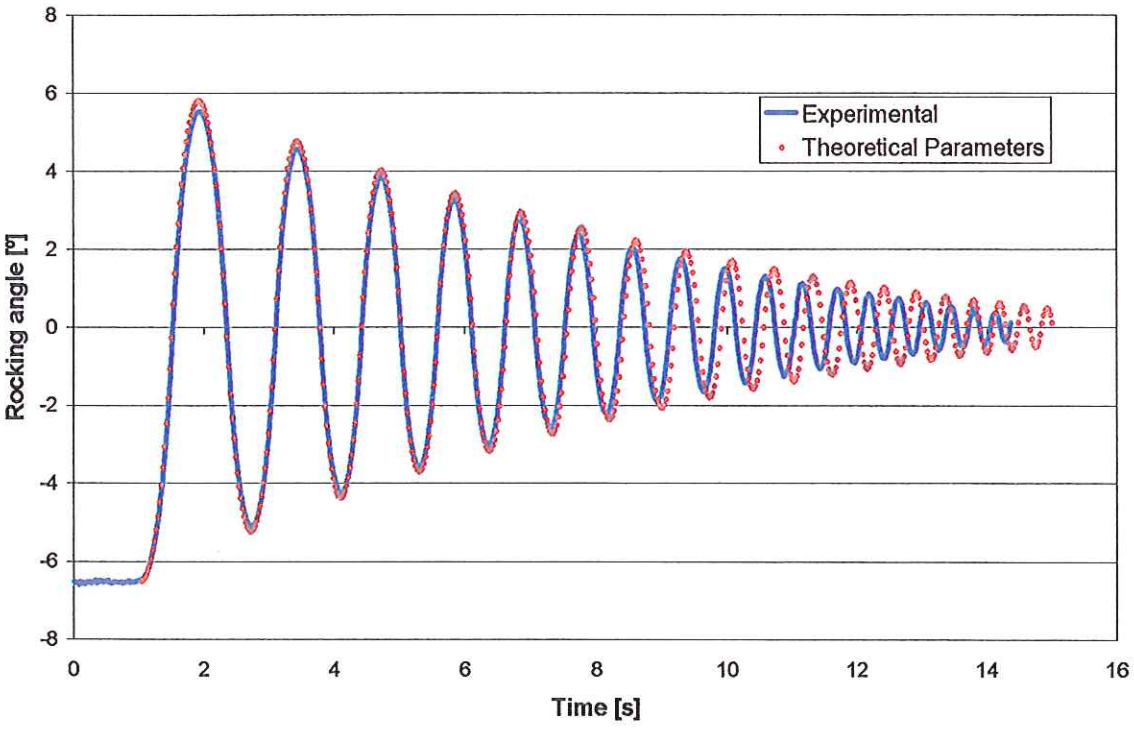
Piedra	α (rad)	μ	p (1/s)	R (m)	M (Kg)	W (N)	$2b$ (m)	$2h$ (m)	$2d$ (m)	I_0 (Kg-m^2)	K (N/m)
1	0.242	0.914	3.78	0.515	506	4966	0.25	1.00	0.754	179	7233
2	0.168	0.958	3.81	0.507	228	2233	0.17	1.00	0.502	78	3302
3	0.119	0.978	3.82	0.504	122	1192	0.12	1.00	0.375	42.8	1174
4	0.310	0.860	5.16	0.283	245	2406	0.16	0.457	0.750	26.2	6454

Tabla 5-2. ξ_{min} experimental con valores teóricos

Piedra	ξ_{min} experimental (x 10^{-3})					ξ_{min} promedio (x 10^{-3})
	1	2	3	4	5	
1	2.75	2.75	3.25			2.92
2	2.00	1.25	2.00	2.00	1.50	1.75
3	5.00	5.00	5.00			5.00
4	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50

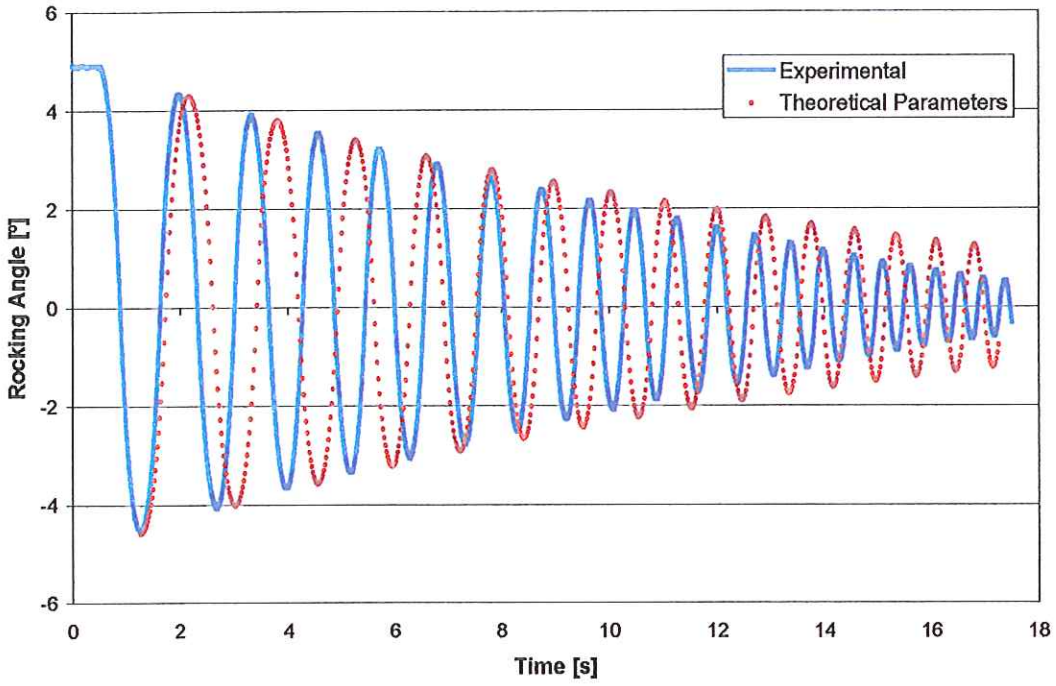


a) Piedra 1

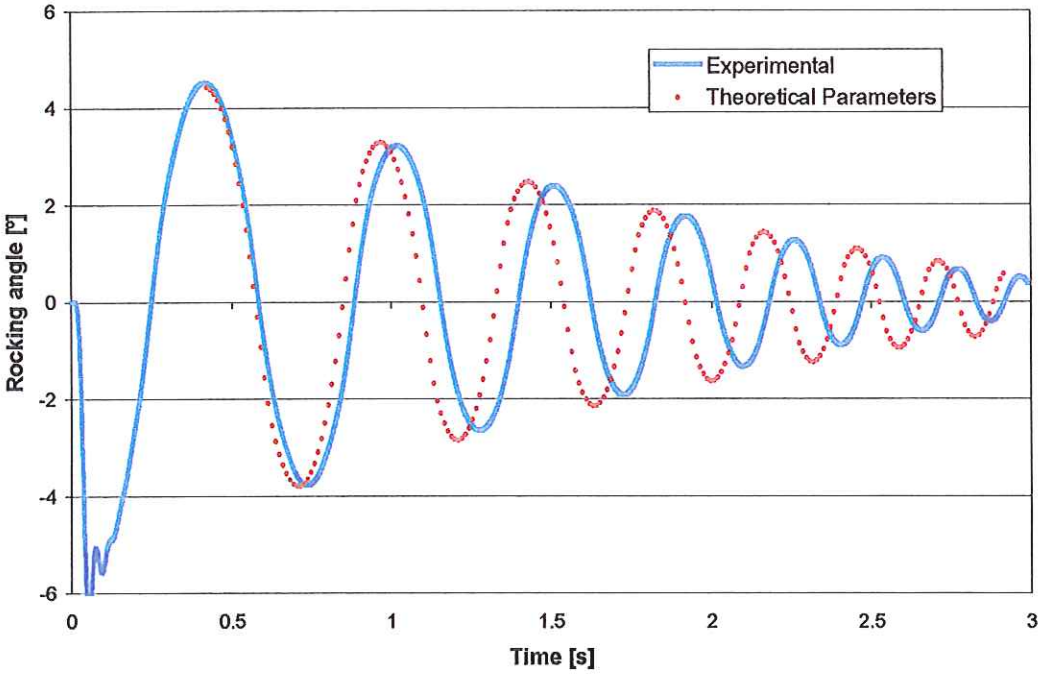


b) Piedra 2

Fig. 5-2. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC.



c) Piedra tres



d) Piedra 4

Fig. 5-2. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC.

El periodo del sistema depende de p y α (Eq 4-6). De este modo, para que el periodo del modelo en UDEC coincida con el periodo del sistema, es necesario ajustar los parámetros α, p y μ, de acuerdo con el procedimiento propuesto por Prieto *et al.* (2005).

Parámetros ajustados

Siguiendo el procedimiento propuesto por Prieto *et al.* (2005) se ajustan los parámetros α, p y μ (Tabla 5-3). Para poder incorporar los nuevos valores de estos tres parámetros es necesario modificar el modelo UDEC. El parámetro p modifica el valor de K y f_{min}, mientras que el parámetro α "modifica la geometría" de la piedra. La geometría de la piedra se modifica de acuerdo con:

Eq 5-1 $$b = h\tan(\alpha)$$

Manteniendo h constante y con el nuevo valor de α, se obtiene un ancho b equivalente. La Tabla 5-3 muestra los valores obtenidos con los parámetros ajustados. Por su parte, la Tabla 5-4 presenta los valores de ξ_{min} obtenidos con los parámetros ajustados. Se observa que para las piedras 3 y 4, los valores del amortiguamiento son muy parecidos; mientras que la piedra 1 es la que presenta la mayor dispersión. Estas diferencias son atribuibles al número de picos que se toman para el ajuste de las curvas. El ajuste se realizó para el 90% de los picos; sin embargo, tomando un porcentaje menor, la diferencia entre los diferentes amortiguamientos disminuye. Por tanto, las diferencias de amortiguamiento, para los diferentes ensayos de una misma piedra, se pueden atribuir a la variabilidad propia de los experimentos.

La Fig. 5-3 muestra la comparación del ángulo de rocking medido con el calculado con el UDEC, para el primer experimento de cada una de las piedras. Se observa, con los parámetros ajustados, una buena correlación entre ambas curvas, tanto en amplitud como en periodo. Por su parte, la Fig. 5-4 muestra la aceleración horizontal y vertical para el primer experimento de la piedra 1 y 4. Se observa, también, una buena correlación entre ambas curvas. Las aceleraciones numéricas presentan grandes amplitudes al momento del impacto; debido a un "ruido numérico" asociado a altas frecuencias que aparecen al momento de la solución del algoritmo, pero que no tienen significado físico[2].

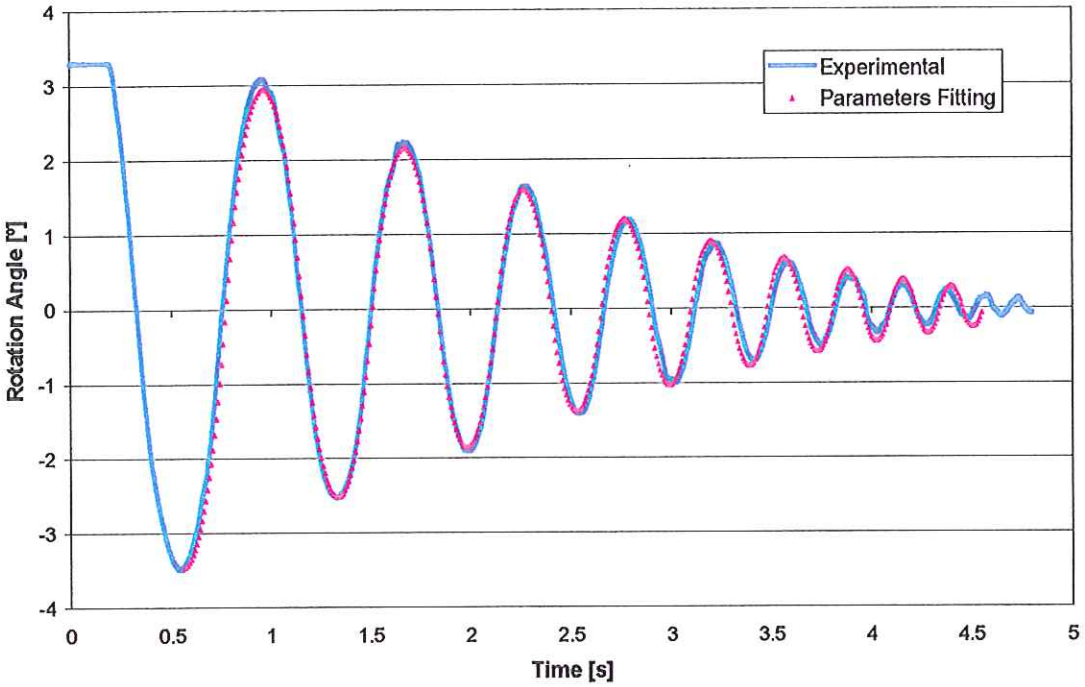
Tabla 5-3. Parámetros ajustados.

Piedra	α (rad)	μ	p (1/s)	R (m)	M (Kg)	W (N)	$2b$ (m)	$2h$ (m)	$2d$ (m)	I_0 (Kg-m^2)	K (N/m)
1	0.235	0.936	3.84	0.514	487	4782	0.24	1.00	0.754	172	6560
2	0.163	0.973	4.05	0.507	223	2187	0.16	1.00	0.502	76.3	3449
3	0.154	0.978	3.61	0.506	157	1542	0.15	1.00	0.375	53.6	2168
4	0.268	0.927	5.02	0.265	244	2398	0.14	0.457	0.750	23.0	6471

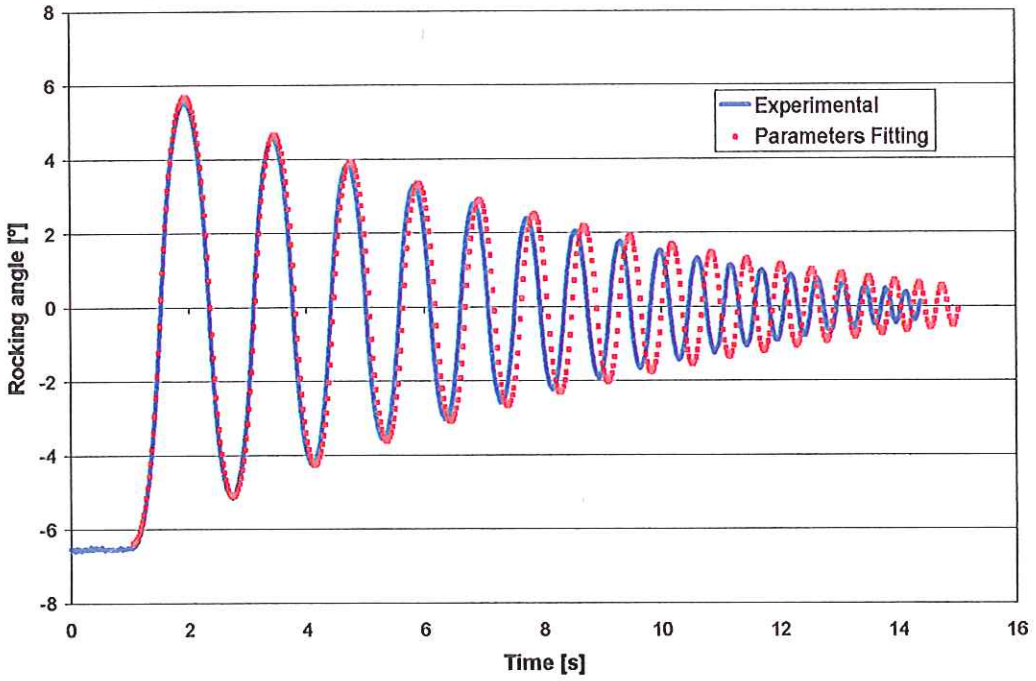
Tabla 5-4. ξ_{min} experimental con valores ajustados

Piedra	ξ_{min} Experimental (x 10^{-3})					ξ_{min} promedio (x 10^{-3})
	1	2	3	4	5	
1	3.00	4.00	6.00			4.33
2	2.50	2.00	2.50	2.50	2.20	2.34
3	0.80	0.70	0.70			0.73
4	3.70	3.00	2.75	3.00	3.00	3.09

[2] Por tanto, se puede filtrar la señal para hacerla más clara. Cabe hacer notar que, todas las respuestas numéricas de aceleración presentadas en este trabajo se han filtrado para obtener una mejor lectura de ellas.

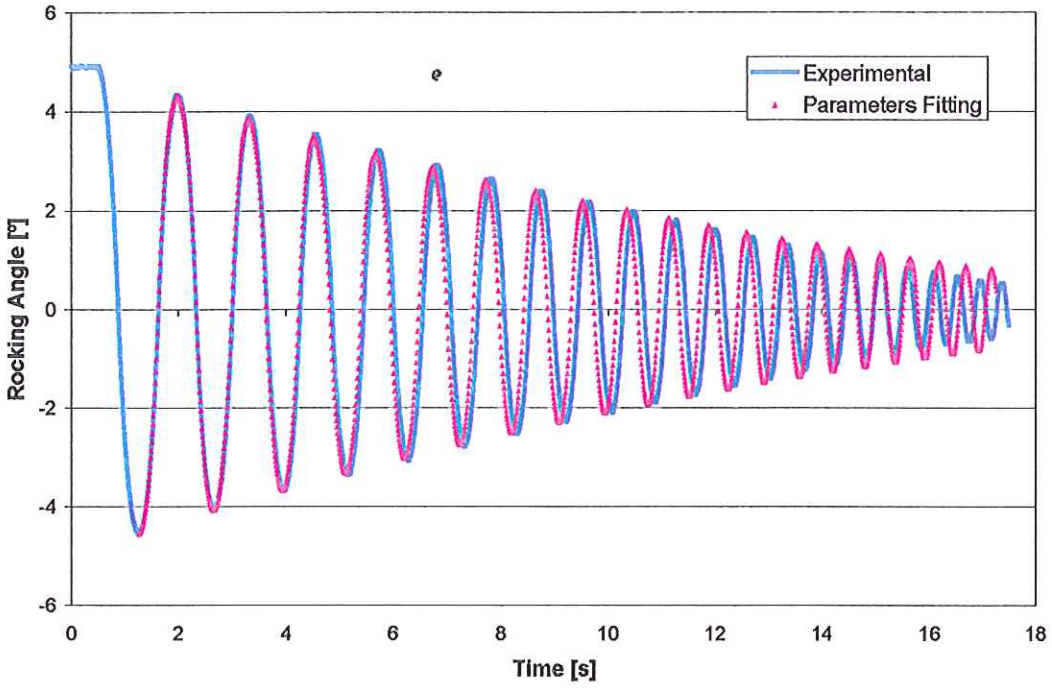


a) Piedra 1

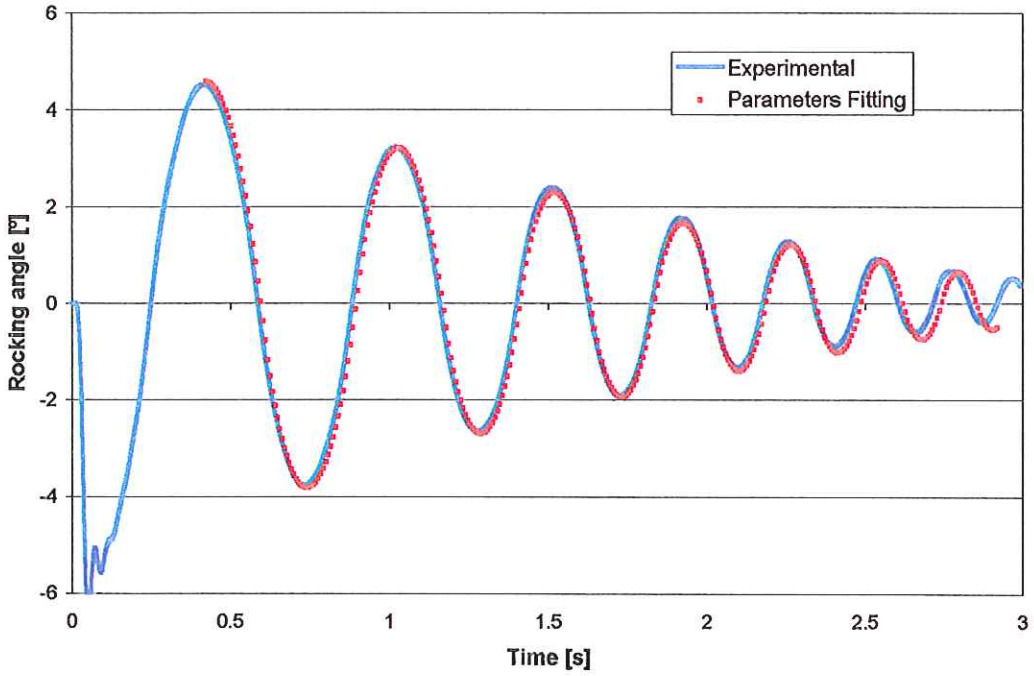


b) Piedra 2

Fig. 5-3. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC.

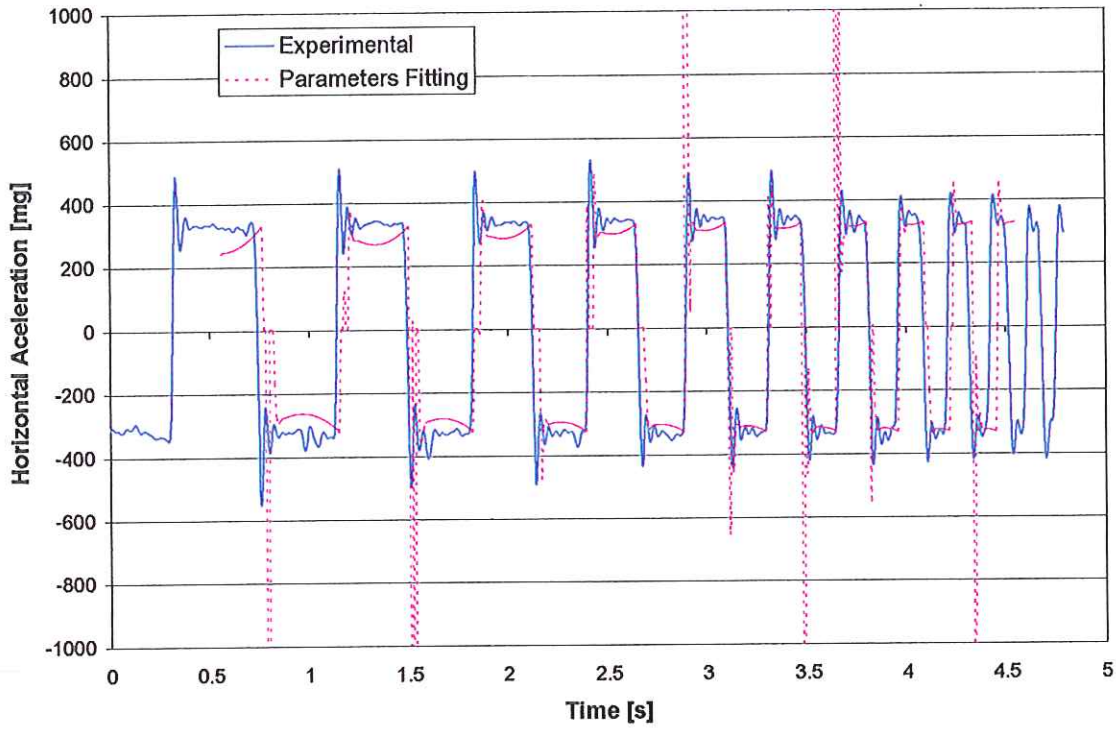


c) Piedra 3

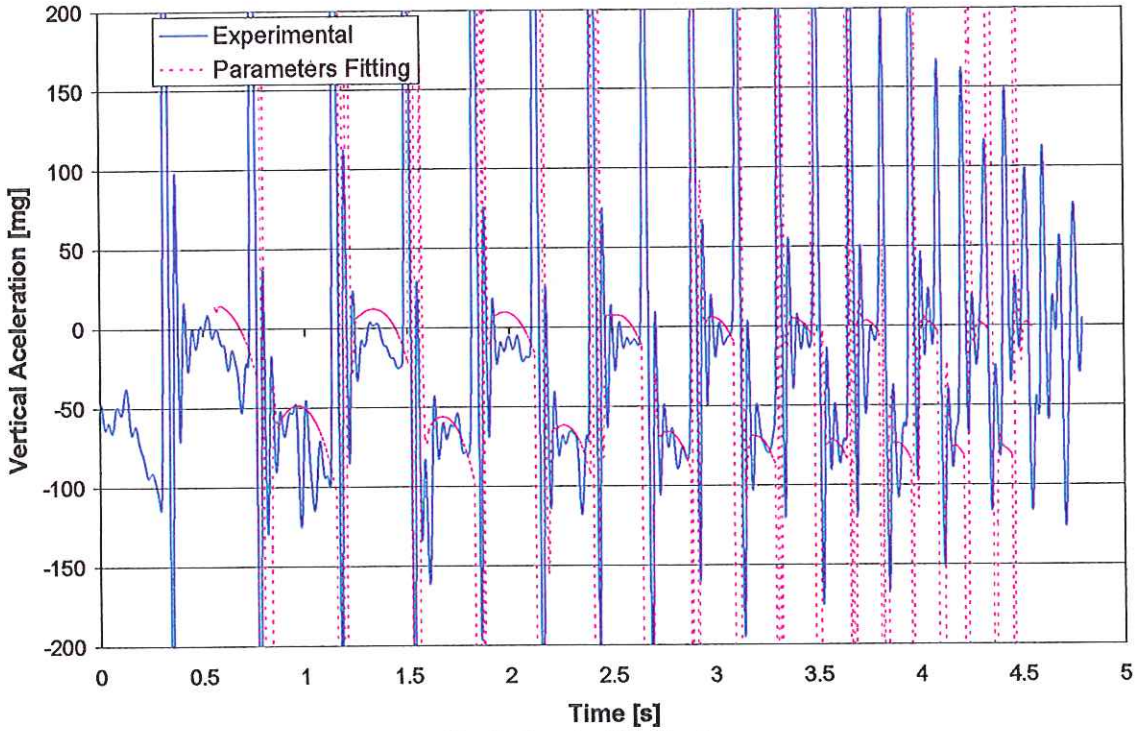


d) Piedra 4

Fig. 5-3. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC.

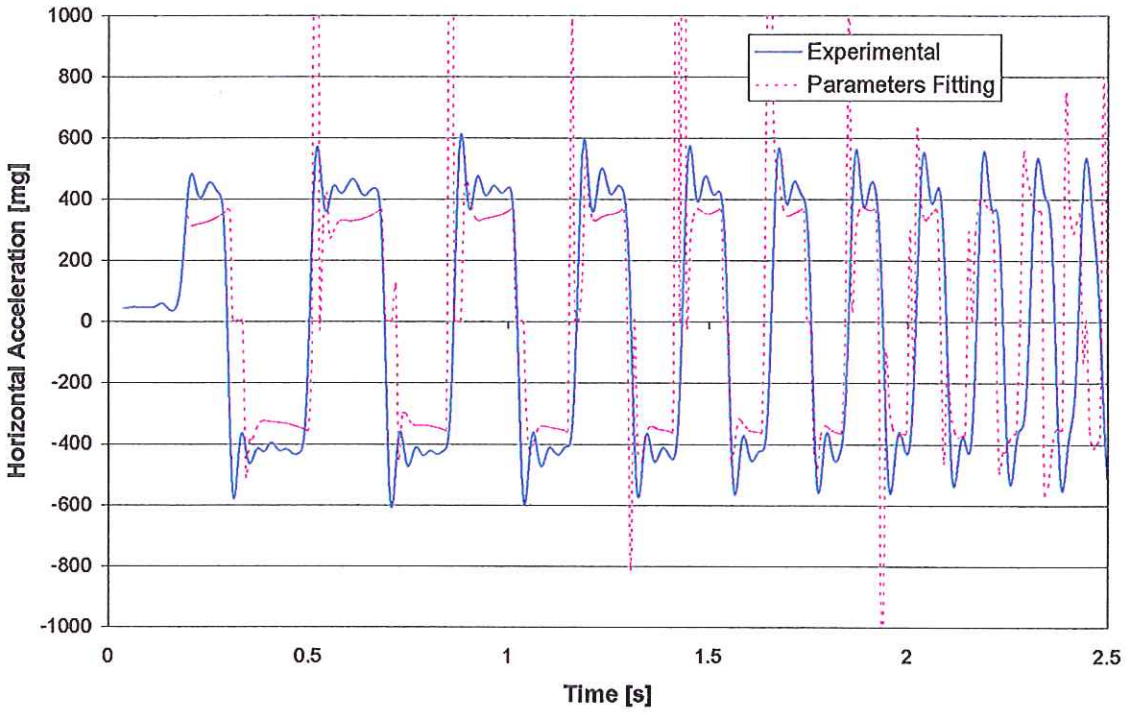


a) Piedra 1, Horizontal

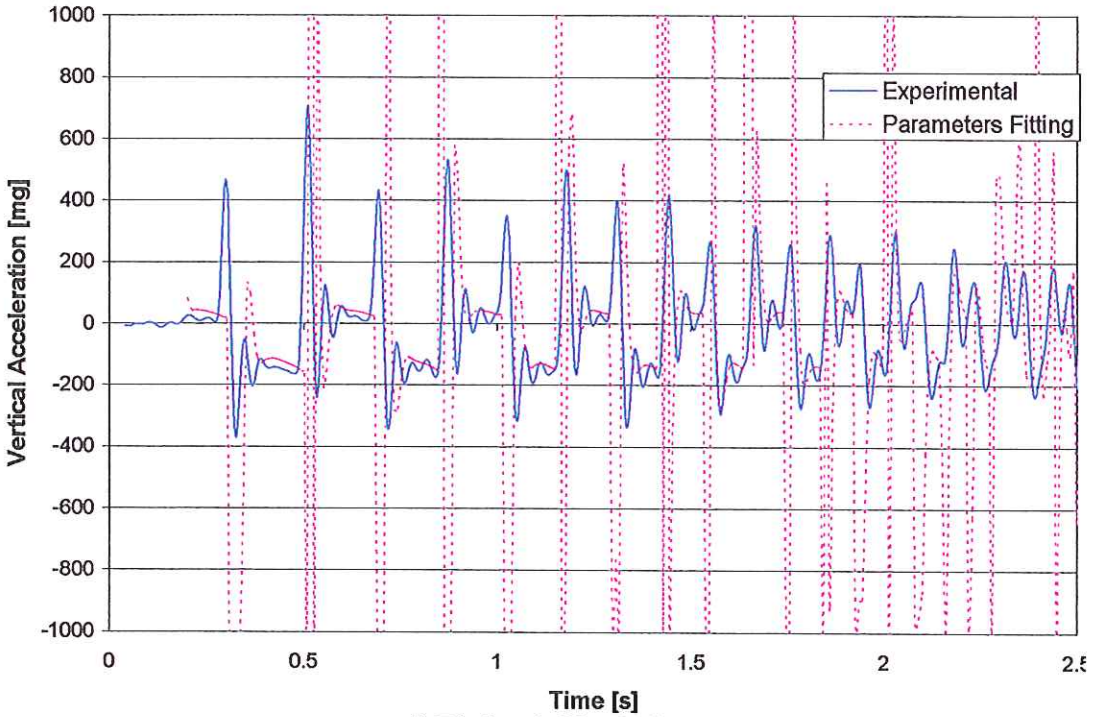


b) Piedra 1, Vertical

Fig. 5-4. Comparación de la aceleración, entre experimento y UDEC.



c) Piedra 4, Horizontal



d) Piedra 4, Vertical

Fig. 5-4. Comparación de la aceleración, entre experimento y UDEC.

6. Consideraciones para el Análisis en Régimen Forzado

La sección anterior muestra la calibración del modelo UDEC para el análisis de movimiento libre de bloques de piedra. Para realizar el análisis en régimen forzado, es necesario realizar algunas consideraciones particulares del método y de alguno de los parámetros utilizados.

Fórmula empírica para el amortiguamiento

Con base en el ajuste de parámetros, realizado en la sección anterior, se obtiene una expresión empírica para el cálculo del amortiguamiento ξ_{min} en función de μ y Γ. Donde Γ es el parámetro que relaciona la fuerza de amortiguamiento generalizada (Q_d) con el amortiguamiento viscoso (C). Debido a que β depende de p^2 (Eq 4-13) y Q_d (Eq 3-5) depende del momento de restitución, entonces podemos definir Γ como:

Eq 6-1 $$\Gamma = mRp^2$$

Sustituyendo la Eq 6-1, con los valores teóricos de p (Eq 3-3), se obtiene que:

Eq 6-2 $$\Gamma = KR = 0.75W$$

La mejor curva que se ajusta para la relación Γ/μ^2 y el coeficiente β, obtenido de los resultados experimentales, es del tipo:

Eq 6-3 $$\sqrt{\beta} = C_1 \ln\left(\frac{\Gamma}{\mu^2}\right) - C_2$$

Donde C_1 y C_2 son constantes y dependen de cómo se define Γ (Eq 6-1 o Eq 6-2).

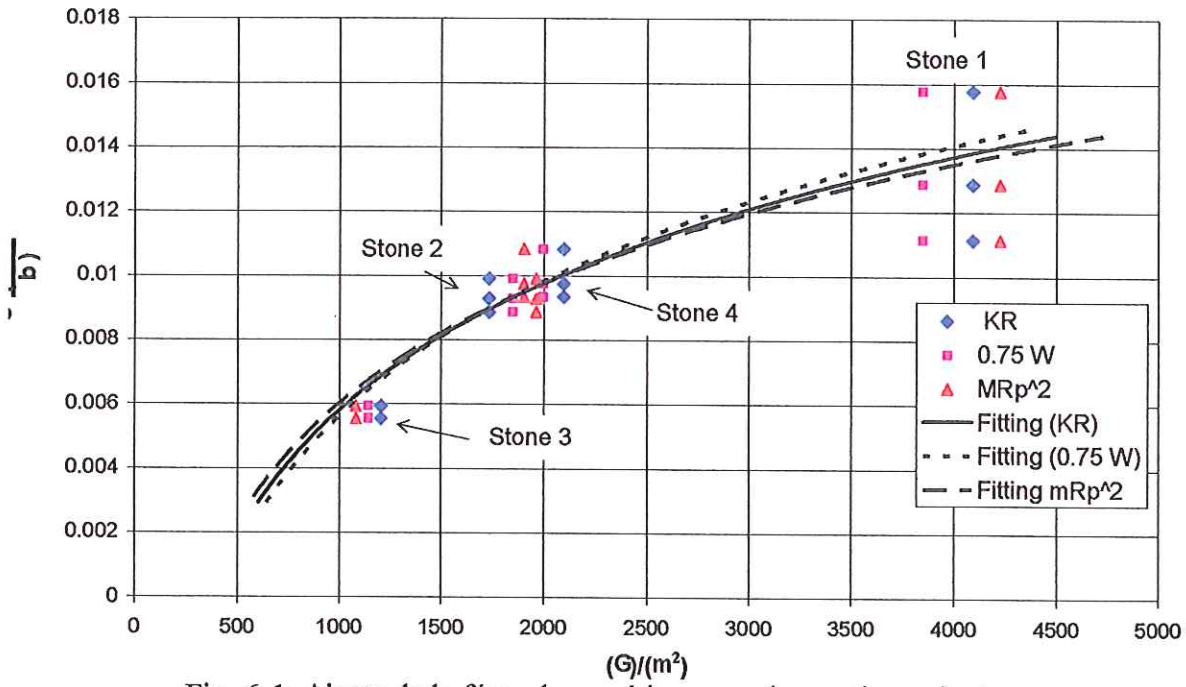


Fig. 6-1. Ajuste de la fórmula empírica para el amortiguamiento.

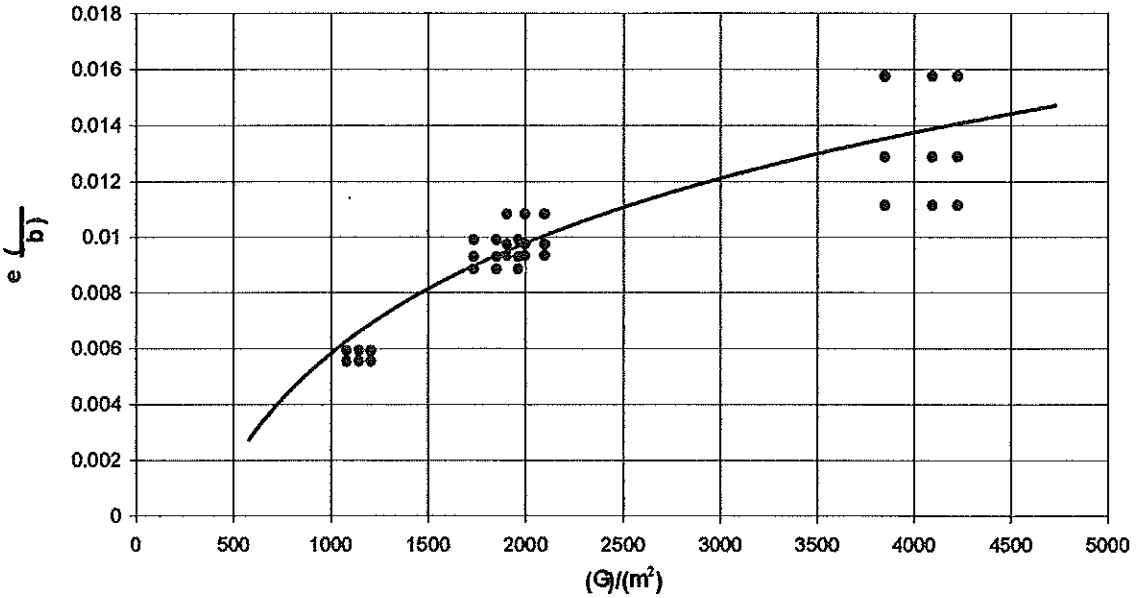


Fig. 6-2. Ajuste de la fórmula empírica para el amortiguamiento, considerando $\Gamma = KR$.

La Tabla 6-1 presenta los valores de estas constantes; mientras que, la Fig. 6-1 presenta el ajuste. Se observa en esta figura que las curvas son prácticamente las mismas, pues las constantes tienen una diferencia máxima de 10 y 15%, para C_1 y C_2, respectivamente. Por otra parte, la Fig. 6-2, muestra el ajuste, tomando todos los valores de Γ. Para este caso, los valores obtenidos de las constantes son los mismos que para el caso KR; debido a que para el cálculo de K, se usó la Eq 4-9, que es una media de los valores de p y W. Por tanto, la ecuación empírica propuesta para el cálculo del amortiguamiento, considerando $\Gamma = KR$, es:

Eq 6-4
$$\sqrt{\beta} = 0.0057 \ln\left(\frac{\Gamma}{\mu^2}\right) - 0.0336$$

Tabla 6-1. Valores de los coeficientes C_1 y C_2

Γ	C_1	C_2
MRp^2	0.0054	0.0312
KR	0.0057	0.0336
$0.75W$	0.0061	0.0365

Sensibilidad del modelo numérico al paso de tiempo Δt

Como ya se explicó, es necesario utilizar un Δt lo suficientemente pequeño para que el modelo UDEC sea numéricamente estable. El programa UDEC calcula automáticamente el Δt con el cual la solución es estable; sin embargo, algunas veces este paso de tiempo no es el correcto para que la solución numérica se ajuste a la experimental. Este fenómeno se aprecia cuando el movimiento de la base es complejo, como en el caso de las pruebas de movimiento aleatorio; requiriendo el integrador numérico de un paso de tiempo correcto para una buena solución. En esta sección, se analiza la influencia que tiene el Δt en la respuesta del modelo numérico.

En el programa UDEC, el parámetro que afecta al Δt es *frac* (Eq 4-4, sección 4). Con este parámetro, el usuario puede modificar el Δt; sin embargo, este último parámetro no puede ser mayor al calculado por la Eq 4-5. El valor por defecto del parámetro *frac* es 0.1, que de acuerdo con el Manual del UDEC (2000), es más que suficiente para la mayoría de los casos.

La Fig. 6-3 muestra la respuesta del modelo numérico de la piedra 2, sometida al sismo 21, con cuatro valores del parámetro *frac* (0.01, 0.0075, 0.005 y 0.0025); las cuales son comparadas con la medición experimental. Se observa que para los valores de 0.01 y 0.0075 las respuestas numéricas se encuentran alejadas de la realidad; mientras que con el valor de 0.005, la respuesta numérica es prácticamente la misma que la experimental. Sin embargo, para el valor de 0.0025 la respuesta numérica presenta cierta divergencia con la experimental.

Estos resultados muestran que el modelo UDEC es particularmente sensible al valor asignado al Δt, para las simulaciones con movimiento aleatorio. Cabe mencionar, que para las simulaciones de movimiento libre y movimiento armónico, se obtienen una buena concordancia entre los resultados experimentales y teóricos, al utilizar el valor por defecto del parámetro *frac* (0.1).

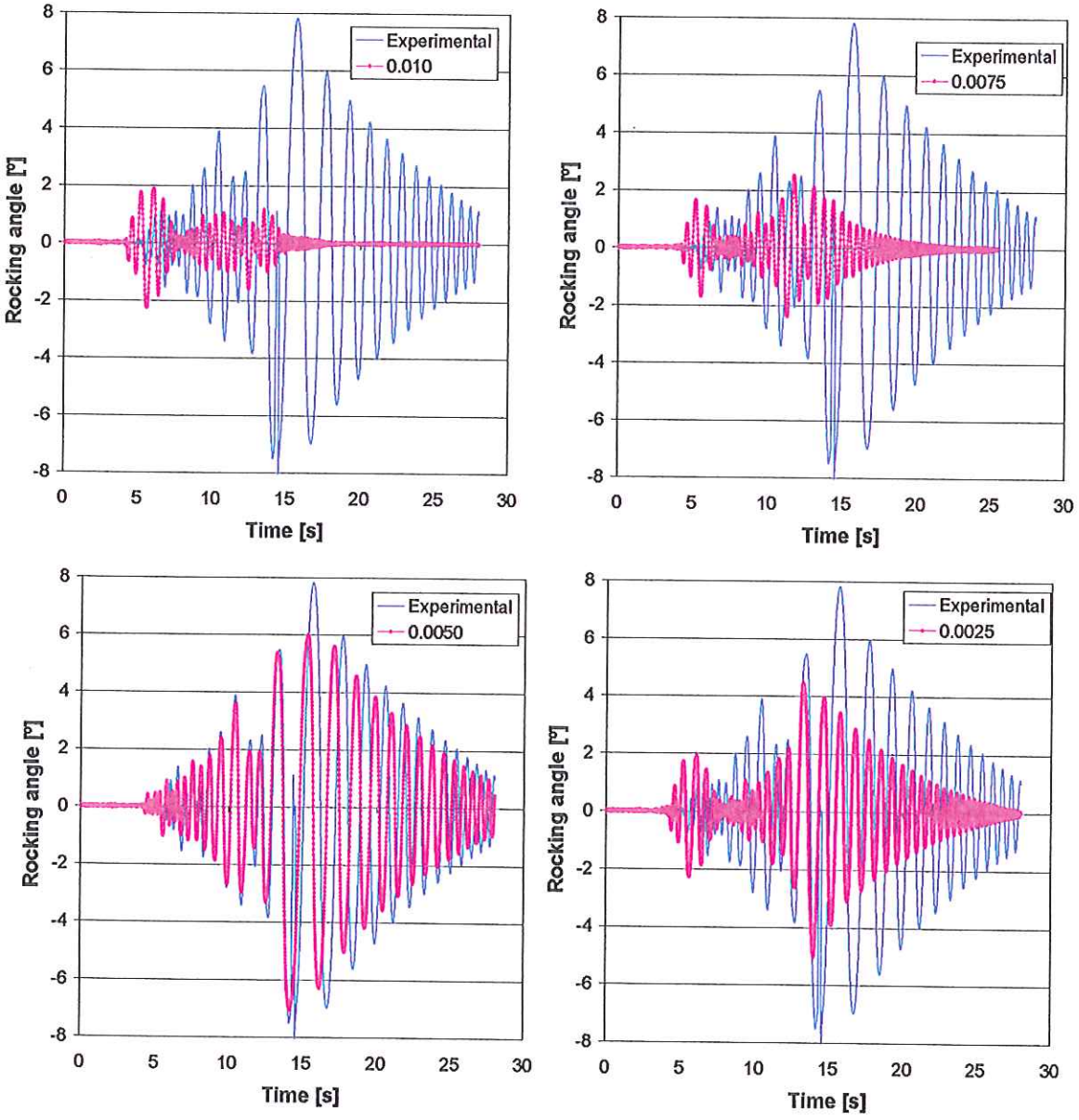


Fig. 6-3. Sensibilidad de la respuesta numérica al Δt, piedra 2 sismo 21.

Ahora bien, de los 178 análisis que se realizaron en total con movimiento aleatorio, se desprende que para obtener una buena concordancia entre los resultados numéricos y experimentales, es necesario que el paso de tiempo Δt, fuera del orden de mil veces menor que el paso de tiempo con que fue registrada la señal. Las señales utilizadas en la mesa sísmica tienen un paso de 0.002 s. Por tanto, para los análisis con el modelo numérico, se le asignaba un valor al parámetro *frac*, tal que diera un paso Δt del orden de $1x10^{-6}$ s. De este modo, se obtuvieron los resultados presentados en la sección 8.

Influencia del ruido mecánico en la respuesta numérica

En la sección 2 se mostró la influencia de la mesa vibradora en la señal de entrada. En esta sección se presenta cómo el ruido mecánico generado por la mesa vibradora, afecta tanto la respuesta del bloque, como la respuesta del modelo numérico.

En la Fig. 6-4 se presenta la respuesta experimental del bloque y del modelo numérico con la señal registrada en la mesa (UDEC) y la señal filtrada sin el ruido mecánico (Filtrado), de la piedra 2, ante un seno constante de 5 Hz con 5 mm de amplitud. Se observa que ambas respuestas numéricas son prácticamente iguales a la respuesta experimental. Existe solo una diferencia (despreciable) de la respuesta numérica con la señal filtrada al final del seno, cuando empieza la vibración libre. Esto se debe a que la señal filtrada no reproduce el impulso final que proporciona la mesa al bloque, por el frenado de la misma (Fig. 2-6).

Por otra parte, la Fig. 6-5 presenta la respuesta experimental de la piedra 2, ante el sismo 04 y se compara con la respuesta numérica obtenida con la señal de entrada medida de la mesa y la que se obtiene filtrando el ruido mecánico, mediante un filtro pasa baja de 10 Hz. Se observa que la respuesta numérica del modelo UDEC es bastante similar a la experimental, cuando se utiliza la señal medida de la mesa. Sin embargo, cuando se filtra el ruido mecánico, el modelo numérico no presenta rocking.

Por otra parte, la Fig. 6-6 presenta la misma comparación con las piedras 3 y 4, sometidas al sismo 01 y 09, respectivamente. Se observa que ambas tienen un comportamiento similar al de la piedra 2. Es decir, el modelo numérico reproduce bastante bien la prueba experimental, con la señal medida de la mesa. Sin embargo, con la señal filtrada se obtiene que la piedra no presenta rocking.

Estos resultados muestran que el ruido mecánico afecta de manera importante la respuesta de la piedra ante movimientos aleatorios, pero no ante movimientos armónicos. El ruido mecánico de las señales armónicas se debe principalmente a los efectos de aceleración inicial y frenado final de la mesa. Es decir, son debidas a pequeños impulsos que no tienen mayor efecto en la respuesta de la piedra. Por otra parte, el ruido mecánico que se presenta en las señales aleatorias es debido a efectos impulsivos de la mesa, durante cada ciclo de carga (Fig. 2-12).

La Fig. 6-7 muestra la respuesta del modelo numérico de la piedra 3, sometida únicamente al ruido mecánico. Se observa que el ruido mecánico produce vibración de la piedra durante todo el registro. Esta vibración es similar a la que presenta la prueba experimental al inicio de la prueba.

Estas altas frecuencias (ruido mecánico), si bien no producen un movimiento de rocking al sistema, sí le inducen una cierta cantidad extra de energía, lo que permite que el bloque sea más sensible a los movimientos de la base. Yim et al. (1980) mencionan que el comportamiento de un bloque rígido es altamente sensible al tipo de movimiento de la base. Indican que la sensibilidad de la respuesta de los bloques rígidos, a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales o en el tipo de movimiento de la base, es más obvia en el caso de movimientos aleatorios.

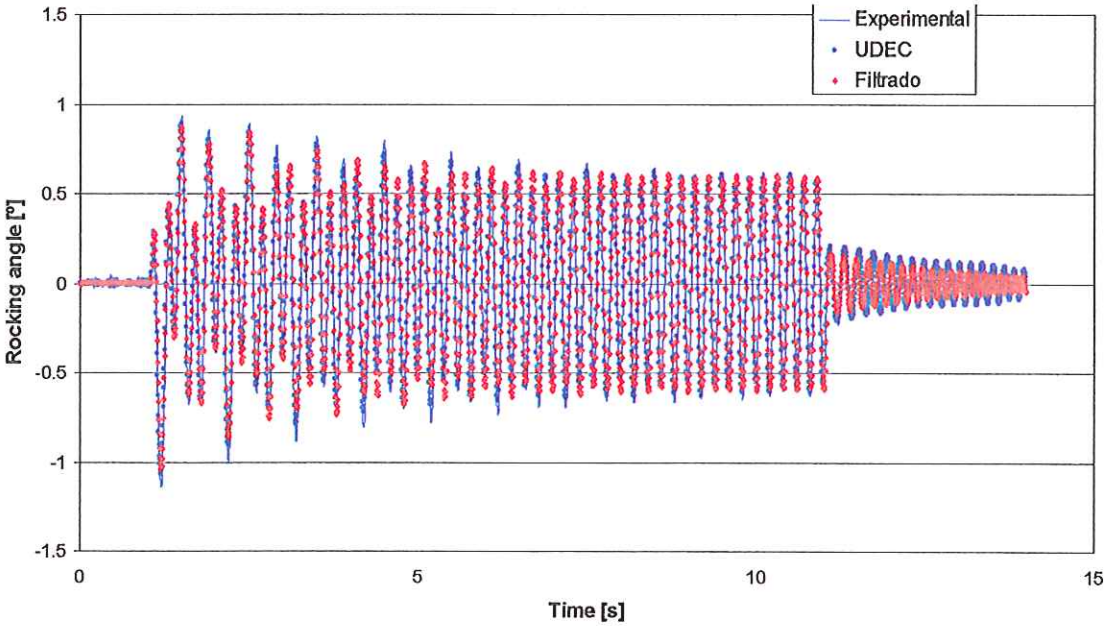


Fig. 6-4. Influencia del ruido mecánico, piedra 2 seno constante 5 Hz, 5 mm.

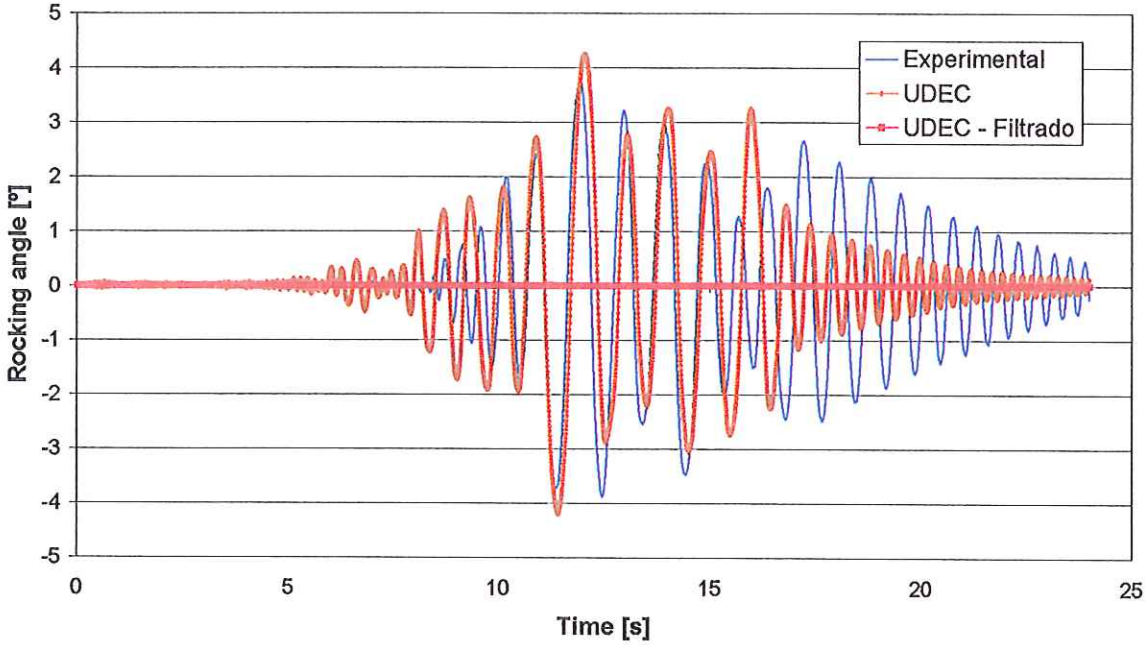
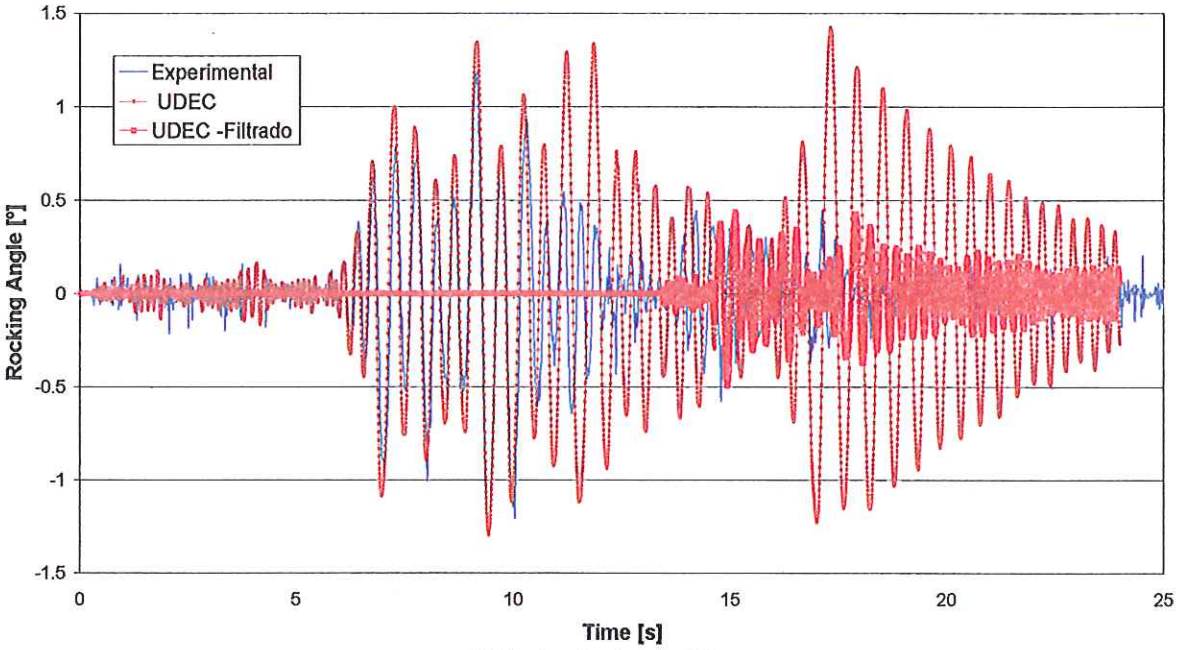
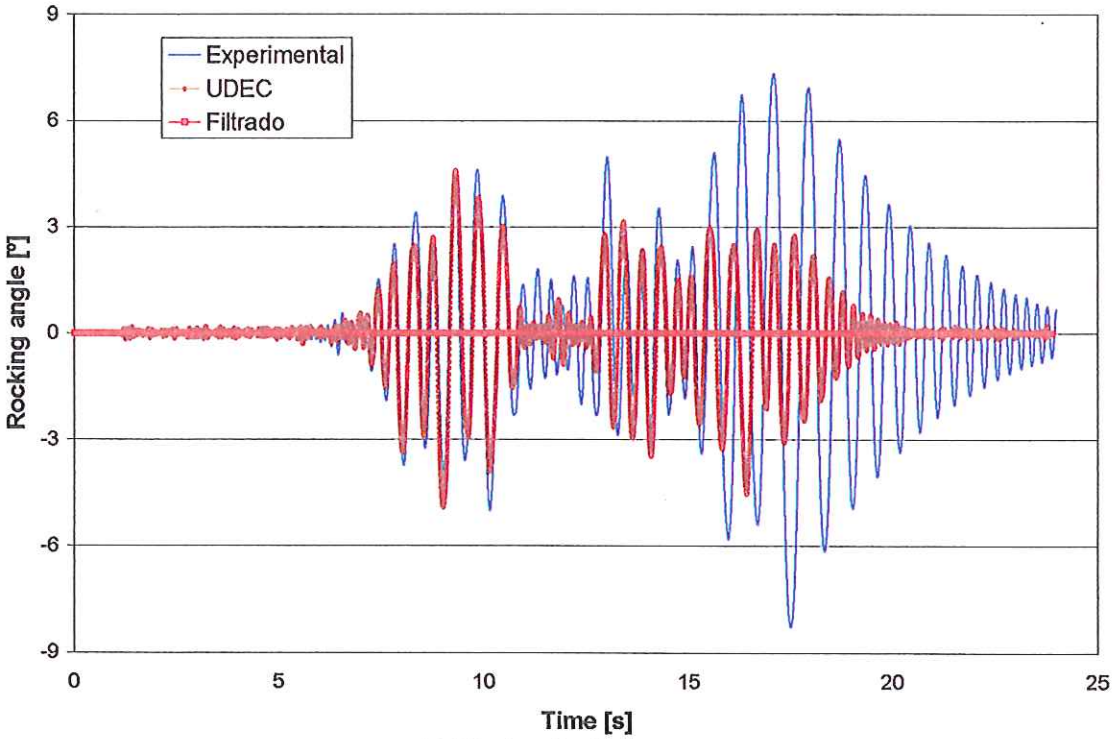


Fig. 6-5. Influencia del ruido mecánico, piedra 2 sismo 04.



a) Piedra 3 sismo 01.



b) Piedra 4, sismo 09

Fig. 6-6. Influencia del ruido mecánico.

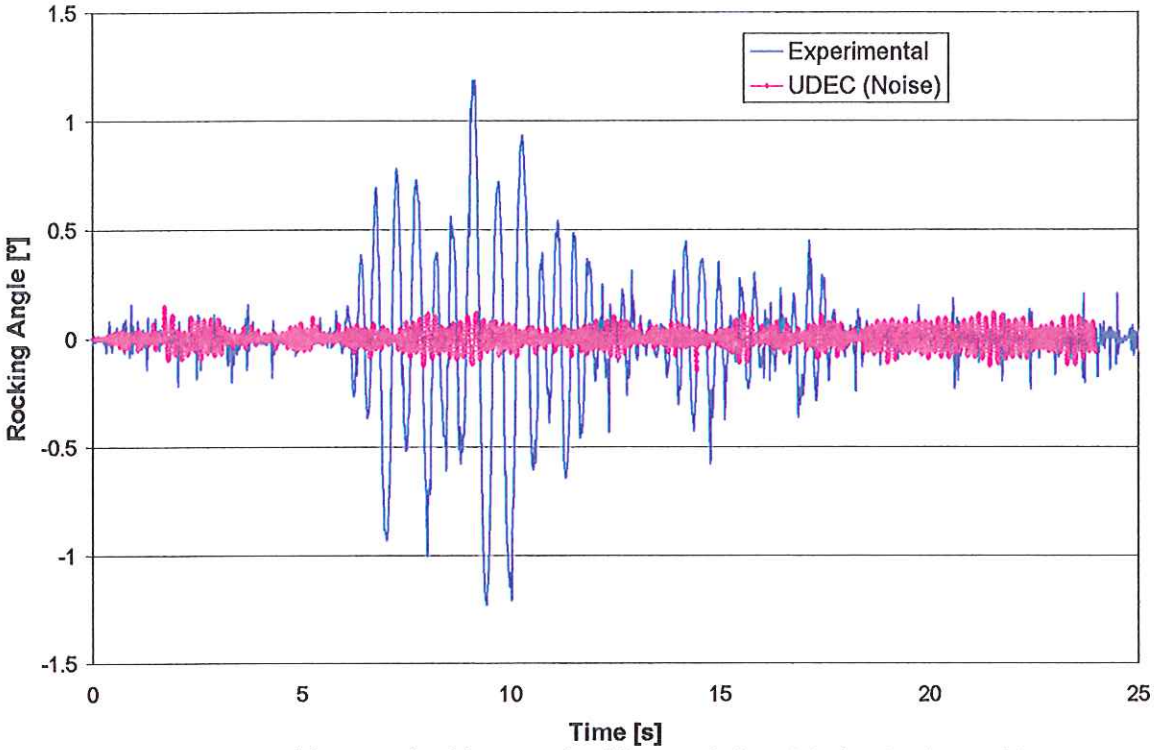


Fig. 6-7. Rocking producido por el ruido mecánico. Piedra 3, sismo 01.

7. Movimiento Armónico

Cada una de las cuatro piedras fue ensayada en la mesa sísmica con una excitación armónica. Las excitaciones aplicadas fueron: seno constante, seno hanning, run-up y run down, con diferentes frecuencias y amplitudes. Cabe hacer notar que, los parámetros utilizados en el modelo numérico son los obtenidos en la sección 5 (Tabla 5-3 y Tabla 5-4).

Piedra 1

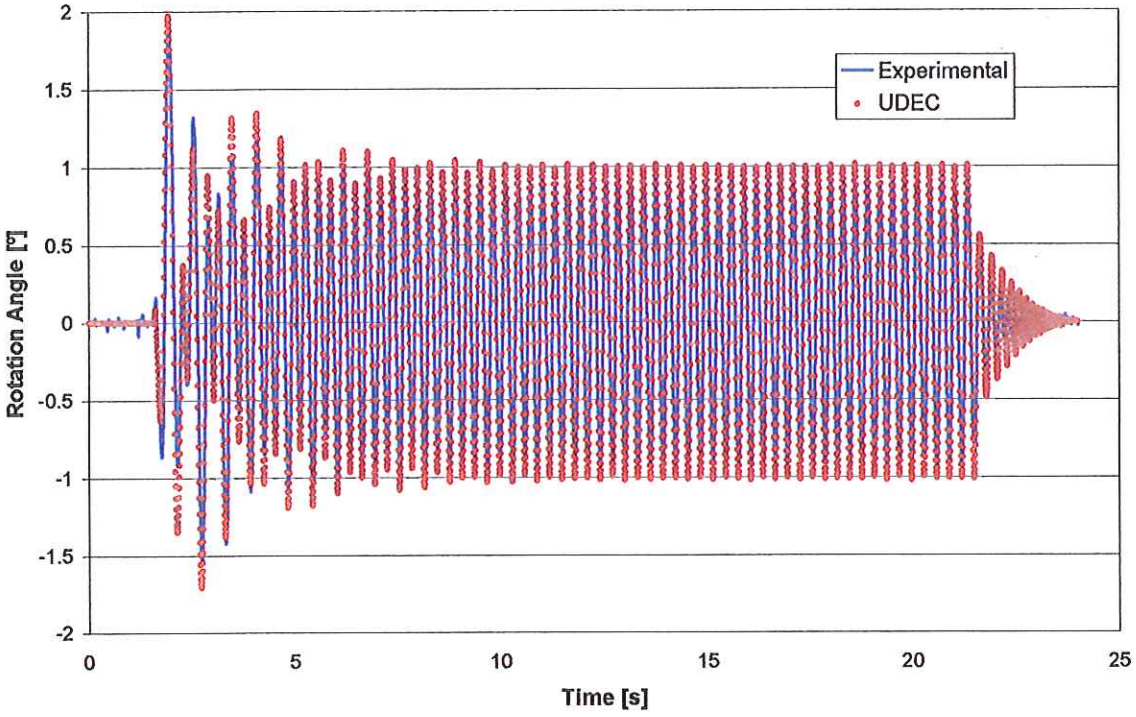
La piedra uno se ensayó con un seno constante de 3.3 Hz y con amplitudes de 2, 4, y 6 mm; además de un seno hanning de 3.3 Hz y amplitudes de 2, 4, 5, 5.5, 6, 7, 8, 9, 10 y 12 mm. Cabe hacer notar que el seno constante de 2 mm y el seno hanning de 2 y 4 mm de amplitud no produjeron rocking en la piedra 1.

La Fig. 7-1 muestra la comparación del ángulo de rocking medido y calculado, para el seno constante de 6 mm y el seno hanning de 10 mm de amplitud; mientras que la Fig. 7-2 muestra la comparación de las aceleraciones horizontales, para las mismas pruebas. Se observa una buena concordancia entre el modelo numérico y los resultados experimentales, tanto para el ángulo de rocking como para la aceleración.

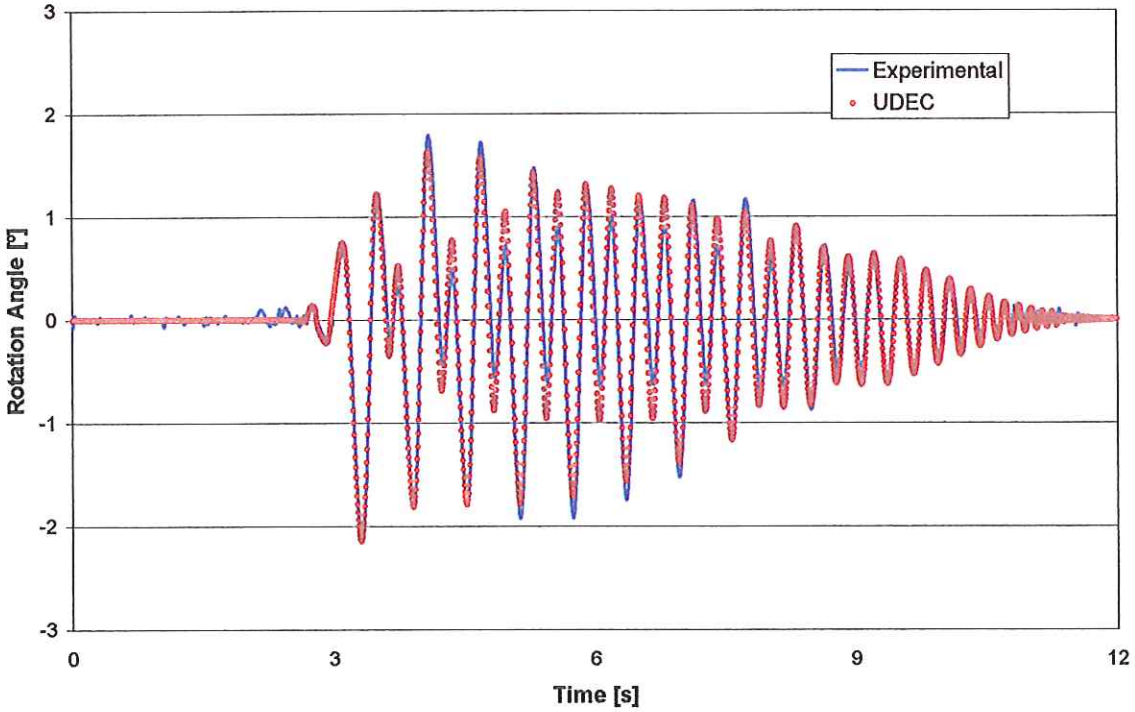
El modelo numérico presenta una buena concordancia con las dos pruebas, realizadas, de seno constante. Para el seno hanning, el modelo numérico presenta algunas diferencias con cuatro de las ocho pruebas (5, 5.5, 9 y 12 mm), específicamente al inicio del rocking. La Fig. 7-3 muestra la comparación del ángulo de rocking para el seno hanning de 9 mm de amplitud. En este caso, la simulación numérica se encuentra fuera de fase en los primeros ciclos de rocking, a partir de la cual el programa UDEC reproduce satisfactoriamente la respuesta transitoria y el free-rocking.

Estas diferencias son atribuibles a la variabilidad de las condiciones del experimento y no específicamente al modelo numérico. La Fig. 7-4 muestra la misma comparación que la Fig. 7-3, pero en este caso se modificó el parámetro α. Como se observa, modificando este parámetro se logra reproducir satisfactoriamente el comportamiento de la piedra.

El cambio del coeficiente α permite obtener un buen ajuste de las curvas; sin embargo, el cambio de α no es constante. La Tabla 7-1 muestra el porcentaje del decremento de este parámetro, para obtener un buen ajuste de las diferentes pruebas. Se observa que es necesario un ajuste máximo del 14% ($2b$=0.205). Resulta interesante que tres pruebas con hanning (5, 5.5 y 12 mm) tengan el mismo factor de α (-8.3%, $2b$=0.22) con que se ajusta el modelo numérico. Cabe hacer notar que en todos los casos es necesaria una reducción de α, lo que significa que la distancia entre los centros de rotación disminuye; es decir, se sitúan cada vez más hacia el centro de la base. Esto se debe, principalmente, al desgaste natural que van teniendo los bordes de las piedras con el impacto producido por el rocking.

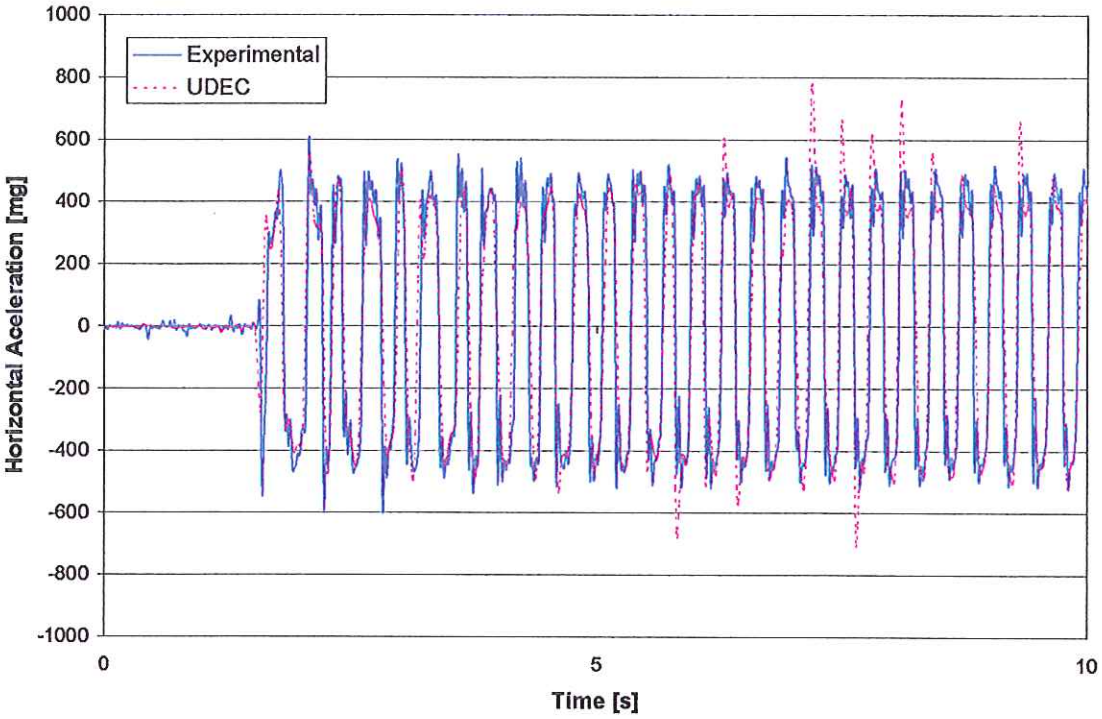


a) Seno constante 3.3 Hz y 6 mm de amplitud.

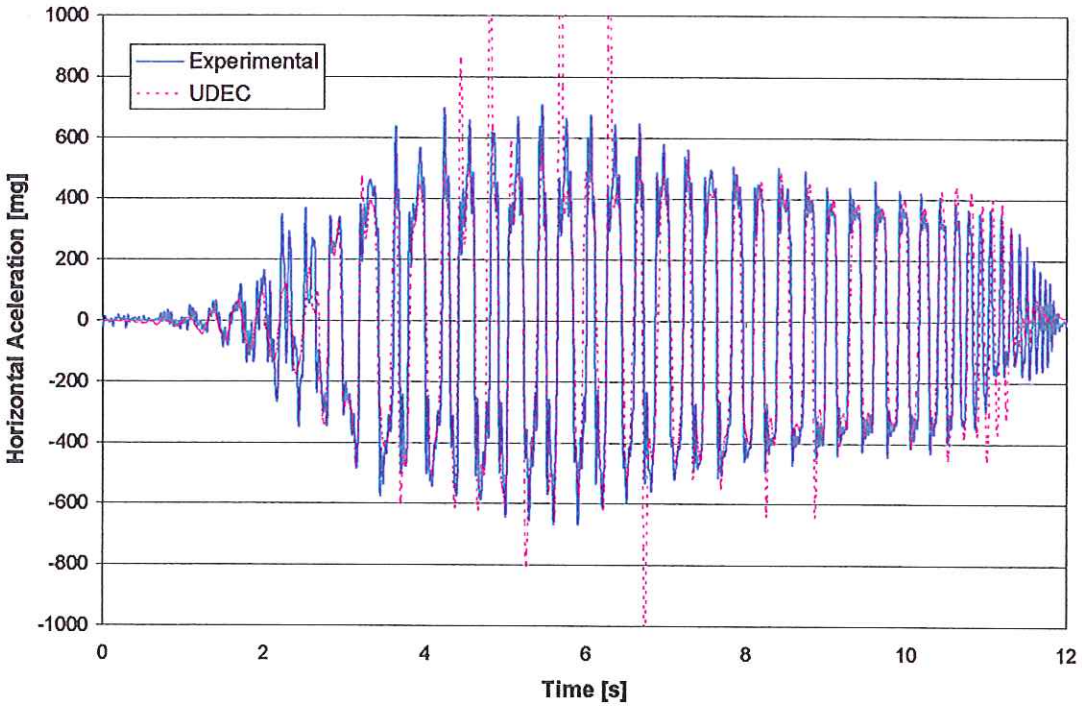


b) Seno Hanning 3.3 Hz y 10 mm de amplitud.

Fig. 7-1. Comparación del ángulo de rocking entre experimento y UDEC.



a) Seno constante 3.3 Hz y 6 mm de amplitud.



b) Seno Hanning 3.3 Hz y 10 mm de amplitud.

Fig. 7-2. Comparación de la aceleración horizontal entre experimento y UDEC.

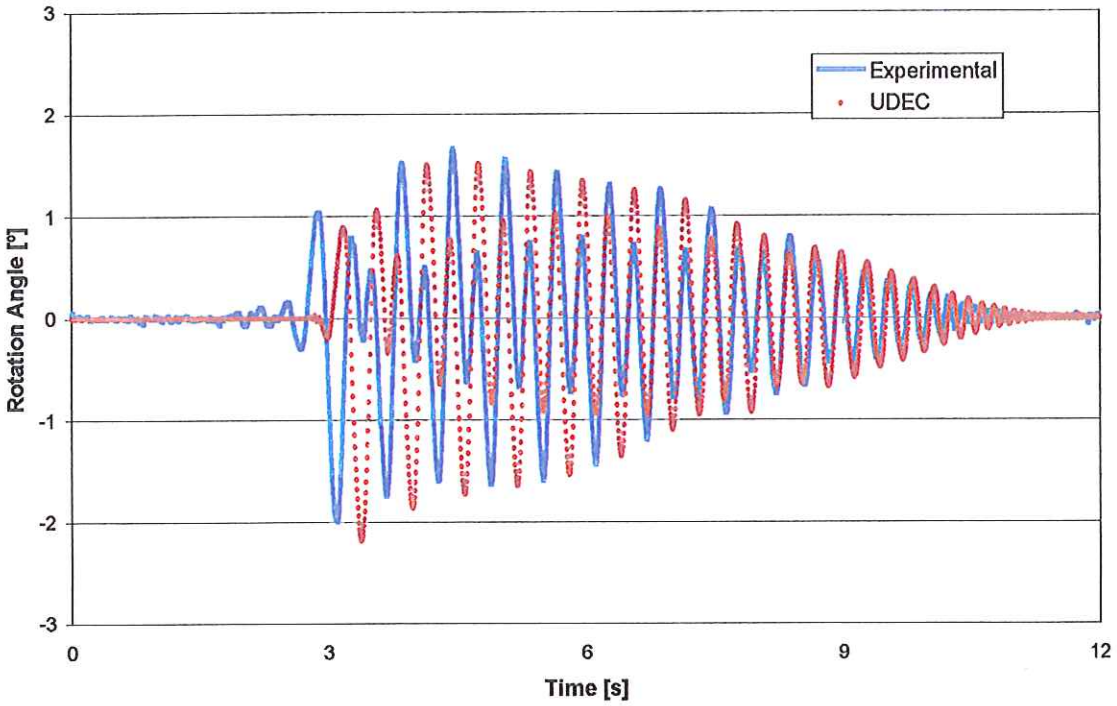


Fig. 7-3. Comparación del ángulo de rocking. Seno Hanning 3.3 Hz y 9 mm.

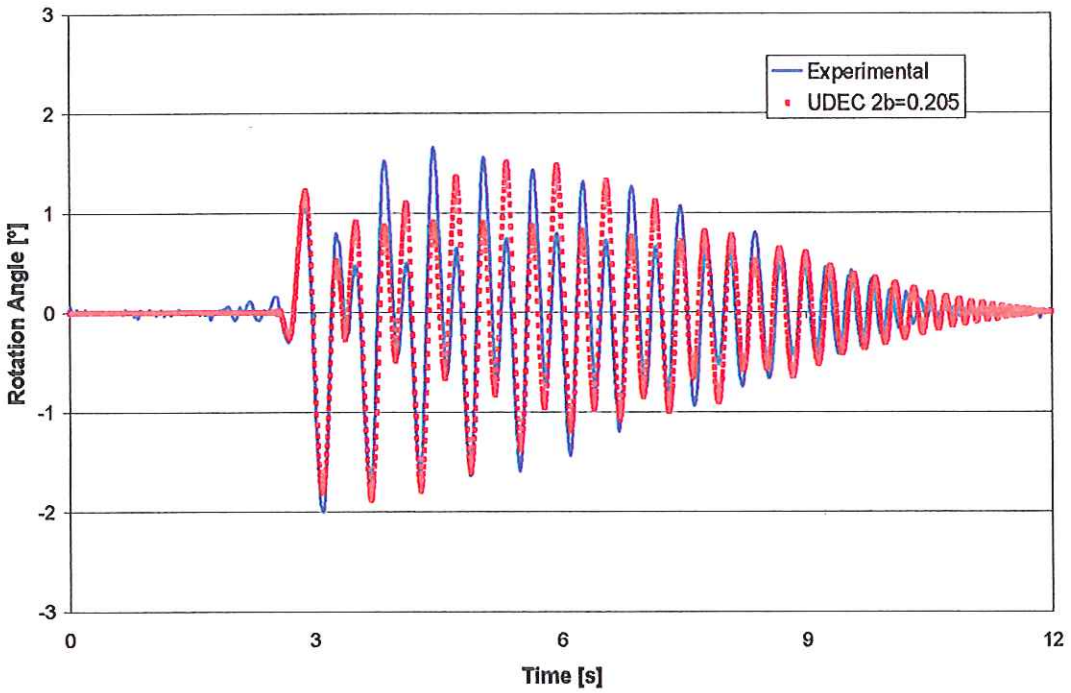


Fig. 7-4. Seno Hanning 3.3 Hz y 9 mm, con parámetros ajustados.

Tabla 7-1. Incremento de α para el ajuste de las curvas experimentales (%)

Seno Hanning	Amplitud (mm)								
	4	5	5.5	6	7	8	9	10	12
3.3 Hz	---	-8.3	-8.3	1.25	0.0	-2.1	-14.6	0.0	-8.3

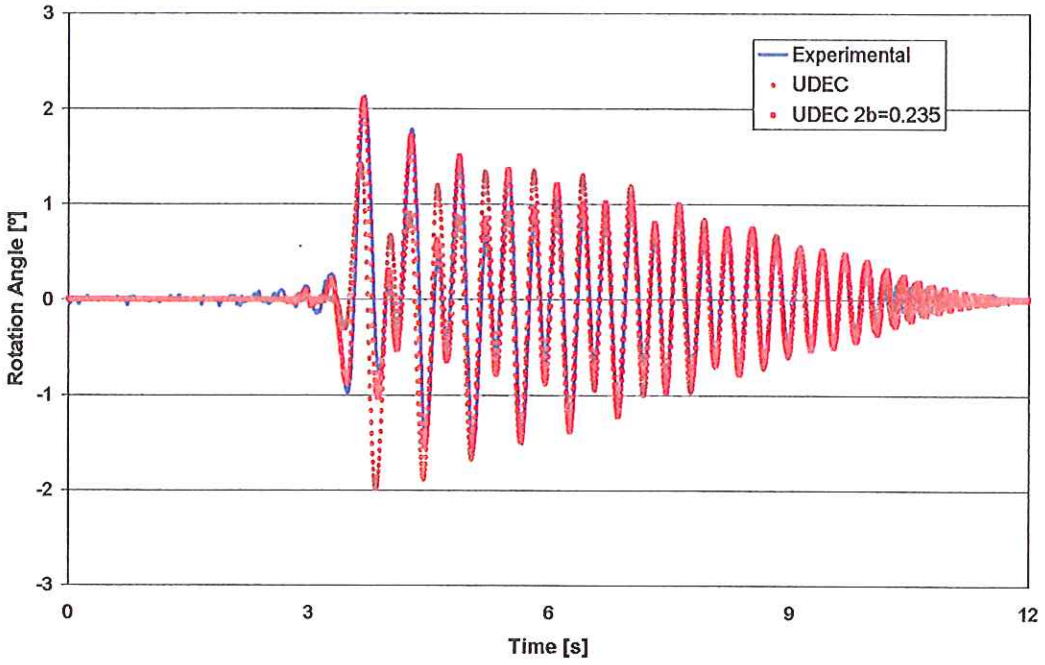


Fig. 7-5. Ángulo de rocking para seno Hanning 3.3 Hz y 8 mm.

Por otra parte, las pruebas hanning con 7 y 10 mm de amplitud no precisan de un ajuste de α. Resulta por demás interesante que con 7 mm no se necesite de ajuste; ya que, con este tipo de carga se realizaron seis pruebas, para verificar la repetibilidad de los experimentos. En ningún caso, se necesitó ajustar α pues se obtuvo una respuesta similar en los seis casos. Además, los experimentos para hanning con 6 y 8 mm dan un porcentaje de ajuste muy pequeño (menos del 2%), que para el primer caso representa variar la base en 3 mm, mientras que en el segundo es de 5 mm. Estas pruebas presentan una buena similitud entre los datos experimentales y numéricos aún sin realizar el ajuste (Fig. 7-5).

Las variaciones encontradas, entre la respuesta numérica y la experimental, se deben principalmente a los cambios de los parámetros, los cuales son debidos a las condiciones propias de los experimentos y no a una situación numérica. Por tal motivo, se decidió que todas las pruebas numéricas mantuvieran los parámetros ajustados iniciales y realizar de este modo las comparaciones numéricas. Sin buscar un ajuste de parámetros en cada caso particular.

Piedra 2

La piedra dos es la que tiene el mayor número de pruebas de movimiento armónico. Se realizaron 30 con seno constante, siete de seno hanning, un run-up y un run-down. Algunas de estas pruebas no produjeron rocking, lo cual depende de la frecuencia de la excitación y de su amplitud (Tabla 9-5).

El modelo numérico reproduce satisfactoriamente todas las pruebas de seno constante (Fig. 7-6). Por otra parte, el modelo numérico logra reproducir perfectamente tres de las pruebas de seno hanning (Fig. 7-7). Para las tres pruebas de seno hanning con una frecuencia de 3.0 Hz se presenta una ligera diferencia al inicio de las pruebas; ya que el modelo numérico comienza a hacer rocking antes que la prueba experimental. Sin embargo, después de cuatro ciclos, el modelo numérico reproduce satisfactoriamente la respuesta del bloque (Fig. 7-8).

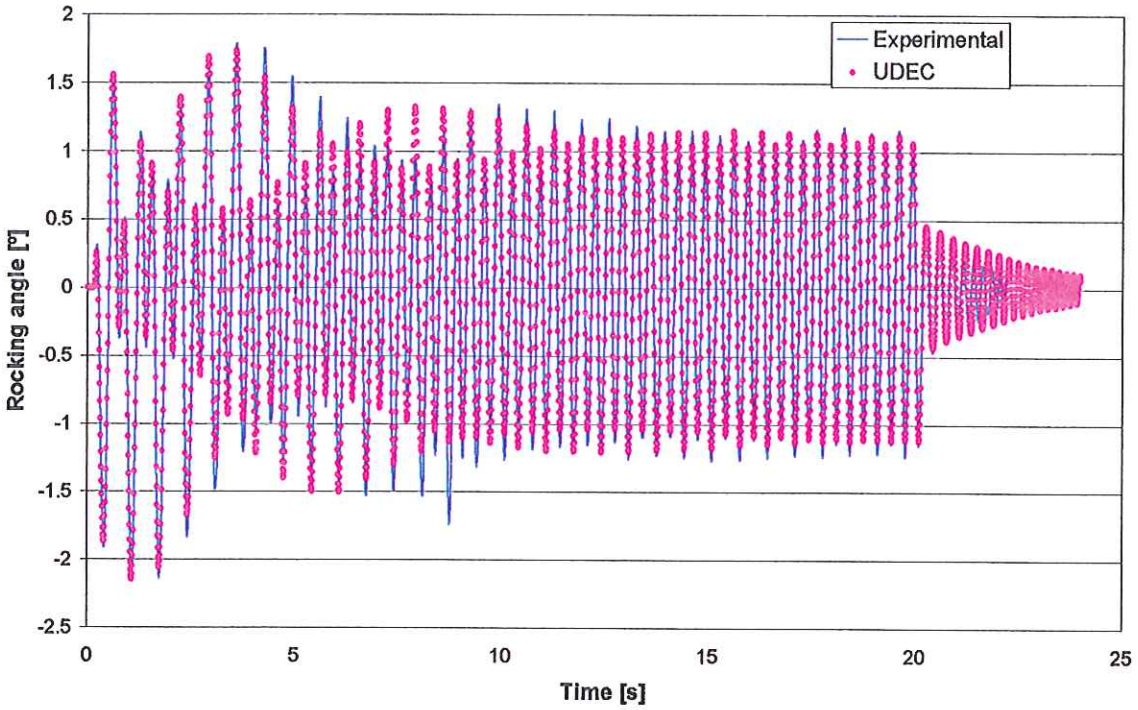


Fig. 7-6. Seno constante, 3.0 Hz, 8 mm.

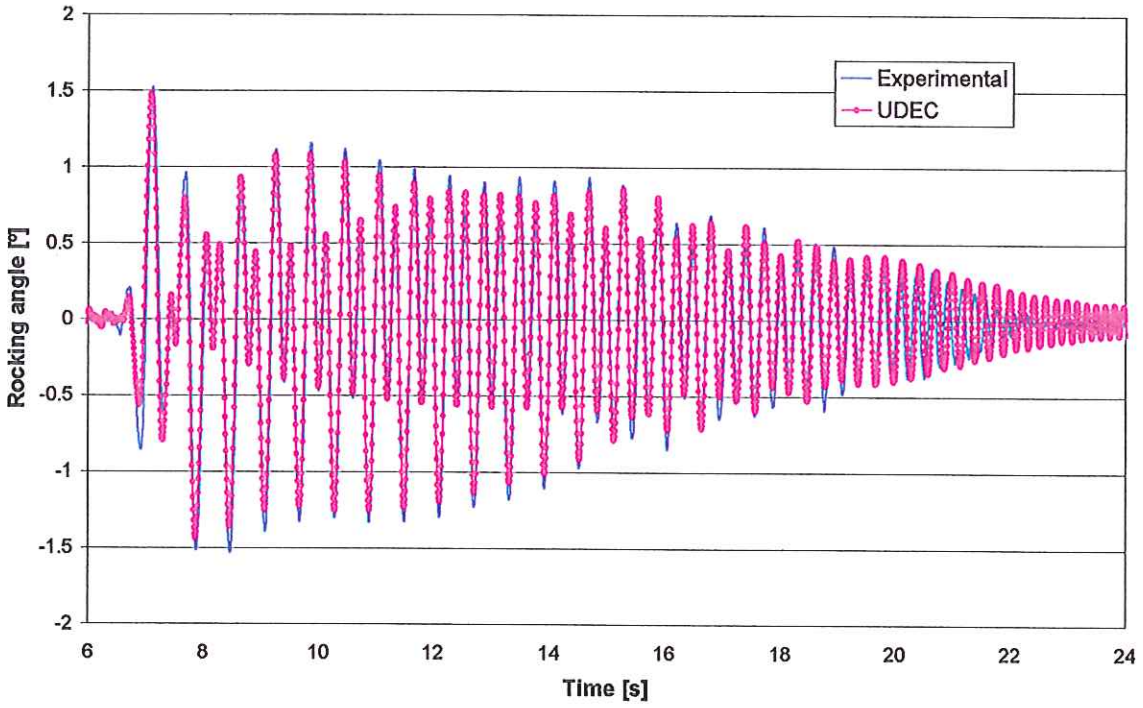


Fig. 7-7. Seno hanning, 3.3 Hz y 6 mm.

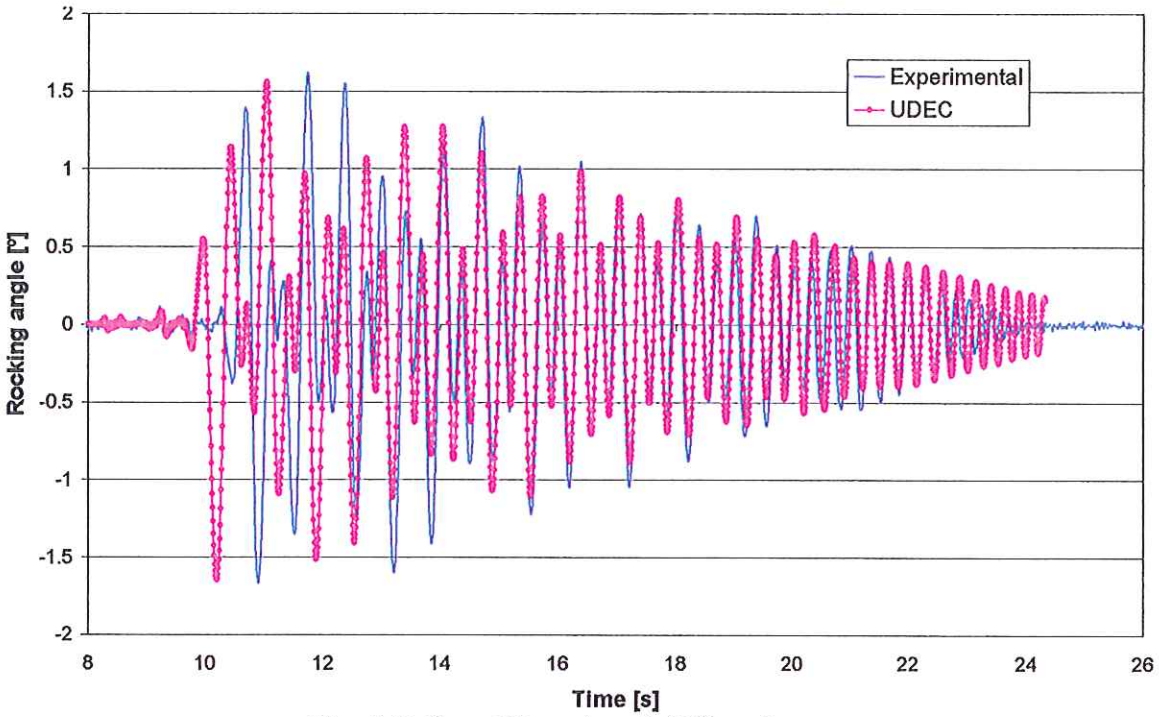


Fig. 7-8. Seno Hannning, 3.0 Hz y 5 mm.

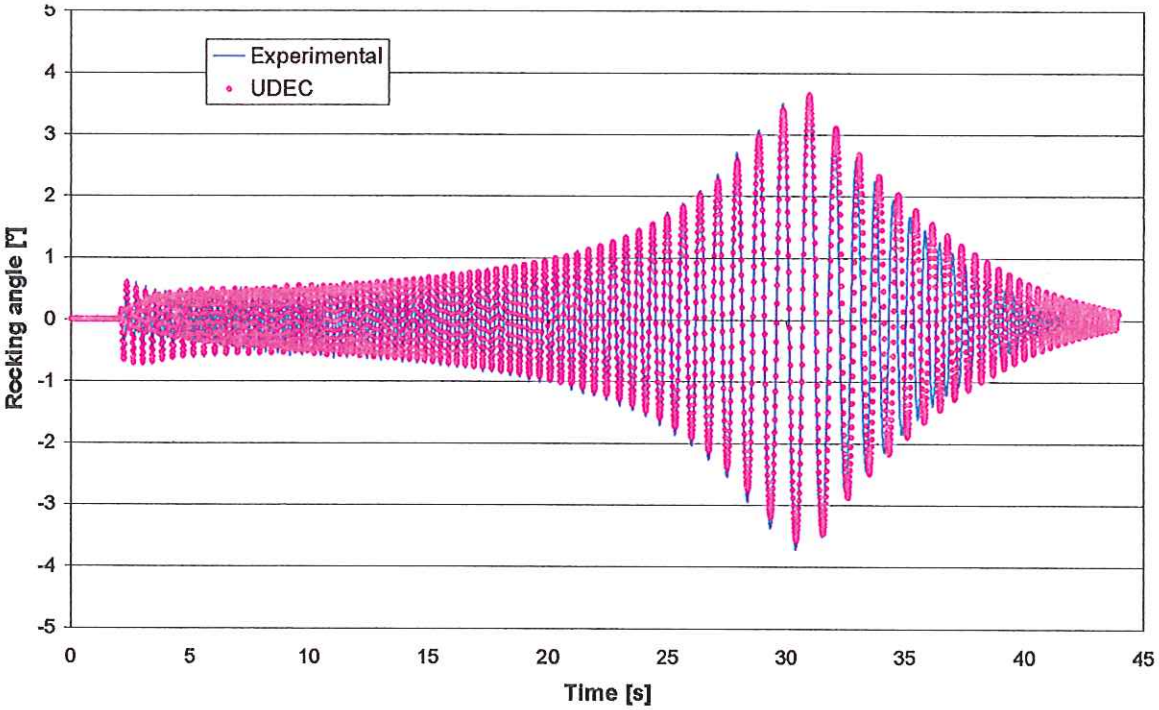


Fig. 7-9. Run-down, 5.0 a 05 Hz y 3 mm. Ángulo de rocking.

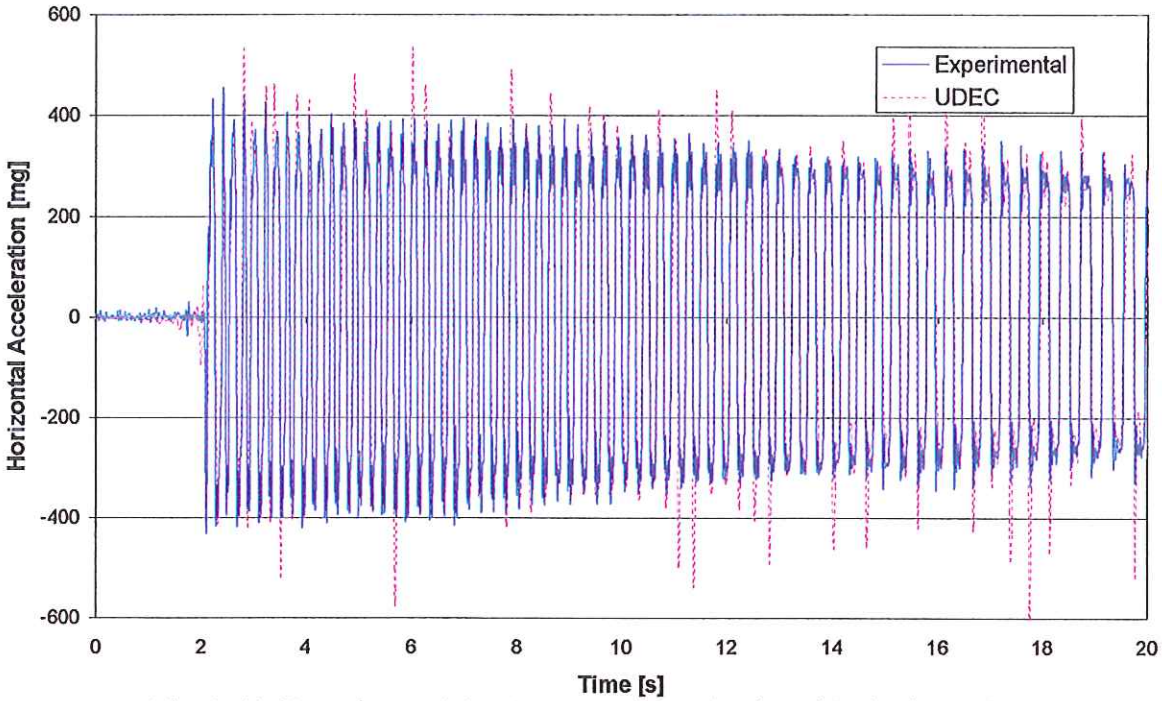


Fig. 7-10. Run-down, 5.0 a 05 Hz y 3 mm. Aceleración horizontal.

La Fig. 7-9 presenta la comparación entre el modelo numérico y la prueba de laboratorio para el ángulo de rocking, para el run-down; mientras que la Fig. 7-10 muestra la aceleración horizontal. Se observa una correlación perfecta entre ambas curvas. Por otra parte, para la prueba de run-up (Fig. 7-11), el modelo numérico presenta una buena correlación con la prueba experimental. El modelo numérico comienza el rocking un par de ciclos antes que el experimento; sin embargo, después de tres ciclos de desfase, el modelo numérico se ajusta perfectamente a la curva experimental.

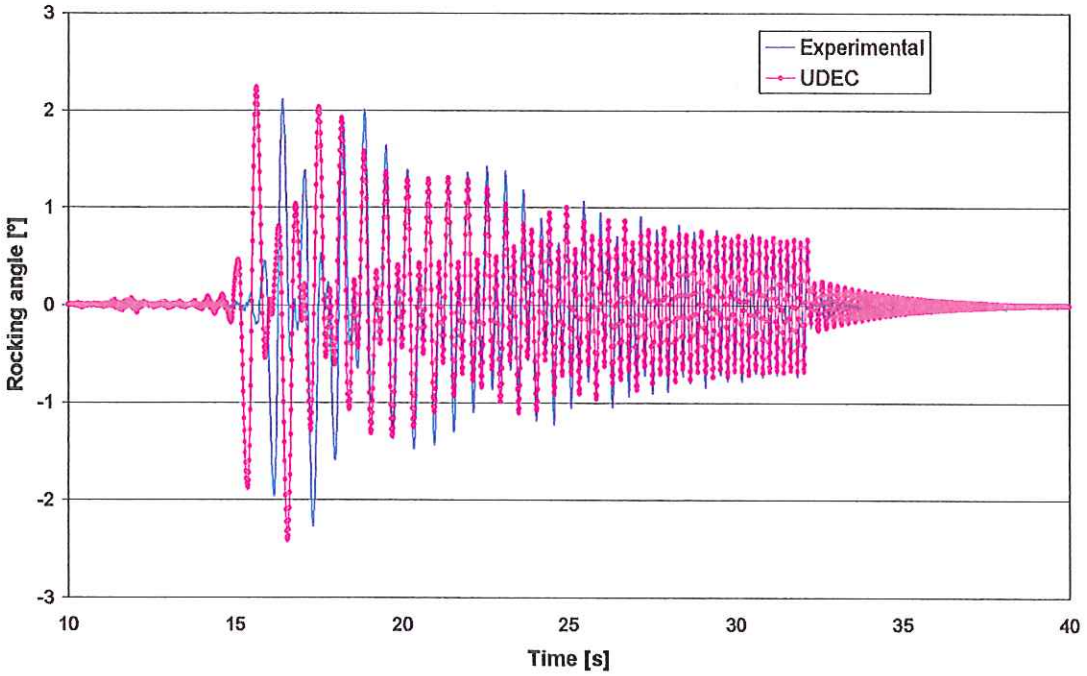


Fig. 7-11. Run-up, 0.5 a 5.0 Hz y 6 mm.

Piedra 3

Para la piedra tres se realizaron pruebas de seno constante a 5 Hz, con amplitudes de 2, 3, 4, y 5 mm. Cabe aclarar que, para cada amplitud la prueba se realizó dos veces con el fin de observar la repetibilidad de los experimentos. Además, se realizó una prueba run-down de 7 a 0.7 Hz y 3 mm de amplitud; así como también, una prueba run-up de 0.7 a 7 Hz con 5 mm.

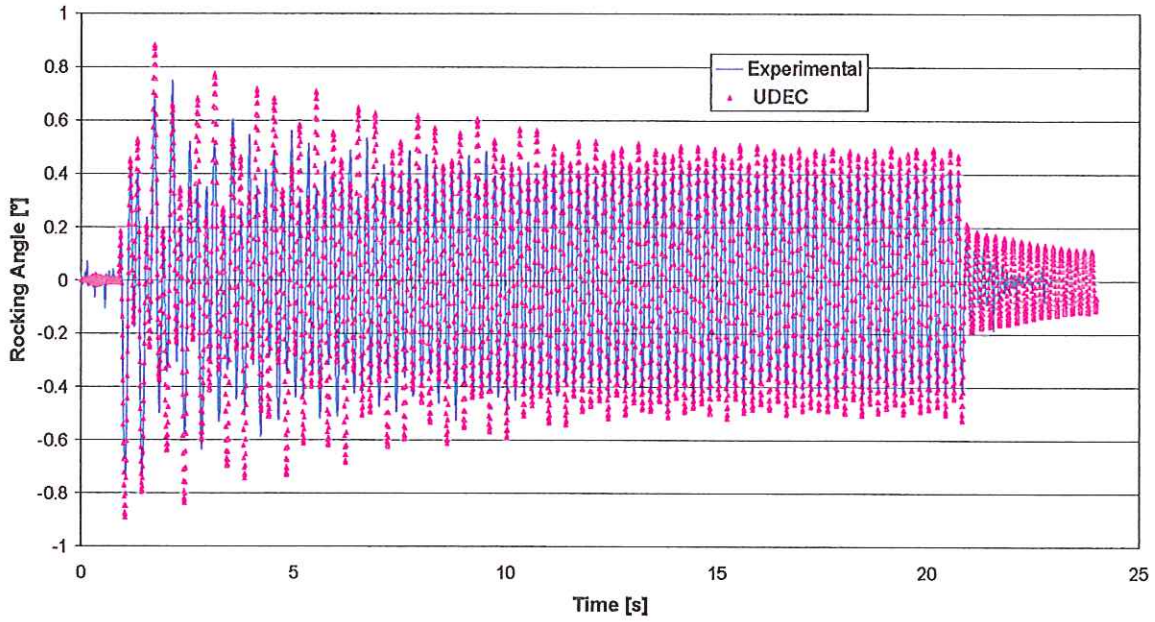


Fig. 7-12. Seno constante, 5 Hz, 4 mm.

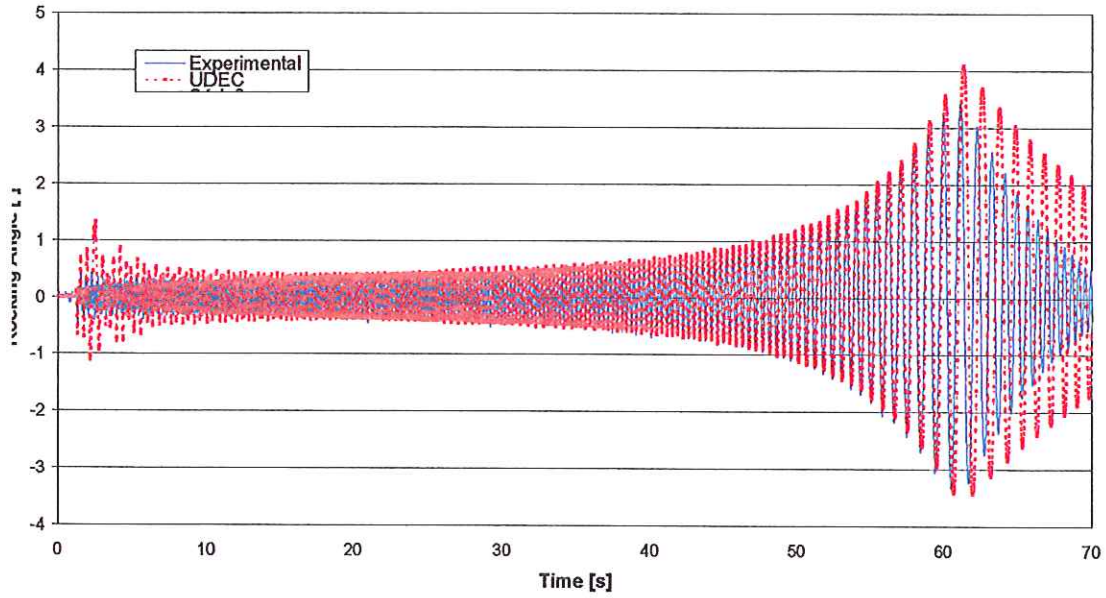


Fig. 7-13. Run-down, 7.0 a 0.7 Hz, 3 mm.

Para todas las pruebas de seno constante, así como para el run-down, el modelo numérico reproduce satisfactoriamente las pruebas de laboratorio (Fig. 7-12 y Fig. 7-13). Cabe hacer notar, que para las pruebas de seno constante se presenta repetibilidad de la respuesta (sección 9). En el caso del run-up (Fig. 7-14) la respuesta numérica comienza el

rocking, cuatro ciclos antes que la experimental y permanecen desfasadas seis ciclos; a partir del cual la respuesta numérica reproduce satisfactoriamente la experimental.

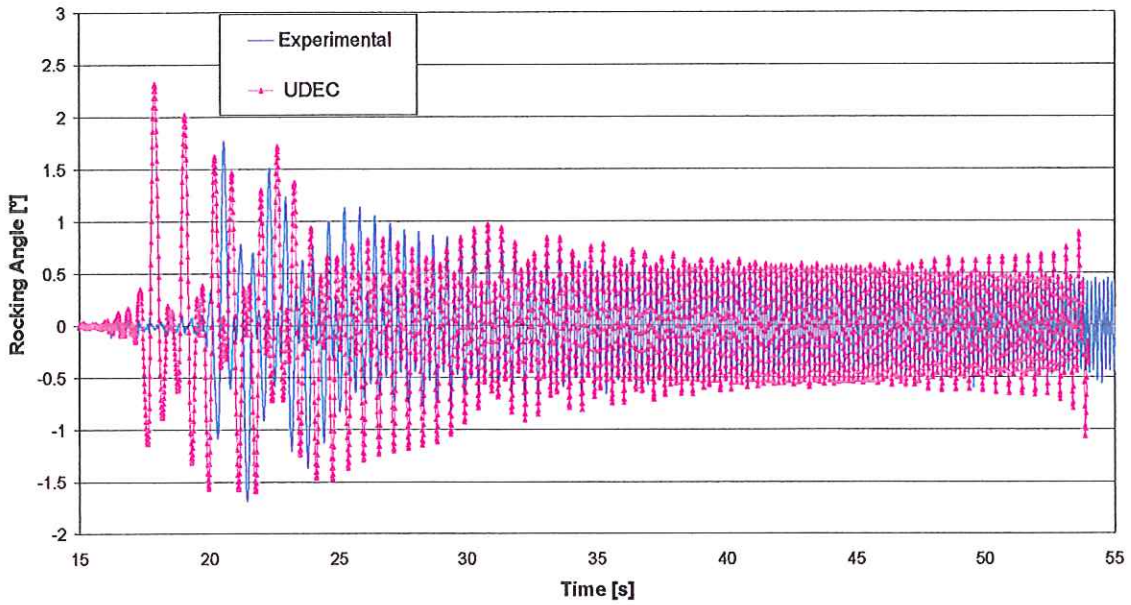


Fig. 7-14. Run-up, 0.7 a 7 Hz, 5 mm.

Piedra 4

Con la piedra cuatro se realizaron análisis de seno constante de 4 y 6.5 Hz, ambos con amplitudes de 3, 4 y 5 mm. Cada uno de estos experimentos se repitió una vez para observar la repetibilidad del fenómeno. También, se realizaron dos pruebas de run-down de amplitud 2 mm y frecuencias de 7 a 0.7 Hz; así como, dos pruebas run-up de 0.7 a 7 Hz con amplitudes de 2 y 4 mm.

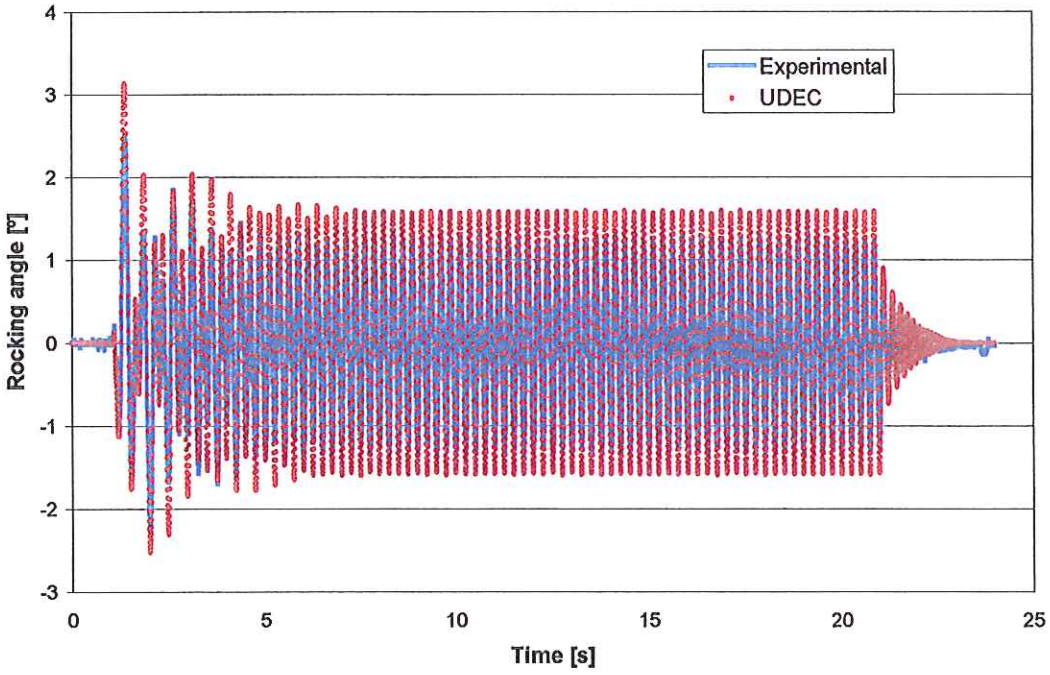


Fig. 7-15. Seno constante, 4 Hz, 5 mm, ángulo de rocking.

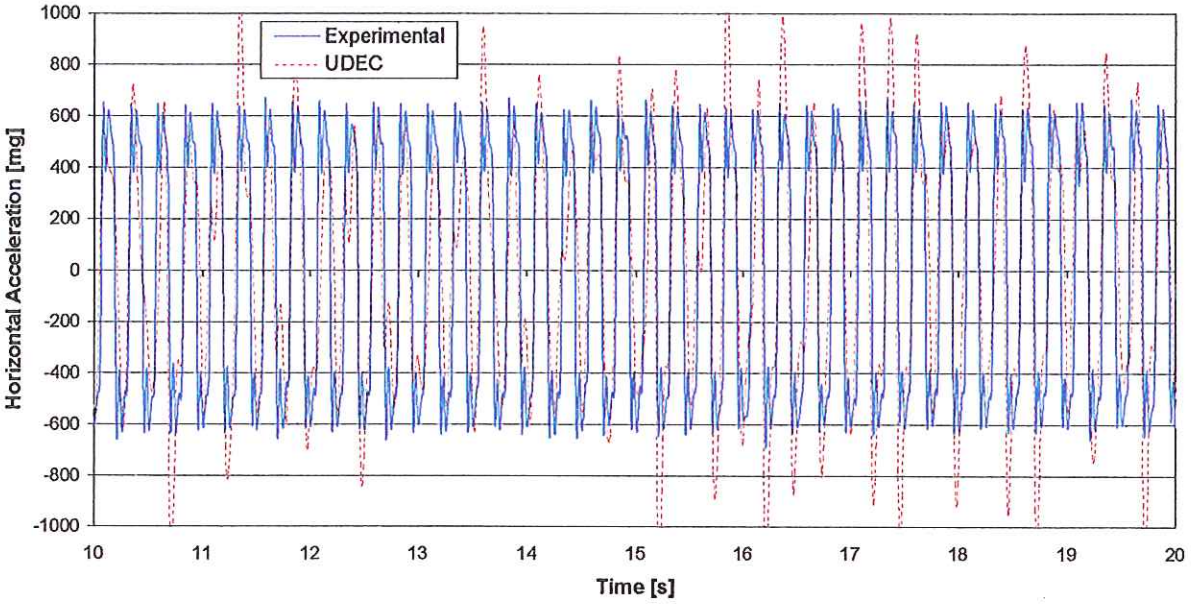


Fig. 7-16. Seno constante, 4 Hz, 5 mm, aceleración horizontal.

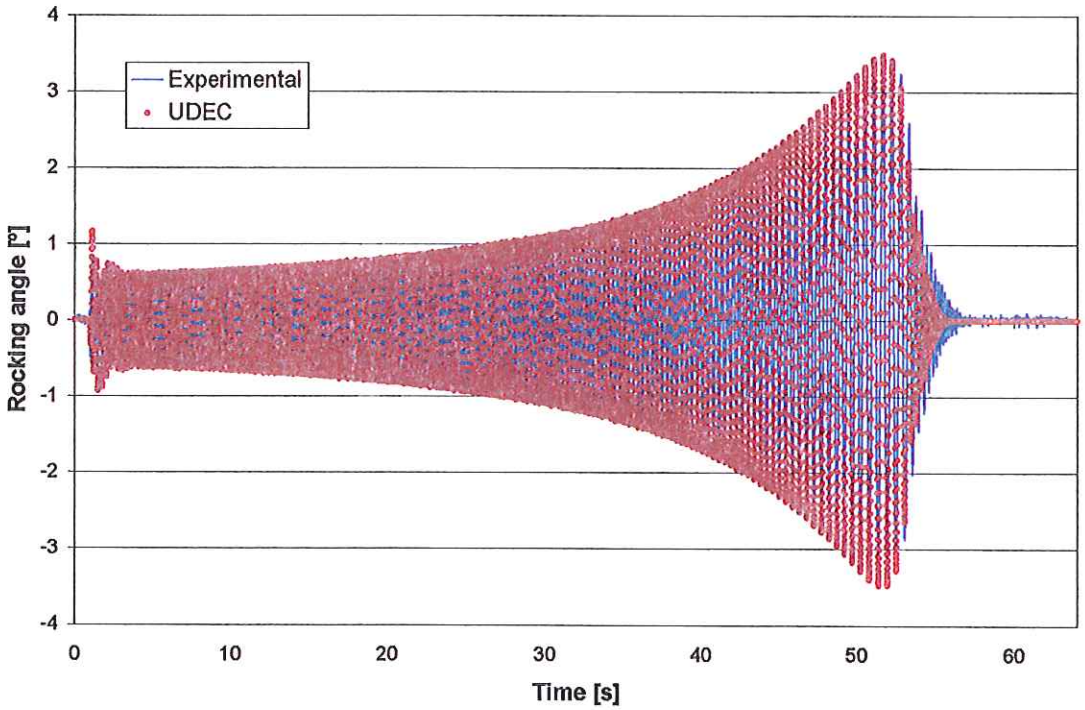


Fig. 7-17. Run-down, 7 a 07 Hz Hz, 2 mm, ángulo de rocking.

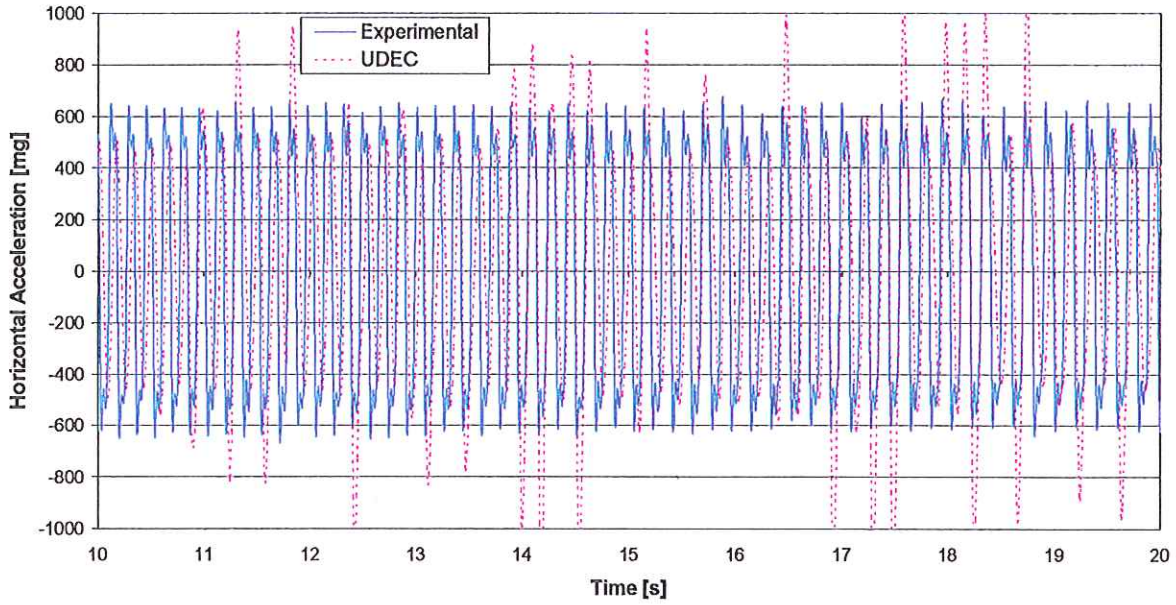


Fig. 7-18. Run-down, 7 a 07 Hz, 2 mm, aceleración horizontal.

Para todos los casos de seno constante y del run-down, el modelo numérico logra reproducir los resultados experimentales (Fig. 7-15 a Fig. 7-18); además de que dichos fenómenos presentan repetibilidad de resultados. Resulta por demás interesante que, para el seno constante, el modelo logra reproducir muy bien el comportamiento del free-rocking, pues en las otras piedras, esta parte del fenómeno es la que presenta la mayor diferencia entre ambas curvas. Para el caso del run-up (Fig. 7-19), el modelo numérico presenta movimiento de rocking cuatro ciclos antes que la curva experimental, entrando en fase cuatro ciclos después, a partir del cual se logra reproducir satisfactoriamente los resultados experimentales.

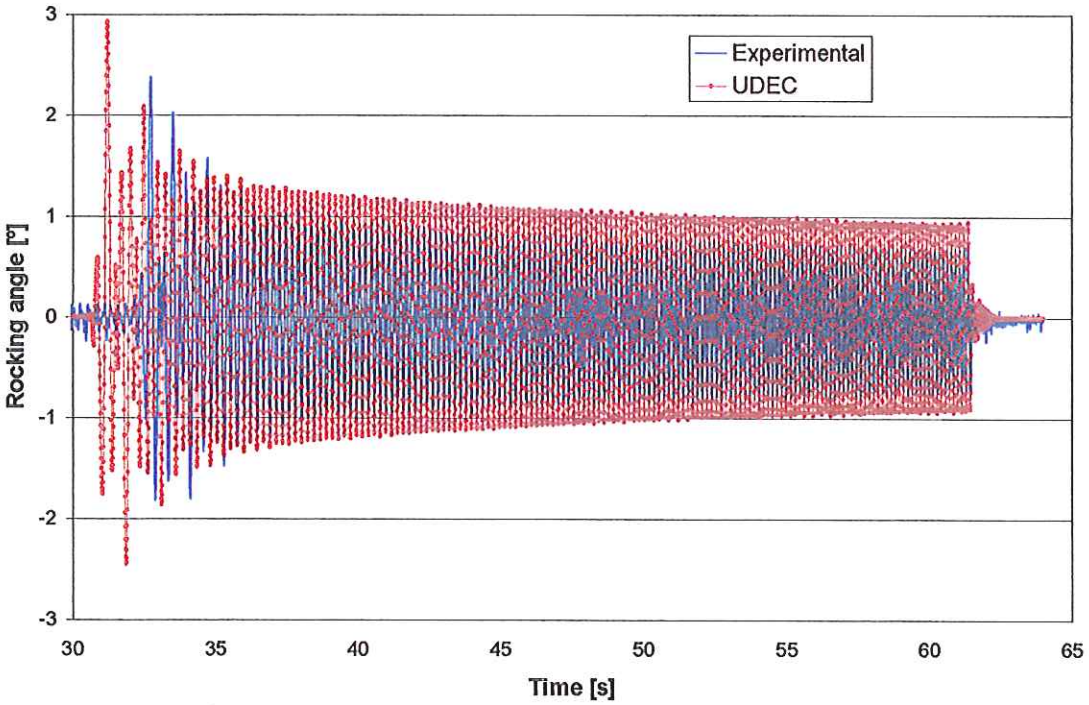


Fig. 7-19. Run-up, 0.7 a 7 Hz, 4 mm, ángulo de rocking.

8. Movimiento Aleatório

La última serie de pruebas que se realizaron con los bloques de piedra, fue la aplicación de sismos sintéticos. Estos sismos son espectro-compatibles con el espectro de diseño propuesto por el Eurocódigo 8 (1993). Se generaron 30 sismos diversos con el afán de tener una muestra lo suficientemente grande, para realizar un análisis estadístico. A cada uno de estos sismos se le asignó un número, conforme se iban generando, con el afán de poder hacer una catalogación sencilla de ellos. De este modo, tenemos el sismo 01, 02, 03, etc. Cabe hacer notar que, los sismos fueron aplicados únicamente a las piedras 2, 3 y 4.

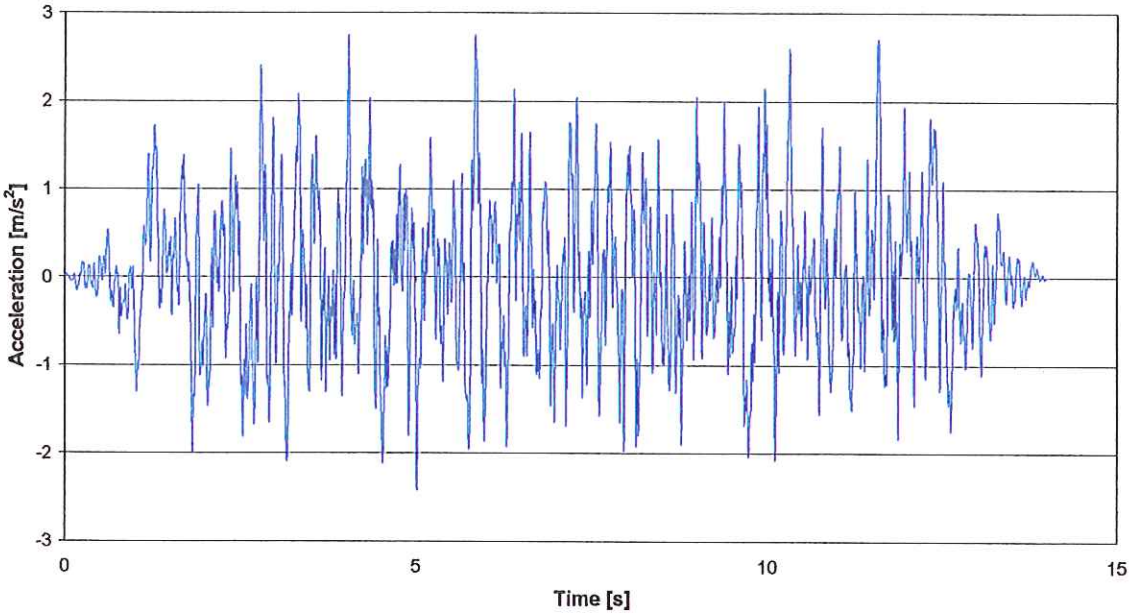


Fig. 8-1. Típico acelerograma sintético (sismo 03).

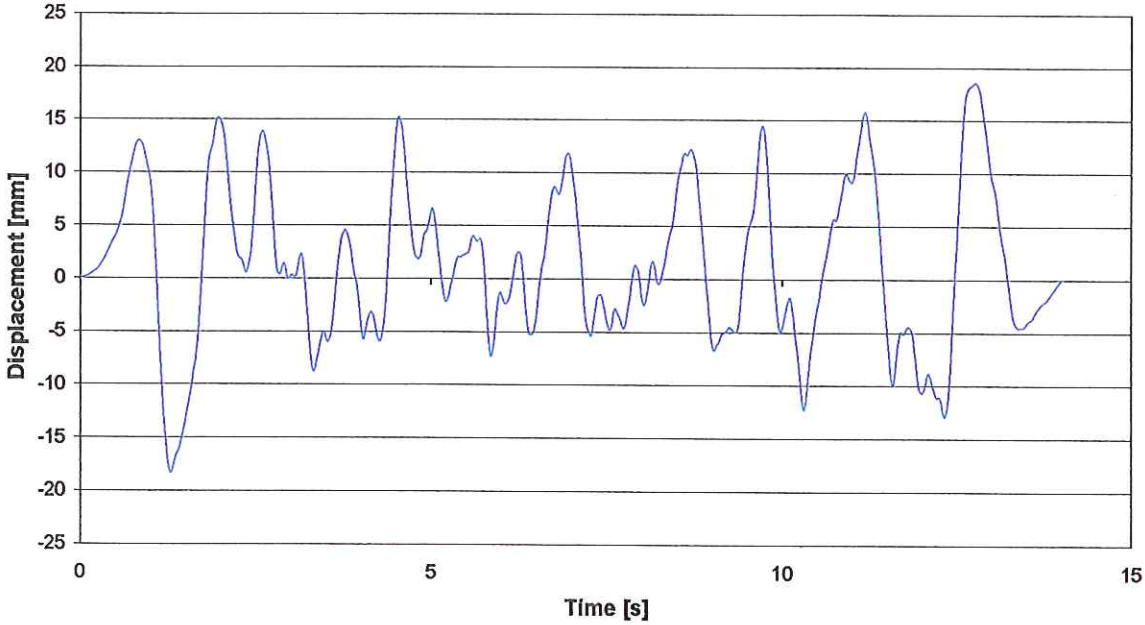


Fig. 8-2. Típica historia de desplazamientos introducida a la mesa sísmica (sismo 03).

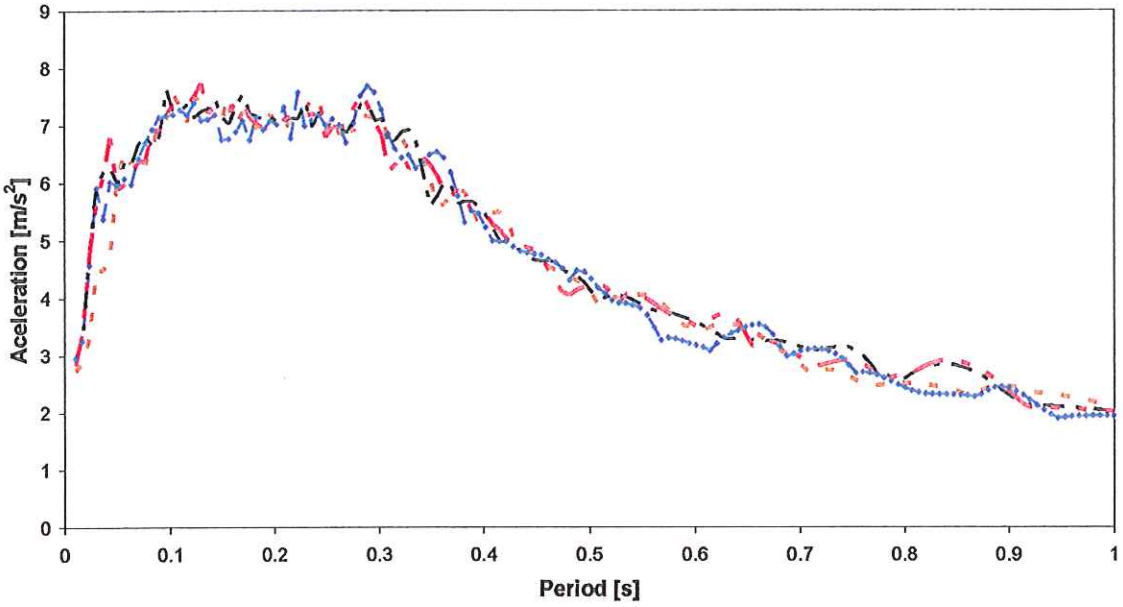


Fig. 8-3. Espectros de respuesta de aceleraciones, para tres sismos sintéticos.

La Fig. 8-1 muestra la forma típica de uno de estos acelerogramas; así como la Fig. 8-2 presenta una historia típica de desplazamientos introducidos a la mesa sísmica. Por otro lado, la Fig. 8-3 presenta el espectro de respuesta de aceleraciones para tres de los sismos generados. Como se observa, todos presentan la misma forma, teniendo la plataforma de aceleración máxima entre 0.1 y 0.3 segundos, con una aceleración espectral de 7 m/s^2.

La respuesta dinámica de un bloque de piedra ante una excitación sísmica depende de varios factores, entre los cuales se encuentra (Yim *et al.*, 1980):

a) Contenido de frecuencias
b) Amplitud de la excitación
c) Condiciones de frontera (apoyo)
d) Condiciones iniciales

En modo especial, los bloques de piedra son muy sensibles a las condiciones de frontera e iniciales, de modo en que si estas cambian ligeramente, cambiará completamente la respuesta. De este modo, la modelación con elementos discretos de una excitación aleatoria tendrá mayores restricciones que con una excitación armónica. Conforme más se acerquen las condiciones reales a las teóricas, entonces una mejor respuesta numérica tendremos.

Piedra 2

Esta piedra se ensayó con los 30 sismos, pero sin llevarla al colapso (volteo). No se llevó al colapso debido a que las aceleraciones necesarias para esto, se encontraban cerca de los límites de la mesa. Razón por la cual, se aplicó un factor de escala de 0.6. Cabe hacer notar, que únicamente para el sismo 20, el factor de escala se incrementó de 0.6 hasta 1.3, valor con el cual se consiguió el colapso de la piedra 2. Así mismo, para los factores de escala de 1.1, 1.2 y 1.3 se repitieron las pruebas dos veces para observar la repetibilidad del fenómeno.

Las Fig. 8-4 a Fig. 8-6, muestran la respuesta experimental y numérica para los sismos 04, 15 y 21 respectivamente. Como se puede observar, el modelo numérico reproduce satisfactoriamente la respuesta, especialmente para los sismos 04 y 21. Para el sismo 15, el modelo numérico reproduce con un buen grado de certidumbre la segunda mitad del registro.

Mientras que la primera mitad muestra diferencias apreciables. En este caso, el modelo experimental comienza a hacer rocking solo hasta que la mitad del sismo ha sido introducido.

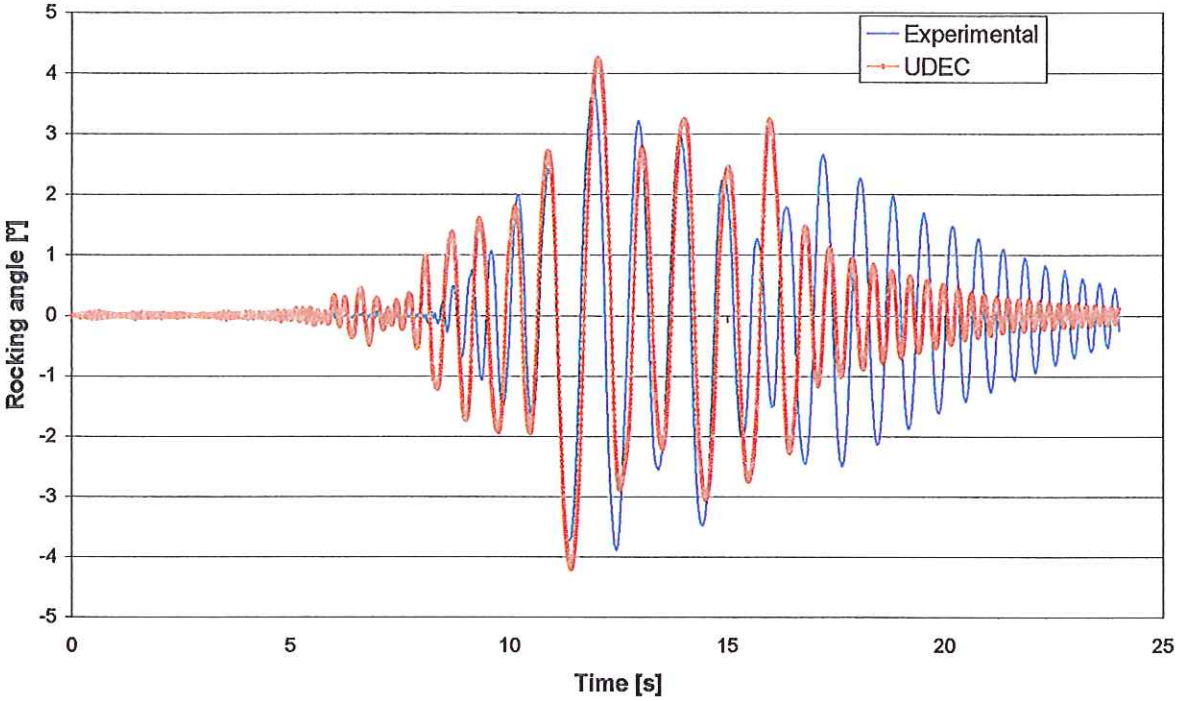


Fig. 8-4. Sismo 04, ángulo de rocking.

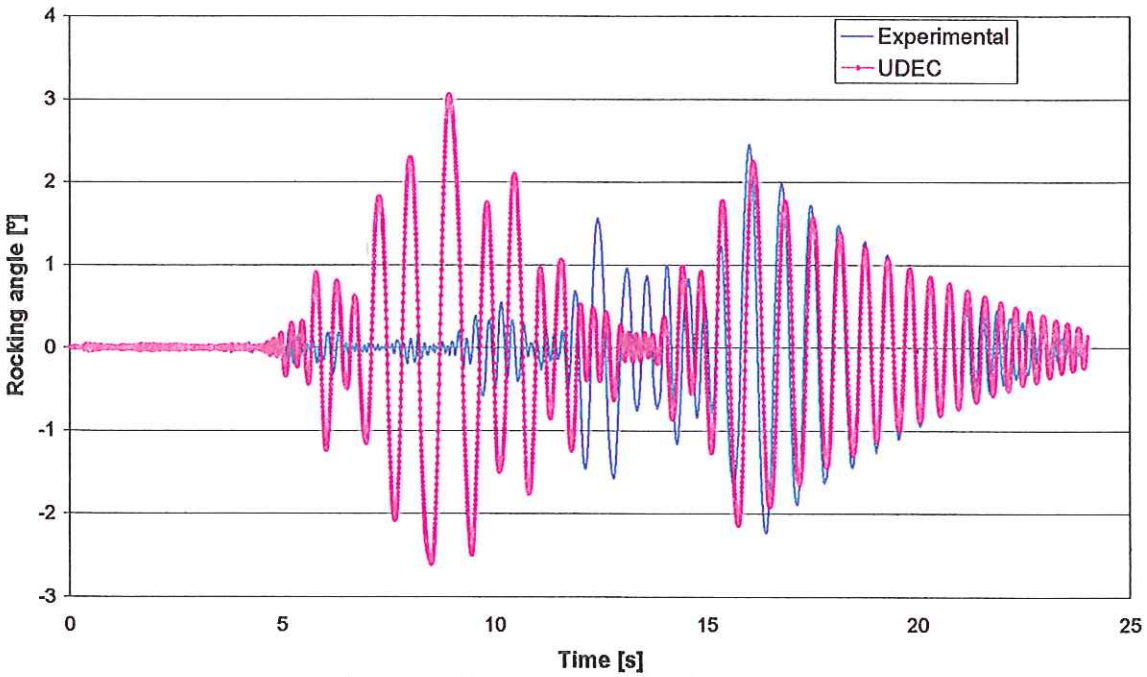


Fig. 8-5. Sismo 15, ángulo de rocking.

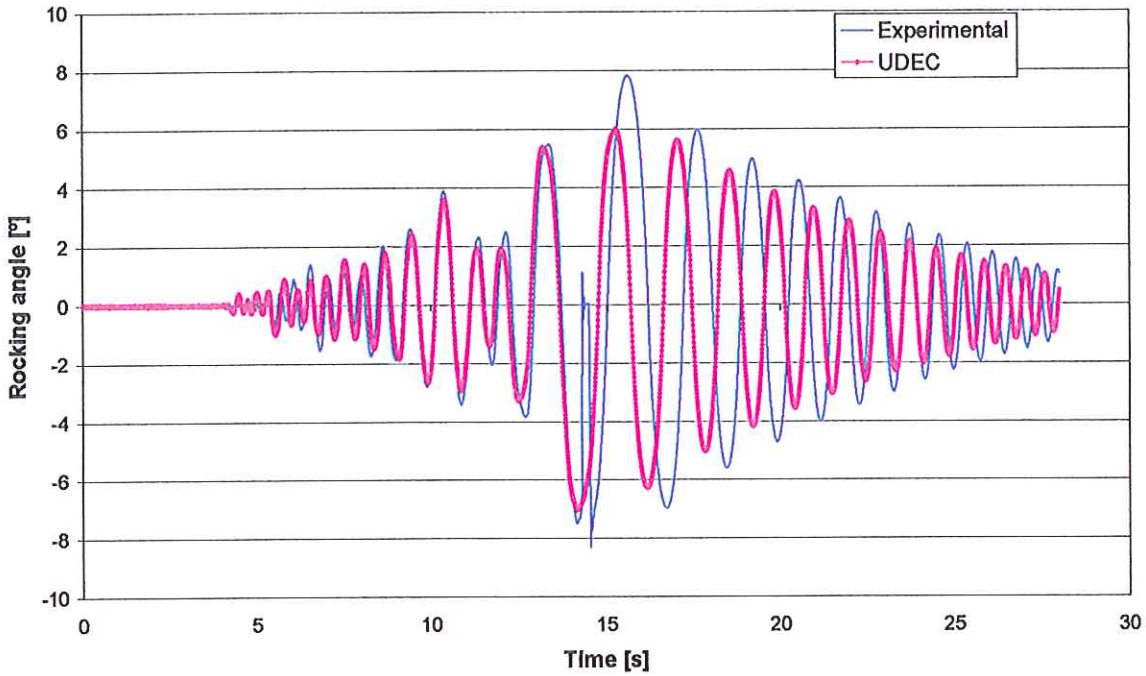


Fig. 8-6. Sismo 21, ángulo de rocking.

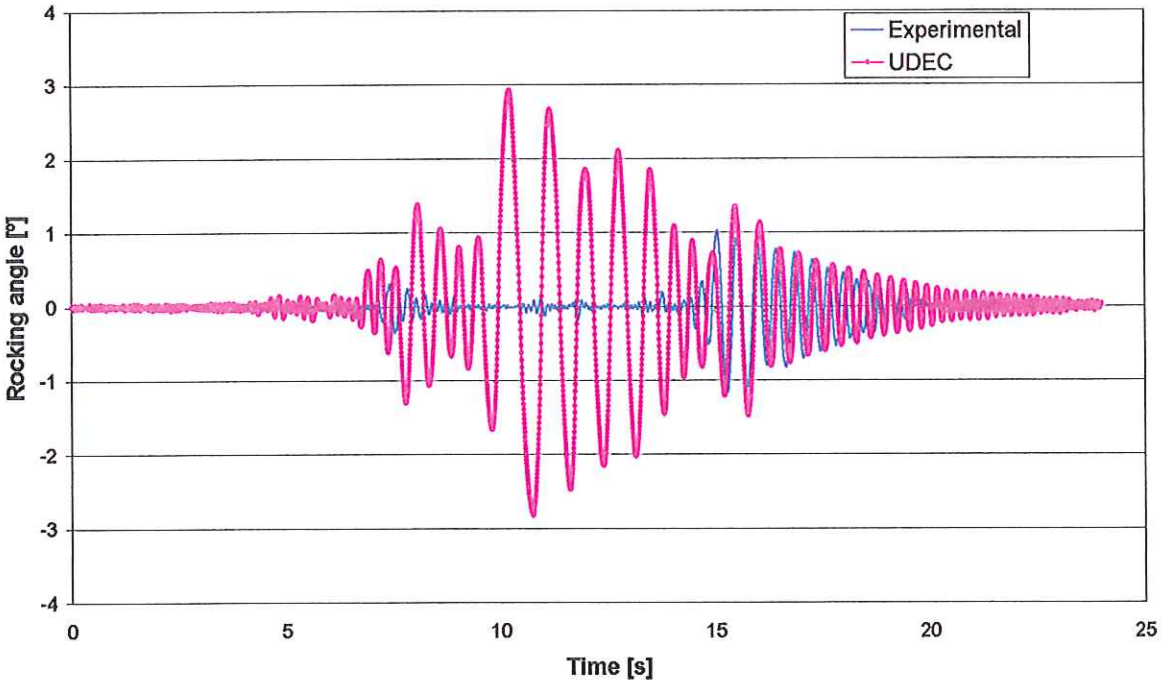


Fig. 8-7. Sismo 19, ángulo de rocking.

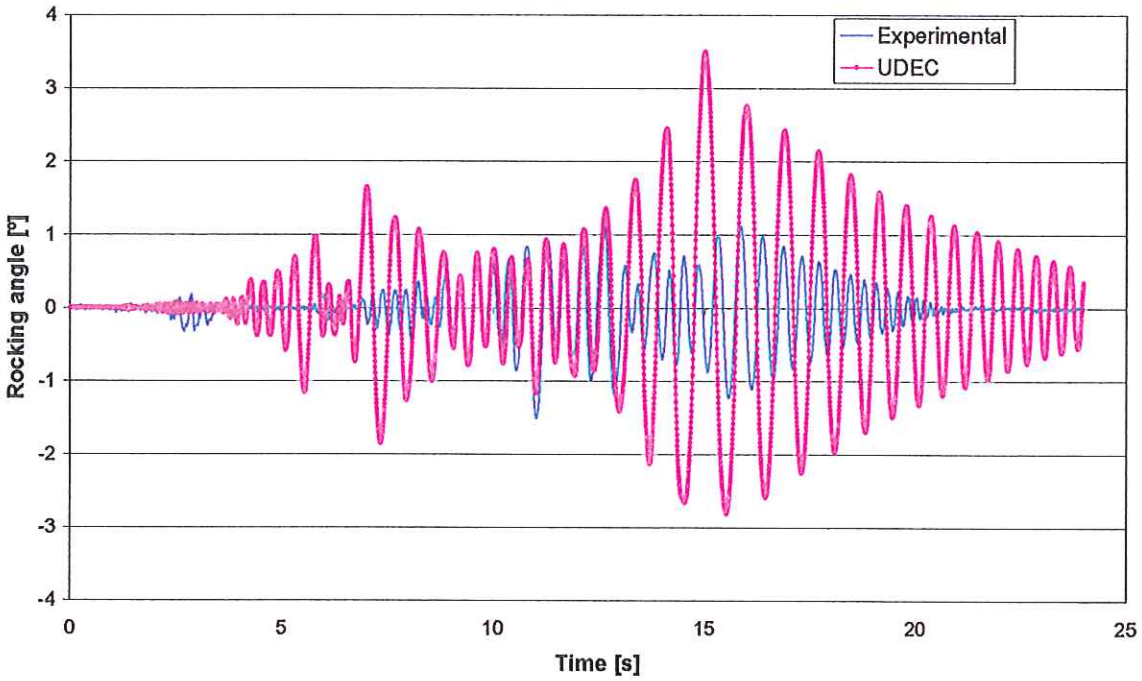


Fig. 8-8. Sismo 24, ángulo de rocking.

La mayoría de las respuestas reproducidas por el modelo numérico son parecidas a las que presentan las Fig. 8-7 y Fig. 8-8. Es decir, el modelo numérico reproduce satisfactoriamente solo una parte del registro experimental, la cual puede ser la parte inicial, la intermedia o la parte final en la que se presenta el movimiento libre. Esto se debe principalmente a las condiciones iniciales y de frontera del bloque, las cuales van cambiando continuamente durante el experimento. Debido a esto, no existe repetibilidad del fenómeno.

Piedra 3

Esta piedra se ensayó con los 30 sismos, para cada uno de los cuales se incrementó el factor de aceleración hasta que se producía el colapso de la piedra. De este modo, para la piedra tres se tienen 103 pruebas; algunas de las cuales se repitieron una o dos veces con el afán de estudiar la repetibilidad de los experimentos.

De las distintas pruebas, se observa que la respuesta de las piedras depende en gran modo de las condiciones de frontera. Dependiendo de ellas, será la forma en que responda la piedra ante una misma excitación. La respuesta numérica en general es buena (mejor que para la piedra 2); sin embargo, en pocos casos se logra reproducir el colapso. Esto se debe principalmente a que el factor alfa ajustado de esta piedra, corresponde al de una piedra con una base mayor que la real (sección 9). Por tal motivo, el ángulo crítico de esta piedra es mayor, por lo que el modelo numérico es más estable que lo que es la piedra 3 en realidad.

La Fig. 8-9 muestra la respuesta de la piedra 3 ante el sismo 17, con un factor de 0.6. Se observa que a los 20 segundos la piedra se vuelve inestable, al llegar a un ángulo de 6.9°. Por otra parte, la respuesta numérica reproduce bien la prueba experimental. Sin embargo, ésta no se vuelve inestable, a pesar de haber alcanzado el ángulo crítico. De igual modo, la prueba con el sismo 04 y un factor de 0.7 (Fig. 8-10) presenta un comportamiento similar. El modelo numérico alcanza el ángulo crítico (7.2°), pero no se vuelve inestable y continua haciendo rocking.

La Fig. 8-11 presenta la simulación numérica de la prueba con el sismo 18 y un factor de 0.5. Se observa una buena correlación con la prueba experimental. Predice el colapso medio ciclo antes que se produzca en la realidad. El ángulo crítico para la prueba experimental es de 6.6°, mientras que en la prueba experimental es de 7° (5% de diferencia). En este caso particular, el UDEC reproduce satisfactoriamente la prueba numérica.

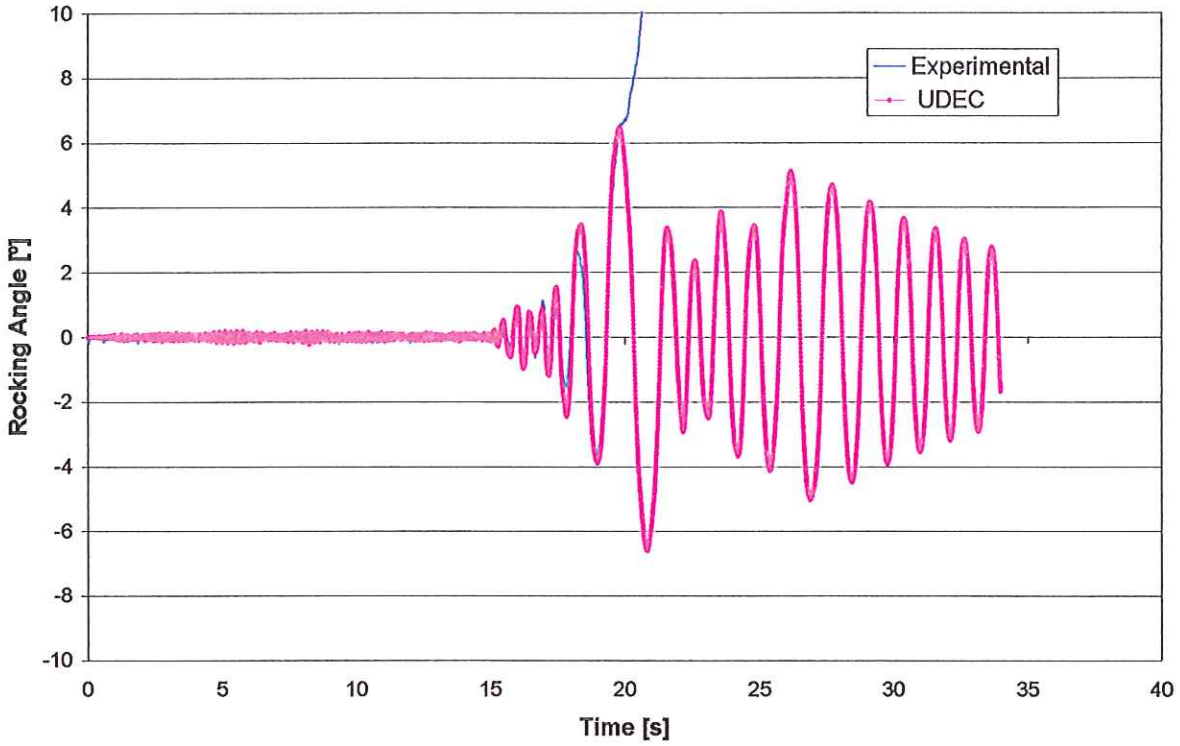


Fig. 8-9. Sismo 17, factor de aceleración de 0.6, ángulo de rocking.

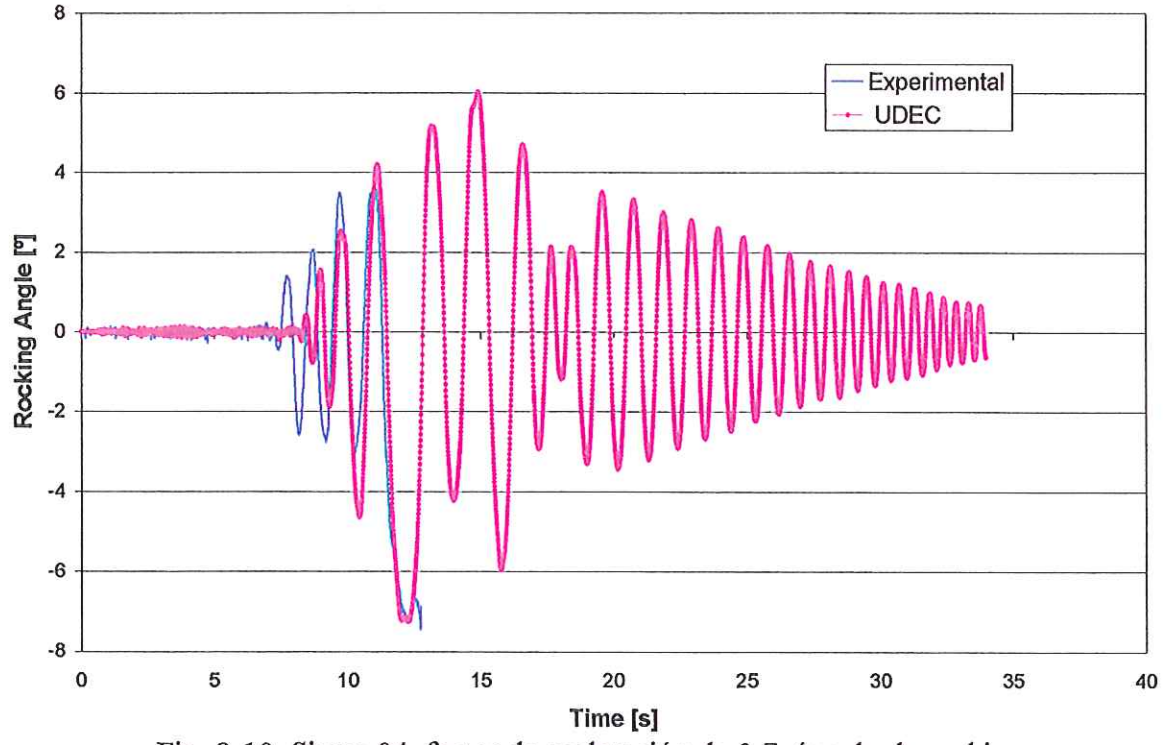


Fig. 8-10. Sismo 04, factor de aceleración de 0.7, ángulo de rocking.

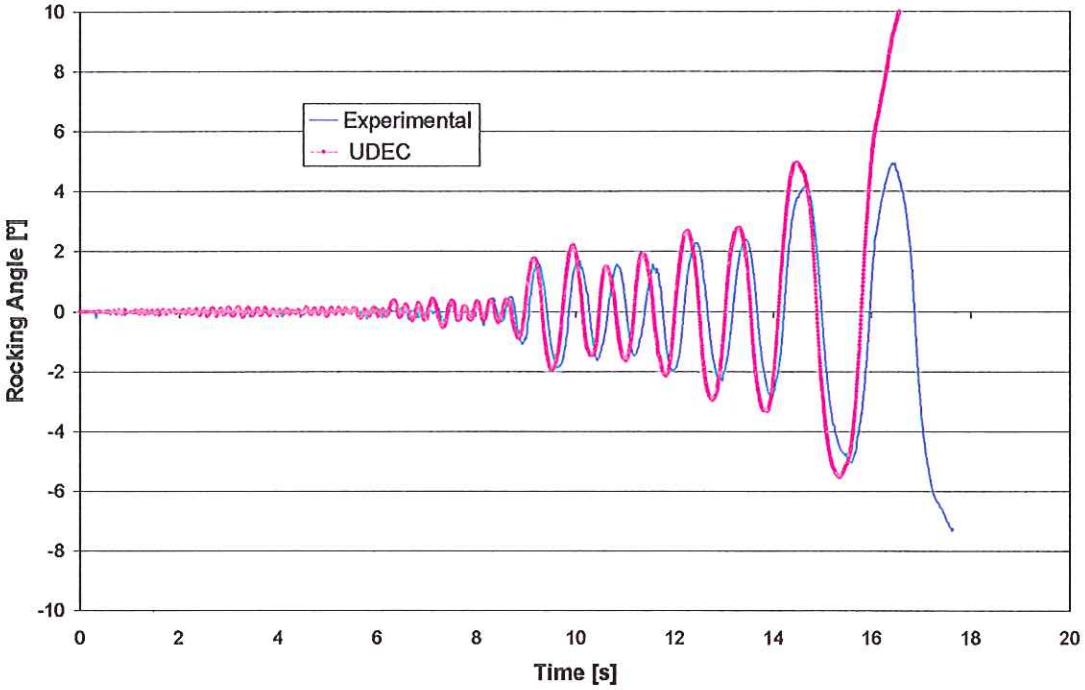


Fig. 8-11. Sismo 18, factor de aceleración de 0.5, ángulo de rocking.

Para factores de aceleración que no producen el colapso, el modelo numérico es más noble, pues logra reproducir la mayoría de los casos (Fig. 8-12 y Fig. 8-13); aunque se presentan algunos casos en que la respuesta numérica es diferente de la experimental. Por ejemplo, la Fig. 8-14 presenta la respuesta de la piedra sometida al sismo 10 con un factor de 0.5. En este caso, el modelo numérico reproduce bien los tres primeros ciclos, así como otros tres ciclos intermedios, pero en general no logra reproducir el gran ángulo de rocking (6°) debido al impulso final del acelerograma, después del cual la piedra entra en vibración libre.

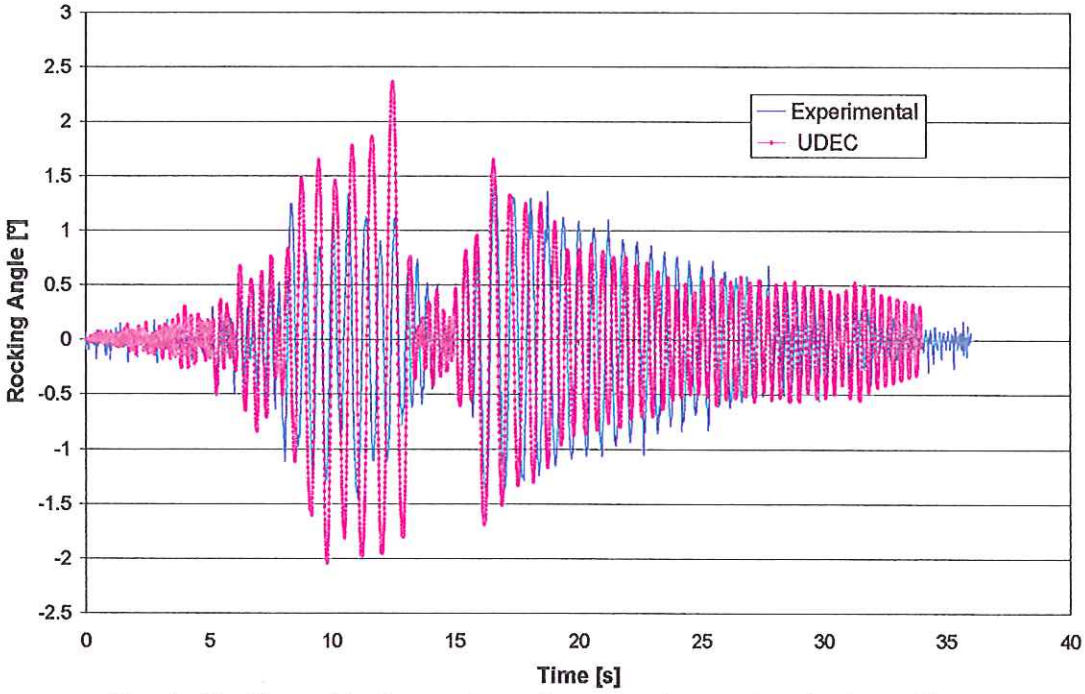


Fig. 8-12. Sismo 13, factor de aceleración de 0.5, ángulo de rocking.

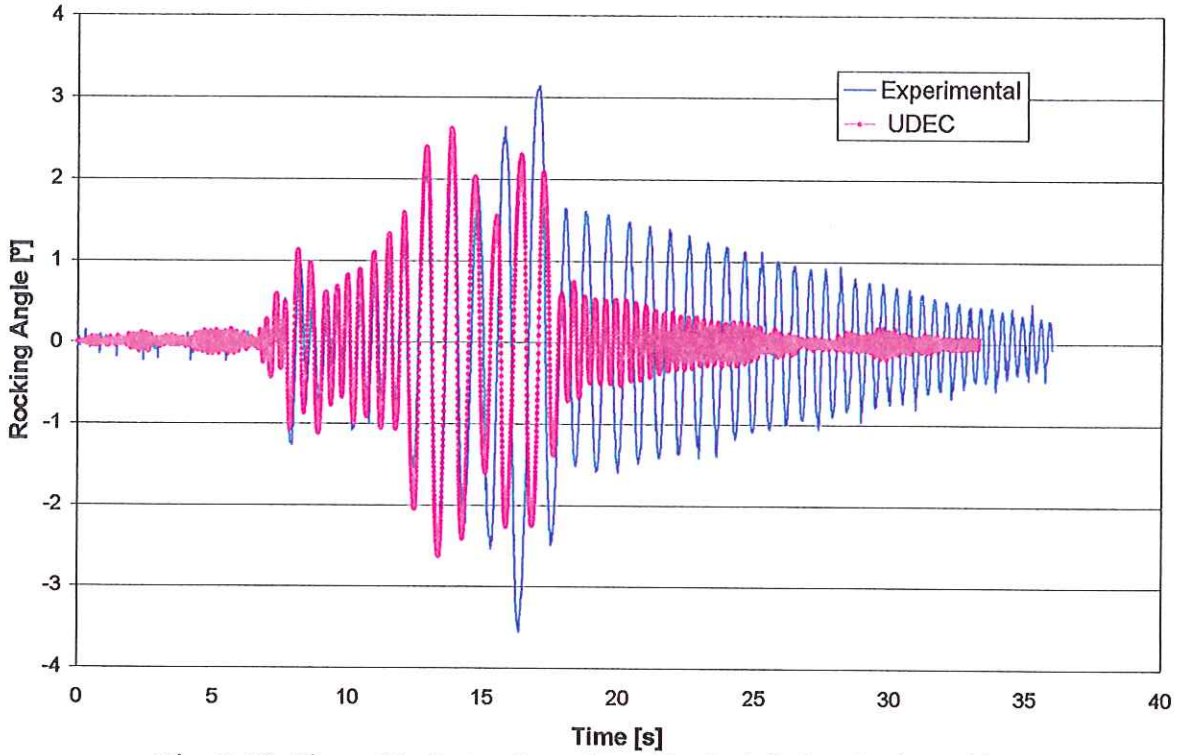


Fig. 8-13. Sismo 11, factor de aceleración de 0.5, ángulo de rocking.

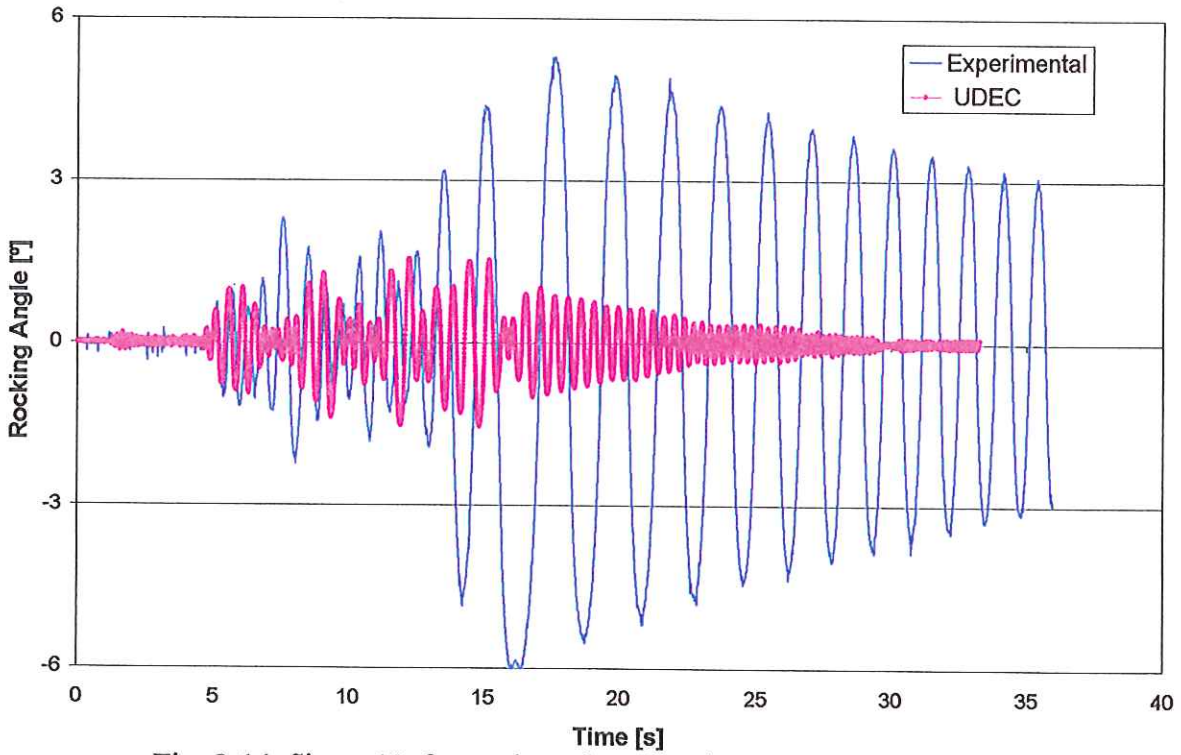


Fig. 8-14. Sismo 10, factor de aceleración de 0.5, ángulo de rocking.

Piedra 4

Con la piedra cuatro se realizaron únicamente pruebas de los primeros 25 sismos, sin llegar al colapso y con el mismo factor de carga (1.0), con el fin de observar su respuesta ante cargas aleatorias. No se llevó al colapso, debido a que la aceleración necesaria se encontraba

en el límite de funcionamiento de la mesa; por lo que se decidió, únicamente realizar los ensayos con los sísmos de diseño. Únicamente, a la prueba con el sismo 09 se le incrementó el factor de carga hasta llevar a la piedra 4 al colapso. Cabe hacer notar, que esta piedra colapsa para los sismos 02 y 22 con el factor de carga 1.0, aunque las pruebas no estaban diseñadas para esto.

A diferencia de las piedras 2 y 3, el modelo numérico de la piedra 4 presenta una mejor confrontación con las pruebas experimentales, incluso para las pruebas en que colapsa la piedra. Esto se debe principalmente a que es la piedra menos dañada de las tres. Pues tanto la piedra 2, como la 3 presentaban daño en la base debido a las diferentes pruebas realizadas con anterioridad. Por lo que las condiciones iniciales de la piedra 4 y sus condiciones de frontera, se asemejan más a los parámetros teóricos, que las piedras 2 y 3.

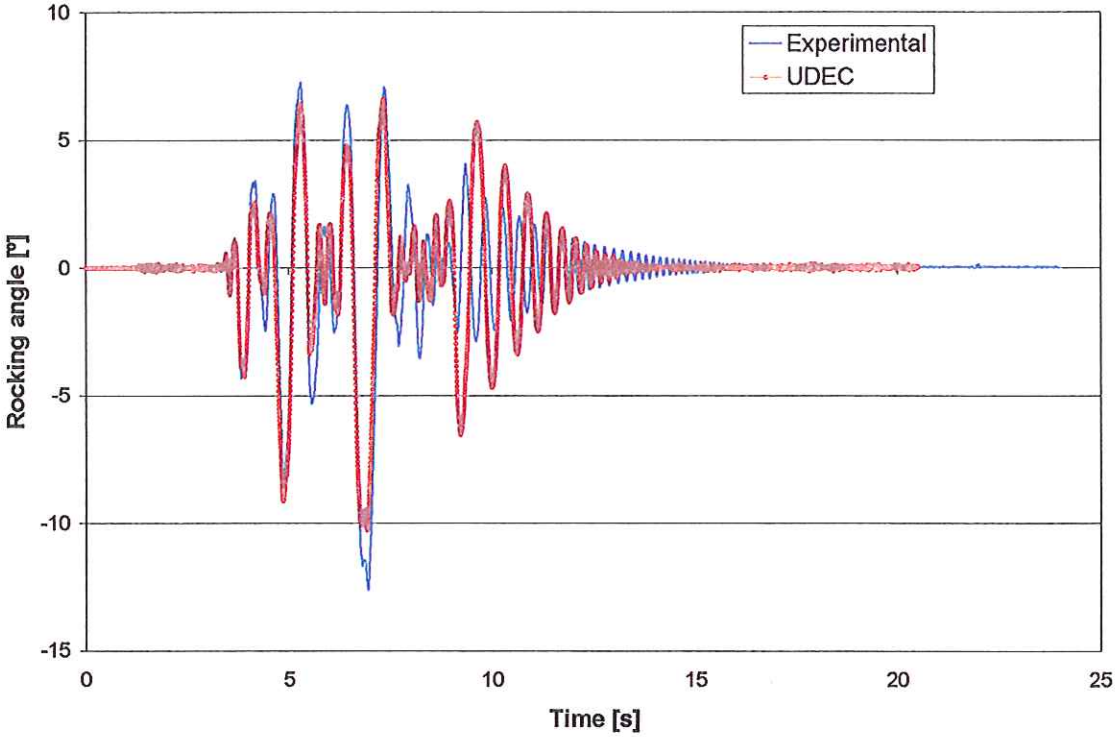


Fig. 8-15. Sismo 17, ángulo de rocking.

Las Fig. 8-15 y Fig. 8-16 presentan la comparación entre las pruebas experimentales y el modelo numérico para el sismo 17 y 20, respectivamente. Se observa en ambas, que el modelo numérico presenta una muy buena correlación con las pruebas experimentales. A pesar de que la mayoría de las pruebas presentan una respuesta similar a estas, existen algunas pruebas que presentan algunas leves diferencias, como la prueba del sismo 23 (Fig. 8-17). En este caso, el modelo numérico predice un gran ángulo de rocking al inicio del sismo, pero después de este ciclo, el modelo reproduce satisfactoriamente la siguiente parte del registro. Por otra parte, para el sismo 10 (Fig. 5-4), la respuesta numérica es completamente diferente a la respuesta experimental, coincidiendo únicamente en los ciclos intermedios de carga. Durante esta prueba, la piedra 4 prácticamente no presenta rocking durante la aplicación del sismo, sino que éste se presenta con el impulso final, haciendo que la piedra entre en movimiento libre. Es por demás interesante que, el modelo numérico no reproduzca este fenómeno. De hecho, el impulso final hace el efecto contrario; es decir, la piedra no presenta vibración libre y prácticamente deja de hacer rocking cuando termina el sismo.

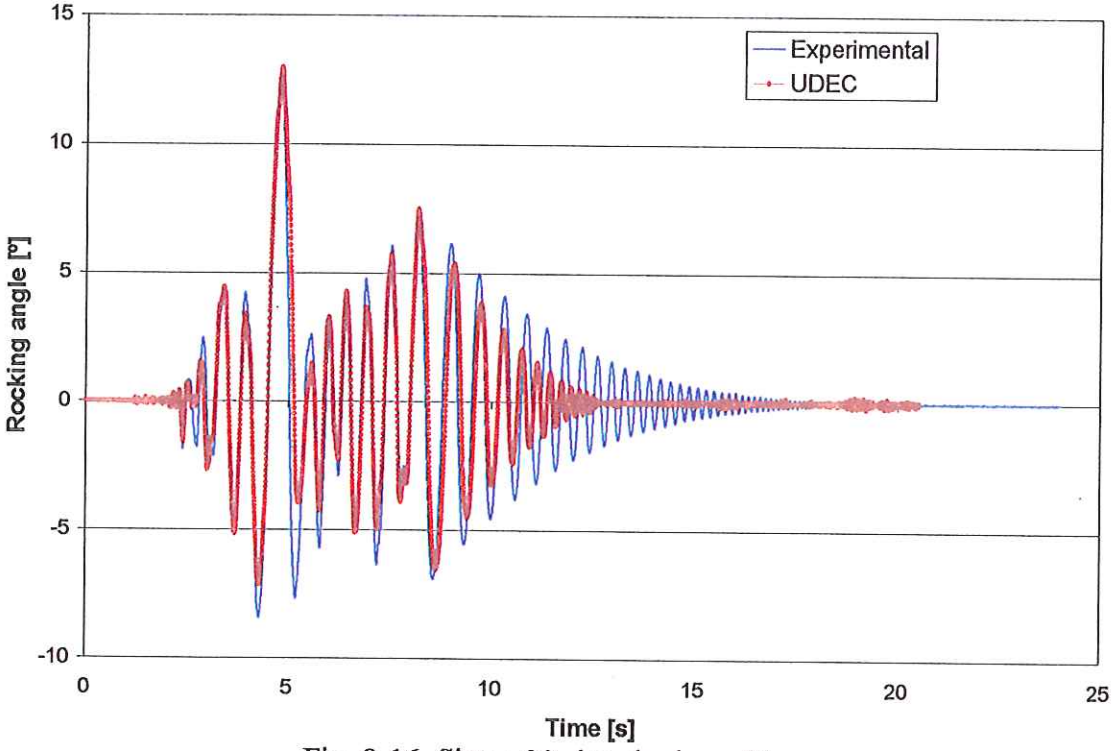


Fig. 8-16. Sismo 20, ángulo de rocking.

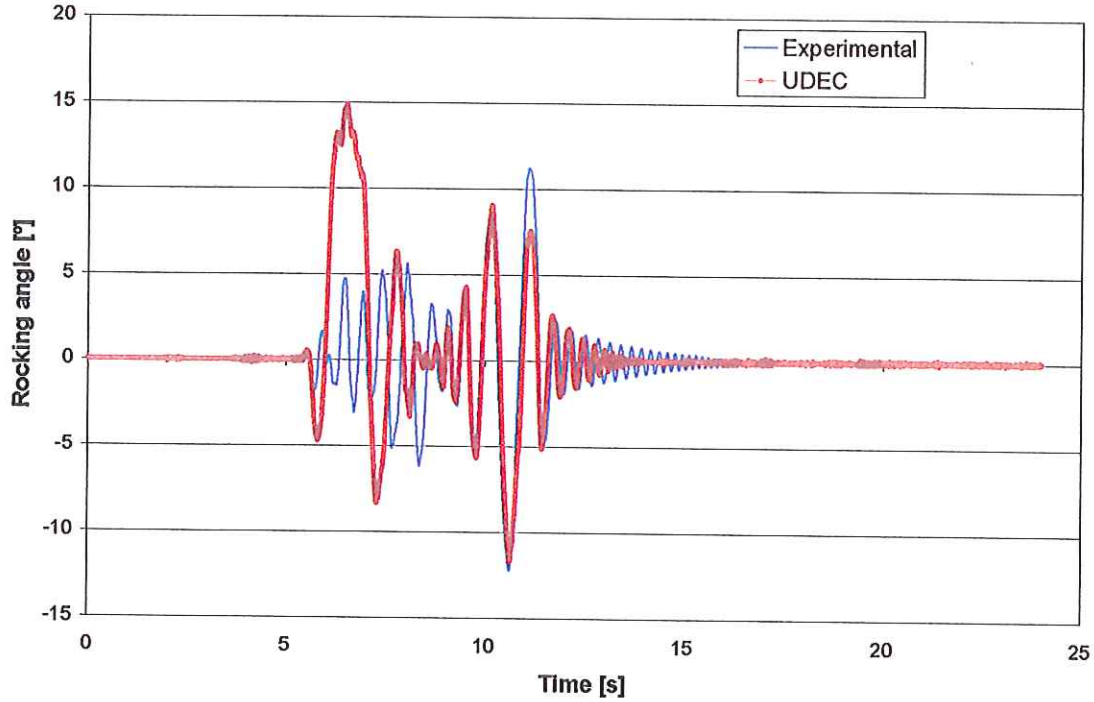


Fig. 8-17. Sismo 23, ángulo de rocking.

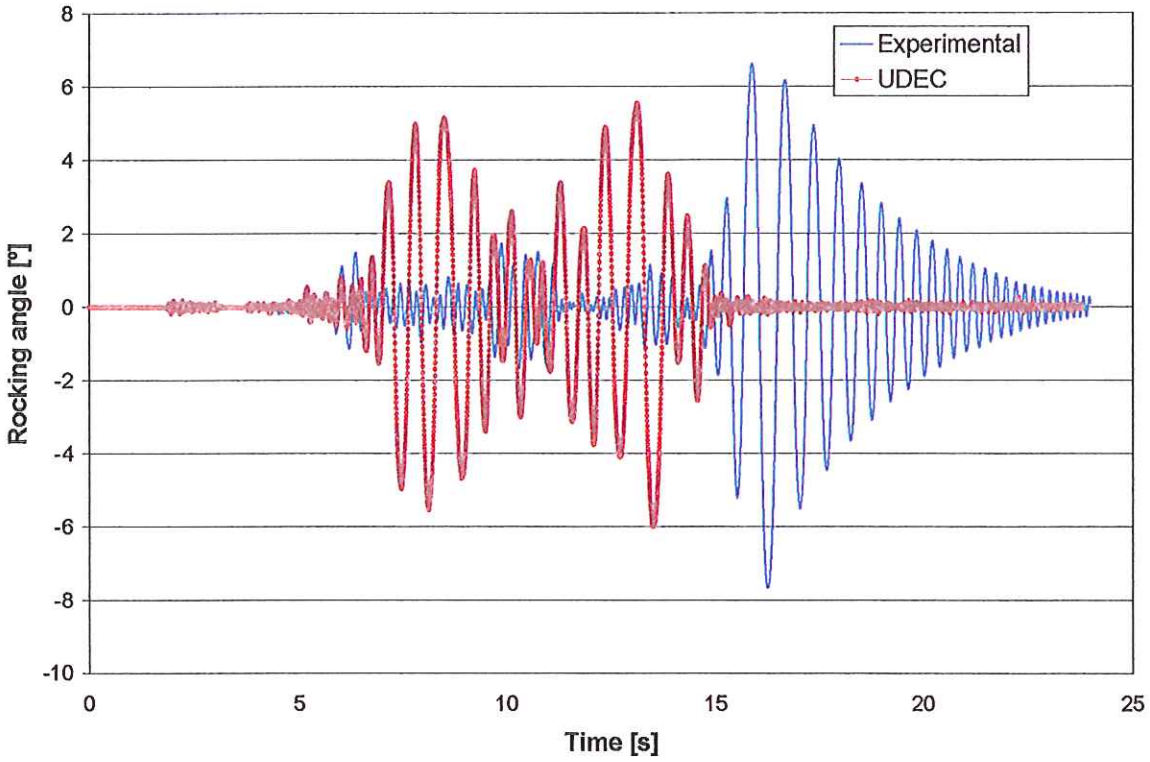


Fig. 8-18. Sismo 10, ángulo de rocking.

9. Comportamiento Dinámico

En esta sección se describe el comportamiento mecánico de los bloques de piedra, a partir de los ensayes realizados. En primer lugar se discute sobre la necesidad de ajustar los parámetros teóricos; así mismo, se hace un análisis sobre el movimiento tridimensional de los bloques y su posible influencia en el movimiento de rocking. Finalmente, se analizan las respuestas de los bloques con movimiento libre y forzado, tanto armónico como aleatorio.

Ajuste de parámetros

Los tres parámetros principales (α, μ, p) utilizados en la teoría clásica, se pueden obtener mediante las Eq 3-3 y Eq 3-4. A partir de los ensayes de movimiento libre se pueden obtener estos tres parámetros. Sin embargo, debido a que los parámetros teóricos se basan en hipótesis (sección 1) que en la realidad no se llegan a cumplir, estos parámetros raramente se ajustan a los obtenidos experimentalmente. La Tabla 9-1 presenta la comparación de los parámetros teóricos con los ajustados, y la diferencia entre ellos.

Tabla 9-1. Comparación entre parámetros teóricos y experimentales.

Piedra	α (rad)			μ			p (1/s)			$2b$ (m)		
	T	E	%	T	E	%	T	E	%	T	E	%
1	0.242	0.235	-2.9	0.914	0.936	2.4	3.78	3.84	1.6	0.25	0.24	-4.0
2	0.168	0.163	-3.0	0.958	0.973	1.6	3.81	4.05	6.3	0.17	0.16	-5.9
3	0.119	0.154	29.4	0.978	0.978	0.0	3.82	3.61	-5.5	0.12	0.15	25
4	0.310	0.268	-13.5	0.860	0.927	7.8	5.16	5.02	-2.7	0.16	0.14	-12.5

T = Teórico, E = Experimental, % = Diferencia en porcentaje

Se observa que las piedras 1 y 2 presentan diferencias semejantes, las cuales no son mayores al 3%. La piedra 4 presenta una diferencia significativa en sus parámetros; mientras que la piedra 3 es la que presenta la mayor diferencia de todas. Cabe recordar, que las fórmulas de los parámetros teóricos están obtenidas para un bloque paralelepípedo esbelto (ángulo α pequeño), lo cual es el caso de las piedras 1 a 3.

Es por esto que se espera que la piedra 4 tenga una mayor variación en sus parámetros, al no ser de forma paralelepípeda. En forma particular, α disminuye un 13%, lo que significa que los puntos de rotación se encuentran a 1 cm del punto teórico. Así mismo, el coeficiente de restitución aumenta, lo que significa que en cada impacto la piedra disipa menos energía. Finalmente, p es el parámetro que presenta una menor variación.

Las piedras 1 y 2, son las que tienen solo una variación del 3% para α, lo que significa que los puntos de rotación se mueven en total 0.5 cm. Físicamente, esta variación se debe a los pequeños cortes que se realizaron en las esquinas de las bases, con el fin de evitar un desgaste prematuro de las piedras. Por otra parte, el coeficiente de restitución es un 2% mayor que el teórico, mientras que p aumenta un 1.5% para la piedra 1, y un 6 % para la piedra 2. Es del todo interesante que las dos piedras presenten un error semejante para los dos primeros parámetros y no para el tercero. Esto se puede deber a que la piedra 2 presentaba un ligero daño en sus bases, debido a un mal manejo de la misma; por tanto, esto pudo afectar la interacción de la piedra con la base.

Finalmente, la piedra 3 es la que presenta la mayor diversidad entre sus parámetros teóricos y experimentales. En forma particular, el parámetro α es un 30% mayor, que el teórico; esto significa que su base tendría que aumentar 3 cm (25% de incremento), lo que desde un punto de vista físico no es aceptable. En una primera instancia, se pensó que el

centro de gravedad de la piedra no coincidía con su centro geométrico, por alguna heterogeneidad del material. Sin embargo, al medir en el laboratorio el centro de gravedad, se observó que éste difería menos de un centímetro, lo cual es despreciable y no justificaba un incremento del 25% de la base. Finalmente, esta gran variación de α se debe a un comportamiento tridimensional de la piedra, como se explicará en la siguiente subsección.

En forma general podemos decir que, α experimental es más pequeño que el teórico, el coeficiente de restitución es mayor, mientras que p no presenta un patrón definido. Las piedras 1 y 2 son las que presentan la menor variación en sus parámetros debido a que son las piedras que se ajustan más a las hipótesis de la teoría clásica. Por otra parte, debido a su geometría particular, la piedra 4 presenta grandes diferencias. Finalmente, la piedra 3 es un caso particular, al presentar un comportamiento tridimensional (ver subsección siguiente).

Efectos tridimensionales

Una de las hipótesis generales que se hace en el estudio de bloques rígidos, es el del movimiento en el plano. Las dimensiones de los bloques utilizados en los ensayes tienen una relación ancho-espesor 1:3, con el fin de limitar los posibles efectos tridimensionales. En esta subsección, se estudian los registros obtenidos, con el fin de comprobar que dicha hipótesis sea válida.

Para la piedra 1, en 18 de las pruebas 19 pruebas realizadas con movimiento armónico, no se presentan torsiones o deslizamientos de la misma. La Fig. 9-1 presenta los desplazamientos horizontales y los ángulos de rocking y torsión medidos en la piedra 1, cuando se aplica un seno hanning de 3.3 Hz y 10 mm de amplitud. Se observa que no existe un deslizamiento de la piedra; así como también, la piedra no sufre torsiones. Únicamente, para la prueba de seno constante de 3.3 Hz con 6 mm de amplitud (Fig. 9-2), la piedra 1 presenta una ligera rotación alrededor del eje Y (0.05°), el cual es despreciable. Así mismo, se observa un desplazamiento horizontal relativo de la piedra con respecto a la base; sin embargo, este desplazamiento se debe a la rotación de la piedra y no a un deslizamiento, propiamente dicho, de la misma.

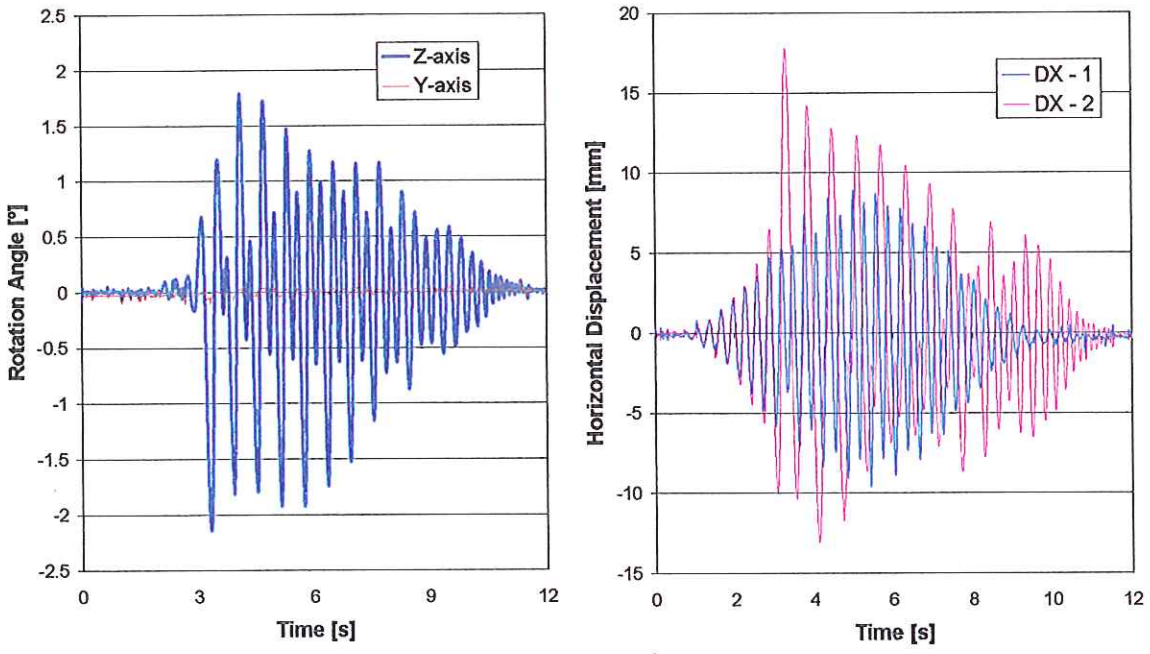


Fig. 9-1. Piedra 1. Seno Hanning 3.3 Hz, 10 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales

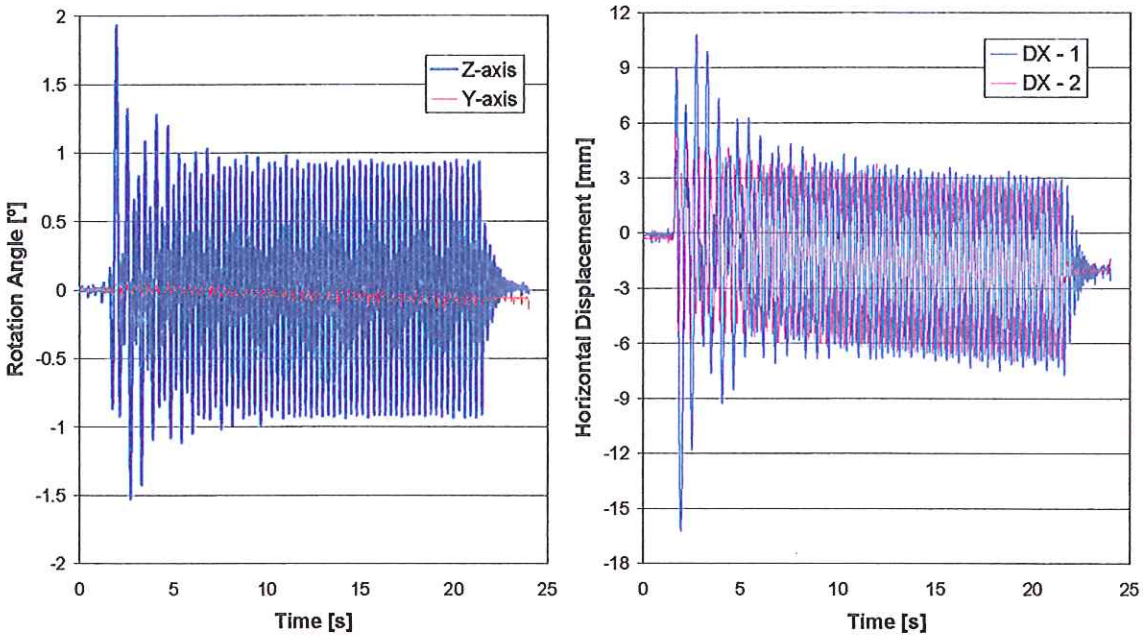


Fig. 9-2. Piedra 1. Seno Constante 3.3 Hz, 6 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales

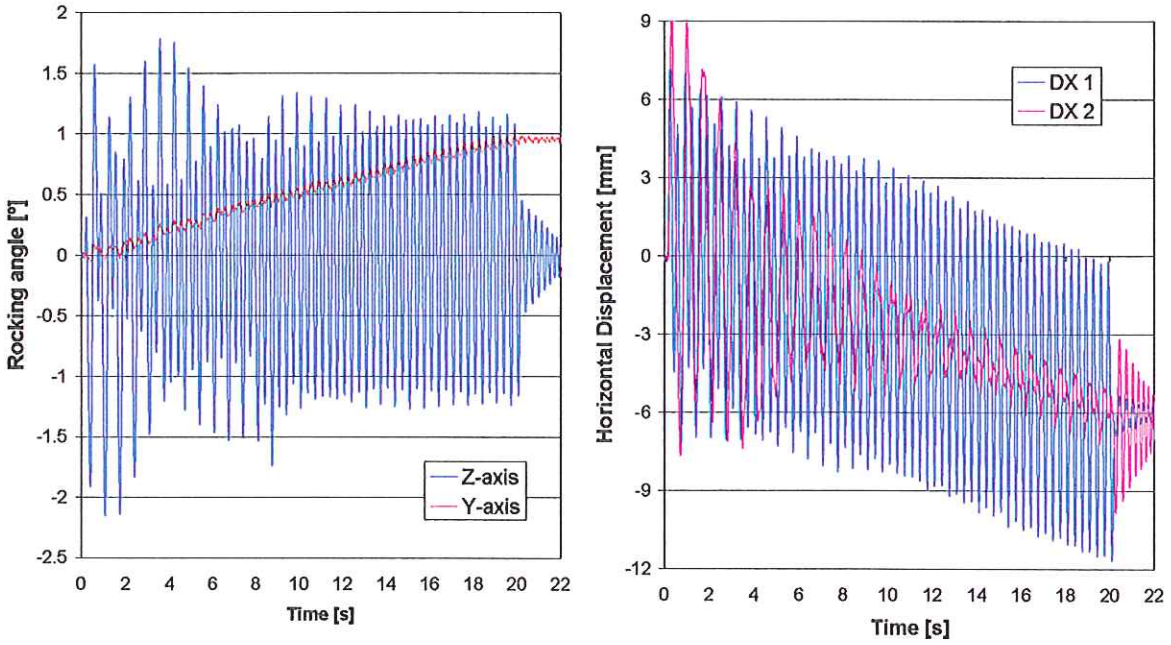


Fig. 9-3. Piedra 2. Seno constante 3.0 Hz, 8 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales

Por otra parte, la piedra 2 presenta una rotación vertical en todos y cada uno de los ensayes realizados, tanto en movimiento libre como forzado (armónico y aleatorio, 90 pruebas en total). Las únicas pruebas que no presentan torsión, son aquellas en las que no hubo rocking; lo que significa que ambos fenómenos se encuentran ligados.

La Fig. 9-3 presenta los ángulos y desplazamientos horizontales medidos, durante la prueba de seno constante de 3 Hz, con 8 mm de amplitud. Se observa que el ángulo máximo de torsión es de casi un grado. Al igual que para la piedra 1, los desplazamientos horizontales residuales son debidos a la torsión y no a un deslizamiento de la piedra.

La rotación que presenta la piedra 2 tiene la misma dirección (antihorario) en todas las pruebas. Esto se debe, seguramente, a que la base de la piedra se encontraba dañada desde un inicio, lo que provocaba que se desplazara siempre en el mismo sentido. Para cargas armónicas, la magnitud del ángulo de torsión es variable y parece ser que esta ligada con la amplitud de la carga y no con su frecuencia, como se observa en la Tabla 9-2. Sin embargo, para las cargas aleatorias, parece ser que no hay alguna relación aparente entre la amplitud o frecuencia de las cargas y el ángulo de torsión (Fig. 9-4).

Por otra parte, la piedra 4 presenta una ligera rotación para las pruebas armónicas (Fig. 9-5). Para las pruebas de movimiento libre, no se presenta dicha rotación; mientras que para las de movimiento aleatorio no se registró este ángulo, ya que el canal que usaba este ángulo, fue utilizado para la lectura del acelerómetro de la mesa. Por tal motivo, no se tiene la lectura de dicho canal. Al igual que para las otras piedras, el desplazamiento horizontal residuo, esta ligado a la torsión y no a un deslizamiento de la piedra. Así mismo, parece ser que los ángulos de torsión dependen de la amplitud de la carga y no de la frecuencia de la misma.

Tabla 9-2. Amplitud de la rotación alrededor del eje *Y* [°]. Piedra 2, movimiento armónico.

Seno Constante (Hz)	Amplitud (mm)						
	03	04	05	06	08	10	12
1.5							0.88
2.0		Cero*	Cero*	Cero*	0.88	0.88	
2.5	Cero*	Cero*	0.52	0.33	0.88		
3.0	0.14	0.30	0.55	0.64	0.95		
3.3	0.14	0.15	0.55	0.74	0.70		
5.0		0.74	0.10	0.64			
Seno Hanning (Hz)							
2.5			Cero*	0.10			
3.0		0.10	0.15	0.30			
3.3		0.12		0.25			
Seno Run Up (Hz)							
0.5 – 5.0					0.66		
Seno Run Down (Hz)							
5.0 – 0.5	0.65						

*Pruebas en las que no hubo Rocking

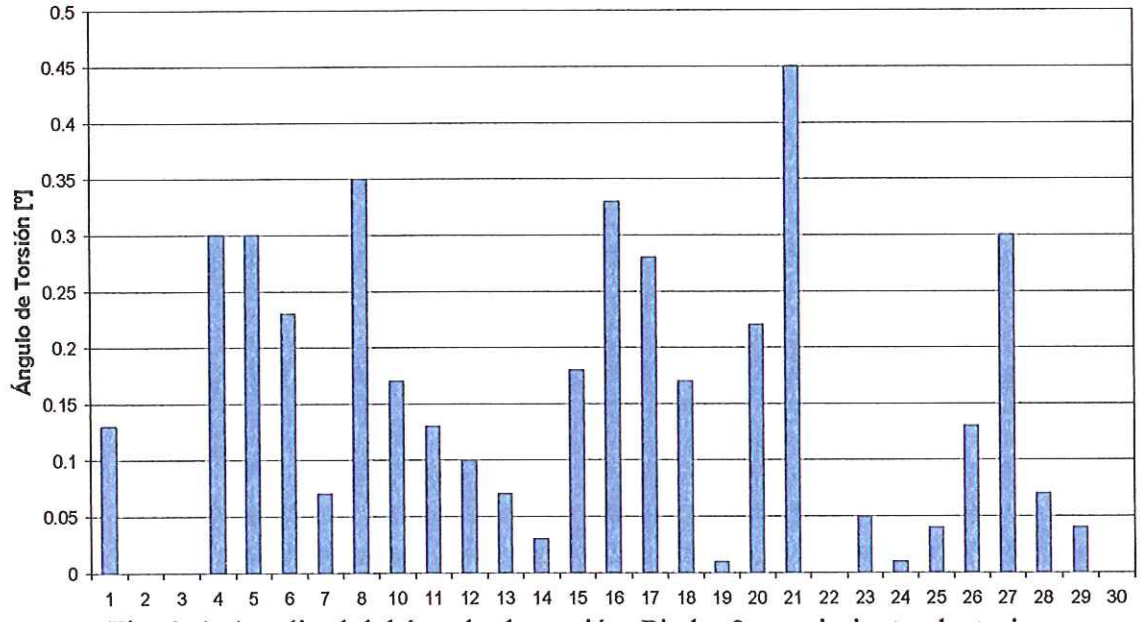


Fig. 9-4. Amplitud del ángulo de torsión. Piedra 2, movimiento aleatorio.

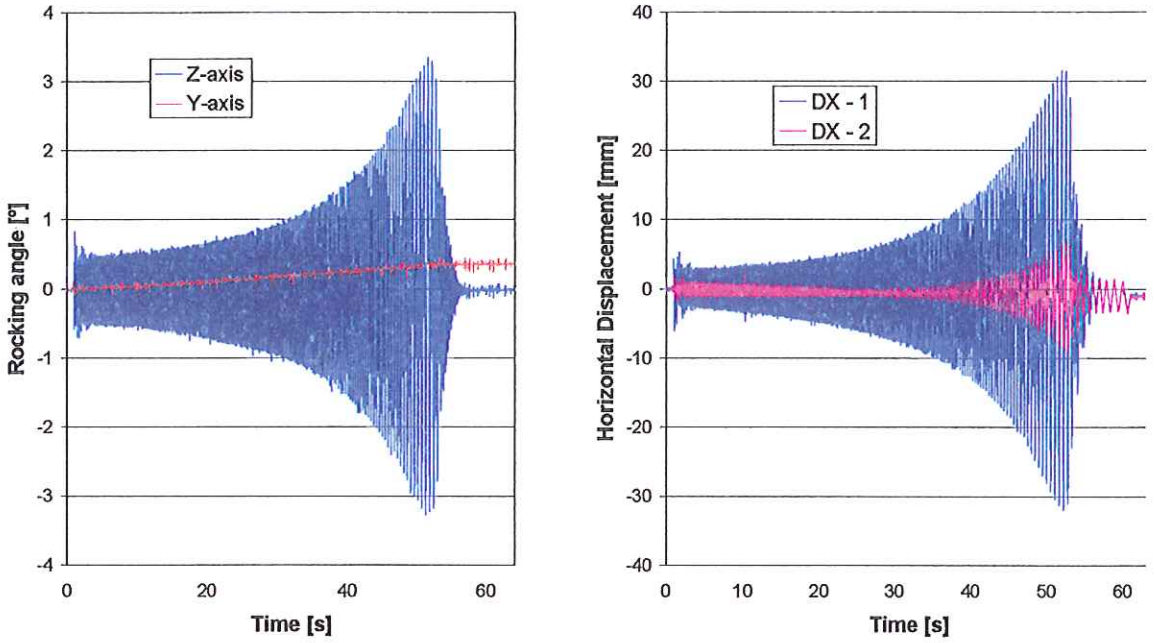


Fig. 9-5. Piedra 4. Seno rundown 7-0.7 Hz 2 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales

Tabla 9-3. Amplitud de la rotación [°]. Piedra 4, movimiento armónico.

Seno Constante (Hz)	Amplitud (mm)			
	2	3	4	5
4.0	---	0.12	0.18	0.12
6.5	---	0.13	0.22	0.38
Run-up 0.7 – 7.0 Hz	0.12	---	0.23	---
Run-down 7 – 0.7 Hz	0.36			

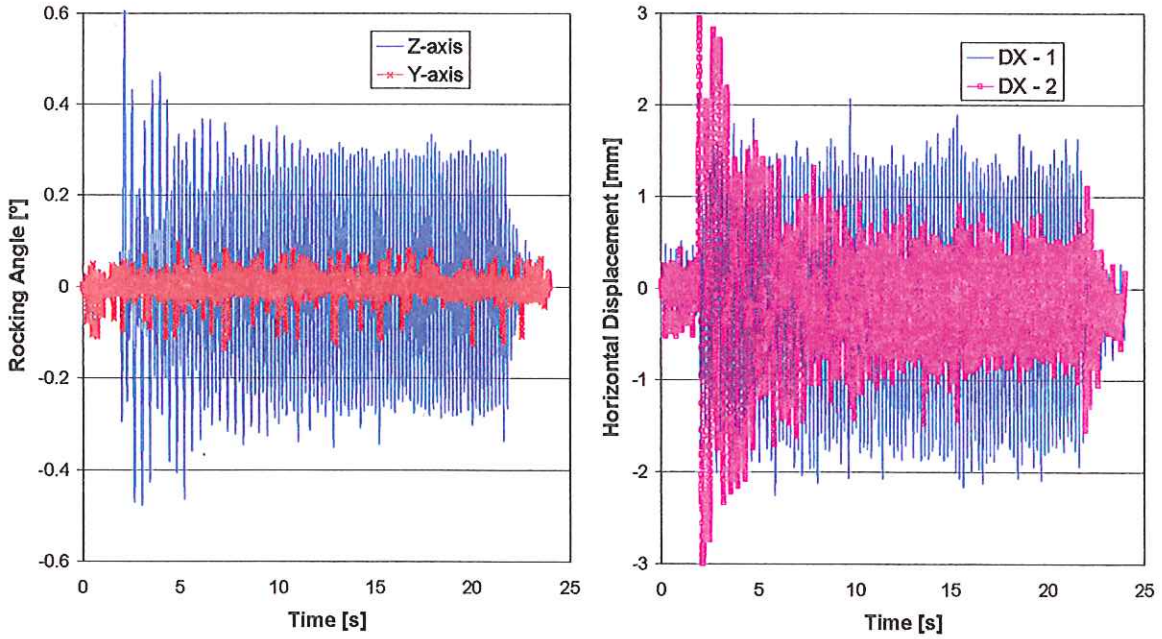


Fig. 9-6. Piedra 3. Seno constante 5.0 Hz, 2 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales

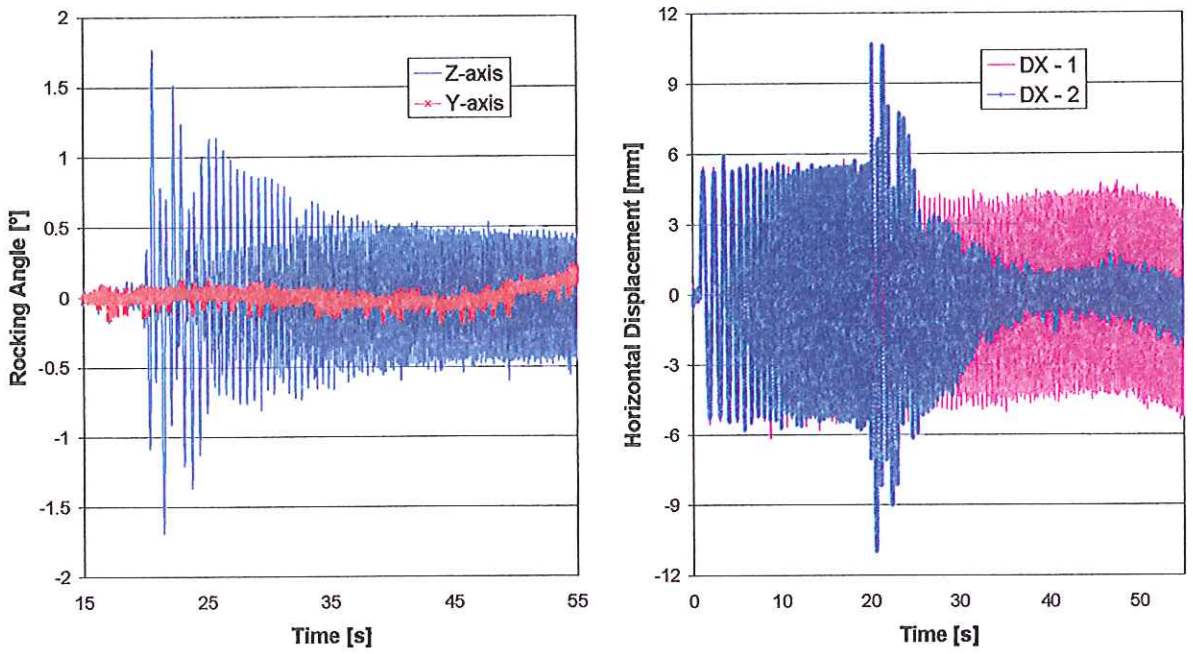


Fig. 9-7. Piedra 3. Seno run-up 0.7-7, Hz 5 mm. a) Ángulo, b) Desplazamientos horizontales

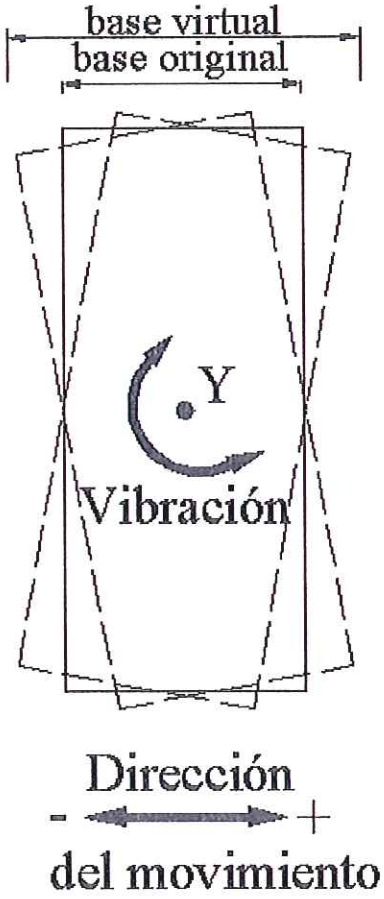


Fig. 9-8. Piedra 3. Vibración alrededor del eje Y.

La piedra tres presenta un comportamiento diferente al de las otras piedras. Ya que, se presenta una vibración de la piedra alrededor de su eje vertical (eje *Y*). La Fig. 9-6 presenta los ángulos y los desplazamientos horizontales medidos, ante un seno constante de 5 Hz con 2 mm de amplitud. Se observa que no existe una rotación, como en las piedras 2 y 4; sino que, durante toda la prueba la piedra tiende a vibrar alrededor del eje *Y*. Así mismo, la Fig. 9-7 muestra la respuesta de la piedra 3, ante un seno run-up de 0.7 a 7.0 Hz con 5 mm de amplitud. Se observa que la piedra tiende a rotar en una sola dirección; sin embargo, durante toda la historia de carga, se presenta la vibración alrededor del eje *Y*. Al igual que en las piedras 2 y 4, los desplazamientos horizontales están asociados a la rotación de la piedra y no a un deslizamiento de la misma.

Esta vibración alrededor del eje vertical, incrementa el valor experimental del parámetro α, debido a que la piedra presenta una base virtual mayor a la real; como se muestra en la Fig. 9-8. Debido a este efecto, el α ajustado de la piedra 3 es mayor que el teórico, lo que conduce a tener una base equivalente 3 cm mayor a la real (Tabla 9-1).

Finalmente, podemos decir que la piedra 1 es la única que tiene un comportamiento perfectamente plano; mientras que las piedras 2 y 4, presentan una ligera rotación alrededor del eje vertical. Sin embargo, este efecto se puede despreciar y analizar las piedras con un modelo 2D. Así mismo, la piedra 3 es la que presenta los mayores efectos tridimensionales, pues presenta una vibración alrededor del eje vertical. Ninguna de las cuatro piedras presenta deslizamiento.

Cabe recordar que la relación espesor-profundidad se mantuvo constante para las cuatro piedras, con un valor de 3, con el fin de minimizar los efectos tridimensionales. Sin embargo, parece ser que esta relación no es suficiente para evitar un comportamiento tridimensional de los bloques. Así, se observa que la piedra 3 es la que presenta la menor inercia rotacional (J_0) con respecto al eje *Y* (Tabla 9-4). Haciendo la relación entre inercias (I_0/J_0), se observa la gran diferencia que existe entre las cuatro piedras. Esta relación puede ser un indicativo geométrico para saber si un bloque es propenso a un movimiento tridimensional o a uno bidimensional. Lo cual, puede ser objeto de estudio para un trabajo posterior.

Tabla 9-4. Características geométricas de las piedras.

Piedra	M (Kg)	$2b$ (m)	$2h$ (m)	$2d$ (m)	I_0 (Kg-m^2)	J_0 (Kg-m^2)	I_0/J_0
1	506	0.25	1.00	0.754	179	26.6	6.7
2	228	0.17	1.00	0.502	78	5.3	14.7
3	122	0.12	1.00	0.375	42.8	1.6	26.8
4	245	0.16	0.457	0.750	26.2	12.0	2.2

Movimiento libre

La Fig. 9-9 presenta la aceleración, velocidad y desplazamiento horizontal de la parte superior de la piedra 2. Se observa que el desplazamiento de la parte superior del bloque es de forma parabólica, el cual va disminuyendo conforme aumenta el número de impactos. La velocidad del bloque es lineal y cambia de signo con cada impacto de la piedra; así mismo, la velocidad es cero cuando se tiene el desplazamiento máximo y es máxima, cuando el desplazamiento es cero. La aceleración del bloque es, prácticamente, constante y cambia de signo, en forma impulsiva, con cada impacto del bloque. Es por demás interesante, que la aceleración se mantiene constante, aún en los ciclos finales del rocking. Debido a que la aceleración es constante, lo que regula la amplitud de la velocidad, y desplazamiento, es el tiempo que ocurre entre un impacto y otro (semi-periodo del sistema).

La relación entre la aceleración y el movimiento de rocking, para la piedra 1 durante un ciclo, se puede observar en las Fig. 9-10 a Fig. 9-12. Cabe aclarar que, la piedra 1 fue la única piedra que se instrumentó con acelerómetros triaxiales, colocado en una de las esquinas de la piedra. La dirección E-W es la dirección del rocking, mientras la N-S es la dirección fuera del plano del movimiento.

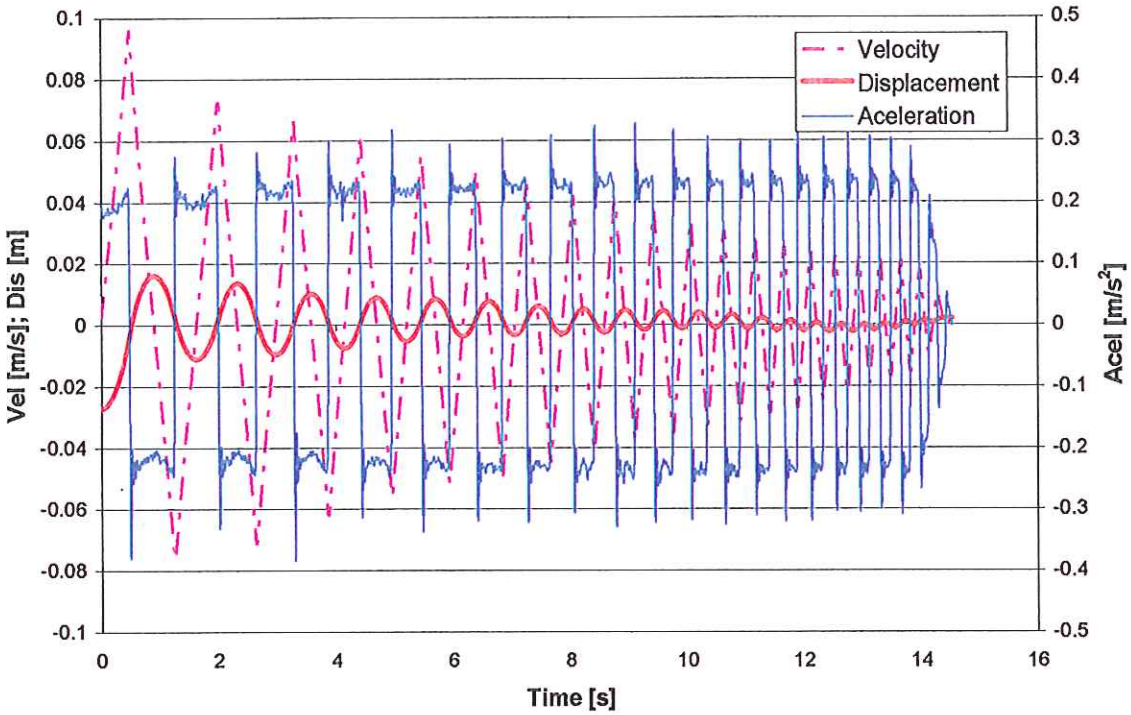


Fig. 9-9. Aceleración, velocidad y desplazamiento horizontal de la piedra 2.

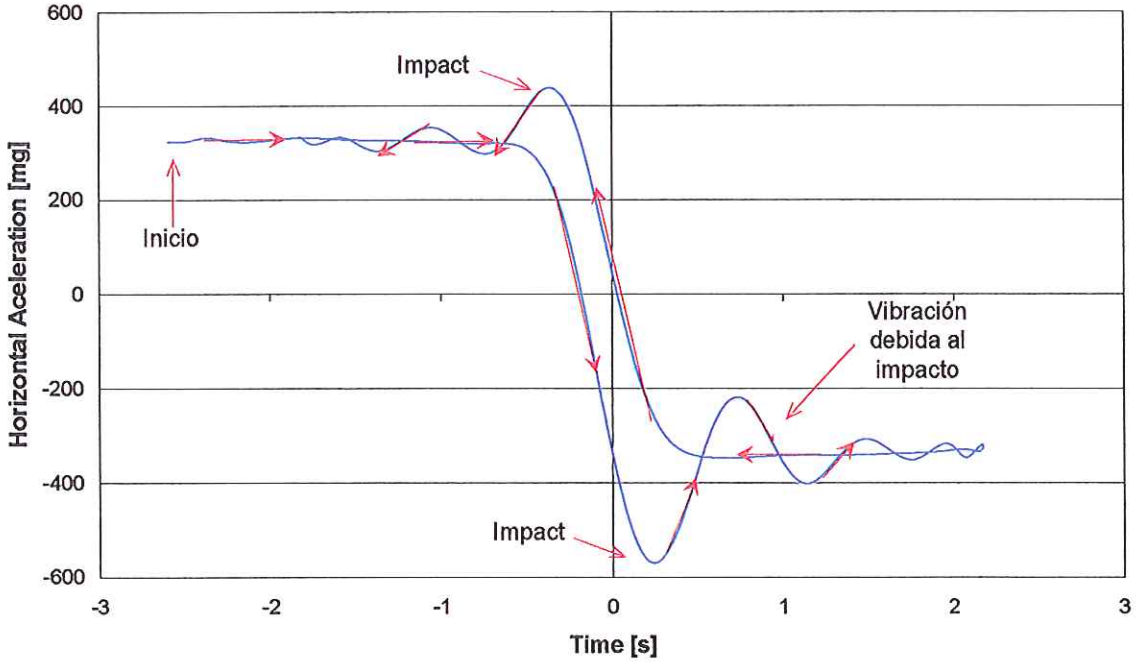


Fig. 9-10. Aceleración E-W – rocking, piedra 1.

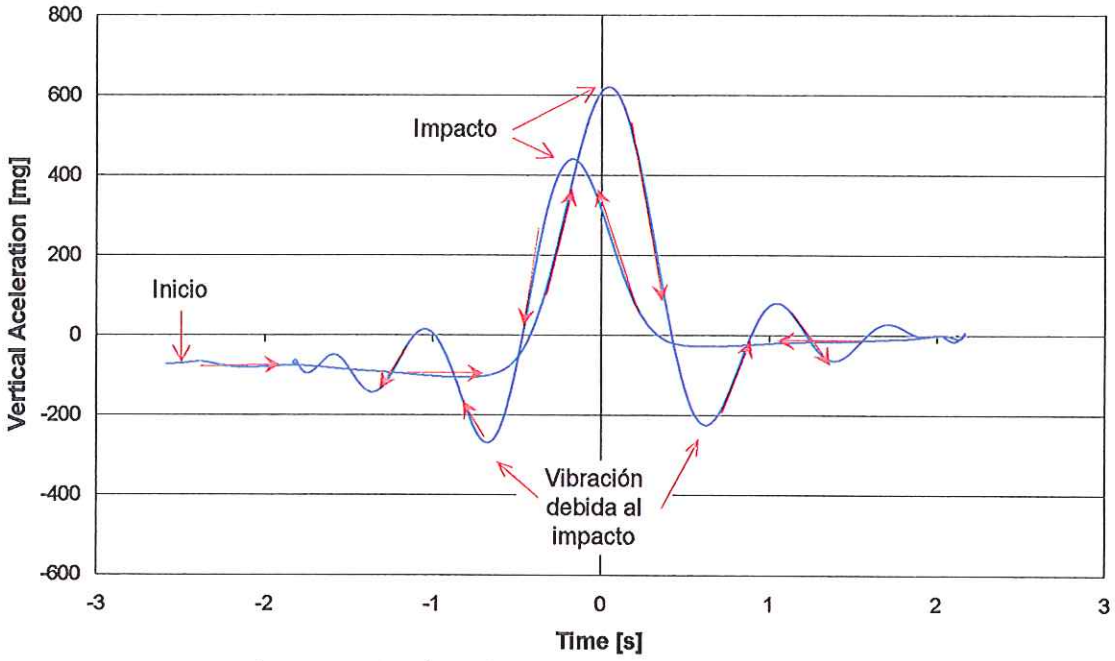


Fig. 9-11. Aceleración vertical – rocking, piedra 1.

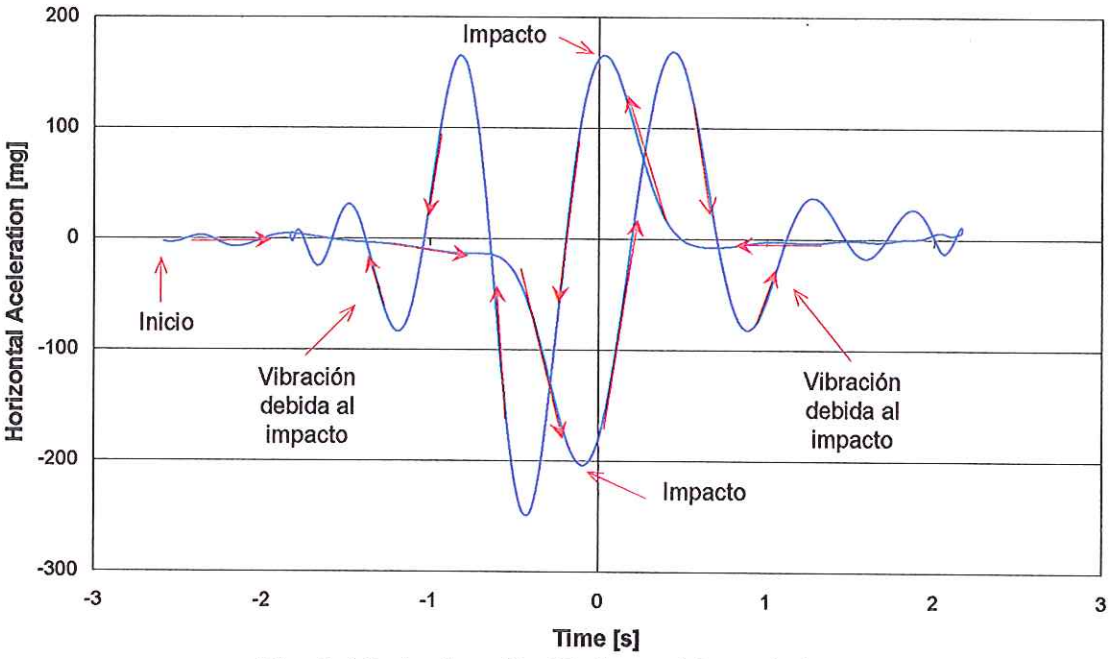


Fig. 9-12. Aceleración N-S – rocking, piedra 1.

Cuando inicia el movimiento libre (con un ángulo inicial), se tiene una aceleración E-W inicial diferente a cero; mientras que la aceleración N-S es cero. Cuando el lado en que se encuentra el acelerómetro, sea el punto de rotación, la aceleración vertical será cero. En caso contrario, será diferente de cero. La aceleración E-W inicial se mantiene constante hasta que se produce el impacto, el cual produce una aceleración impulsiva en las tres direcciones. Estos impulsos provocan una perturbación en las aceleraciones. Conforme crece el ángulo de rocking, la aceleración E-W se mantiene prácticamente constante, mientras que en las otras dos direcciones la aceleración tenderá a cero.

La aceleración impulsiva debida al impacto es prácticamente de la misma magnitud en las direcciones E-W y vertical; mientras que para la dirección N-S es del orden del 50%. Esta aceleración impulsiva en la dirección fuera del plano, puede ser la responsable de que se presenten rotaciones de las piedras alrededor del eje vertical.

Movimiento armónico

La respuesta de un bloque rígido ante una excitación armónica dependerá fundamentalmente, de la frecuencia y amplitud de la excitación. Por ejemplo, la Tabla 9-5 muestra las frecuencias y amplitudes para los cuales la piedra 2 presenta movimiento de rocking; así como también, los ángulos máximos medidos. Se observa una clara relación entre frecuencias y amplitudes en las cuales el bloque presenta o no presenta rocking. De igual manera, se observa que conforme aumenta la frecuencia de la carga, disminuye el ángulo de rocking. Esto lleva a deducir, que existirá también un límite superior, para el cual con ciertas frecuencias y amplitudes, el bloque no sufrirá rocking. Por su parte, los pocos ensayes armónicos realizados para la piedra 1, 3 y 4, corroboran lo observado anteriormente (Tabla 9-6).

Tabla 9-5. Ángulos máximos de rocking [°], movimiento armónico. Piedra 2.

Seno Constante (Hz)	Amplitud (mm)						
	03	04	05	06	08	10	12
0.5	No-R						No-R
1.0							No-R
1.5							6.08
2.0		No-R	No-R	No-R	3.04	3.93	
2.5	No-R	No-R	2.27	2.33	2.63		
3.0	1.36	1.49	1.85	1.87	2.15		
3.3	1.35	1.49	1.57	1.42	2.03		
5.0		0.95	1.14	1.23			
Seno Hanning (Hz)							
2.5			No-R	2.66			
3.0		1.76	1.67	1.81			
3.3		1.27		1.53			

No-R = No Rocking

Tabla 9-6. Ángulos máximos de rocking [°], movimiento armónico. Piedras 1, 3 y 4.

Seno Constante (Hz)	Amplitud (mm)				
	2	3	4	5	6
3.3 (P1)	No-R	1.60			1.93
5.0 (P3)	0.59	0.66	0.75	0.91	
4.0 (P4)	---	2.05	2.22	2.50	
6.5 (P4)	---	1.01	1.22	1.57	

La Fig. 9-13 muestra la gráfica aceleración horizontal – ángulo de rocking, para la piedra 2 con un seno constante de 2.5 Hz y amplitudes de 4, 5 y 8 mm. Se aprecia que cuando la piedra sufre rocking, la aceleración horizontal es constante, independientemente de la amplitud de la carga. Así mismo, la Fig. 9-14 presenta la misma gráfica que la anterior, pero manteniendo constante la amplitud de 5 mm, y variando la frecuencia de la carga en 2.0, 2.5 y 3.3 Hz. Aquí se aprecia un comportamiento similar a la gráfica anterior. Es decir, se tiene una aceleración horizontal máxima constante, que no depende de la frecuencia de la carga. Esto

lleva a pensar, que la aceleración horizontal máxima, que sufrirá el bloque depende de sus características geométricas y no de la frecuencia o amplitud de la carga.

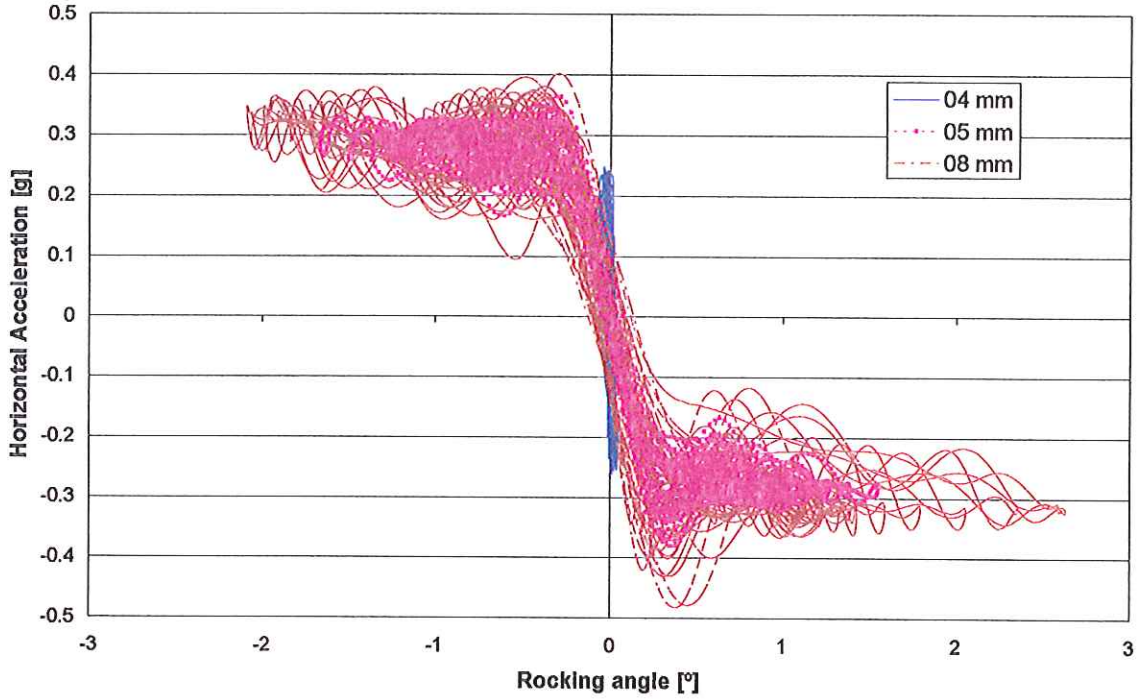


Fig. 9-13. Piedra 2, seno constante 2.5 Hz.

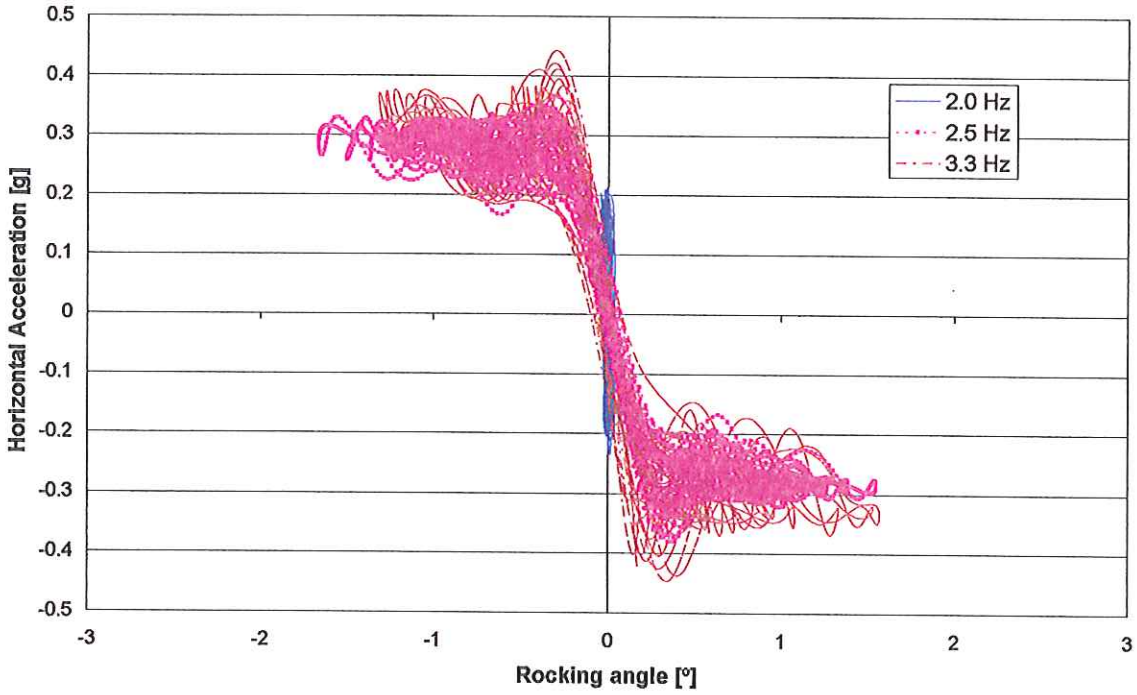


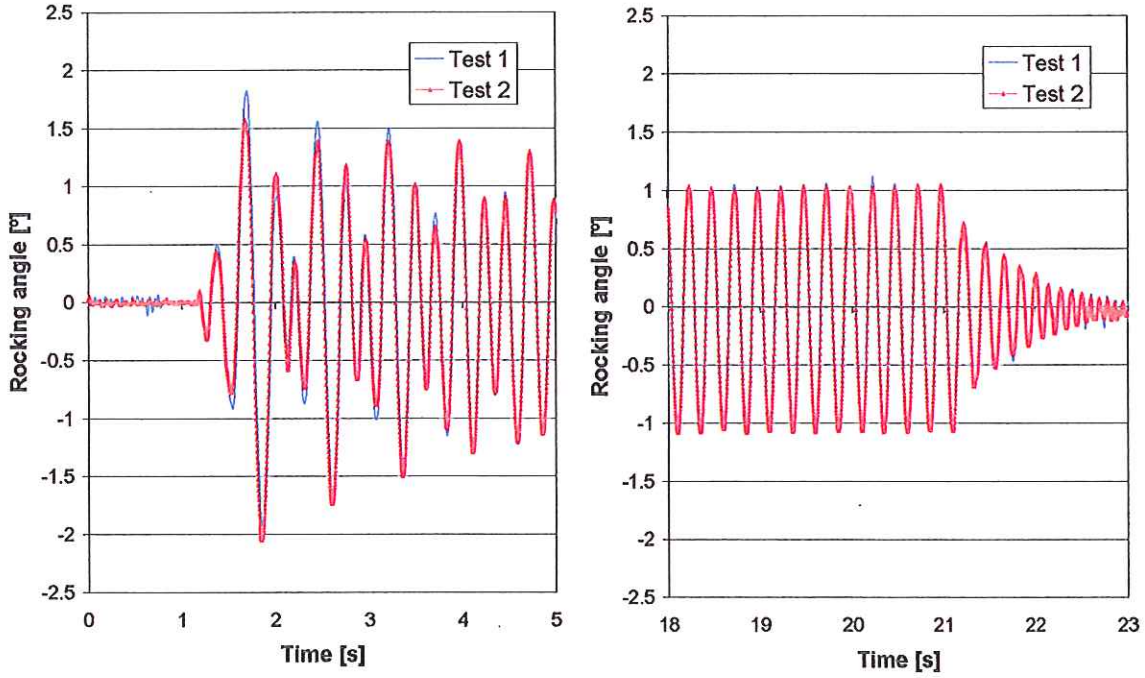
Fig. 9-14. Piedra 2, seno constante 5 mm de amplitud.

Se repitieron varias pruebas de movimiento armónico, con las diferentes piedras, con el fin de estudiar la repetibilidad del fenómeno. La piedra 1 se hizo el análisis con un seno hanning de 3.3 Hz con 7 mm, la piedra 2 con un seno constante de 3.3 Hz y 6 mm. Para las

piedras 3 y 4, por su parte, se repitieron dos veces todas las pruebas de seno constante. Todas estas pruebas muestran que existe repetibilidad de la respuesta, para una carga armónica.

La Fig. 9-15 muestra el ángulo de rocking para las dos pruebas realizadas con la piedra 4, con un seno constante de 4 Hz y 3 mm de amplitud. Se observa que la respuesta es, prácticamente, la misma. La parte transitoria presenta una ligera diferencia en el ángulo máximo de rocking, la cual es del orden del 5%, lo cual se puede considerar como despreciable. Por otra parte, en la parte estacionaria y vibración libre, las respuestas son idénticas. Es por demás interesante, que incluso los últimos ciclos del movimiento libre, la piedra presente el mismo movimiento en las dos pruebas.

La función de transferencia, del ángulo de rocking de la prueba 1 con respecto a la 2, al ser igual a uno muestra que ambas señales son iguales (Fig. 9-16). Los espectros de Fourier del ángulo de rocking, presentan cuatro picos. Los dos picos por arriba de los 10 Hz están asociados con el ruido mecánico producido por la mesa. El pico de 4 Hz esta asociado con la frecuencia de la carga; mientras que el pico de 2.6 Hz esta asociado con la frecuencia de la parte transitoria.



a) Parte Transitoria b) Parte Estacionaria

Fig. 9-15. Piedra 4, seno constante 4 Hz, 3 mm de amplitud. Ángulo de Rocking.

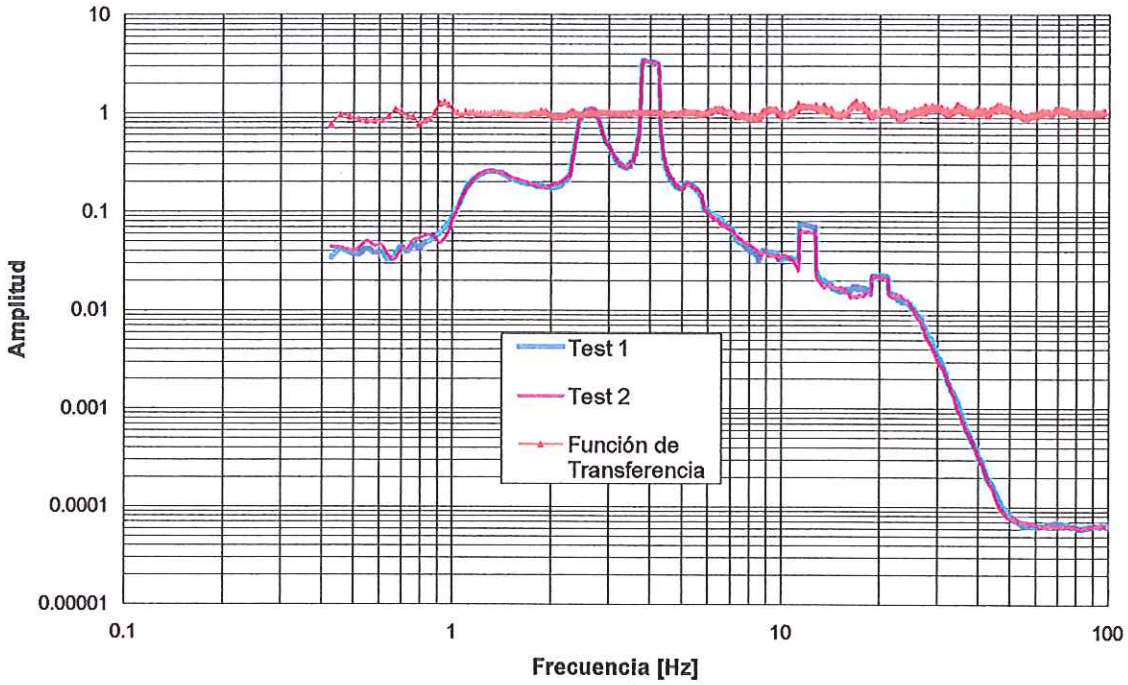


Fig. 9-16. Piedra 4, seno constante 4 Hz, 3 mm de amplitud. Espectros de Fourier.

Movimiento aleatorio

En forma similar que para el movimiento armónico, en el movimiento aleatorio los bloques rígidos desarrollan una aceleración máxima horizontal, que no puede ser sobrepasada y que es independiente del tipo de carga impuesta. La Fig. 9-17 presenta la relación aceleración horizontal – ángulo de rocking para la piedra 2, sometida al sismo 20 con factores de amplificación de 0.6, 1.0 y 1.2. Se observa que la respuesta de la piedra es independiente del factor de carga. Por otra parte, la Fig. 9-18 presenta la misma relación para la piedra 3, con tres sismos diferentes: sismo 13 con un factor de amplificación de 0.4, sismo 03 con 0.6 y el sismo 28 con 0.8. Se observa el mismo comportamiento para los tres sismos. Estos resultados indican que la velocidad a la que estará sometido el bloque rígido es independiente de la carga.

Se realizó, también, un estudio sobre la repetibilidad de las pruebas ante movimientos aleatorios. Las Fig. 9-19 a Fig. 9-21 presentan las curvas experimentales medidas para la piedra 2, cuando se repite el ensayo con el sismo 20, con un factor de aceleración de 1.1, 1.2 y 1.3, respectivamente. Con un factor de aceleración de 1.1 (Fig. 9-19), se obtiene que en un ensayo el bloque colapsa, pero repitiendo el mismo experimento, se obtiene un ángulo máximo de 6.8°, muy por debajo del ángulo crítico (9.3°). Es por demás interesante que, durante los primeros seis segundos la respuesta es exactamente la misma; a partir del cual, se presenta una diferencia considerable en la respuesta de la piedra.

Con un factor de 1.2 (Fig. 9-20), se obtiene una situación similar. Mientras que con un ensaye la piedra colapsa, con la otra prueba se mantiene en pie. El ángulo máximo de rocking para este caso es de 6.3°, es decir menor que para un factor de 1.1. Cabe hacer notar que, con un factor de 1.3 (Fig. 9-21), la piedra dos no colapsa para ninguna de las tres pruebas realizadas. Durante la primera mitad de la prueba, las tres respuestas son muy parecidas; sin embargo, en la parte final del acelerograma, la respuesta varía en los tres casos. Esta variación se observa claramente en la vibración libre, donde las tres respuestas son completamente diferentes.

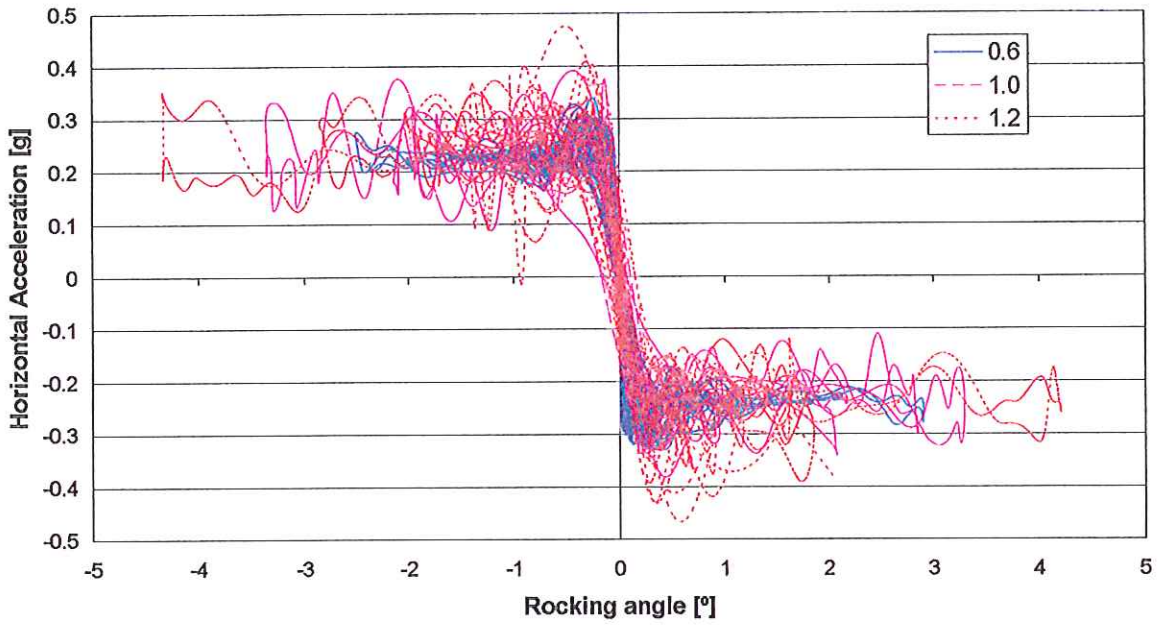


Fig. 9-17. Piedra 2, Sismo 20.

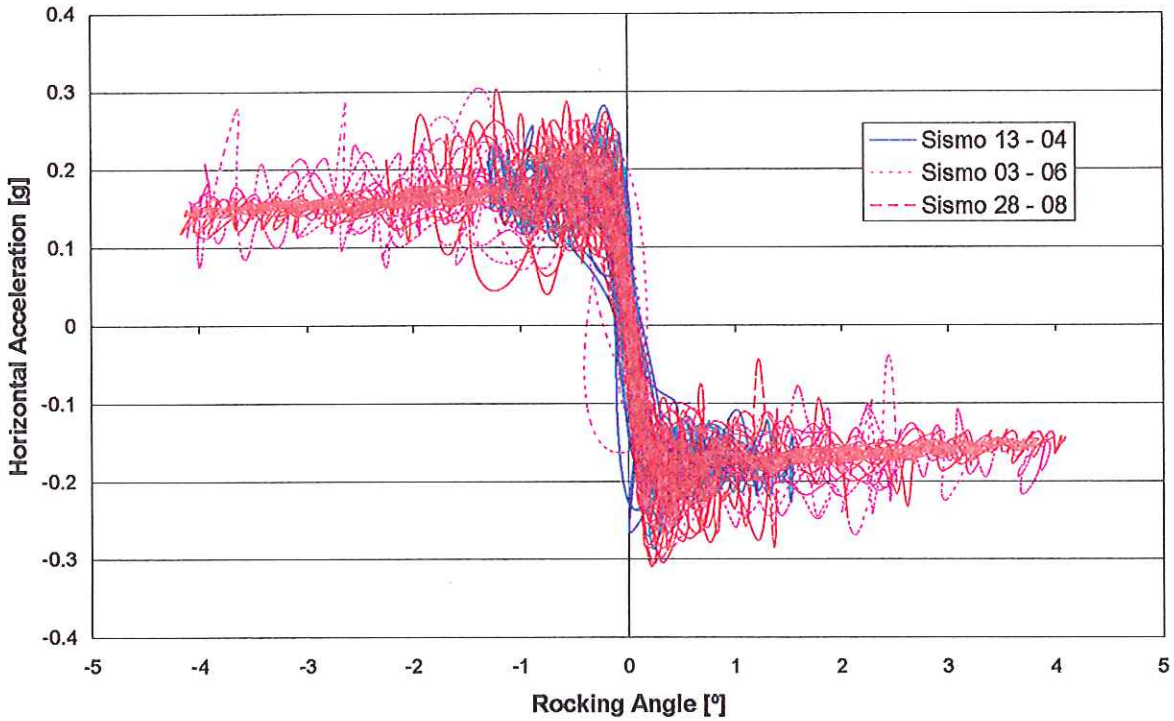


Fig. 9-18. Piedra 3, varios sismos.

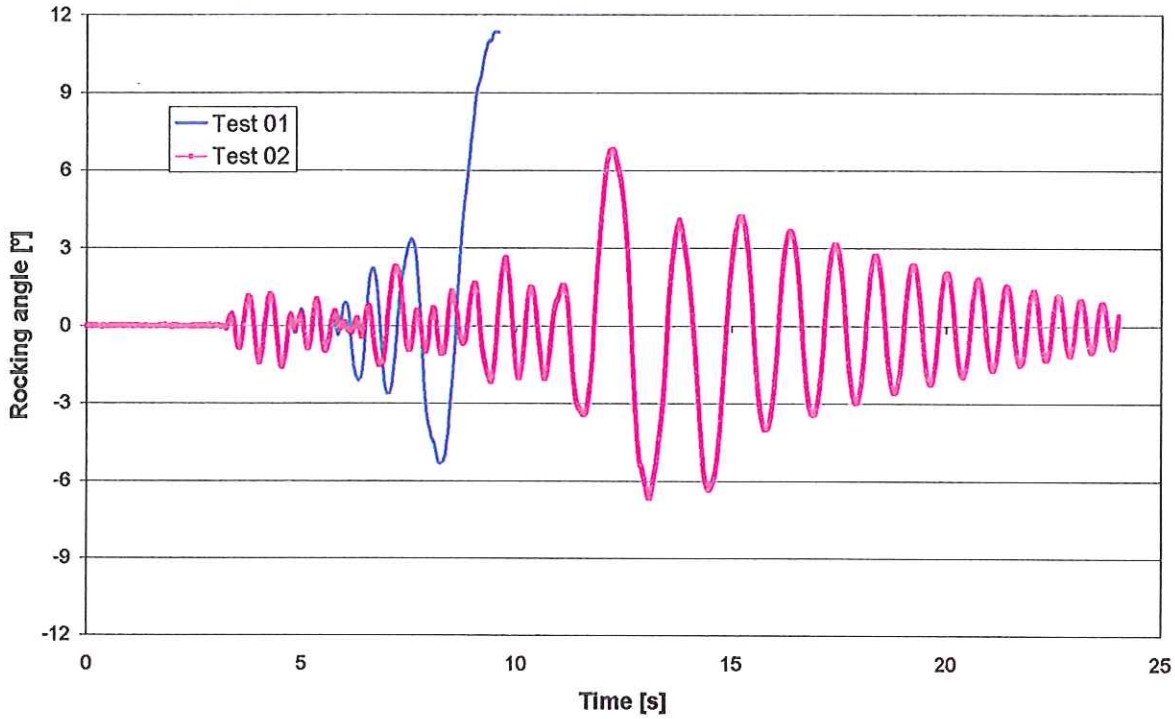


Fig. 9-19. Sismo 20, factor de aceleración de 1.1, ángulo de rocking.

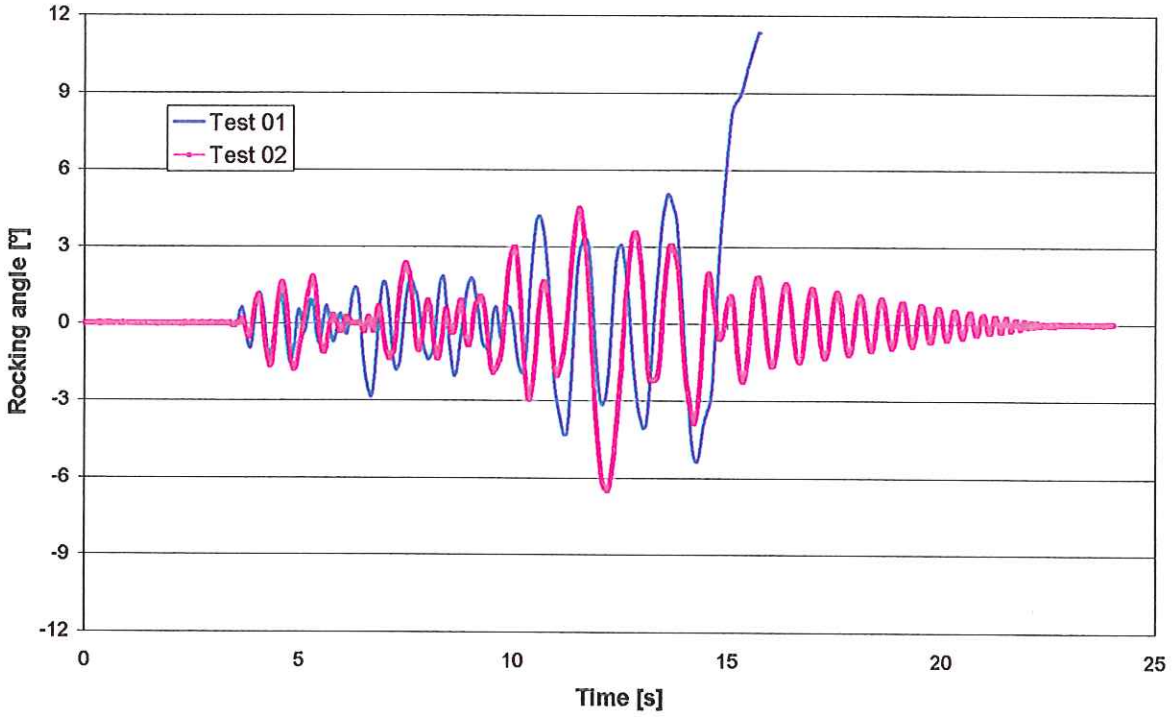


Fig. 9-20. Sismo 20, factor de aceleración de 1.2, ángulo de rocking.

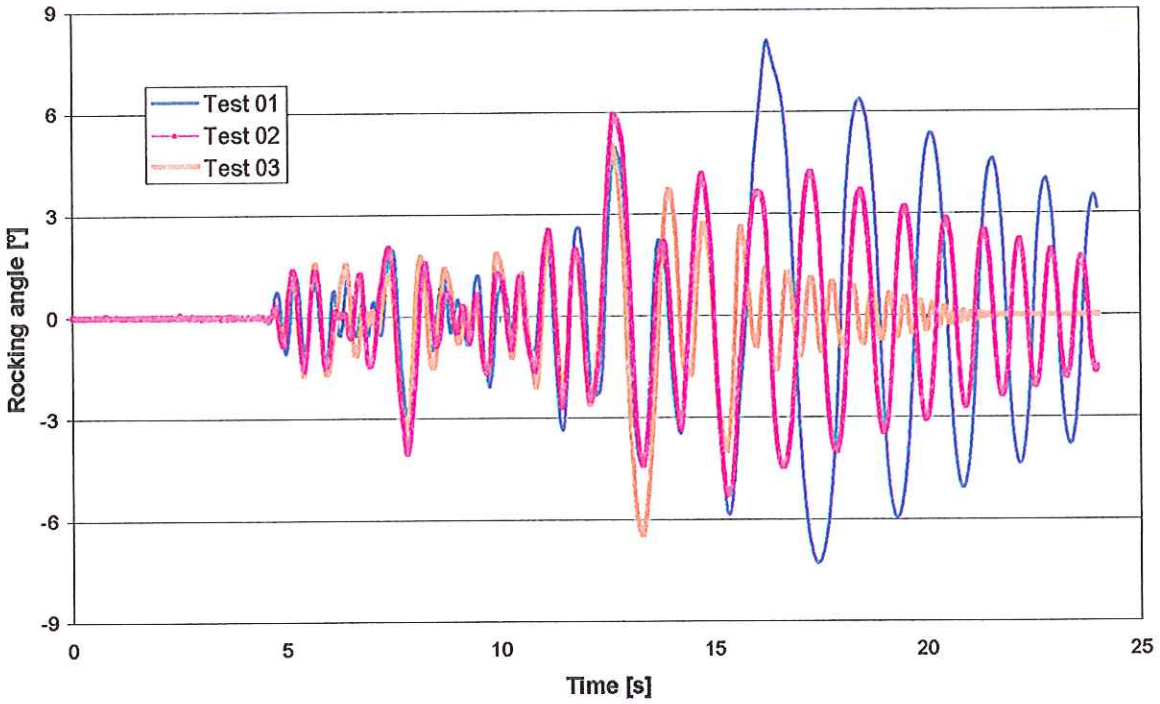


Fig. 9-21. Sismo 20, factor de aceleración de 1.3, ángulo de rocking.

Para entender la sensibilidad de los bloques ante una variación en las cargas, se presenta el comportamiento de la piedra 4, ante el sismo 09. Con este sismo se llevó al colapso a la piedra; por tanto, se incrementó el factor de carga de 1.0 a 1.4, en que se produjo el colapso. Cabe hacer notar que, por un error en el archivo de entrada, el sismo 09 con los factores de carga 1.3 y 1.4 presentan un paso de tiempo diferente a la del sismo 09 con factores 1.0, 1.1 y 1.2. Este paso de tiempo es menor, lo que provoca que el contenido de frecuencias sea diferente (Fig. 9-22). Por tal motivo, los resultados con los factores 1.0 a 1.2 no se pueden comparar con los obtenidos con los factores 1.3 y 1.4. A pesar de esto, se pueden hacer diversos comentarios sobre el comportamiento de la piedra 4.

La Fig. 9-23 presenta la respuesta experimental para los factores 1.0 a 1.2. Se observa que la respuesta con 1.0 y 1.1, es prácticamente la misma; teniendo ángulos de rocking del orden de los 5°. Mientras que con un factor de 1.2, se presenta una respuesta completamente diferente; principalmente en la parte intermedia del acelerograma. La respuesta de la piedra se incrementa considerablemente, sobrepasando incluso el ángulo crítico. Es interesante que, la piedra presente una incipiente inestabilidad, una vez que ha sobrepasado el ángulo crítico; sin embargo, por las características cíclicas de la carga, la piedra regresa a su espacio de estabilidad. Es por demás interesante que, la respuesta numérica logra reproducir estas dos condiciones (Fig. 9-24 y Fig. 9-25). Es decir, que un pequeño incremento en las aceleraciones es capaz de producir una respuesta diferente de la piedra.

Con los factores de aceleración de 1.3 y 1.4, ambas respuestas se muestran significativamente diferentes (Fig. 9-26). Con el factor de carga 1.4 la piedra colapsa. Con esta prueba, se observa el proceso de colapso. Una vez sobrepasado el ángulo crítico, la piedra pasa por un breve estado de transición, antes de entrar en forma definitiva en la inestabilidad. Es en este momento, en que si la carga aplicada al bloque es en sentido contrario al movimiento de la misma, y con la magnitud suficiente, entonces podrá regresar a la estabilidad. Una vez sobrepasado este punto, la piedra entra en la inestabilidad total, con lo que se produce el colapso. Por su parte, la respuesta numérica es capaz de reproducir satisfactoriamente ambos tipos de comportamiento (Fig. 9-27 y Fig. 9-28).

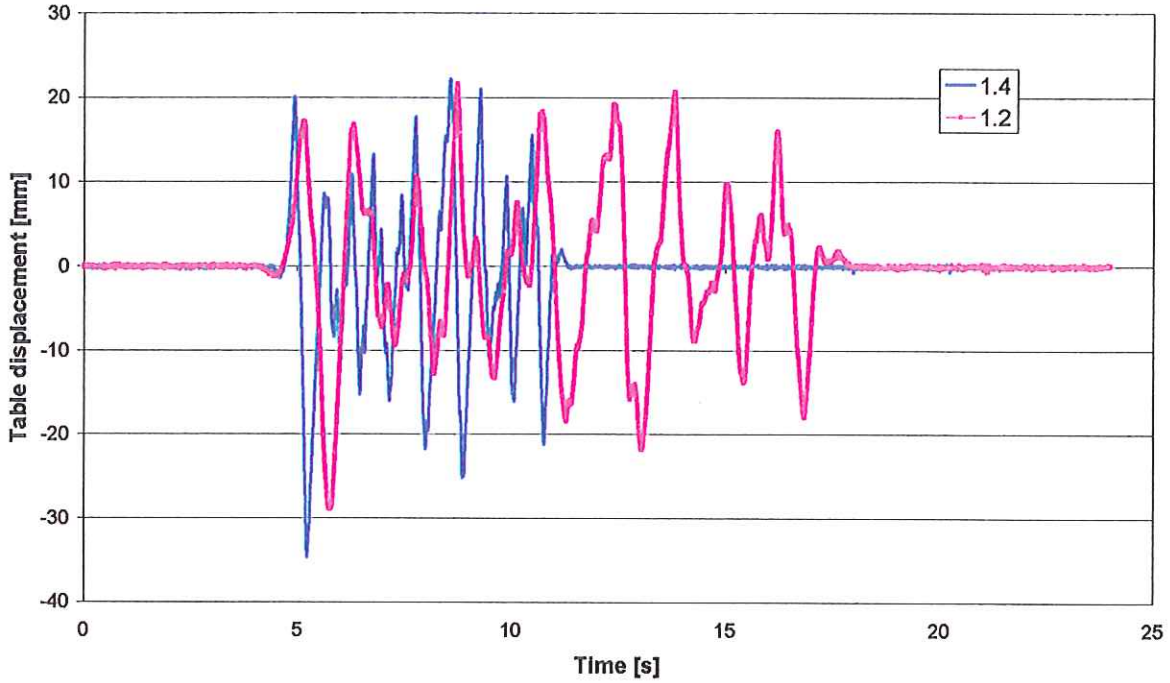


Fig. 9-22. Sismo 09, movimiento de la mesa.

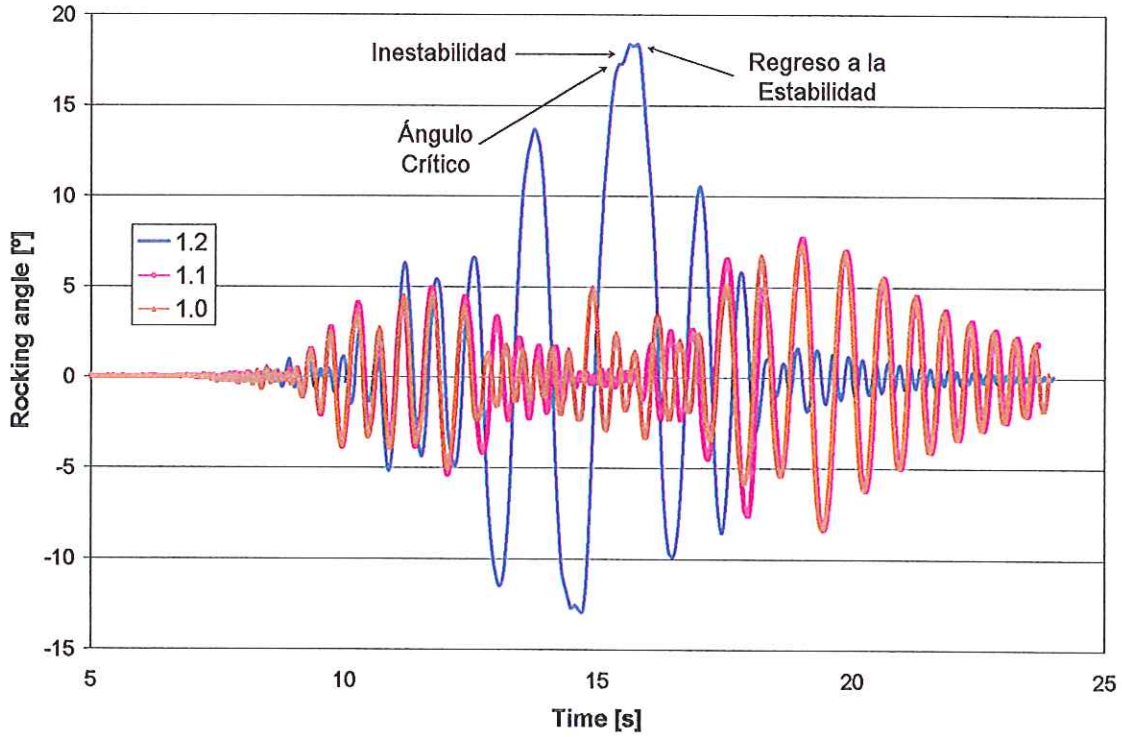


Fig. 9-23. Sismo 09, ángulo de rocking medido.

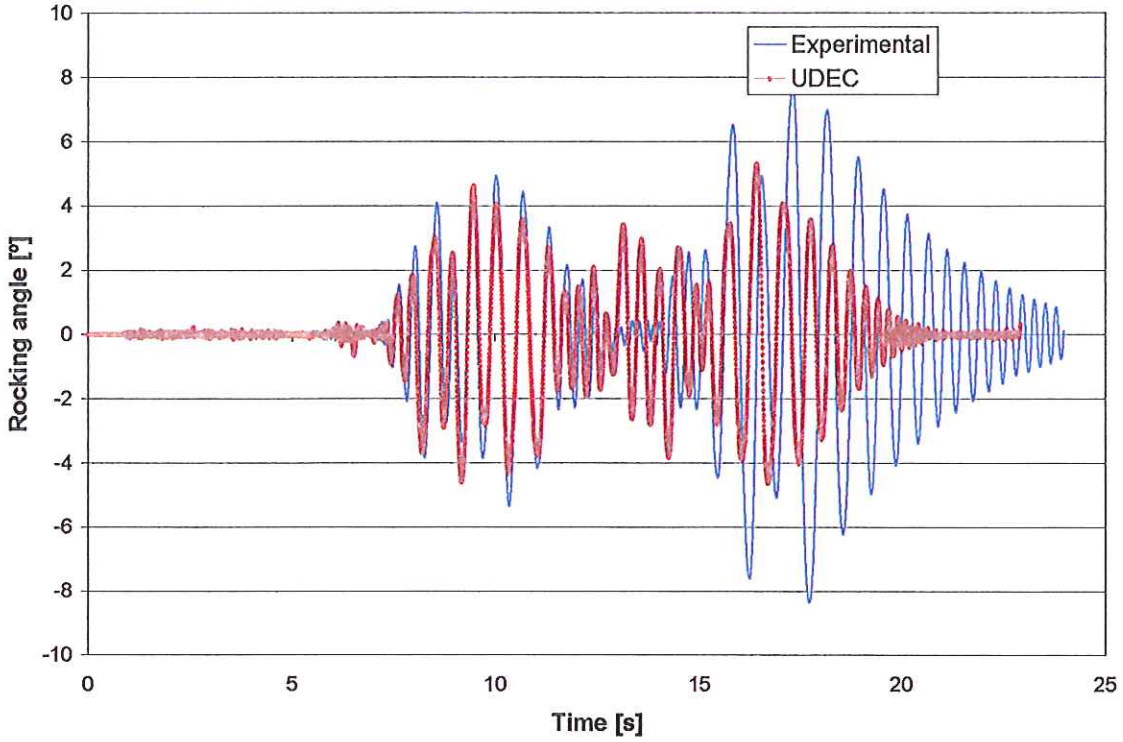


Fig. 9-24. Sismo 09 con un factor de aceleración de 1.1.

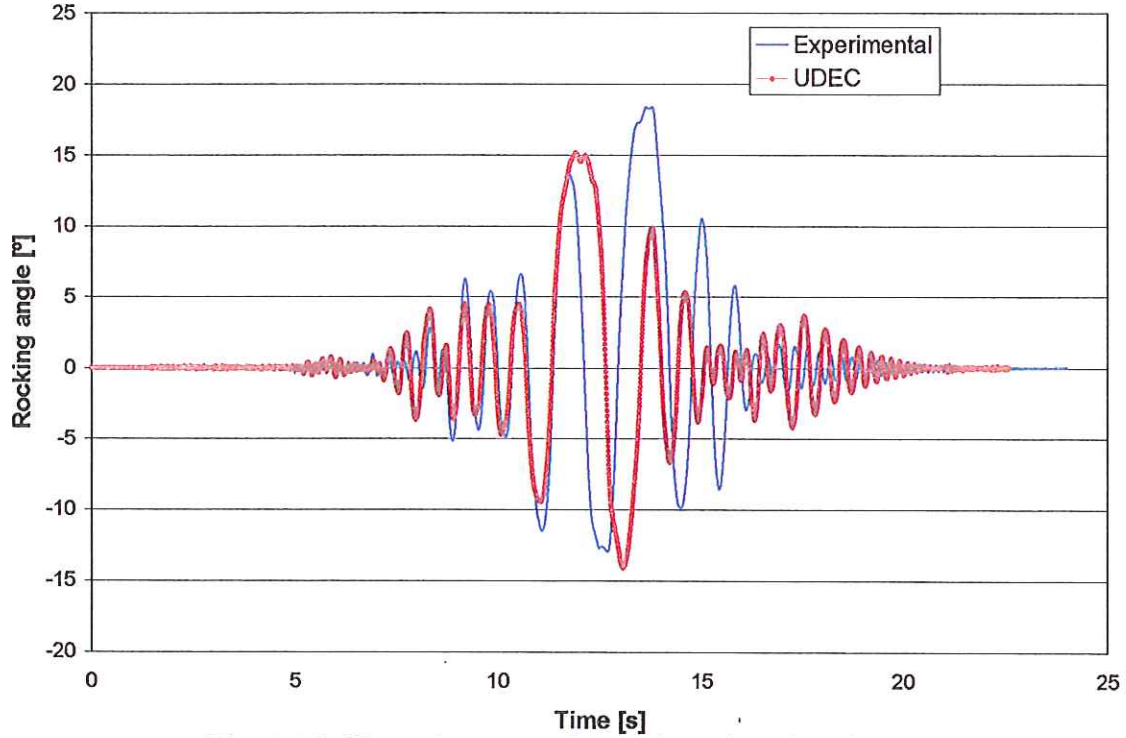


Fig. 9-25. Sismo 09 con un factor de aceleración de 1.2.

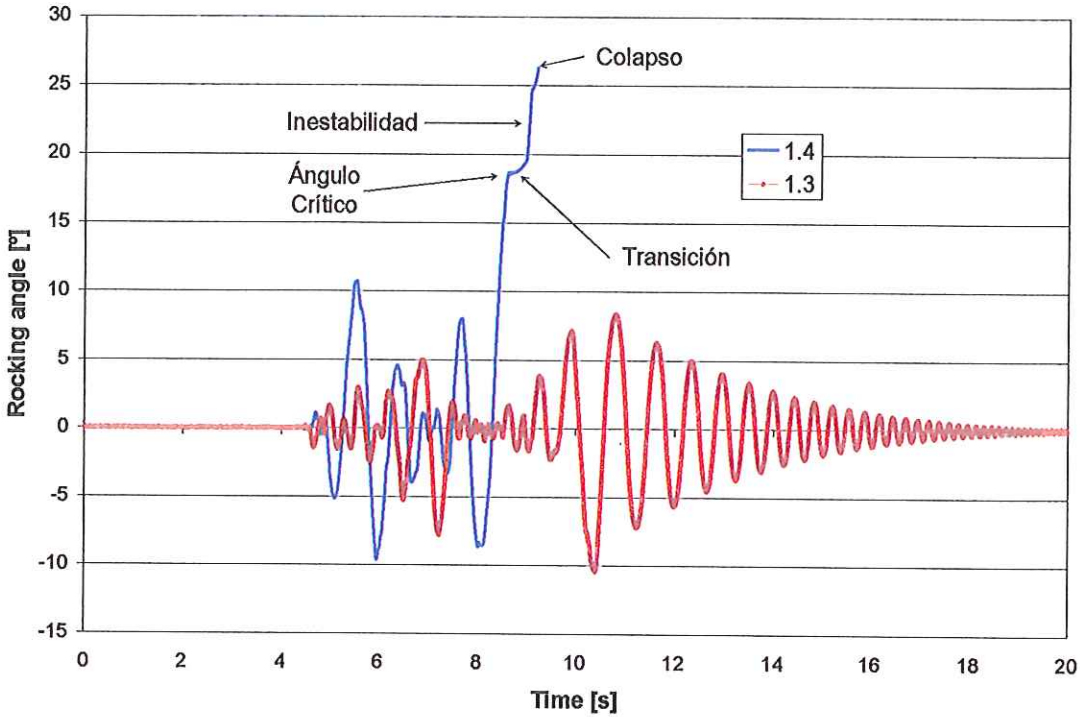


Fig. 9-26. Sismo 09, ángulo de rocking medido.

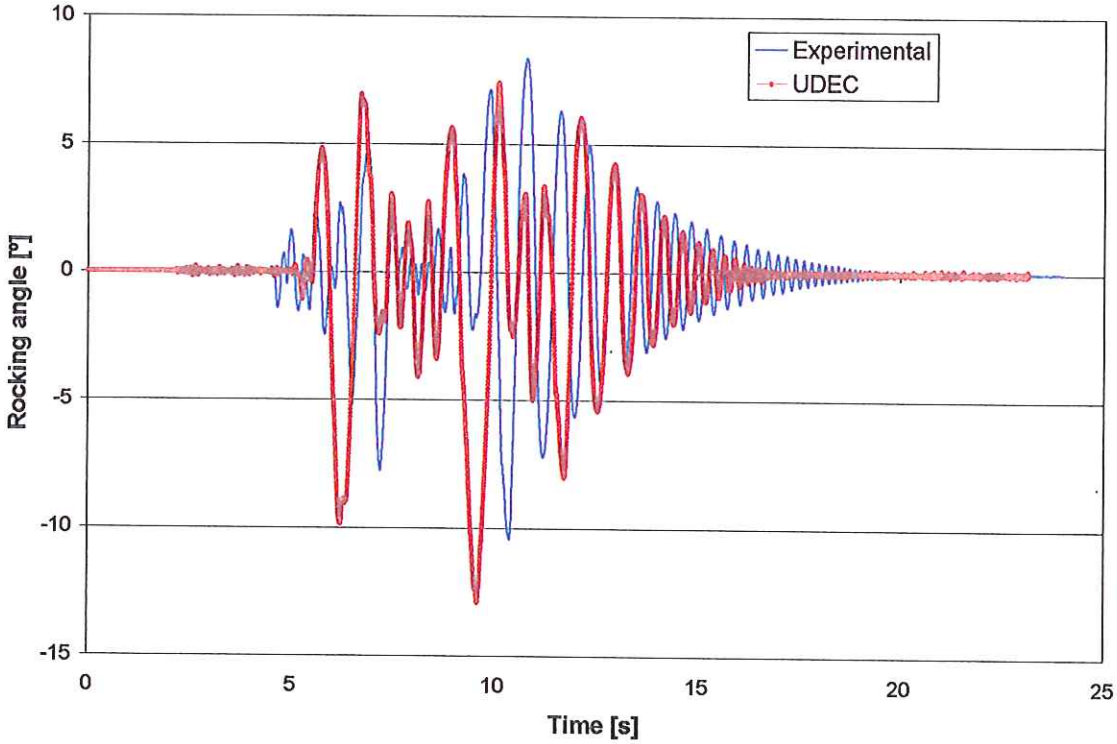


Fig. 9-27. Sismo 09 con un factor de aceleración de 1.3.

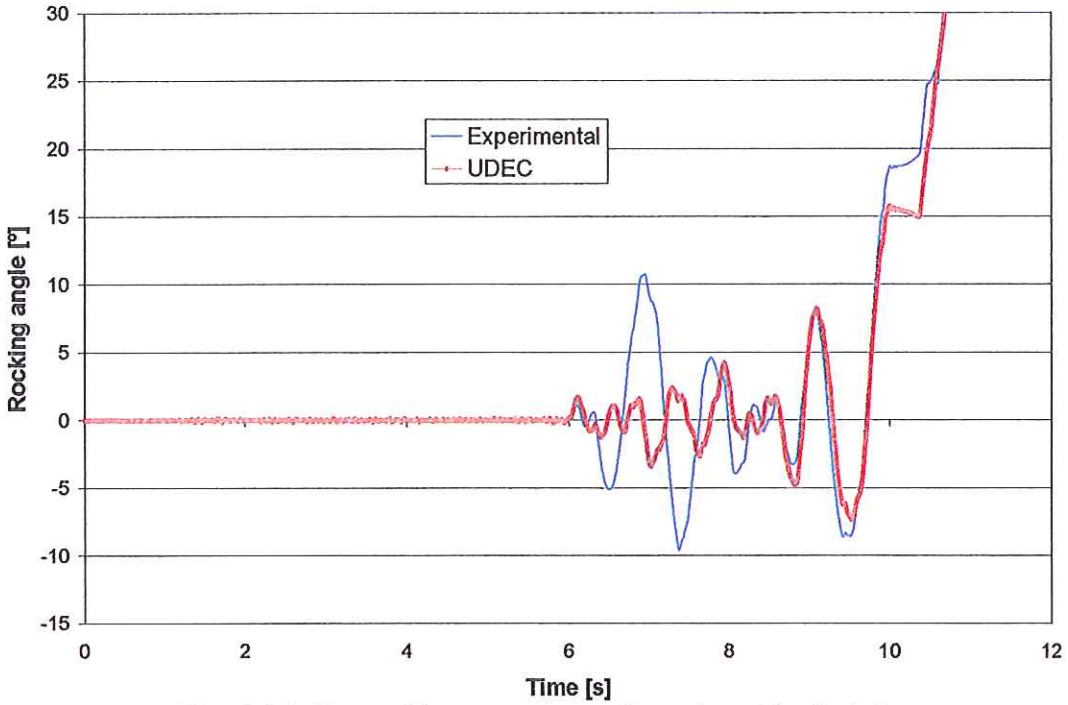


Fig. 9-28. Sismo 09 con un factor de aceleración de 1.4.

A partir de los resultados experimentales, se puede obtener el ángulo crítico. Es decir, el ángulo a partir del cual, el bloque se vuelve inestable. La Tabla 9-7 presenta los ángulos críticos calculados para las piedras 2 a 4. Cabe recordar que, para las piedras 2 y 4 no se realizaron ensayes de colapso para todos los sismos. Así mismo, para la piedra 3 no fue posible detectar el ángulo crítico, en todas las pruebas.

Tabla 9-7. Ángulos críticos de rocking [°].

Sismo	Piedra					
	2		3		4	
	AC	FA	AC	FA	AC	FA
1			5.2	0.8	20.0	1.5
2					22.9	1.0
3			5.8	0.8		
4			5.6	0.7		
5			6.2	0.6		
6			6.1	0.8		
8			6.2	0.6		
10			6.9	0.8		
11			7.0	0.7		
14			7.0	0.6		
16			6.5	0.6		
17			6.9	0.6		
18			6.8	0.5		
20	11.1, 11.3	1.1, 1.2				
22			7.0	0.4	19.6	1.0
23			6.9	0.6		
26			7.2	0.5		
27			6.9	0.7		
29			7.1	0.5		

AC = ángulo crítico, FA = factor de aceleración

El ángulo crítico teórico para la piedra 2 es de 9.6°, el cual es inferior al ángulo crítico experimental, que es de 11°, aproximadamente. De igual manera, la piedra 4 presenta un ángulo crítico experimental (20°) mayor que el teórico (18°). Para ambas piedras, el ángulo experimental es un 10% mayor que el teórico. Por otra parte, el ángulo crítico teórico, de la piedra 3, es de 6.8°. Para los primeros experimentos (sismos 01 a 09), la piedra 3 presenta un ángulo crítico experimental del orden de 6°, un 10% inferior al teórico. Sin embargo, a partir del sismo 10, el ángulo crítico experimental es del orden de 7°; el cual es similar al teórico. Cabe hacer notar que, el ángulo crítico teórico obtenido con los parámetros ajustados es de 8.8°, 25% mayor que el experimental. Debido a esto, el modelo con elementos discretos no predice el colapso de los bloques, pues presenta un ángulo crítico mayor.

10. Conclusiones

En este trabajo se presentó el programa experimental llevado a cabo en el LNEC, sobre bloques sencillos de piedra. Se presentó la modelación numérica y el análisis preliminar de los resultados experimentales.

Se llevaron a cabo 281 ensayes en las cuatro piedras, de los cuales: 18 de movimiento libre, 85 de movimiento armónico y 178 de movimiento aleatorio. Cada uno de estos ensayes se analizó con el método de los elementos discretos.

El programa UDEC logra reproducir satisfactoriamente los resultados obtenidos en laboratorio. Para la definición del modelo se utilizaron los parámetros de la teoría clásica. Al igual que en la teoría clásica, el modelo UDEC es altamente sensible al valor de α. Por lo que se recomienda usar los parámetros ajustados, de acuerdo con Prieto *et al.* (2005).

Se observa que con la rigidez, frecuencia y amortiguamientos propuestos, las simulaciones de movimiento forzado, tanto armónico como aleatorio, reproducen satisfactoriamente las respuestas experimentales. Así mismo, los resultados indican que no es necesario tener un amortiguamiento que dependa de la amplitud del rocking, siendo éste constante y proporcional a la geometría, la rigidez de la junta y al coeficiente de restitución.

El programa UDEC es altamente sensible al paso de tiempo (Δt), utilizado en el integrador numérico, cuando se analizan movimientos aleatorios. De los análisis aquí realizados, se observa que teniendo un paso de tiempo mil veces menor al paso de tiempo del registro, se obtiene una buena solución analítica.

Por otra parte, la mesa vibradora agrega un ruido mecánico a la señal de entrada, al amplificar las frecuencias por arriba de 10 Hz. Al ser éste un ruido de índole mecánica, y no numérica, no se recomienda filtrarlo pues afecta en forma importante la respuesta del bloque.

Las pruebas de vibración libre permiten obtener los parámetros α, μ y p. En forma general podemos decir que, α experimental es más pequeño que el teórico, el coeficiente de restitución es mayor, mientras que p no presenta un patrón definido. Las piedras 1 y 2 son las que presentan la menor variación en sus parámetros debido a que son las piedras que se ajustan más a las hipótesis de la teoría clásica. Por otra parte, debido a su geometría particular, la piedra 4 presenta grandes diferencias. Finalmente, la piedra 3 es un caso particular, al presentar un comportamiento tridimensional. Así mismo, el ángulo crítico experimental es un 10% mayor, que el teórico.

Existe repetibilidad en las pruebas con movimiento armónico; sin embargo este fenómeno no se aprecia con el movimiento aleatorio. Se observa que para un mismo tipo de carga, el bloque puede llegar al colapso en una prueba, pero no en otra. Este tipo de fenómeno ya ha sido encontrado por otros autores (Lipscombe, 1990; Yim *et al.*, 1980). Esto se debe a que, este tipo de movimiento es altamente sensible a las condiciones iniciales y de frontera.

La amplitud del rocking, durante un movimiento armónico, dependerá de la frecuencia y amplitud de la carga. Entre menor sea la frecuencia mayor será la amplitud del rocking. Este fenómeno se observó tanto para cargas de seno constante, como para senos tipo hanning.

Se observó que la piedra 1, presenta un comportamiento perfecto en el plano. Cabe hacer notar que, para ninguno de los cuatro bloques se observó deslizamiento. Las piedras 2 y 4 presentan una rotación alrededor del eje vertical de la piedra. Sin embargo, se observó que esta rotación no afecta las hipótesis de movimiento en el plano, y pueden ser estudiadas con un modelo 2D.

Por otra parte, la piedra 3 es la que presenta los mayores efectos tridimensionales. Esta piedra presenta una vibración alrededor del eje vertical, lo que provoca que al ajustar el parámetro α, se obtenga una base equivalente mayor a la real. Con este tipo de ajuste, se puede analizar la piedra 3 con un modelo 2D, con buena aproximación. Sin embargo, no se

logra predecir el colapso, ya que la base equivalente mayor a la real, provoca que el modelo numérico presente un ángulo crítico mayor que el real.

El desplazamiento de la parte superior del bloque es de forma parabólica, el cual va disminuyendo conforme aumenta el número de impactos. La velocidad del bloque es lineal y cambia de signo con cada impacto de la piedra; así mismo, la velocidad es cero cuando se tiene el desplazamiento máximo y es máxima, cuando el desplazamiento es cero. La aceleración del bloque es, prácticamente, constante y cambia de signo, en forma impulsiva, con cada impacto del bloque.

El impacto produce aceleraciones impulsivas en el bloque. Estas aceleraciones fueron registradas en tres direcciones ortogonales (N-S, E-W, V). Debido a esto, en cada impacto existe una aceleración impulsiva en la dirección fuera del plano. Esta aceleración puede ser la responsable del comportamiento tridimensional que presentan algunas de las piedras. Por tanto, se recomienda un estudio más profundo de este fenómeno.

Las pruebas de movimiento forzado (armónico y aleatorio) muestran que el bloque desarrolla una aceleración horizontal constante en cada semiciclo de rocking. La cual no puede ser sobrepasada y que es independiente del tipo de carga impuesta. Sin embargo, la amplitud de la aceleración impulsiva debida al impacto, parece ser que esta relacionada con el tipo de carga impuesto.

Las altas frecuencias de las aceleraciones de la base (ruido mecánico), si bien no producen un movimiento de rocking al sistema, sí le inducen una cierta cantidad extra de energía, lo que permite que el bloque sea más sensible a los movimientos de la base. Esto es de suma importancia, ya que significa que un elemento que tenga comportamiento de bloque rígido, será más vulnerable a efectos sísmicos si se encuentra sometido a una vibración de alta frecuencia. Este sería el caso de maquinaria (o de elementos cercanos a ella) que se encuentra en funcionamiento.

11. Agradecimientos

Las pruebas experimentales se llevaron a cabo en las instalaciones del Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) de Portugal, dentro del ámbito "ECOLEADER Project 4"; en colaboración con la Universidade do Minho.

El autor cuenta con una beca posdoctoral de la Fundaçao para a Ciência e a Tecnologia (FCT), con número de referencia SFRH / BPD / 17449 / 2004.

12. Referencias

1) **Aslam M, Godden WG y Scalise DT (1980).** *"Earthquake rocking response of rigid bodies"*. J. of Engrg. Mech. Div. ASCE, 106, pp. 377-392.
2) **Azevedo J, Sincrain G y Lemos JV (2000).** *"Seismic behavior of blocky masonry structures"*. Earthquake Spectra, 16 (2), pp. 337-365.
3) **Casolo S y Peña F (2004).** "A specific rigid element approach for in-plane dynamic analyses of masonry structures". III Congreso Internacional sobre Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, en CD-ROM.
4) **Cundall PA (1988).** *"Formulation of a three-dimensional distinct element model. Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks"*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 25, pp. 107-116.
5) **De Felice G (2005).** *"Out-of-plane fragility of historic masonry walls"*. En: Structural Analysis of Historical Constructions. Eds. Modena, Lourenço y Roca. Taylor & Francis Group, Londres, pp. 1143-1148.
6) **Doherty K, Griffith MC, Lam N y Wilson J (2002).** *"Displacement-based seismic analysis for out-of-plane bending of unreinforced masonry walls"*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 31, pp. 833-850.
7) **Eurocódigo 8 (1993).** *"Eurocode 8: Design provisions for earthquake resistance of structures. Part 1-1"*. ENV 1998-1-1:1993, CEN, Bruselas.
8) **Griffith MC, Magenes G, Melis GM y Picchi L (2003).** *"Evaluation of out-of-plane stability of unreinforced masonry walls subjected to seismic excitation"*. J. of Earthquake Engineering, 7, pp. 141-169.
9) **Housner G (1963).** *"The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes"*. Bulletin of the Seismological Society of America, 53 (2), 403-417.
10) **Ishiyama Y (1982).** *"Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations"*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10, pp. 635-690.
11) **Jeong MY, Suzuki K y Yim S (2003).** *"Chaotic rocking behavior of freestanding objects with sliding motion"*. J. of Sound and Vibration, 262, pp. 1091-1112.
12) **Lam NTK, Griffith M, Wilson J y Doherty K (2003).** "Time-history analysis of URM walls in out-of-plane flexure". Engineering Structures, 25, pp. 743-754.
13) **Lemos JV (2001).** *"Modelling the behaviour of a stone masonry arch structure under cyclic loads"*. En: Computer Methods in Structural Masonry – 5. Ed. Hughes y Pande. Computers and Geotechnics, pp. 101-108.
14) **Lemos JV, Sincrain GE y Oliveira CS (2000).** *"Modelling the seismic behaviour and structural restoration of a damage masonry tower"*. Proc. 5th Int. Congress on Restoration of Architectural Heritage – Firenze.
15) **Lipscombe P (1990).** *"Dynamics of rigid block structures"*. PhD Thesis. University of Cambridge.
16) **LNEC (1998).** "A discrete element program based on a rigid block formulation". Reporte 40/98-NDE/NEE. Proc. 042/17/11786. Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
17) **Makris N y Konstantinidis D (2003).** *"The rocking spectrum and the limitations of practical design methods"*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 32, 265-289.
18) **Makris N y Roussos Y (1998).** *"Rocking response and overturning of equipment under horizontal pulse-type motions"*. Reporte PEER 1998/05. Universidad de California, Berkeley.

19) **NTUA (1997).** *"Monuments under seismic action. A numerical and experimental approach"*. Report No. NTUA/LEE-97/01. Laboratory for Earthquake Engineering. Faculty of Civil Engineering. National Technical University of Athens.
20) **Papantonopoulos C, Psycharis N, Papastamatiou DY, Lemos JV y Mouzakis HP (2002).** *"Numerical prediction of the earthquake response of classical columns using the distinct element method"*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 31, pp. 1699-1717.
21) **Pich P (1995).** *"Nonlinear rigid block dynamics"*. Reporte EERL 95-01. California Institute of Technology.
22) **Pompei A, Scalia A y Sumbatyan MA (1998).** *"Dynamics of rigid block due to horizontal ground motion"*. J. Engrg. Mech., 124 (7), pp. 713-717, july.
23) **Prieto F, Louenço PB y Oliveira CS (2004).** *"Impulsive Dirac-delta forces in the rocking motion"*. Erthquake Engineering and Structural Dynamics, 33.
24) **Prieto F (2005).** *"Applications of nonlinear mechanics to masonry collapse mechanism"*. Comunicación personal (Tesis de Doctorado, en proceso).
25) **Prieto F, Lourenço PB y Costa A (2005).** *"Verificación experimental de la formulación compleja del rocking motion"*. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Granada.
26) **Psycharis N (1982).** *"Dynamic behavior of rocking structures allowed to uplift"*. Reporte EERL 81-02. California Institute of Technology.
27) **Psycharis N, Syngros C, Mimoglou P y Taflambas I (2002).** *"Parametric investigation of the overturning of rigid blocks under dynamic loading"*. 12th European Conference on Earthquake Engineering, paper 013.
28) **Psycharis N, Lemos JV, Papastamatiou DY, Zambas C y Papantonopolous C (2003).** *"Numerical study of the seismic behaviour of a part of the Parthenon Pronaos"*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 32, pp. 2063-2084.
29) **Shenton H (1996).** *"Criteria for initiation of slide, rock, and slide-rock rigid-body modes"*. J. of Engineering Mechanics, ASCE, 122 (7), pp. 690-693.
30) **Sincrain G y Azevedo J (1998).** *"Numerical simulation of the seismic behaviour of stone and brick masonry structures using the discrete element method"*. 11th European Conference on Earthquake Engineering, Balkema.
31) **Transgranitos (2005).** http://www.transgranitos.pt/pt.html Página de Internet de la compañía Transgranitos – Mármoles e Granitos do Alto Tâmega, Lda. Portugal.
32) **Tso WK y Wong CM (1989).** *"Steady state rocking response of rigid blocks to earthquake. Part1: Analysis. Part 2: Experiment"*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 18, pp. 89-120.
33) **UDEC (2000).** *"Online Manual"* Itasca Consulting Group, USA, CD-ROM.
34) **Yim C, Chopra A y Penzien J (1980).** *"Rocking response of rigid blocks to earthquake"*. Reporte UBC/EERC-80/02. Universidad de California.
35) **Winkler T, Meguro K y Yamazaki F (1995).** *"Response of rigid body assemblies to dynamic excitation"*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 24, 1389-1408.
36) **Zhang J y Makris N (2001).** *"Rocking response of free-standing blocks under cycloidal pulses"*. J. Engrg. Mech., 127 (5), pp. 473-483, May.

Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Junho de 2005

VISTOS

O Chefe do Núcleo de Engenharia Sísmica e Dinâmica de Estruturas

Ema Coelho

O Director
do Departamento de Estruturas

João Almeida Fernandes

O Director
do Departamento de Barragens de Betão

Carlos Alberto de Brito Pina

AUTORIA

Fernando Peña Mondragón
Bolseiro de pós-doutoramento da FCT

Alfredo Campos Costa
Investigador Principal

José Antero Senra Vieira de Lemos
Investigador Coordenador

Divisão de Edições e Artes Gráficas do LNEC