

MINISTERIO DA HABITAÇÃO, OBRAS PÚBLICAS E TRANSPORTES  
LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA  
NUCLEO DE HIDROLOGIA E HIDRÁULICA FLUVIAL

Procº 62/11/7414

MÉTODOS DE PREVISÃO DA EROÇÃO HÍDRICA CONTINENTAL

Modelação matemática do processo erosivo

RELATÓRIO

Estudo realizado para o PIDDAC/PEOH

Lisboa, Novembro de 1982

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS 341

LECTURE 1

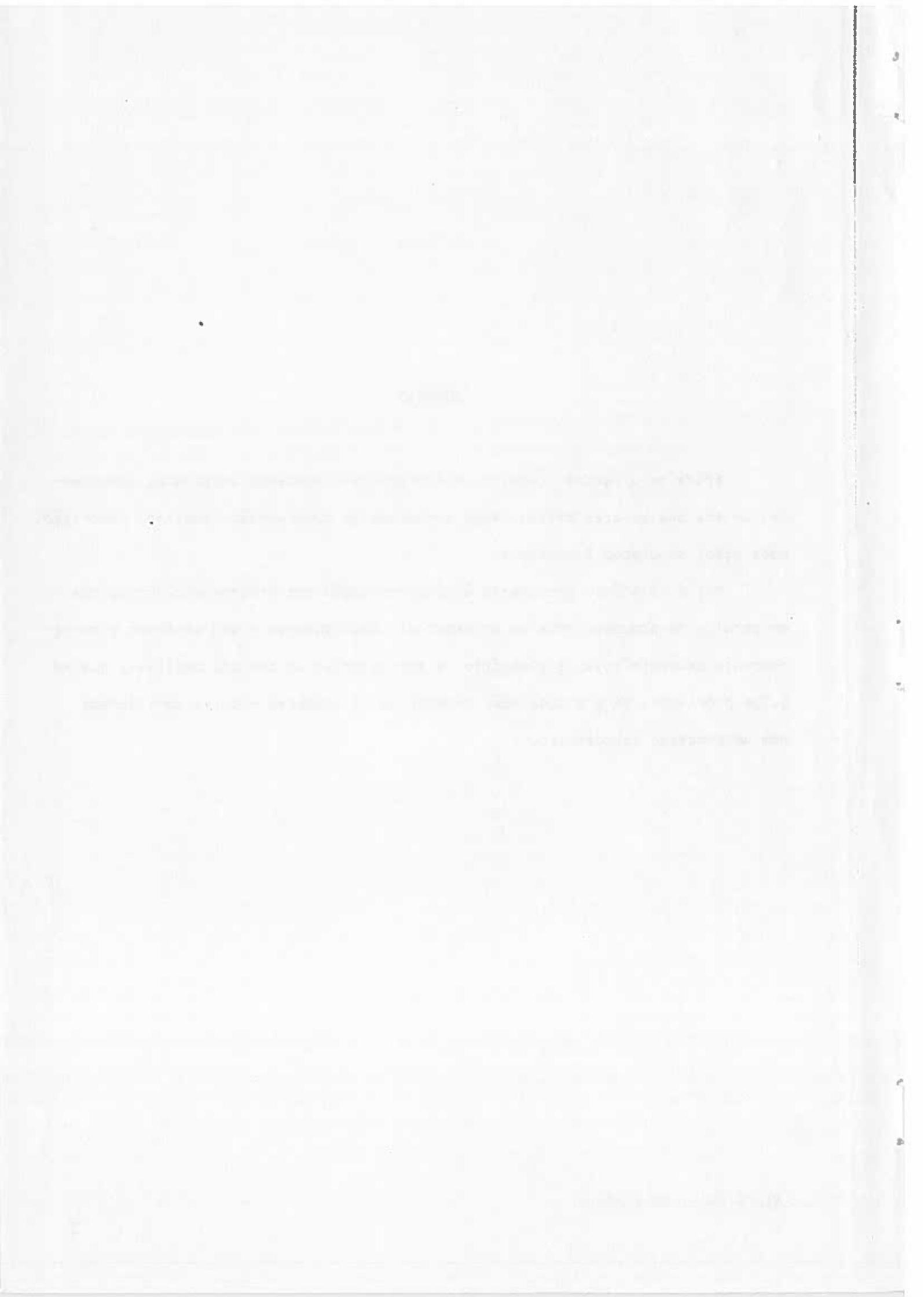
LECTURE 2

LECTURE 3

## SUMÁRIO

Entre os diversos processos hidrológicos o processo erosivo é, certamente, um dos que maiores dificuldades apresenta de compreensão, análise, descrição, modelação, simulação e controle.

Neste relatório procede-se à caracterização dos processos hidrológicos em geral e do processo erosivo em especial, mostrando-se o seu carácter simultaneamente determinístico e aleatório, e apontando-se um caminho possível, que se julga promissor, para a modelação matemática do processo erosivo considerado com um processo estocástico.



## ÍNDICE DO TEXTO

	Pág.
1 - INTRODUÇÃO .....	1
2 - CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	4
3 - CARACTERIZAÇÃO GERAL DOS PROCESSOS HIDROLÓGICOS .....	5
3.1 - Fenômenos e variáveis hidrológicas .....	5
3.2 - Sistemas e processos hidrológicos .....	5
3.3 - Ciclo hidrológico .....	7
3.4 - Determinismo e aleatoridade dos processos hidrológicos.....	11
4 - ESTRUTURA PERIODICA - ESTOCÁSTICA DOS PROCESSOS HIDROLÓGICOS FUNÇÃO DO TEMPO .....	12
4.1 - Considerações gerais .....	12
4.2 - Hipóteses básicas da análise estrutural .....	18
4.3 - Caracterização da estrutura periódica - estocástica dos processos ...	22
4.4 - Identificação das componentes periódicas do processo .....	25
4.5 - Determinação do número de harmônicas significativas para descrever as componentes periódicas do processo .....	30
4.6 - Separação das componentes periódicas do processo .....	33
4.7 - Caracterização da componente estocástica do processo .....	39
5 - MODELAÇÃO ESTOCÁSTICA DA PRODUÇÃO DE SEDIMENTOS .....	47
5.1 - Considerações gerais .....	47
5.2 - Caracterização da produção de sedimentos como processo estocástico..	49
5.3 - Casos-tipo a considerar na modulação estocástica da produção de sedimentos .....	53
5.4 - Modelo estocástico da produção de sedimentos no caso de talhões experimentais ou bacias hidrográficas muito pequenas .....	53
5.5 - Modelo estocástico da produção de sedimentos no caso de pequenas bacias hidrográficas .....	57
5.6 - Modelo estocástico da produção de sedimentos no caso de grandes bacias hidrográficas .....	59
6 - CONCLUSÕES .....	62
7 - BIBLIOGRAFIA .....	64



## INDICE DE QUADROS

Quadro 5.1 - Casos tipo a considerar na modelação estocástica da produção de se  
dimentos

## INDICE DE FIGURAS

- Fig. 3.1 - A bacia hidrográfica como ambiente e sistema hidrológicos
- " 3.2 - Representação pictórica do ciclo hidrológico
  - " 3.3 - Representação hidrológica de acordo com a teoria da análise de sistemas
  - " 3.4 - Variação da radiação solar incidente no topo da atmosfera (em ly/dia) com a latitude e com o tempo
  - " 3.5 - Principais componentes dos processos hidrológicos função do tempo
  - " 4.1 - Discretização no tempo do processo hidrológico  $\epsilon$  (+)
  - " 5.1 - Bacia hidrográfica esquemática utilizada na modelação matemática do processo erosivo
  - " 5.2 - Realizações típicas dos processos estocásticos caudal sólido e produção de sedimentos
  - " 5.3 - Realizações típicas dos processos estocásticos intensidade da precipitação, caudal líquido e caudal sólido relativos a um talhão experimental
  - " 5.4 - Esquematização de uma pequena bacia hidrográfica com base no tempo de percurso
  - " 5.5 - Fluxograma relativo ao modelo de simulação de Cadenas



## MÉTODOS DE PREVISÃO DA EROSIÃO HÍDRICA CONTINENTAL

### Modelação matemática do processo erosivo

#### 1 - INTRODUÇÃO

A erosão continental de origem hídrica ou, abreviadamente, erosão hídrica, é um processo natural que ocorre na superfície dos continentes, conduzindo, em termos globais, ao aplainamento geral do relevo, em resultado de um longo trabalho de meteorização que envolve a desagregação, desgaste e arranque de materiais presentes nos terrenos, e o seu transporte e deposição noutra local diferente do local de origem, em que a água é o agente mais importante, em particular sob a forma de precipitação ou de escoamento superficial e em que as actividades do homem podem também intervir acelerando ou intensificando o processo.

O processo erosivo é assim condicionado por um grande número de factores que se podem classificar em dois grandes grupos: os que determinam ou caracterizam a erosividade da chuva e do escoamento superficial, e os que determinam ou caracterizam a erodibilidade do terreno.

A erosão dá origem, de uma maneira geral, a um elevado número de efeitos nocivos com grande importância económica relacionados com diversos tipos de degradação do ambiente e que podem afectar substancialmente os recursos do solo, os recursos hídricos e as diversas utilizações destes recursos.

Portugal, pela sua posição geográfica, está numa região bastante exposta à erosão pelo que o estudo do processo erosivo se reveste de particular importância para o País, quer do ponto de vista da protecção do ambiente, quer da gestão dos recursos hídricos e dos recursos do solo, quer ainda do controle da poluição e da melhoria da qualidade de vida das populações.

Dando cumprimento ao plano de trabalhos apresentado em LNEC 1975 foram desenvolvidos, entre 1975 e 1978, diversos estudos e análises sobre erosão hídrica tendo em vista, fundamentalmente:

- a) a apropriação e síntese dos conhecimentos existentes;
- b) a análise de alguns factores condicionantes da erosão hídrica, nomeadamente a precipitação e o escoamento superficial;
- c) o desenvolvimento de um modelo estocástico de erosão hídrica aplicável a talhões experimentais e a pequenas bacias hidrográficas.

Estes estudos e análises foram realizados pelo responsável pela condução do processo tanto no Laboratório de Engenharia Civil, em Lisboa, como na Universidade do Estado do Colorado, Fort Collins, USA.

Solicitações e imperativos considerados prioritários pelo responsável pela condução do processo levaram, no entanto, a interromper, em 1978, os trabalhos em curso, deixando inacabado um aliciante, promissor e importante projecto de investigação que se julga de todo o interesse ser continuado.

Com o objectivo de transmitir, ainda que de forma incompleta, os resultados e as conclusões a que se tinha chegado nos estudos e análises feitas, considerou-se útil sistematizar, em dois relatórios, esses resultados e conclusões, contribuindo por ventura, desta maneira, ainda que de forma modesta, para o avanço do estudo da erosão hídrica.

Colaborou na organização final destes relatórios o Eng.º Armando Pinto de Abreu do Núcleo de Hidrologia e Hidráulica Fluvial do LNEC.

Os dois relatórios a apresentar versam os seguintes temas:

- modelação matemática do processo erosivo;
- estudo da acção da chuva sobre a escorrência superficial.

O primeiro destes relatórios, que agora se apresenta, aborda o problema da modelação matemática dos processos hidrológicos em geral, e do processo de erosão hídrica em especial, considerando as suas características determinísticas e aleatórias, e utilizando nessa abordagem a teoria da probabilidade e a estatística matemática como principal ferramenta de análise.

Assim, depois de se fazer a caracterização geral do problema, definindo fenômenos, variáveis, sistemas e processos hidrológicos e mostrando o caráter simultaneamente determinístico e aleatório da sua estrutura, procede-se à análise estrutural dos processos hidrológicos, descrevendo-se a sua estrutura periódico-estocástica, identificando-se as respectivas componentes e apresentando-se os principais métodos estatístico-matemáticos que permitem a sua separação e individualização.

Na segunda parte do relatório aponta-se um caminho possível para a modelação matemática do processo hidrológico da produção de sedimentos considerado como um processo estocástico, caracterizando-se diversos casos-tipo de complexidade crescente.

## 2 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Como refere ROSENBLUETH e WIENER 1945 nenhuma parte significativa do Universo é suficientemente simples para poder ser compreendida e controlada sem abstracção, isto é, sem ser substituída por um modelo com uma estrutura semelhante mas mais simples do que a real. Os modelos tanto matemáticos como físicos são, portanto, uma necessidade básica da actividade científica.

O estudo do processo erosivo, pelas suas características, não escapa, evidentemente, a esta necessidade.

A modelação matemática do processo erosivo tem sido feita fundamentalmente por via determinística, quer recorrendo a modelos matemáticos empíricos quer a modelos matemáticos conceptuais, só muito recentemente se começando a recorrer à via probabilística ou estocástica. Tal situação deriva fundamentalmente da complexidade do processo erosivo que torna bastante difícil uma abordagem que tome em consideração o carácter marcadamente aleatório da sua natureza.

Assim, por exemplo, a produção de sedimentos de uma bacia hidrográfica, ou seja, segundo a definição adoptada por ASCE 1970, a quantidade total (em volume ou peso) de sedimentos que, num dado intervalo de tempo, passa através da secção de jusante da bacia hidrográfica, e que é uma grandeza associada ao processo erosivo com grande interesse para as aplicações, tem essencialmente uma natureza aleatória, não sendo portanto possível fazer previsões determinísticas a partir de uma situação inicial conhecida.

Por isso, na grande maioria dos problemas cuja resolução exige a previsão da produção de sedimentos anual, sazonal ou mensal, torna-se necessário conhecer a estrutura aleatória do processo estocástico que a descreve ou, pelo menos, alguns dos seus parâmetros mais significativos para as aplicações, como a média e a variância.

É com este objectivo que, neste Capítulo se começa por fazer uma caracteri-

zação geral dos processos hidrológicos após o que se procede à análise da estrutura periódico-estocástica dos processos hidrológicos função do tempo e à modelação matemática da produção de sedimentos.

### 3 - CARACTERIZAÇÃO GERAL DOS PROCESSOS HIDROLÓGICOS

#### 3.1 - Fenómenos e variáveis hidrológicas

De acordo com uma definição comumente aceite (FCST 1962) a Hidrologia é a ciência que trata das águas da Terra<sup>(1)</sup> da sua ocorrência, movimento e distribuição, das suas propriedades físicas e químicas, e das suas interações com o ambiente incluindo as suas interações com os seres vivos. O domínio da Hidrologia abarca toda a história da água na Terra.

Trata-se, portanto, fundamentalmente de uma ciência da natureza cujos conhecimentos são elaborados a partir da análise de fenómenos associados ao seu objecto ou seja de fenómenos hidrológicos tais como a precipitação, a evaporação, o escoamento superficial e o transporte de sedimentos os quais, por sua vez, podem ser descritos ou caracterizados por variáveis hidrológicas tais como a intensidade da precipitação, a evaporação diária, o escoamento mensal ou o caudal sólido anual. É frequente designarem-se certas variáveis hidrológicas como a intensidade da precipitação, a intensidade da evaporação, o caudal líquido instantâneo e o caudal sólido instantâneo por variáveis hidrológicas básicas, e outras variáveis como as que se referem aos valores diários, semanais, mensais, sazonais ou anuais das variáveis hidrológicas básicas, ou aos seus valores máximos ou mínimos em certos intervalos de tempo, por variáveis hidrológicas derivadas.

#### 3.2 - Sistemas e processos hidrológicos

De acordo com YEVJEVICH 1972, as partes da Terra nas quais ocorrem diferentes fenómenos hidrológicos designam-se por ambientes hidrológicos.

Como exemplos de ambientes hidrológicos podem citar-se:

---

(1) Por Terra entende-se aqui o sistema físico constituído pelo globo terrestre e pela atmosfera.

- os mares e oceanos que funcionam fundamentalmente como abastecedores de água à atmosfera através da evaporação, e como receptores de água proveniente dos continentes através do escoamento superficial e subterrâneo;

- a atmosfera que funciona como receptor de água resultante da evaporação dos mares, oceanos, lagos, rios, etc., como transportador de água entre diferentes zonas da Terra, e como meio onde se desenvolvem processos de condensação e precipitação;

- os continentes que funcionam como receptores de água em resultado da precipitação, como abastecedores de água à atmosfera através da evaporação e evapotranspiração, como abastecedores de água aos mares e oceanos através do escoamento superficial e subterrâneo, e como meio onde se desenvolvem processos de infiltração, retenção, acumulação de neve e gelo, degelo, escoamento superficial e escoamento subterrâneo.

Cada ambiente hidrológico pode, portanto, ser considerado como um sistema hidrológico (Fig. 3.1) com propriedades particulares.

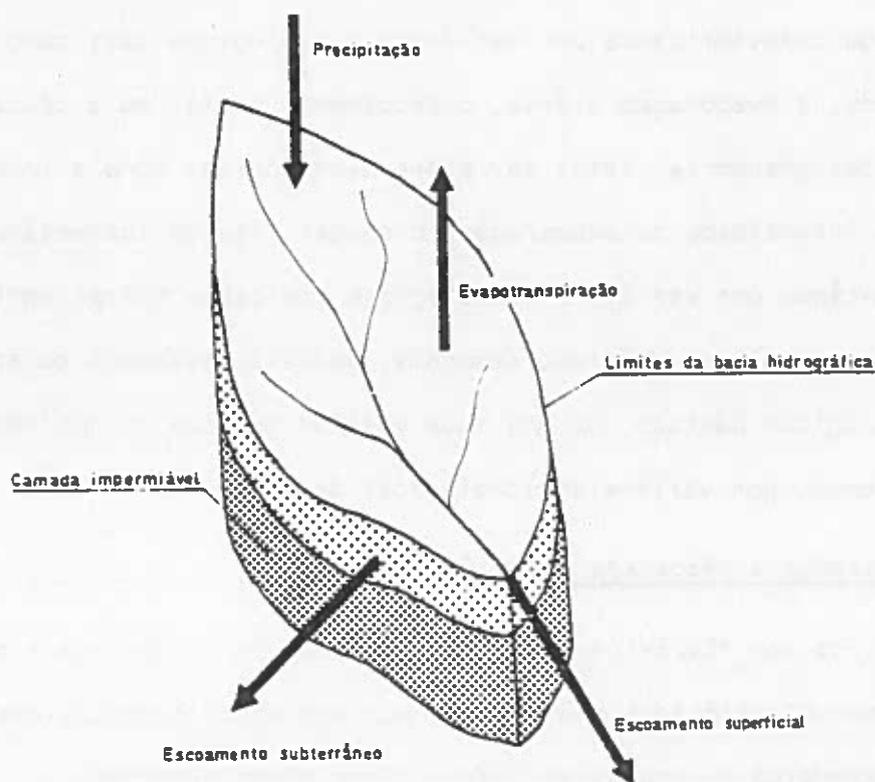


Fig. 3.1 - A bacia hidrográfica como ambiente e sistema hidrológicos

Na realidade, um sistema hidrológico, tal como qualquer outro sistema, pode definir-se como um dispositivo que transforma, num dado referencial de tempo, uma entrada ("input"), causa ou estímulo numa saída ("output"), efeito ou resposta. No caso de um sistema hidrológico, a entrada e saída são constituídas por água (precipitação, evaporação, escoamento, infiltração, etc.) e a transformação operada pelo sistema manifesta-se quer através da mudança de estado do sistema (alterações ambientais e armazenamento de água), quer através da saída do sistema.

Os termos do termo entrada-transformação-saída constituem assim as partes fundamentais do sistema hidrológico (tal como de qualquer sistema) representando cada uma destas partes um processo hidrológico mais ou menos complexo.

As relações entre os vários ambientes hidrológicos resultam fundamentalmente do intercâmbio da água através das interfaces que separam esses ambientes, isto é, de a entrada em cada um dos respectivos sistemas hidrológicos ser normalmente a saída de outro desses sistemas e vice-versa.

### 3.3 - Ciclo hidrológico

Os diferentes sistemas hidrológicos referidos fazem parte do sistema físico globo-atmosfera através do qual a água flui sujeita ao princípio da conservação da massa. O conceito de ciclo hidrológico, que é um dos conceitos fundamentais da Hidrologia, reflecte precisamente a circulação da água no sistema globo-atmosfera, isto é, a sequência de fenómenos hidrológicos pelos quais o globo terrestre cede à atmosfera água na fase de vapor e a atmosfera cede ao globo terrestre água nas fases líquida e sólida, repetindo-se indefinidamente no tempo estas transferências de água (Fig. 3.2).

Como refere DOOGE 1968 a representação do ciclo hidrológico da Fig. 3.2, apesar da sua forma pictórica lhe dar uma aparência realista, reflecte já um alto grau de conceptualização do ciclo hidrológico real, na medida em que, por exemplo, a totalidade da atmosfera, da superfície dos continentes e da superfície dos oceanos são tratadas globalmente como elementos simples ignorando-se a complexi-

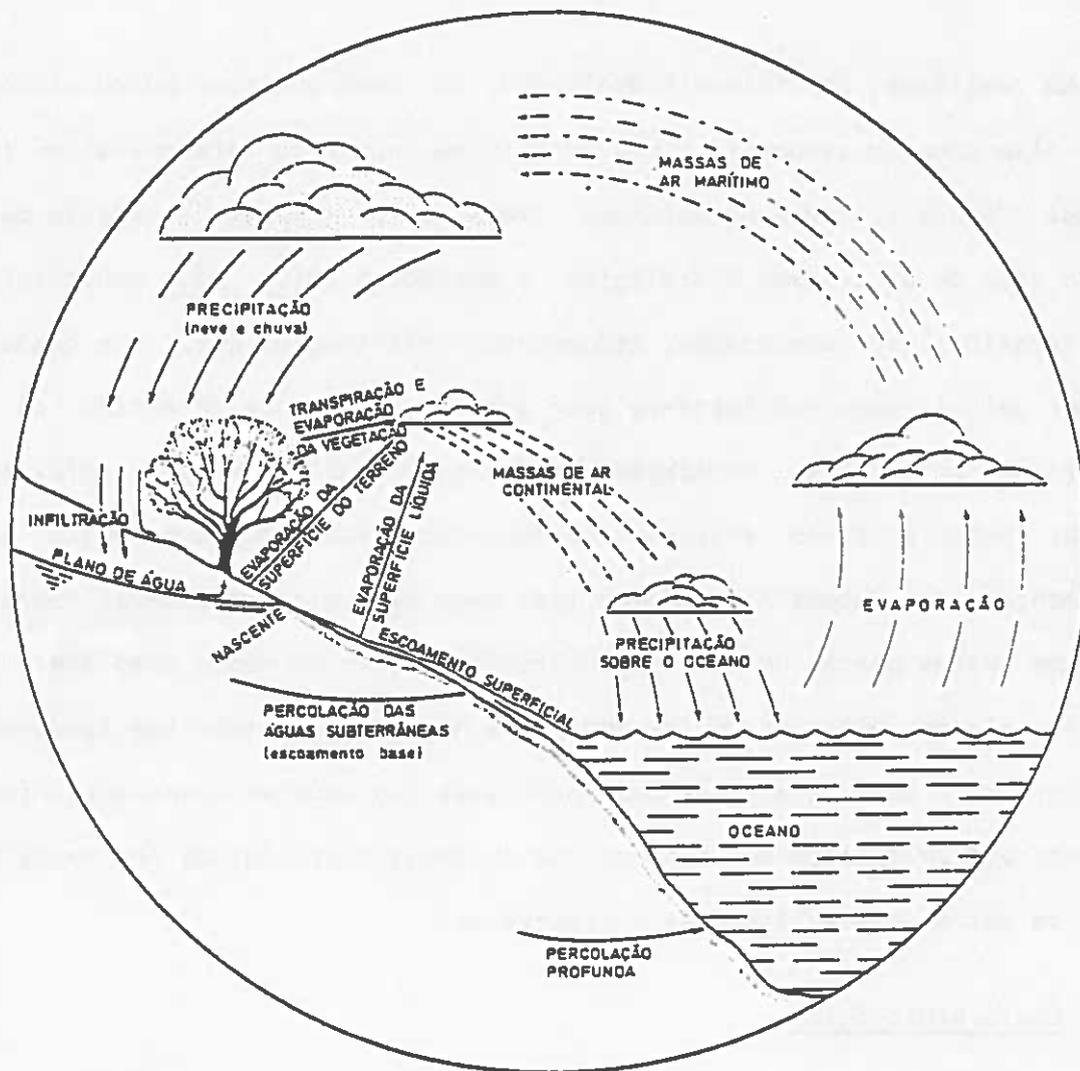


Fig. 3.2 - Representação pictórica do ciclo hidrológico

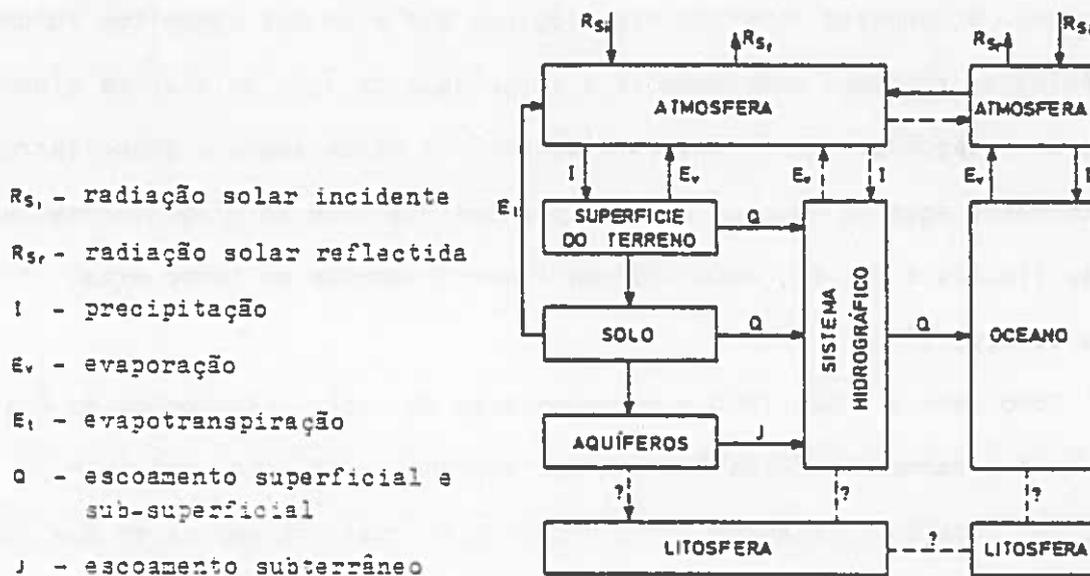


Fig. 3.3 - Representação do ciclo hidrológico de acordo com a teoria da análise de sistemas

dade das variações locais, sendo na base desta conceptualização que a Hidrologia clássica tem abordado os processos hidrológicos.

Quem prefira adoptar a teoria da análise de sistemas para representação do ciclo hidrológico real pode recorrer a um diagrama constituído apenas pelos tradicionais rectângulos ("black boxes") e setas de entrada e saída ("input" e "output") como indica a Fig. 3.3, o qual, embora seja uma representação aparentemente mais austera é, na realidade, mais rico em informação e reflecte um menor grau de abstracção, do que qualquer representação pictórica do tipo da Fig. 3.2.

Como bem refere PEIXOTO 1973a e 1973b, é o princípio da conservação da energia que explica o estabelecimento do ciclo hidrológico, não só pelas exigências energéticas que determinam e condicionam as transições de fase, essenciais em toda a fenomenologia do ciclo, mas também porque é a quantidade utilizável de energia que, nas suas várias formas, provoca e mantém a circulação da água no sistema globo-atmosfera.

De facto o ciclo hidrológico resulta da combinação de processos termo-hidrodinâmicos em que intervêm várias formas de energia, umas exteriores ao ciclo, como as energias radiante e gravítica, e outras de natureza interna associadas às transições de fase do agente activo do ciclo. As energias radiante de origem solar (directa e difusa) e de origem terrestre (globo e atmosfera), ao serem absorvidas pela atmosfera e pela superfície do globo, transformam-se em energia térmica que provoca a evaporação da água para a atmosfera onde é transportada pela circulação geral da atmosfera e onde eventualmente se condensa, constituindo partículas (gotas, cristais de gelo, etc.). Estas partículas, ao atingirem as dimensões críticas caem por acção da gravidade sob a forma de precipitação originando esquematicamente a fase aérea do ciclo hidrológico.

A água caída sob a forma de precipitação sólida ou líquida, ou a água depositada por intersecção de nuvens e nevoeiros ou por condensação à superfície do globo (orvalho, geada) escoar-se e infiltra-se principalmente por acção do campo gravítico até atingir o estado geopotencial compatível com os constrangimentos

impostos pela natureza dos materiais da crosta terrestre, designadamente pelo tipo e estrutura dos solos que faz ressaltar a forma de energia de superfície associada à tensão superficial e tão importante na economia da água dos solos (água de capilaridade). E assim se deposita à superfície do globo nas fases sólidas ou líquida (geleiras, glaciares, lagos, mares, etc.) ou no interior da crosta na fase líquida (aquíferos, etc.). E a evaporação que simultaneamente se vai observando continua a manter a fase terrestre do ciclo hidrológico.

Com os vários fenômenos em que intervêm as transições de fase há variações de energia interna e de entalpia do componente água, que conduzem à libertação ou ao consumo de energia sob a forma de calor latente, e respectivamente no fenómeno da condensação e da evaporação, e que se designaram por transformações energéticas internas.

O Sol fornece cerca de 99,97% da energia térmica necessária aos processos hidrológicos que ocorrem no sistema globo-atmosfera (SELLERS 1965), sendo portanto o factor determinante do ciclo hidrológico. Em cada segundo a quantidade de energia radiada pelo sol é sensivelmente constante e da ordem de  $0,93 \times 10^{26}$  cal. Em termos de energia incidente por unidade de área de uma superfície esférica com um raio de  $1,5 \times 10^{11}$  m (distância média da Terra ao Sol) centrada no Sol, aquela quantidade de energia corresponde a cerca de  $330 \text{ cal/m}^2 \cdot \text{s}$ , ou seja 2 ly/min, valor este que se designa por constante solar<sup>(1)</sup>.

O ciclo hidrológico é, portanto, um complexo sistema real que funciona movido essencialmente pelo excesso de energia solar incidente no topo da atmosfera sobre a energia reflectida para o espaço pelo sistema globo-atmosfera.

Deve notar-se que quando se olha o ciclo hidrológico do ponto de vista das trocas de energia, ele comporta-se como um sistema aberto, enquanto que se se considera o ciclo hidrológico do ponto de vista apenas da circulação da água então já ele se comporta como um sistema fechado que envolve a transferência e a mudan

---

(1) Um langley (ly) é equivalente a uma caloria por centímetro quadrado.

ça de estado da água.

E neste segundo ponto de vista que, em geral, se coloca o hidrologista para analisar os processos hidrológicos.

### 3.4 - Determinismo e aleatoriedade dos processos hidrológicos

A inclinação da Terra em relação ao plano da sua órbita e os movimentos de rotação e translação da Terra determinam, como é evidente, a variação no espaço e no tempo das condições de exposição do topo da atmosfera em relação à radiação solar incidente. Dada a forma da Terra e o tipo de movimentos em causa, facilmente se deduz que a quantidade de energia incidente por unidade de área do topo da atmosfera é uma função circular de variáveis cujos valores representam a posição da unidade de área em relação ao Sol.

Na realidade, e de acordo com SELLERS 1965, o fluxo instantâneo  $F_S$  de radiação solar através de um elemento da superfície do topo da atmosfera é dado por

$$F_S = K_S \left( \frac{d_m}{d} \right)^2 \cos \zeta \quad (3.1)$$

em que  $K_S$  é a constante solar ( $K_S = 2 \text{ ly/min}$ ),  $d_m$  e  $d$  são respectivamente a distância média e a distância instantânea da Terra ao Sol, e  $\zeta$  é o ângulo zenital do Sol ou seja

$$\cos \zeta = \sin \psi \sin \xi + \cos \psi \cos \xi \cos \eta \quad (3.2)$$

em que  $\psi$  é a latitude do elemento de área,  $\xi$  é a declinação solar e  $\eta$  é o ângulo horário.

Na Fig. 3.4 apresenta-se um diagrama que indica a variação da radiação solar incidente no topo da atmosfera com a latitude e com o tempo, onde claramente se evidencia que, para um dado elemento de área, aquela energia é uma função circular do tempo.

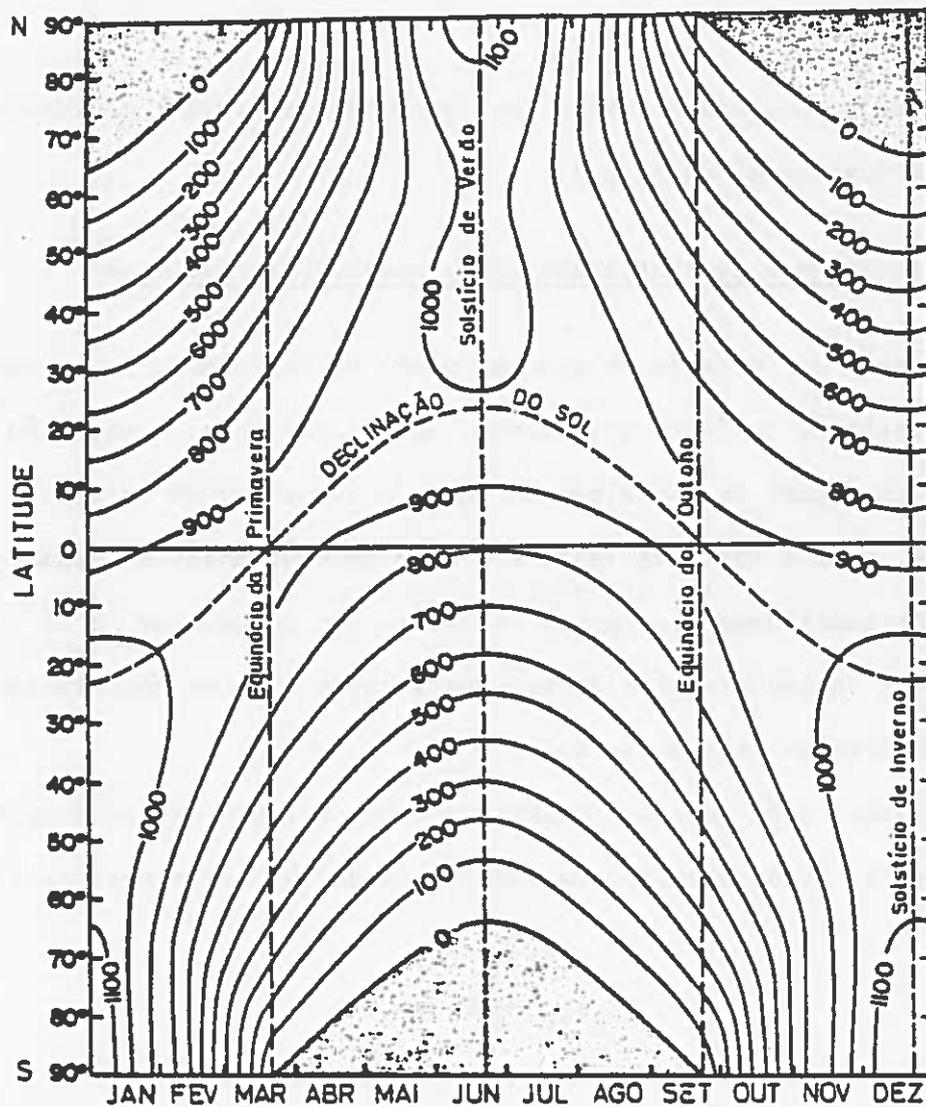


Fig. 3.4 - Variação da radiação solar incidente no topo da atmosfera ( em ly/dia ) com a latitude e com o tempo

Embora a energia solar seja a principal responsável pelo estabelecimento e manutenção da circulação da água no sistema físico globo-atmosfera e, portanto, nos vários ambientes hidrológicos e através das diversas interfaces que separam esses ambientes hidrológicos, a ocorrência, movimento, distribuição, propriedades físicas e químicas, e interação da água com o ambiente, incluindo a interação com os seres vivos, estão longe de manter as características de regularidade espacial e temporal manifestadas pela energia solar incidente no topo da atmosfera.

Na realidade, praticamente todos os processos hidrológicos desenvolvem-se sob a acção conjugada de um número infindável de factores causais para além da energia solar, sendo este conjunto de factores causais que determina as características específicas de cada processo hidrológico. Muitos destes factores causais são também, por sua vez, causados por um número imenso de outros factores.

Assim podem citar-se, entre outros, a turbulência, a nebulosidade, a temperatura e a quantidade de poeiras do ar, e a temperatura, as condições de exposição, a cobertura vegetal e o tipo de solo, como factores responsáveis pela forma irregular como a energia solar incidente no topo da atmosfera é reflectida, refractada, absorvida e dispersa, no sistema globo-atmosfera; e a topografia, a cobertura vegetal, a geologia e a acção do homem como alguns dos factores responsáveis pela irregularidade das condições de infiltração e escoamento das águas.

Pode dizer-se portanto que, embora a regularidade resultante das características da energia solar incidente no topo da atmosfera esteja subjacente aos processos hidrológicos, essa irregularidade é "escondida" ou "mascarada" pela irregularidade da maior parte dos outros factores causais que intervêm nos processos hidrológicos.

Não admira, pois, que a análise de grande número de processos hidrológicos naturais ou modificados pela intervenção do homem tenha mostrado que estes processos são de natureza estocástica (probabilística, aleatória) ou determinístico-estocástica. Os processos hidrológicos de natureza puramente determinística ou com uma componente estocástica desprezável só ocorrem em situações artificiais muito controladas.

Entre os processos hidrológicos cuja compreensão se reveste de maior interesse prático, merecem referência especial os que se desenvolvem no tempo.

Com base no estudo das características e evolução de um número imenso deste tipo de processos hidrológicos e, por outro lado, no conhecimento que hoje se tem acerca das causas que determinam a sua configuração geral, pode afirmar-se que estes processos hidrológicos são, em geral, de natureza determinístico-estocástica.

De acordo com YEVJEVICH 1972 a estrutura de um processo hidrológico que se desenvolve no tempo pode decompor-se nas seguintes componentes (Fig.3.5):

a) uma componente transitória determinística consistindo numa tendência, num movimento persistente de longa duração, e/ou em mudanças bruscas (saltos) causados por modificações naturais ou pela acção do homem, os quais provocam a não-homogeneidade do processo, isto é, que as suas características não sejam independentes do tempo absoluto;

b) uma componente periódica determinística causada fundamentalmente pelos movimentos de rotação e de translação da Terra os quais determinam, como se viu, a variação periódica da quantidade de energia solar incidente no topo da atmosfera;

c) uma componente estocástica causada pela influência de um número infindável de factores causais já anteriormente referidos.

Para além destas componentes, vem ainda a propósito lembrar que os dados de observação relativos a estes processos hidrológicos podem conter também componentes destas várias naturezas. Assim, por exemplo, erros sistemáticos nas medições dão origem à introdução de uma componente determinística transitória (saltos), assim como os erros aleatórios dão origem à introdução de uma componente estocástica.

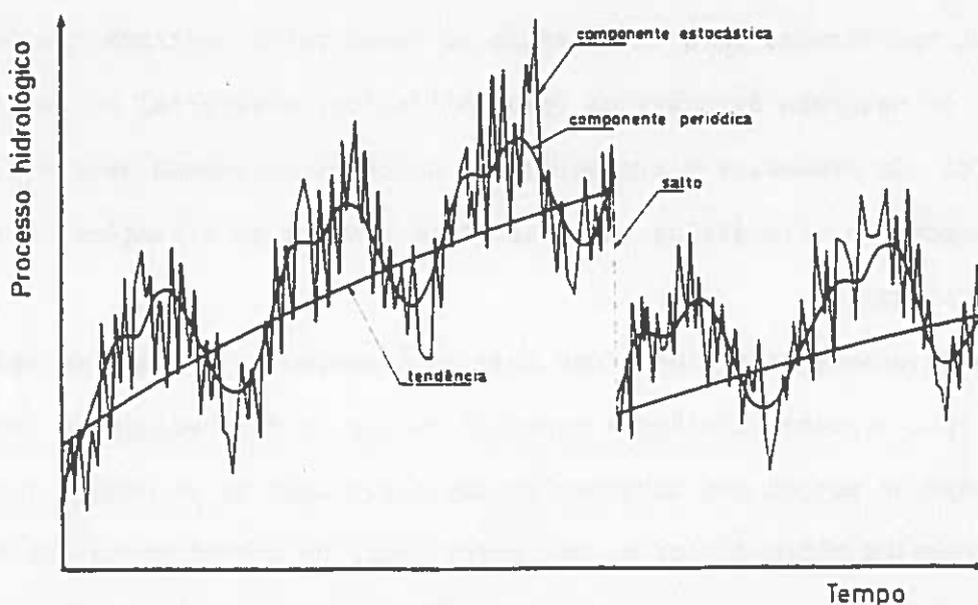


Fig. 3.5 - Principais componentes dos processos hidrológicos função do tempo

As entradas dos sistemas que representam os vários ambientes hidrológicos são portanto, nestes casos, constituídas por componentes determinísticas e estocásticas. Sobre estas entradas operam-se transformações que dão origem a saídas constituídas também por componentes determinísticas e estocásticas além de modificações determinísticas e/ou estocásticas do estado dos sistemas.

#### 4 - ESTRUTURA PERIÓDICA-ESTOCÁSTICA DOS PROCESSOS HIDROLÓGICOS FUNÇÃO DO TEMPO

##### 4.1 - Considerações gerais

Em 3 procurou-se fazer a caracterização geral dos processos hidrológicos no sistema físico globo-atmosfera, apontando-se e justificando-se algumas das suas características mais importantes com o objectivo de fundamentar fisicamente a modelação matemática destes processos, em particular dos que se desenvolvem no tempo.

Procurar-se-á agora proceder à análise da sua estrutura periódico-estocástica recorrendo à teoria matemática dos processos estocásticos.

Como se sabe um processo estocástico é um conjunto ordenado de variáveis aleatórias. Como as variáveis hidrológicas básicas são, em geral, de natureza contínua e os processos hidrológicos se desenvolvem continuamente no espaço e/ou no tempo, as variáveis aleatórias e os respectivos conjuntos que em princípio interessaria considerar na modelação matemática daqueles processos seriam também de natureza contínua.

No entanto, dificuldades teóricas e computacionais muitas vezes associadas à modelação matemática dos processos hidrológicos, assim como o tipo de dados de observação hidrológica em geral disponíveis, impõem frequentemente a necessidade de recorrer a conjuntos ordenados discretos (sucessões) de variáveis aleatórias contínuas ou discretas, os quais constituem assim um meio mais cómodo e fácil, e muitas vezes o meio possível, de realizar aquela modelação.

Quando os processos hidrológicos em estudo são função do tempo, os processos estocásticos que intervêm, em princípio, na sua modelação matemática são con

juntos ordenados (contínuos ou discretos) de variáveis aleatórias contínuas ou discretas funções do tempo, os quais muitas vezes se designam por "séries de tempo"<sup>(1)</sup>. No entanto, pelas razões já apontadas, a modelação matemática daqueles processos hidrológicos restringe-se frequentemente à utilização de sucessões de variáveis aleatórias contínuas ou discretas. Passar-se-á a designar genericamente o processo estocástico função do tempo por  $\Xi(t)$ , o qual terá sempre, como é evidente, um processo observável. O processo estocástico obtido de  $\Xi(t)$  por discretização no tempo será designado genericamente por  $X(p)$ .

O recurso generalizado à modelação matemática no estudo dos processos hidrológicos função do tempo com base na caracterização da sua estrutura periódico-estocástica e na identificação das respectivas componentes é relativamente recente pois começou a verificar-se fundamentalmente a partir dos anos 50.

Antes desta data, no entanto já se tinham desenvolvido alguns modelos matemáticos como por exemplo, o de SUDLER 1927, que consistia simplesmente no rearranjo aleatório da ordem de uma sucessão histórica de dados hidrológicos anuais de forma a obter novas sequências de dados anuais.

É precisamente este modelo que mais tarde vem a ser retomado por BARNES 1954 que o aplica ao escoamento anual admitindo que este seguia a distribuição normal e fazendo a geração das novas sequências de dados conservando a média e a variância do registo histórico. No entanto este modelo, tal como o anterior, não entrava em consideração com a estrutura de dependência no tempo dos escoamentos anuais.

Uma das primeiras utilizações dos modelos lineares auto-regressivos na modelação dos processos hidrológicos deve-se a THOMAS e FIERING 1962 que usaram o modelo linear auto-regressivo de primeira ordem para representar a dependência no tempo entre os escoamentos mensais, entrando-se assim num período de utilização

---

(1) A expressão "séries de tempo" é frequentemente utilizada em português como, aliás, a expressão "time series" é de utilização generalizada na literatura anglo-saxónica da especialidade. No entanto, as "séries de tempo" não têm nada que ver com o conceito matemático de série, motivo pelo qual se evitará utilizar esta designação.

intensiva destes modelos. Uma contribuição muito importante para este facto foi dada por YEVJEVICH 1964 que justificou fisicamente a aplicabilidade dos modelos lineares auto-regressivos aos fenómenos hidrológicos, assim como por CHOW e RAMASESHEN 1965 que fizeram com êxito a aplicação destes modelos ao fenómeno da precipitação.

Todas estas aplicações dos modelos lineares auto-regressivos baseavam-se, como se sabe, na hipótese de os processos hidrológicos se comportarem como processos estocásticos estacionários. No entanto os registos históricos de valores instantâneos, horários, diários, semanais ou mensais mostravam claramente a existência de uma estrutura periódica subjacente ao carácter aleatório desses registos, pelo que a hipótese de estacionaridade não se ajustava à prática.

Com o objectivo de representar adequadamente a estrutura periódico-estocástica dos processos hidrológicos QUIMPO 1966 usou um modelo constituído pela soma de uma função periódica com um processo estocástico e aplicou à sequência de escoamentos diários, tendo mostrado que após identificação e separação das componentes periódicas na média e no desvio padrão, a componente estocástica podia ser aproximada por um processo estocástico estacionário de segunda ordem cuja estrutura de dependência era ajustada por um modelo linear auto-regressivo de segunda ordem.

A identificação e separação das componentes periódicas, que tem sido praticamente sempre feita com recurso à análise harmónica, envolve a aplicação de métodos estatísticos adequados para escolha das harmónicas significativas, o que se tem mostrado um problema de difícil resolução. QUIMPO 1966 admitiu que, no máximo, apenas seis harmónicas eram significativas e usou a variância explicada por cada harmónica como critério de decisão acerca das harmónicas necessárias à modelação das componentes periódicas do processo. Este critério foi posteriormente retomado por YEVJEVICH 1972 que propôs um método empírico simplificado para testar a significância das das harmónicas recorrendo à soma da variância explicada por essas harmónicas e a dois valores críticos prefixados.

No que respeita à distribuição do processo estocástico independente constituído pela parte residual dos modelos lineares auto-regressivos, e após durante largos anos se ter admitido que essa distribuição era Normal, MARKOVIC 1965, MANTALAS 1967 e BONNE 1971 investigaram, para além da aplicação aos processos hidrológicos desta distribuição, a aplicação das distribuições Log-Normal, Gama (Pearson tipo III) e Log-Pearson tipo III.

Uma síntese global e actual dos conhecimentos no que respeita à estrutura periódico-estocástica dos processos hidrológicos função do tempo e à modelação matemática destes processos com vista às aplicações foi elaborada por YEVJEVICH 1972 sendo ainda de registar, como progresso significativo em relação a este trabalho, o recente estudo de TAO et al. 1976 sobre distribuições da componente estocástica independente dos processos hidrológicos.

Finalmente, e no que respeita à modelação matemática dos sistemas hidrológicos de que os processos hidrológicos são as partes fundamentais, devem referir-se, para além dos excelentes trabalhos de AMOROCHO e HART 1964, CAVADIAS 1966, KARTVELISHVILI 1967, DOOGE 1968, KISIEL 1969, DAWDY e KALININ 1970, VEMURI e VEMURI 1970, e JACKUET et al. 1971, a enorme fonte de ensinamentos, informações, resultados e referências constituída pelos relatos dos simpósios internacionais de FORT COLLINS 1967, TUCSON 1968, ILLINOIS 1969, VARSÓVIA 1971 e OTTAWA 1973.

#### 4.2 - Hipóteses básicas da análise estrutural

A utilização de modelos matemáticos na representação de processos hidrológicos (incluindo a estimação dos parâmetros desses modelos) constitui uma forma de extrair, condensar, descrever e utilizar a informação contida nos dados de observação hidrológica. Essa forma será tanto mais correcta e eficiente quanto o for a metodologia utilizada na modelação, embora esteja sempre limitada pela justeza das hipóteses de base em que assenta a referida modelação.

Na realidade, nenhuma modelação matemática de um processo ou de um sistema real pode ser mais perfeita em termos de representação da realidade do que as hi

pôteses que servem de base a essa modelação. Estas hipóteses são postuladas quase sempre a partir da experiência anterior de modelação de outros processos semelhantes, das características físicas dos processos em estudo e da compreensão geral desses processos. Daí que se considere importante explicitar e justificar convenientemente essas hipóteses de forma a conhecerem-se claramente as potenciais limitações e domínio de aplicação da modelação referida.

Seguindo de perto a metodologia proposta por YEVJEVICH 1972 as hipóteses básicas em que deve assentar a análise estrutural do processo estocástico  $\Xi(t)$  são as que se apresentam a seguir:

a) O processo  $\Xi(t)$  é composto essencialmente por componentes determinísticas que se manifestam na periodicidade dos vários parâmetros do processo (esperança matemática, variância, coeficiente de autocorrelação, etc.), e por uma componente aleatória. As componentes determinísticas periódicas constituem o que se costuma designar por ciclicidade ou periodicidade do processo (correspondendo ao sinal na nomenclatura da engenharia de comunicações), e a componente aleatória constitui o que se costuma designar por estocacidade ou aleatoriedade do processo (correspondendo ao ruído na nomenclatura da engenharia de comunicações).

Considera-se que estas componentes podem ser identificadas e separadas sem introdução de efeitos adversos para a compreensão e descrição da estrutura do processo e para a extração de informação.

b) O processo  $\Xi(t)$  pode conter também, por vezes, outras componentes determinísticas como tendências, movimentos persistentes de longa duração, saltos, etc. causados por modificações naturais ou pela acção do homem, as quais são responsáveis pela não-estacionaridade do processo. Por outro lado, os dados da observação hidrológica relativos ao processo  $\Xi(t)$  podem conter erros sistemáticos os quais são responsáveis pela inconsistência do processo.

Considera-se que a não estacionaridade e a inconsistência podem ser identificadas, separadas e removidas antes de se proceder à identificação das componentes referidas em a) e à estimação dos respectivos parâmetros.

c) Após a identificação e separação das várias componentes do processo  $\Xi(t)$ , praticamente toda a variação aleatória é atribuída à componente estocástica, ficando apenas incluída na estimativa dos parâmetros das componentes determinísticas a parte relativa ao erro de amostragem desses parâmetros dentro dos limites das melhores técnicas de estimação utilizáveis.

d) Pela separação das variáveis componentes periódicas dos diversos parâmetros do processo  $\Xi(t)$ , supõe-se que a componente estocástica é aproximadamente estacionária com uma ordem de estacionaridade correspondente aos parâmetros cujas periodicidades foram separadas.

e) Uma amostra do processo  $\Xi(t)$  pode conter ainda diversos erros de amostragem na forma de tendências de longa duração (pseudo-tendência), periodicidade de pequena frequência (pseudo-ciclicidade), períodos secos ou húmidos de duração não correspondente ao tamanho da amostra, valores extremos não correspondentes ao tamanho da amostra, etc. O recurso à informação regional obtida a partir de um conjunto de amostras de  $\Xi(t)$  relativas a vários locais dessa região e a aplicação da análise estatística podem mostrar que ocorrências deste tipo têm pequena possibilidade de se repetirem no futuro em amostras de tamanho semelhante.

Considera-se que a análise estrutural destas amostras, a sua modelação matemática e a geração de novas amostras podem ser feitas de forma a não conservar estes erros de amostragem.

f) A estimação dos parâmetros das componentes periódicas e da componente estocástica associada à modelação matemática do processo  $\Xi(t)$  está sujeita a erros de amostragem.

Considera-se que a informação regional pode contribuir significativamente para corrigir estes erros se for usada convenientemente no lugar da informação local obtida a partir de uma única amostra de  $\Xi(t)$ .

g) Ao fazer-se a análise de uma amostra do processo  $\Xi(t)$  e ao proceder-se à sua modelação e à geração de novas amostras recorre-se frequentemente à discretização no tempo do processo hidrológico natural fazendo a sua integração ou o

cálculo da sua média em intervalos de tempo de duração determinada (por exemplo hora ou dia), interessando, muitas vezes, fazer posteriormente a modelação do processo  $\Xi(t)$  e a geração de novas amostras considerando-se uma discretização correspondente a intervalos de tempo de duração superior.

Considera-se que a metodologia a utilizar deve permitir que a selecção de uma unidade de tempo básica para discretização do processo hidrológico natural não afecte a aplicabilidade dos modelos matemáticos a unidades de tempo maiores, nomeadamente mantendo as características básicas de ciclicidade e estocacidade da amostra inicial.

h) A análise estrutural de uma amostra do processo  $\Xi(t)$  deve ser feita com uma profundidade e um rigor tal que toda a informação com interesse acerca do processo hidrológico determinístico-estocástico possa ser extraída adequadamente sob a forma de um conjunto de modelos matemáticos.

i) A geração de novas amostras do processo  $\Xi(t)$  deve ser feita de forma a reproduzir todas as características básicas de interesse inferidas sobre a população a partir da amostra inicial.

j) A estimação dos parâmetros dos modelos matemáticos que descrevem o processo  $\Xi(t)$  é feita, como se disse, a partir de uma amostra disponível. Quanto maior for o número de parâmetros a estimar maior será o número de estatísticas a determinar e portanto, menor será, no conjunto, a sua confiança.

Considera-se necessário portanto, proceder a uma optimização da metodologia de modelação jogando com o número e a confiança do conjunto dos estimadores dos parâmetros referidos.

l) A componente estocástica de  $\Xi(t)$  deve ser ajustada por um modelo matemático de dependência e, a partir dele, deve identificar-se a componente aleatória independente e estacionária.

Considera-se que os modelos matemáticos de dependência devem ter uma justificação ou fundamento físico em que se apoiem.

#### 4.3 - Caracterização da estrutura periódica-estocástica dos processos

Considere-se um processo hidrológico função do tempo  $\Xi(t)$  e admita-se que ele é constituído por componentes determinísticas  $\Theta(t)$  que se manifestam como periodicidades dos parâmetros do processo e por uma componente aleatória  $T(t)$  de acordo com o seguinte modelo

$$\Xi(t) = \Theta(t) + T(t) \quad (4.1)$$

Como já se referiu em 4.2 ao admitir-se um modelo deste tipo está-se a partir da hipótese de que quaisquer outras componentes determinísticas foram previamente removidas.

Considere-se também que se dispõe de informação relativa ao processo  $\Xi(t)$  na forma de uma amostra (realização) de um processo discretizado no tempo  $X(p)$  derivado de  $\Xi(t)$ , cujos valores representem a média de  $\Xi(t)$  em intervalos de tempo iguais e de duração  $\Delta t$  centrados em  $p$  e separados de  $\Delta t$  (Fig. 4.1) isto é,

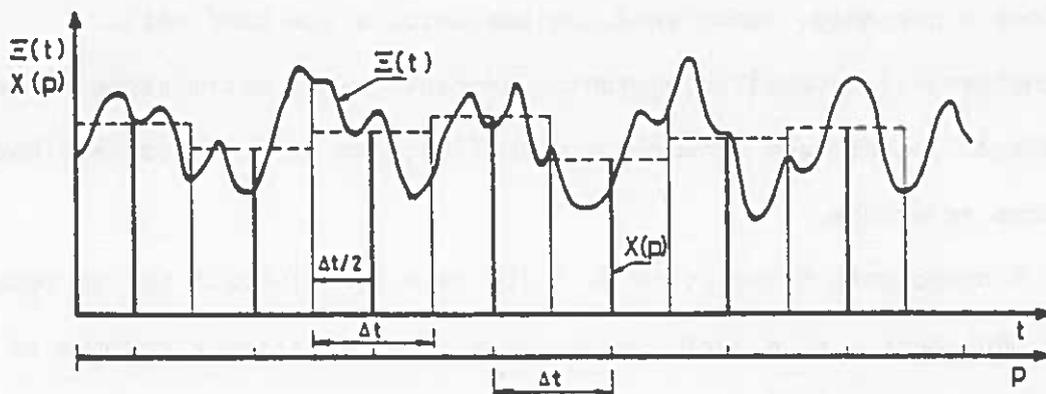


Fig. 4.1 - Discretização no tempo do processo hidrológico  $\Xi(t)$

$$X(p) = \frac{1}{\Delta t} \int_{p - \Delta t/2}^{p + \Delta t/2} \Xi(t) dt = \bar{\Xi}_{\Delta t}(p) \quad (4.2)$$

Os valores observados de  $X(p)$  poderão ser afectados de erros sistemáticos mas admite-se, como também já se referiu em 4.2 que estes erros foram previamente removidos.

O processo  $X(p)$  é também, em geral, constituído por componentes determinísticas periódicas  $T(p)$  e por uma componente aleatória  $U(p)$ , isto é,

$$X(p) = T(p) + U(p) \quad (4.3)$$

em que

$$T(p) = \frac{1}{\Delta t} \int_{p - \Delta t/2}^{p + \Delta t/2} \Theta(t) dt = \bar{\Theta}_{\Delta t}(p) \quad (4.4)$$

e

$$U(p) = \frac{1}{\Delta t} \int_{p - \Delta t/2}^{p + \Delta t/2} \Upsilon(t) dt = \bar{\Upsilon}_{\Delta t}(p) \quad (4.5)$$

Como é evidente o processo  $X(p)$  conserva todas as componentes periódicas de  $\Xi(t)$  com períodos maiores do que  $\Delta t$ , mas perde as componentes periódicas com períodos menores. Por outro lado, a aleatoriedade de  $\Xi(t)$  em torno da sua média no intervalo  $\Delta t$  deixa também de estar presente no processo  $X(p)$ . De qualquer forma a relação definida entre  $X(p)$  e  $\Xi(t)$  permite estabelecer certas relações de muito interesse entre as respectivas distribuições e parâmetros.

Assim, por exemplo, a esperança matemática de  $X(p)$  relativa à posição  $p$  é a esperança matemática da média de  $\Xi(t)$  no intervalo  $(p - \Delta t/2, p + \Delta t/2)$ , isto é,

$$E[X(p)] = \mu_X(p) = E\left[\frac{1}{\Delta t} \int_{p - \Delta t/2}^{p + \Delta t/2} \Xi(t) dt\right] = E\left[\bar{\Xi}_{\Delta t}(p)\right] = \mu_{\bar{\Xi}_{\Delta t}}(p) \quad (4.6)$$

assim como, também, a esperança matemática de  $X(p)$  relativa à posição  $p$  é a média no intervalo  $(p - \Delta t/2, p + \Delta t/2)$  da esperança matemática de  $\Xi(t)$ , isto é

$$E[X(p)] = \mu_X(p) = E\left[\frac{1}{\Delta t} \int_{p - \Delta t/2}^{p + \Delta t/2} \Xi(t) dt\right] = \frac{1}{\Delta t} \int_{p - \Delta t/2}^{p + \Delta t/2} E[\Xi(t)] dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{p - \Delta t/2}^{p + \Delta t/2} \mu_{\Xi}(t) dt \quad (4.7)$$

podendo estabelecer-se idênticas relações para outros parâmetros.

Será portanto na análise estrutural de  $X(p)$  feita a partir de uma sua realização e nas influências sobre este processo que se irão basear as inferências sobre  $\Xi(t)$ .

Por uma questão de facilidade de tratamento dos dados disponíveis é frequentemente representar os pontos  $p$  da amostra de  $X(p)$  pelo par  $(i, j)$  em que  $i = 1, 2, \dots, m$  representa a posição de  $p$  dentro do período básico  $m$  do processo, e  $j = 1, 2, \dots, n$  representa o período a que se refere a posição  $p$ . O número total de pontos da amostra é, nestas circunstâncias  $m n$ . Na maior parte dos processos hidrológicos  $m$  é igual a 1 ano (12 meses, 52 semanas, 365 dias, etc.) e  $i$  representa o mês, a semana, o dia, etc., de acordo com o intervalo  $\Delta t$  de discretização.

De acordo com esta representação, e designando por esperança matemática de  $X(i, j)$  relativa à posição  $i$  (o mesmo se podendo dizer para outro parâmetro) o valor esperado de  $X(i, j)$  que, em virtude da periodicidade do processo, é igual para o mesmo  $i$  qualquer que seja  $j$ , verifica-se que aquela esperança matemática é igual à esperança matemática da média de  $\Xi(t)$  no intervalo  $(i - \Delta t/2, i + \Delta t/2)$ , isto é,

$$E [X(i, j)] = \mu_X(i) = E \left[ \bar{\Xi}_{\Delta t}(i) \right] = \mu_{\bar{\Xi}_{\Delta t}}(i) \quad (4.8)$$

o mesmo sucedendo para a variância, ou seja,

$$\text{Var} [X(i, j)] = \sigma_X^2(i) = \text{Var} \left[ \bar{\Xi}_{\Delta t}(i) \right] = \sigma_{\bar{\Xi}_{\Delta t}}^2(i) \quad (4.9)$$

assim como para os restantes parâmetros da distribuição de  $X(i, j)$  e de  $\Xi(t)$ .

De acordo com as hipóteses apresentadas em 4.2 os parâmetros  $\mu_X(i)$ ,  $\sigma_X^2(i)$ , etc. são funções periódicas de  $i$ , e pela separação dos momentos periódicos de ordem 1, 2, ..., a parte restante de  $X(i, j)$  constitui um processo estocástico estacionário respectivamente de ordem 1, 2, ...,.

O primeiro passo da análise estrutural de  $\Xi(t)$  vai ser portanto identificar e separar os seus parâmetros periódicos a partir da amostra de  $X(i, j)$ .

#### 4.4 - Identificação das componentes periódicas do processo

Dois métodos têm sido frequentemente utilizados na prática para identificar as componentes periódicas do processo  $X(i, j)$ : o método paramétrico e o método não paramétrico (YEVJEVICH 1972).

a) Método não paramétrico

O método não paramétrico de identificação dos parâmetros periódicos de  $X(i, j)$ , genericamente representados por  $v_X(i)$ , consiste na estimação desses parâmetros recorrendo aos correspondentes valores estatísticos  $V_X(i)$  da amostra de  $X(i, j)$ .

Assim, por exemplo, a identificação da média  $\mu_X(i)$  e da variância  $\sigma_X^2(i)$  de  $X(i, j)$  faz-se à custa respectivamente do valor médio estatístico  $M_X(i)$  e da variância estatística  $S_X^2(i)$  em que

$$M_X(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X(i, j) \quad (4.10)$$

$$S_X^2(i) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left[ X(i, j) - M_X(i) \right]^2 \quad (4.11)$$

A utilização do método não paramétrico para detectar e remover a periodicidade na média e na variância do  $X(i, j)$  requer portanto  $2m$  estatísticas,  $m$  para cada um dos parâmetros.

Dois tipos principais de deficiências podem ser apontadas a este método. Por um lado, no caso de  $X(i, j)$  se referir, por exemplo, a valores mensais, diários ou horários, o número de estatísticas ascende respectivamente a 104, 730 (732 se o ano é bissexto) ou 17 520 (17 568 se o ano é bissexto) o que é um número bastante grande. Por outro lado, como o número de anos da amostra é, em geral, pequeno, o erro quadrado médio dos estimadores dos parâmetros é relativamente elevado.

A questão que se põe é, então, encontrar um método que permita identificar e separar os parâmetros periódicos em que as deficiências apontadas sejam atenuadas. É o que se procura fazer com o método paramétrico.

b) Método paramétrico

Este método permite identificar qualquer parâmetro periódico  $v_X(i)$  recorrendo à descrição da sua periodicidade com base na série de Fourier.

Assim, sendo

$$v_X(i) = \alpha_0 + \sum_{r=1}^h \left( \alpha_r \cos \frac{2\pi ir}{m} + \beta_r \sin \frac{2\pi ir}{m} \right) \quad (4.12)$$

com

$$\alpha_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_X(i) = M_{v_X} \quad (4.13)$$

$$\alpha_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m v_X(i) \cos \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.14)$$

$$\beta_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m v_X(i) \sin \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.15)$$

e em que  $h = \frac{m}{2}$  se  $m$  é par, ou  $h = \frac{m-1}{2}$  se  $m$  é ímpar, estimando os parâmetros  $\alpha_0$ ,  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  a partir dos valores estatísticos  $v_X(i)$  da amostra de  $X(i, j)$  relativos ao parâmetro  $v_X(i)$ , e substituindo na expressão de  $v_X(i)$  obter-se-á um estimador paramétrico  $V_X^*(i)$  do parâmetro  $v_X(i)$  em estudo<sup>(1)</sup>.

Se, por exemplo, o parâmetro em estudo for a média, isto é, se  $v_X(i) = \mu_X(i)$  e se se estimarem os coeficientes  $\alpha_0$ ,  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  recorrendo às médias estatísticas da amostra de  $X(i, j)$  relativas à posição  $i$  obtem-se para estimadores destes parâmetros

$$A_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) = M_{M_X} \quad (4.16)$$

(1) Note-se que  $V_X(i)$  pode ser qualquer estimador pontual de  $v_X(i)$  e não apenas o seu correspondente valor estatístico.

$$A_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) \cos \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.17)$$

$$B_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) \sin \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.18)$$

os quais entrando na expressão de  $\mu_X(i)$  conduzirão ao seguinte estimador paramétrico  $M_X^*(i)$  de  $\mu_X(i)$

$$M_X^*(i) = A_0 + \sum_{1 \leq r \leq h} (A_r \cos \frac{2\pi ir}{m} + B_r \sin \frac{2\pi ir}{m}) \quad (4.19)$$

Para determinar o estimador paramétrico  $S_X^{2*}(i)$  da variância  $\sigma_X^2(i)$  pelo método paramétrico seguir-se-ia o mesmo caminho, obtendo-se facilmente para estimadores de  $\alpha_0$ ,  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  as seguintes estatísticas

$$A_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_X^2(i) = M_{S_X^2} \quad (4.20)$$

$$A_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m S_X^2(i) \cos \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.21)$$

$$B_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m S_X^2(i) \sin \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.22)$$

pelo que

$$S_X^{2*}(i) = A_0 + \sum_{1 \leq r \leq h} (A_r \cos \frac{2\pi ir}{m} + B_r \sin \frac{2\pi ir}{m}) \quad (4.23)$$

o mesmo se podendo fazer para qualquer outro parâmetro.

Nas expressões que se acabaram de apresentar para estimadores paramétricos de  $\nu_X(i)$ ,  $r$  só toma, em geral,  $h^* < h$  valores, em que  $h^*$  representa o número de harmônicas significativas para descrever a periodicidade de  $\nu_X(i)$ , isto é, o

número de harmônicas cujas amplitudes são estatisticamente diferentes das que se obteriam da amostra de  $X(i, j)$  se o processo não tivesse qualquer componente periódica. A identificação das harmônicas significativas é feita de acordo com adequados métodos estatísticos que se referem em 4.5.

Como já se viu, para ajustar uma série de Fourier a  $m$  pontos, são necessários, no máximo,  $m/2$  harmônicas se  $m$  é par, ou  $\frac{m-1}{2}$  harmônicas se  $m$  é ímpar.

Assim, por exemplo, se  $X(i, j)$  corresponder a valores mensais, semanais, diários ou horários o número máximo de harmônicas que se podem utilizar para ajustar uma série de Fourier aos valores  $V_X(i)$  calculados a partir da amostra de  $X(i, j)$  é respectivamente 6, 26, 182 (183 se o ano é bissexto) e 4380 (4392 se o ano é bissexto).

No entanto a prática tem mostrado que, em relação aos processos hidrológicos, o número máximo de harmônicas significativas é geralmente 6 podendo ir, raramente, até 12 no caso de valores diários ou horários, o que conduz a uma enorme economia de estatísticas para estimar os vários parâmetros periódicos  $v_X(i)$  quando se compara o método paramétrico com o método não paramétrico.

Assim, enquanto, como se viu, para identificar pelo método não paramétrico a periodicidade na média e na variância de  $X(i, j)$  quando o intervalo de discretização é a semana o dia ou a hora, eram necessárias, respectivamente 104, 730 (732 se o ano é bissexto) ou 17 520 (17 568 se o ano é bissexto), utilizando o método paramétrico, mesmo que o número de harmônicas significativas seja 12, o número é apenas, de 50 em qualquer dos casos.

Outra vantagem do método paramétrico em relação ao método não paramétrico diz respeito à diminuição do erro quadrado médio do estimador de  $v_X(i)$ .

Na realidade a experiência tem mostrado que a periodicidade dos vários parâmetros dos processos hidrológicos é geralmente uma função regular do tempo o que certamente resulta do facto de a energia solar radiante no topo da atmosfera, principal responsável pelo estabelecimento do ciclo hidrológico, ser uma função regular do tempo. Daí não será de estranhar que quando se calculam os valores es

estatísticos  $V_X(i)$  correspondentes aos parâmetros  $v_X(i)$  seja notório o carácter cada vez mais regular de  $V_X(i)$  à medida que o tamanho da amostra cresce.

Assim, o ajustamento de uma série de Fourier aos valores de  $V_X(i)$  para estimar  $v_X(i)$  em vez de tomar directamente aqueles valores da amostra tem um fundamento físico importante e corresponde, por outro lado, a atribuir à componente estocástica a maior parte dos erros de amostragem de  $X(i, j)$ , de acordo com a hipótese feita em 4.2.

#### 4.5 - Determinação do número de harmónicas significativas para descrever as componentes periódicas do processo

Como se viu em 4.4 o parâmetro periódico genérico  $v_X(i)$  pode ser estimado pelo método paramétrico usando o estimador

$$V_X^*(i) = A_0 + \sum_{1 \leq r \leq h} (A_r \cos \frac{2\pi i r}{m} + B_r \sen \frac{2\pi i r}{m}) \quad (4.24)$$

em que

$$A_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_X(i) = M_{V_X} \quad (4.25)$$

$$A_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m V_X(i) \cos \frac{2\pi i r}{m} \quad (4.26)$$

$$B_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m V_X(i) \sen \frac{2\pi i r}{m} \quad (4.27)$$

YEVJEVICH 1972 apresenta três métodos para determinar as harmónicas significativas de  $V_X^*(i)$ : o método de Fisher aplicável a um processo estocástico constituído pela soma de uma componente periódica com uma componente aleatória normal e independente (FISHER 1950a e 1950b); um método aproximado que se baseia numa propriedade do periodograma acumulado de  $V_X^*(i)$ ; e um método empírico aproximado

que utiliza as primeiras  $h \leq h$  harmônicas até que uma dada percentagem previamente fixada da variância estatística de  $V_X(i)$  seja explicada.

Dadas as dificuldades teóricas e práticas na aplicação dos dois primeiros métodos aos processos hidrológicos que frequentemente ocorrem na natureza e os resultados perfeitamente aceitáveis para as aplicações que geralmente se conseguem obter com o terceiro método, será este que se adoptará.

Considere-se então que se dispõe dos  $m$  valores estatísticos  $V_X(i)$ . A série de Fourier que passa por estes  $m$  valores é, como se viu,

$$V_X(i) = M_{V_X} + \sum_{r=1}^h \left( A_r \cos \frac{2\pi ir}{m} + B_r \sin \frac{2\pi ir}{m} \right) \quad (4.28)$$

em que  $h = \frac{m}{2}$  se  $m$  é par, ou  $h = \frac{m-1}{2}$  se  $m$  é ímpar,

Designando a harmônica  $r$  por  $H_r$  isto é

$$H_r(i) = A_r \cos \frac{2\pi ir}{m} + B_r \sin \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.29)$$

ter-se-á

$$V_X(i) = M_{V_X} + \sum_{r=1}^h H_r(i) \quad (4.30)$$

e o valor médio estatístico e a variância estatística de  $H_r(i)$ , serão, como se sabe,

$$M_{H_r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m H_r(i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( A_r \cos \frac{2\pi ir}{m} + B_r \sin \frac{2\pi ir}{m} \right) = 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} S_{H_r}^2 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m H_r^2(i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( A_r \cos \frac{2\pi ir}{m} + B_r \sin \frac{2\pi ir}{m} \right)^2 = \\ &= \frac{A_r^2 + B_r^2}{2} = \frac{C_r^2}{2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Por outro lado o valor médio e a variância estatísticos  $V_X(i)$  serão, como se sabe

$$M_{V_X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_X(i) \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} S_{V_X}^2 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ V_X(i) - M_{V_X} \right]^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{r=1}^h H_r \right]^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^h \left[ A_r \cos \frac{2\pi i r}{m} + B_r \sin \frac{2\pi i r}{m} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^h (A_r^2 + B_r^2) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^h C_r^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

A questão que se põe é saber quantas e quais das  $h$  harmônicas se distinguem estatisticamente das que se obteriam se  $V_X(i)$  não fosse uma função periódica, isto é, se  $V_X(i)$  tomasse valores puramente aleatórios.

Uma vez que a relação

$$\Delta P_r = \frac{S_{H_r}^2}{S_{V_X}^2} = \frac{C_r^2}{\sum_{r=1}^h C_r^2} \quad (4.35)$$

representa a parte da variância estatística de  $V_X(i)$  que é explicada pela harmônica  $H_r$ , ordenando por ordem decrescente os valores destas relações obtidas a partir da amostra disponível podem calcular-se as suas somas parciais  $P_r$  relativas às primeiras  $r=1, 2, \dots, h$ , harmônicas de maior amplitude, isto é,

$$P_r = \sum_{s=1}^r P_s \quad (4.36)$$

em que, como se sabe,  $h = \frac{m}{2}$  se  $m$  é par, ou  $h = \frac{m-1}{2}$  se  $m$  ímpar, representando portanto  $P_r$  a parte da variância de  $V_X(i)$  que é explicada pelas  $r$  harmônicas com maior amplitude.

O método empírico aproximado consistirá na escolha de dois valores críticos  $P_{\min}$  e  $P_{\max} = 1 - P_{\min}$  tal que

- a) se  $P_1 \leq P_{\min}$  então não há harmônicas significativas;
- b) se  $P_{\min} \leq P_r \leq P_{\max}$  então pelo menos  $r$  harmônicas são significativas;
- c) se  $P_r = P_{\max}$  então  $h^* = r$  harmônicas são significativas;
- d) se  $P_r > P_{\max}$  então  $h^* < r$  harmônicas são significativas;

Neste último caso, o número  $h^*$  é tal que  $P_{\min} < P_{h^*-1} < P_{\max}$  e  $P_{h^*} > P_{\max}$ .

Os valores de  $P_{\min}$  e  $P_{\max}$  são dados pelas expressões empíricas

$$P_{\min} = a \sqrt{\frac{m}{bn}} \quad (4.37)$$

$$P_{\max} = 1 - a \sqrt{\frac{m}{bn}} \quad (4.38)$$

em que  $a$  é uma constante empírica que se toma igual a 0.033,  $b$  é a maior ordem dos momentos estatísticos utilizados no cálculo de  $V_X(i)$  e  $m$  e  $n$  são respectivamente, como se sabe, o período fundamental e o número de períodos da amostra, considerando-se aquelas expressões aplicáveis para  $12 \leq m \leq 365$  e para  $10 \leq n \leq 160$ .

#### 4.6 - Separação das componentes periódicas do processo

Uma vez identificadas as componentes periódicas presentes nos parâmetros do processo a sua separação far-se-á, em geral, com facilidade, isolando-se assim a componente estocástica.

No que respeita à média e ao desvio padrão três casos se admitem frequentemente na prática no que se refere aos processos hidrológicos: média periódica e desvio padrão constante, média e desvio padrão periódicos e proporcionais, e média e desvio padrão periódicos mas não proporcionais (YEVJEVICH 1972).

a) Média periódica e desvio-padrão constante

Neste caso o processo  $X(i, j)$  pode representar-se pelo seguinte modelo matemático

$$X(i, j) = \mu_X(i) + \sigma_X \Psi(i, j) \quad (4.39)$$

em que  $\Psi(i, j)$  é um processo estocástico de média zero e variância um.

Determinando as  $h^*$  harmônicas significativas do estimador paramétrico  $M_X^*(i)$  de  $\mu_X(i)$

$$M_X^*(i) = A_0 + \sum_{1 \leq r \leq h} (A_r \cos \frac{2\pi ir}{m} + B_r \sen \frac{2\pi ir}{m}) \quad (4.40)$$

em que, como já se viu,

$$A_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) = M_{M_X} \quad (4.41)$$

$$A_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) \cos \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.42)$$

$$B_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) \sen \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.43)$$

a componente estocástica  $\Psi(i, j)$  poderá ser estimada por

$$Y(i, j) = \frac{X(i, j) - M_X^*(i)}{S_X} \quad (4.44)$$

em que  $S_X$  é o desvio-padrão estatístico da amostra de  $X(i, j)$ .

Deve notar-se que  $Y(i, j)$  não tem média zero e variância um porque, em geral,

$$\begin{aligned} E[X(i, j)] &\neq E[M_X^*(i)] \\ \text{Var}[M_X^*(i)] &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Se se quiser obter um processo aproximadamente padronizado poderá estimar-se  $\mu_Y$  e  $\sigma_Y^2$  usando os correspondentes valores estatísticos, isto é,

$$M_Y = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m Y(i, j) \quad (4.46)$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left[ Y(i, j) - M_Y \right]^2 \quad (4.47)$$

e calcula-se

$$Z(i, j) = \frac{Y(i, j) - M_Y}{S_Y} \quad (4.48)$$

#### b) Média e desvio-padrão periódicos e proporcionais

Neste caso  $X(i, j)$  pode representar-se pelo seguinte modelo matemático

$$X(i, j) = \mu_X(i) + \sigma_X(i) \Psi(i, j) \quad (4.49)$$

em que  $\Psi(i, j)$  é um processo estocástico de média zero e variância um.

Uma vez que o desvio padrão é proporcional à média

$$\sigma_X(i) = \gamma \mu_X(i) \quad (4.50)$$

vem

$$X(i, j) = \mu_X(i) + \gamma \mu_X(i) \Psi(i, j) = \mu_X(i) \left[ 1 + \gamma \Psi(i, j) \right] \quad (4.51)$$

donde se obtém

$$X'(i, j) = \mu_X'(i) + \Psi'(i, j) \quad (4.52)$$

em que

$$X'(i, j) = \ln X(i, j) \quad \text{para } X(i, j) > 0 \quad (4.53)$$

$$\mu_X'(i) = \ln \mu_X(i) \quad \text{para } \mu_X(i) > 0 \quad (4.54)$$

$$\Psi'(i, j) = \ln \left[ 1 + \gamma \Psi(i, j) \right] \quad \text{para } 1 + \gamma \Psi(i, j) > 0 \quad (4.55)$$

Cai-se assim no caso anterior podendo a componente estocástica  $\psi^i(i, j)$  ser estimada por

$$Y^i(i, j) = X^i(i, j) - M_X^{i*}(i) \quad (4.56)$$

em que  $M_X^{i*}(i)$  é o estimador paramétrico de  $\mu_X^i(i) = \ln \mu_X(i)$ , isto é,

$$M_X^{i*}(i) = A_0^i + \sum_{1 \leq r \leq h} (A_r^i \cos \frac{2\pi ir}{m} + B_r^i \sen \frac{2\pi ir}{m}) \quad (4.57)$$

com

$$A_0^i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln M_X^i(i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m M_X^i(i) = M_{M_X^i} \quad (4.58)$$

$$A_r^i = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m M_X^i(i) \cos \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.59)$$

$$B_r^i = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m M_X^i(i) \sen \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.60)$$

a partir da qual a componente estocástica  $\psi^i(i, j)$  se pode estimar facilmente por

$$Y^i(i, j) = \frac{e^{Y^i(i, j)} - 1}{Y} \quad (4.61)$$

A padronização de  $Y^i(i, j)$  pode fazer-se também como no caso anterior.

Para verificar a hipótese de proporcionalidade entre  $\sigma_X^i(i)$  e  $\mu_X^i(i)$  YEVJEVICH 1972 sugere vários testes que podem ser seguidos.

Um teste será determinar os  $m$  coeficientes de variação estatísticos  $G_X^i(i)$  em que

$$G_X^i(i) = \frac{S_X^i(i)}{M_X^i(i)} \quad (4.62)$$

e ajustar a série de Fourier aos respectivos valores verificando se existem ou não harmônicas significativas. Se não existirem então  $\sigma_X^i(i)$  considera-se propor

cional a  $\mu_X(i)$  sendo  $\gamma$  estimado por  $M_{G_X}$  em que

$$M_{G_X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m G_X(i) \quad (4.63)$$

Outro teste será, por exemplo, verificar se os  $m$  valores de  $G_X(i)$  se distinguem estatisticamente de uma constante, o que envolve a estimação da média e da variância de  $G_X(i)$  e outros cálculos relativamente laboriosos.

Um método simples será considerar o modelo de regressão linear

$$S_X(i) = \gamma_1 + \gamma_2 M_X(i) + N(i) \quad (4.64)$$

em que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são os parâmetros do modelo e  $N(i)$  é uma variável aleatória de média zero e variância  $\sigma^2$  desconhecida. Estimando  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  pelo método dos mínimos quadrados obter-se-ão os estimadores  $G_1$  e  $G_2$  em que

$$G_1 = M_{S_X} - G_2 M_{M_X} \quad (4.65)$$

$$G_2 = \frac{\sum_{i=1}^m [S_X(i) - M_{S_X}] [M_X(i) - M_{M_X}]}{\sum_{i=1}^m [M_X(i) - M_{M_X}]^2} \quad (4.66)$$

com

$$M_{M_X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) \quad (4.67)$$

$$M_{S_X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_X(i) \quad (4.68)$$

Por outro lado o coeficiente de correlação  $\rho_{S_X M_X}$  entre  $S_X(i)$  e  $M_X(i)$  pode ser estimado por  $R_{S_X M_X}$  em que

$$R_{S_X M_X} = \frac{\sum_{i=1}^m [S_X(i) - M_{S_X}] [M_X(i) - M_{M_X}]}{\left\{ \sum_{i=1}^m [S_X(i) - M_{S_X}]^2 \sum_{i=1}^m [M_X(i) - M_{M_X}]^2 \right\}^{1/2}} \quad (4.69)$$

Se  $R_{S_X M_X}$  tiver um valor próximo de 1 e  $G_1$  tiver um valor próximo de zero será razoável aceitar-se a hipótese de proporcionalidade entre  $\sigma_X(i)$  e  $\mu_X(i)$  com a constante de proporcionalidade  $\gamma = \gamma_2$  estimada por  $G_2$ .

c) Média e desvio padrão periódicos mas não proporcionais

Neste caso  $X(i, j)$  pode representar-se pelo seguinte modelo matemático

$$X(i, j) = \mu_X(i) + \sigma_X(i) \Psi(i, j) \quad (4.70)$$

em que  $\Psi(i, j)$  é um processo estocástico de média zero e variância um.

Recorrendo, tal como nos casos anteriores, aos estimadores paramétricos de  $\mu_X(i)$  e  $\sigma_X(i)$  ter-se-ã

$$M_X^*(i) = A_{1_0} + \sum_{1 \leq r \leq h} (A_{1_r} \cos \frac{2\pi i r}{m} + B_{1_r} \sen \frac{2\pi i r}{m}) \quad (4.71)$$

$$S_X^*(i) = A_{2_0} + \sum_{1 \leq r \leq h} (A_{2_r} \cos \frac{2\pi i r}{m} + B_{2_r} \sen \frac{2\pi i r}{m}) \quad (4.72)$$

em que, como se sabe,

$$A_{1_0} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) = M_{M_X} \quad (4.73)$$

$$A_{1_r} = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) \cos \frac{2\pi i r}{m} \quad (4.74)$$

$$B_{1_r} = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m M_X(i) \sen \frac{2\pi i r}{m} \quad (4.75)$$

$$A_{2_0} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_X(i) = M_{S_X} \quad (4.76)$$

$$A_{2_r} = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m S_X(i) \cos \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.77)$$

$$B_{2_r} = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m S_X(i) \sin \frac{2\pi ir}{m} \quad (4.78)$$

Como é evidente o número de harmônicas significativas em cada caso, respectivamente  $h_1^* < h$  e  $h_2^* < h$  pode não ser o mesmo.

A componente estocástica  $\Psi(i, j)$  pode assim ser estimada por

$$Y(i, j) = \frac{X(i, j) - M_X^*(i)}{S_X^*(i)} \quad (4.79)$$

A padronização de  $Y(i, j)$  pode fazer-se também como nos casos anteriores.

Note-se que em vez de ajustar a série de Fourier aos valores de  $S_X(i)$  de forma a obter o estimador  $S_X^*(i)$  de  $\sigma_X(i)$  para calcular  $Y(i, j)$ , se poderia ter ajustado a série de Fourier aos valores de  $S_X^2(i)$ , obtendo-se assim directamente o estimador  $S_X^{2*}(i)$  de  $\sigma_X^2(i)$ , entrando depois com  $\sqrt{S_X^{2*}(i)}$  como estimador de  $\sigma_X(i)$  para calcular  $Y(i, j)$ .

#### 4.7 - Caracterização da componente estocástica do processo

Como se viu em 4.6 o processo estocástico  $\Psi(i, j)$  que se obtém de  $X(i, j)$  por remoção das suas periodicidades na média e no desvio-padrão, pode ser estimado por  $Y(i, j)$ . É frequente admitir-se, em Hidrologia, que o processo  $\Psi(i, j)$ , e portanto o processo  $Y(i, j)$ , é um processo estocástico estacionário de segunda ordem, independente ou com uma determinada estrutura de dependência. Esta hipótese, contudo, não se verifica muitas vezes na prática, como mostram, por exem

plo, ROESNER e YEVJEVICH 1966 e QUIMPO 1967, pois para além das periodicidades na média e no desvio padrão (e portanto na variância) o processo  $\Psi(i, j)$  pode apresentar periodicidades na covariância (e portanto no coeficiente de auto-correlação).

Para identificar a componente estocástica de  $X(i, j)$  representada por um processo estocástico estacionário de segunda ordem haverá, portanto, que remover as periodicidades nos coeficientes de autocorrelação para além das periodicidades na média e no desvio-padrão.

Entre os modelos de dependência que têm sido utilizados com sucesso em Hidrologia os modelos lineares auto-regressivos são, sem dúvida, os de aplicação mais generalizada (YEVJEVICH 1964), embora os processos hidrológicos possam, na realidade, em muitos casos, não ser lineares (YEVJEVICH 1972).

Se se fizer a padronização aproximada de  $Y(i, j)$  estimando a sua média  $\mu_Y$  e o seu desvio padrão  $\sigma_Y$  pelos respectivos valores estatísticos  $M_Y$  e  $S_Y$  e calculando

$$Z(i, j) = \frac{Y(i, j) - M_Y}{S_Y} \quad (4.80)$$

o processo  $Z(i, j)$  pode ser representado pelo modelo linear auto-regressivo de ordem  $q$

$$Z(i, j) = \sum_{k=1}^q \lambda_k(i) Z(i-k, j) + \phi(i, j) \quad (4.81)$$

em que os  $\lambda_k(i)$  são os coeficientes de auto-regressão,  $\phi(i, j)$  é um processo estocástico estacionário de segunda ordem com média e covariância zero e com desvio-padrão  $\sigma_\phi(i)$  habitualmente designado por "ruído branco". Deve notar-se que na expressão anterior, quando  $i-k < 0$  deve-se substituir  $Z(i-k, j)$  por  $Z(m+i-k, j-1)$ .

O modelo linear auto-regressivo de ordem  $q$  pode também escrever-se, como é evidente, da seguinte forma

$$Z(i, j) = \sum_{k=1}^q \lambda_k(i) Z(i-k, j) + \sigma_\phi(i) \phi'(i, j) \quad (4.82)$$

em que  $\phi'(i, j)$  é um processo estocástico estacionário de segunda ordem com média e covariância zero e com variância um.

Os coeficientes  $\lambda_k(i)$  podem exprimir-se em função dos coeficientes de auto-correlação  $\rho_k(i)$  de  $Z(i, j)$  em que, como se sabe,

$$\rho_k(i) = \frac{\text{Cov}[Z(i, j), Z(i-k, j)]}{\left\{ \text{Var}[Z(i, j)] \text{Var}[Z(i+k, j)] \right\}^{1/2}} \quad (4.83)$$

os quais, em geral são funções periódicas de  $i$ , pelo que os coeficientes  $\lambda_k(i)$  também o são.

Note-se que, neste caso, como  $E[Z(i, j)] = 0$  e  $\text{Var}[Z(i, j)] = 1$  se terá, simplesmente

$$\rho_k(i) = \text{Cov}[Z(i, j), Z(i+k, j)] = E[Z(i, j), Z(i+k, j)] \quad (4.84)$$

Também na expressão anterior, quando  $i+k > m$  deve substituir-se  $Z(i+k, j)$  por  $Z(i+k-m, j-1)$ .

O desvio-padrão  $\sigma_\phi(i)$  é uma função periódica de  $i$ , dada por (YEVJEVICH 1972)

$$\sigma_\phi(i) = \left[ 1 - \sum_{k=1}^q \lambda_k^2(i) - 2 \sum_{u>v}^q \lambda_u(i) \lambda_v(i) \rho_{u-v}(i) \right]^{1/2} \quad (4.85)$$

Na maioria das aplicações a ordem  $q$  do modelo de dependência não ultrapassa a terceira, sendo vantajoso recorrer a modelos de ordem superior apenas no caso em que o tamanho da amostra é suficientemente grande, o que raramente acontece em relação aos processos hidrológicos.

As expressões de  $\lambda_k(i)$  em função de  $\rho_k(i)$  podem determinar-se, para os modelos lineares auto-regressivos de cada ordem  $q$ , multiplicando ambos os membros

da equação do modelo (equação 4.81 sucessivamente por  $Z(i-k, j)$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , e calculando as covariâncias de ambos os membros da nova equação tomando em consideração que  $\text{Cov } Z(i-k, j) (i, j) = 0$  e  $\text{Var } Z(i, j) = 1$ , obtendo-se assim um sistema de  $q$  equações que podem ser resolvidas em ordem a  $\lambda_k(i)$ ,  $k=1, 2, \dots, q$  (YEVJEVICH 1972).

Assim, para os modelos auto-regressivos até à terceira ordem os parâmetros  $\lambda_k(i)$  são dados por:

a) Modelo linear auto-regressivo de primeira ordem ( $m = 1$ )

$$\lambda_1(i) = \rho_1(i-1) \quad (4.86)$$

b) Modelo linear auto-regressivo de segunda ordem ( $m = 2$ )

$$\lambda_1(i) = \left[ \rho_1(i-1) - \rho_1(i-2) \rho_2(i-2) \right] / \Omega_2 \quad (4.87)$$

$$\lambda_2(i) = \left[ \rho_2(i-2) - \rho_1(i-1) \rho_1(i-2) \right] / \Omega_2 \quad (4.88)$$

$$\text{com } \Omega_2 = 1 - \rho_1^2(i-2) \quad (4.89)$$

c) Modelo linear auto-regressivo de terceira ordem ( $m = 3$ )

$$\begin{aligned} \lambda_1(i) = & \left\{ \rho_1(i-2) \left[ 1 - \rho_1^2(i-3) \right] + \rho_1(i-3) \rho_1(i-2) \rho_3(i-3) - \right. \\ & - \rho_1(i-2) \rho_2(i-2) - \rho_2(i-3) \rho_3(i-3) + \\ & \left. + \rho_1(i-3) \rho_2(i-2) \rho_2(i-3) \right\} / \Omega_3 \quad (4.90) \end{aligned}$$

$$\lambda_2(i) = \left\{ \rho_2(i-2) \left[ 1 - \rho_2^2(i-3) \right] + \rho_1(i-2) \rho_2(i-3) \rho_3(i-3) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \rho_1 (i-2) \rho_1 (i-1) - \rho_1 (i-3) \rho_3 (i-3) + \\
 & + \rho_1 (i-3) \rho_2 (i-3) \rho_1 (i-1) \} / \Omega_3 \quad (4.91)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_3 (i) = & \left\{ \rho_3 (i-3) \left[ 1 - \rho_1^2 (i-2) \right] + \rho_1 (i-3) \rho_1 (i-2) \rho_1 (i-1) - \right. \\
 & - \rho_1 (i-3) \rho_2 (i-2) - \rho_2 (i-3) \rho_1 (i-1) + \\
 & \left. + \rho_1 (i-2) \rho_2 (i-2) \rho_2 (i-3) \right\} / \Omega_3 \quad (4.92)
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 \Omega_3 = & 1 + 2 \rho_1 (i-2) \rho_2 (i-3) \rho_1 (i-3) - \rho_1^2 (i-3) - \\
 & - \rho_2^2 (i-2) - \rho_2^2 (i-3) \quad (4.93)
 \end{aligned}$$

Para estimar os coeficientes  $\lambda_k (i)$  e o desvio-padrão  $\sigma_\phi (i)$  haverá, portanto, que estimar  $\rho_k (i)$  e determinar as respectivas harmônicas significativas, para o que se seguirá a metodologia indicada em 4.5 .

Assim, o estimador paramétrico  $R_k^* (i)$  de  $\rho_k (i)$  será

$$R_k^* (i) = A_0 + \sum_{1 \leq r \leq h} \left( A_r \cos \frac{2\pi i r}{m} + B_r \sen \frac{2\pi i r}{m} \right) \quad (4.94)$$

em que

$$A_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_k (i) = M_{R_k} \quad (4.95)$$

$$A_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m R_k (i) \cos \frac{2\pi i r}{m} \quad (4.96)$$

$$B_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m R_k (i) \sen \frac{2\pi i r}{m} \quad (4.97)$$

sendo  $R_k(i)$  o coeficiente de auto-correlação estatístico de ordem  $k$  relativo à posição  $i$  que, neste caso, é dado simplesmente por

$$R_k(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z(i, j) Z(i+k, j) \quad (4.98)$$

uma vez que  $\mu_Z = 0$  e  $\sigma_Z^2 = 1$ . Deverá notar-se que, na expressão anterior, quando  $i+k > n$  deve substituir-se  $n$  por  $n-1$  e  $Z(i+k, j)$  por  $Z(i+k-m, j+1)$ .

O número  $h^* \leq h$  de harmônicas significativas será determinado pelo método empírico aproximado que também se referiu em 4.5.

Deve ter-se em atenção que para os processos hidrológicos o coeficiente de auto-correlação de primeira ordem é, em geral, o que maior influência tem na variância do processo. Por isso, como critério, simplificado de decisão relativo ao carácter periódico ou não periódico de  $\rho_k$  considera-se que se o coeficiente de primeira ordem  $\rho_1$  não é periódico todos os outros são igualmente não periódicos pois não é fácil justificar fisicamente a periodicidade de  $\rho_2, \rho_3, \dots$  se  $\rho_1$  é não periódico. No entanto, se  $\rho_1$  é considerado periódico, já  $\rho_2, \rho_3, \dots$ , podem ser ou não periódicos.

Uma vez que os coeficientes  $\lambda_k(i)$  são funções dos  $\rho_k(i)$ , os estimadores  $L_k(i)$  de  $\lambda_k(i)$  podem ser facilmente encontrados substituindo naquelas funções  $\rho_k(i)$  pelo estimador  $R_k^*(i)$  após o que se pode seguir semelhante procedimento para encontrar os estimadores  $S_\phi(i)$  de  $\sigma_\phi(i)$ .

Se os coeficientes de auto-correlação  $\rho_k(i)$  não apresentam componentes periódicas então o valor constante  $\rho_k$  poderá ser estimado por  $R_k$  seguindo os seguintes dois caminhos (YEVJEVICH 1972): fazendo a média dos  $m$  valores  $R_k(i)$  isto é

$$R_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_k(i) \quad (4.99)$$

ou calculando o coeficiente de auto-correlação estatístico do conjunto de valores  $Z(i, j)$  da amostra, isto é,

$$R_k = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [Z(i, j) Z(i+k, j)] \quad (4.100)$$

após o que igualmente se calcularão os estimadores  $L_k$  e  $S_\phi$  dos coeficientes não periódicos  $\lambda_k$  e  $\sigma_\phi$ .

Uma outra questão a abordar é a determinação da ordem  $q$  do modelo linear auto-regressivo. Vários autores como, por exemplo, QUENOUILLE 1949 têm sugerido diversos testes estatísticos para proceder àquela determinação os quais envolvem, em geral, cálculos laboriosos e, frequentemente, condicionados por hipóteses que não se verificam na generalidade dos processos hidrológicos.

YEVJEVICH 1972 sugere um método prático e simplificado com base no coeficiente de determinação  $\delta_q$ ,  $q=1, 2, \dots$ , o qual representa a parte da variância de  $Z(i, j)$  que é explicada pelos primeiros  $q$  termos do modelo linear auto-regressivo, isto é,

$$\delta_q = \frac{\text{Var} \left[ \sum_{k=1}^q \lambda_k (i) Z(i-k, j) \right]}{\text{Var} [Z(i, j)]} \quad (4.101)$$

em que, como é evidente,  $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \dots$

Para os modelos lineares auto-regressivos até à terceira ordem os coeficientes de determinação são dados por:

$$\delta_1 = \rho_1^2 \quad (4.102)$$

$$\delta_2 = \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2}{1 - \rho_1^2} \quad (4.103)$$

$$\delta_3 = \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + 2\rho_1^3\rho_3 + 2\rho_1^2\rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2^2\rho_3}{1 - 2\rho_1^2 - \rho_2^2 + 2\rho_1^2\rho_2} - \frac{2\rho_1^2\rho_2 + 4\rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1^4 + \rho_2^4 + \rho_1^2\rho_3^2}{1 - 2\rho_1^2 - \rho_2^2 + 2\rho_1^2\rho_2} \quad (4.104)$$

Os estimadores  $D_q$  de  $\delta_q$  podem calcular-se substituindo, nas expressões anteriores,  $\rho_k$  por  $R_k$  no caso de os coeficientes de auto-correlação não serem periódicos, ou pela média dos  $m$  estimadores  $R_k(i)$ , no caso dos coeficientes de auto-correlação serem periódicos, com  $R_k$  ou  $R_k(i)$  calculados pela forma já anteriormente indicada.

Para decidir então se o modelo linear auto-regressivo que se ajusta aos valores de  $Z(i, j)$  é de primeira, segunda ou terceira ordem sugere-se o seguinte critério:

- se  $D_2 - D_1 \leq \Delta d$  e  $D_3 - D_1 \leq 2 \Delta d$  a ordem adoptada é a primeira ( $m = 1$ );
- se  $D_2 - D_1 > \Delta d$  e  $D_3 - D_2 \leq \Delta d$  a ordem adoptada é a segunda ( $m = 2$ );
- nos restantes casos a ordem adoptada é a terceira ( $m = 3$ ).

O valor  $\Delta d$  que geralmente se fixa é 0.01 ou 0,02, isto é, 1% ou 2% da variância de  $Z(i, j)$ .

Uma vez estimados  $\lambda_k(i)$  e  $\sigma_\phi(i)$  a componente estocástica estacionária de segunda ordem padronizada com covariância nula (ruído branco)

$$\phi'(i, j) = \frac{Z(i, j) - \sum_{k=1}^q \lambda_k(i) Z(i-k, j)}{\sigma_\phi(i)} \quad (4.105)$$

pode igualmente ser estimada por  $W(i, j)$  obtendo-se

$$W(i, j) = \frac{Z(i, j) - \sum_{k=1}^q L_k(i) Z(i-k, j)}{S_\phi(i)} \quad (4.106)$$

sendo conveniente testar-se a hipótese de independência de  $W(i, j)$  como forma de averiguar a adequabilidade do modelo linear auto-regressivo escolhido.

Uma metodologia frequentemente utilizada para este efeito é considerar o estimador  $R_k$  de  $\rho_k$  já anteriormente indicado, o qual, para  $k = 1$  será

$$R_1 = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left[ Z(i, j) Z(i+1, j) \right] \quad (4.107)$$

e admitindo que  $R_1$  tem uma distribuição aproximadamente Normal com média e variância respectivamente (SIDDIQUI 1957)

$$E(R_1) = -\frac{1}{mn} \quad (4.108)$$

$$\text{Var}(R_1) = \frac{(mn)^3 - 3(mn)^2 + 4}{(mn)^2 [(mn)^2 - 1]} \quad (4.109)$$

testar a hipótese de  $R_1$  não se distinguir estatisticamente de zero.

Finalmente haverá que caracterizar a distribuição da componente estocástica  $\Phi'(i, j)$  a partir dos valores de  $W(i, j)$ , utilizando os correntes testes estatísticos. Vale a pena recordar que, como já se referiu em 4.1, TAO et al. 1976 apresentam uma boa síntese dos conhecimentos existentes neste domínio.

## 5 - MODELAÇÃO ESTOCÁSTICA DA PRODUÇÃO DE SEDIMENTOS

### 5.1 - Considerações gerais

Como já se disse em 2, entende-se por produção de sedimentos de uma bacia hidrográfica a quantidade total (em volume ou peso) de sedimentos que, num dado intervalo de tempo, passa através da secção de jusante dessa bacia hidrográfica (ASCE 1970). Como também então se referiu, a produção de sedimentos, que é uma grandeza associada ao processo erosivo com grande interesse para as aplicações, tem essencialmente uma estrutura aleatória, não sendo portanto possível fazer previsões determinísticas a partir de uma situação inicial conhecida.

Por isso, na grande maioria dos problemas cuja resolução exige a previsão da produção de sedimentos anual, sazonal ou mensal, torna-se necessário conhecer a estrutura aleatória do processo estocástico que a descreve ou, pelo menos, alguns dos seus parâmetros mais significativos para as aplicações como a média e a variância.

Se se dispusesse de registos longos de produção de sedimentos, a variabili-

dade anual, sazonal ou mensal poderia facilmente ser quantificada. Infelizmente não se dispõe, em geral, de tais registos e, nos casos em que existem, esses registos são muito escassos.

Nestas circunstâncias torna-se necessário construir modelos estocásticos conceptuais cuja estrutura seja dependente da precipitação, do escoamento e de outros factores que condicionam a desagregação, o transporte e a deposição dos sedimentos. Se a estrutura dos modelos for apropriada poderá ser possível, por um lado, relacionar os parâmetros do modelo com características topográficas, climáticas e outras, das bacias hidrográficas a que dizem respeito e, por outro lado, estimar esses parâmetros com base em registos curtos de produção de sedimentos.

Na aplicação de métodos estocásticos no domínio da erosão podem distinguir-se três estágios de crescente conceptualização (KRUMBEIN 1968):

- aplicação de estatística descritiva;
- aplicação de inferência estatística;
- aplicação de processos estocásticos.

Na aplicação da estatística descritiva a amostra é identificada com a população e portanto é sobre ela que recai todo o interesse do investigador.

Na aplicação da inferência estatística a amostra é importante apenas na medida em que contém informação acerca da população que se pretende investigar. A aplicação de inferência estatística envolve a construção de modelos estocásticos formais, a estima dos parâmetros desses modelos, a determinação de regiões de confiança e o teste de hipóteses.

Na aplicação de processos estocásticos começa-se por construir modelos conceptuais que descrevam os mecanismos aleatórios presentes nos fenómenos em estudo. Estes modelos podem incluir componentes determinísticas que traduzam relações físicas entre algumas das variáveis de interesse nos fenómenos e que poderão permitir com maior facilidade atribuir um significado físico aos parâmetros dos modelos.

Uma revisão da literatura no domínio da modelação matemática do processo erosivo, em particular no que se refere à produção de sedimentos, mostra que muito do trabalho que recentemente tem sido realizado se situa no segundo estágio de aplicação de métodos estatísticos, isto é, na aplicação de inferência estatística, podendo citar-se, a título de exemplo, os trabalhos de WOLMAN e MILLER 1960, WISCHMEIER e SMITH 1960, PIEST 1963 e NEFF 1967.

Só muito recentemente começaram a surgir estudos inseridos no terceiro estágio da aplicação dos métodos estatísticos, isto é que recorrem à aplicação de processos estocásticos, podendo citar-se, como exemplos únicos conhecidos, os modelos de MURATA e HASHINO 1969, de WOOLHISER e TODOROVIC 1971 e de WOOLHISER e BLINCO 1972.

É fundamentalmente com base nos dois últimos modelos que se faz a seguir uma análise sumária da modelação matemática da erosão hídrica.

## 5.2 - Caracterização da produção de sedimentos como processo estocástico

Considere-se uma bacia hidrográfica como a esquematizada na Fig. 5.1. Esta bacia constitui um sistema aberto limitado por uma camada geológica impermeável na sua parte inferior, pela superfície  $S_1$  na sua parte superior, e lateralmente pela superfície imaginária  $S_2$ .

A entrada neste sistema faz-se através da superfície  $S_1$  e é constituída pela precipitação de intensidade  $I(x, y, t)$ . A saída do sistema é constituída pela evapotranspiração de intensidade  $E_t(x, y, t)$  através da superfície  $S_1$ , pelo escoamento líquido superficial medido pelo caudal líquido  $Q(t)$ , através da secção de jusante  $O$ , pelo escoamento líquido subterrâneo medido pelo respectivo caudal  $J(x, y, z, t)$  através da superfície  $S_2$  e pelo transporte sólido medido pelo caudal sólido  $Q_s(t)$  através da secção  $O$ .  $I, E_t, Q, J$  e  $Q_s$  são processos estocásticos.

O estudo do mecanismo da erosão hídrica mostra que as partículas de solo podem ser desagregadas pelo impacto das gotas de chuva ou pelas forças hidrodinâmicas associadas ao escoamento superficial não canalizado ou canali

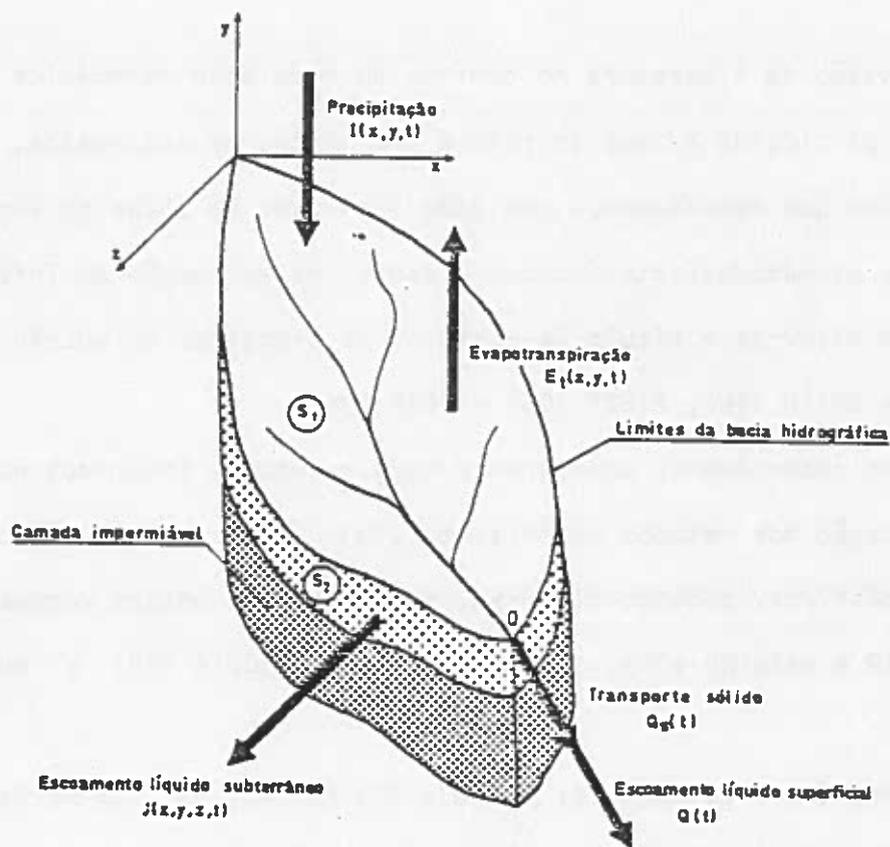


Fig. 5.1 - Bacia hidrográfica esquemática utilizada na modelação matemática do processo erosivo

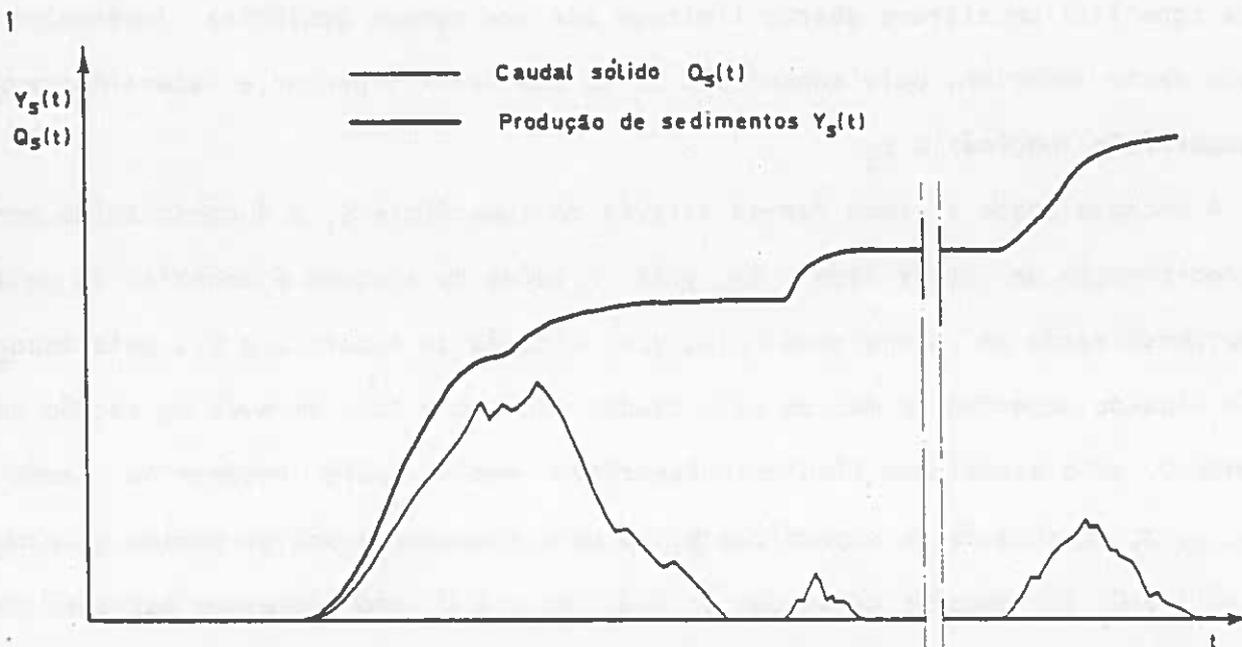


Fig. 5.2 - Realizações típicas dos processos estocásticos caudal sólido e produção de sedimentos

zado. Com excepção do transporte resultante da acção de espalhamento provocada pelas gotas de chuva, em que a gravidade tem o papel fundamental, e que tem uma importância relativa muito pequena, o transporte das partículas de solo desagregadas só pode ser feito se a intensidade da chuva exceder a intensidade de infiltração e portanto tiver lugar o escoamento superficial. À medida que o escoamento superficial progride ao longo das vertentes maiores quantidades de solo podem ser incorporadas no escoamento enquanto a capacidade de transporte do escoamento excede a disponibilidade de material para ser transportado, verificando-se então a ocorrência de erosão lamelar. Por outro lado pode verificar-se também a deposição do material sólido transportado se a capacidade de transporte diminuir em resultado, por exemplo, da diminuição da inclinação da vertente ou se a cobertura vegetal se tornar mais densa.

O escoamento superficial com o material sólido que transporta, acabará por entrar num curso de água bem definido.

Considerando então a secção transversal 0 do curso de água e o processo estocástico  $\{Q_s(t), t \in T\}$  em que  $Q_s(t)$  é o caudal sólido instantâneo e  $T = \{t: t \geq 0\}$ , o processo estocástico de produção de sedimentos  $Y_s(t)$  será

$$Y_s(t) = \int_0^t Q_s(u) du \quad (5.1)$$

Na Fig. 5.2 apresentam-se realizações típicas do processo estocástico caudal sólido e do processo estocástico produção de sedimentos.

Se, por exemplo, se quisesse dimensionar uma albufeira definida por uma barragem a construir na secção 0, com eficiência de retenção constante e praticamente igual a 1, haveria interesse em determinar a distribuição  $F_{Y_s(t)}(y)$  da produção de sedimentos no instante  $t$  que é dada por

$$F_{Y_s(t)}(y) = P \left[ Y_s(t) \leq y \right] \quad (5.2)$$

Seja  $T(y)$  o tempo mínimo necessário para que a quantidade de sedimentos

acumulados na albufeira seja igual ou exceda  $y$ , isto é

$$T(y) = \inf_t \left\{ t: Y_s(t) \geq y \right\} \quad (5.3)$$

que representa o tempo de primeira passagem.

A distribuição  $F_{T(y)}(t)$  do tempo de primeira passagem será dada então por

$$F_{T(y)}(t) = P \left[ T(y) \leq t \right] \quad (5.4)$$

Uma vez que  $Y_s(t)$  é um processo estocástico com funções amostra (realizações) não decrescentes ter-se-á

$$P \left[ T(y) > t \right] = P \left[ Y_s(t) < y \right] \quad (5.5)$$

ou

$$F_{T(y)}(t) = 1 - F_{Y_s(t)}(y) \quad (5.6)$$

Se a eficiência de retenção da albufeira variar com o volume de sedimentos acumulados na albufeira podem considerar-se intervalos de tempo suficientemente pequenos para que a eficiência de retenção se possa considerar constante dentro de cada um desses intervalos de tempo, e o volume total de sedimentos acumulados na albufeira no instante  $t$  será determinado somando a produção de sedimentos relativos a cada um daqueles intervalos multiplicada pela respectiva eficiência de retenção.

Como já se viu a produção de sedimentos é muito dependente do escoamento e este, por sua vez, é muito dependente da precipitação. Por outro lado tanto o escoamento como a produção de sedimentos são fortemente condicionados pela cobertura vegetal, pelas características do solo e pelas características geomorfológicas da bacia hidrográfica.

As expressões atrás apresentadas são perfeitamente gerais mas de difícil apli

cação aos problemas reais. Interessa portanto construir modelos conceptuais que descrevam as relações entre a precipitação, o escoamento, a erosão local e a produção de sedimentos na secção de jusante da bacia hidrográfica.

### 5.3 - Casos-tipo a considerar na modelação estocástica da produção de sedimentos

A partir da análise estatística de mais de 10 000 talhões-ano de dados de precipitação, escoamentos e erosão WISCHMEIER e SMITH 1965 chegaram à conclusão de que os principais factores a considerar na previsão da erosão anual média são a erosividade da chuva, a erodibilidade do solo, o comprimento das vertentes, a inclinação das vertentes, a cobertura vegetal e a técnica agrícola, e as técnicas de conservação do solo. Todos estes factores são, em geral, variáveis no tempo e no espaço.

A variabilidade no tempo pode ser tratada, em princípio, considerando intervalos de tempo tais que dentro de cada um deles os factores indicados se possam considerar constantes.

Sendo assim, a complexidade dos modelos de produção de sedimentos dependerá fundamentalmente da variabilidade dos factores no espaço.

No Quadro 5.1 indicam-se os três principais casos-tipo a considerar na modelação estocástica da produção de sedimentos e correspondentes a diferentes graus de variabilidade dos factores no espaço.

Nos pontos seguintes analisa-se resumidamente cada um destes casos-tipo.

### 5.4 - Modelo estocástico da produção de sedimentos no caso de talhões experimentais ou bacias hidrográficas muito pequenas

Considere-se um talhão experimental lavrado semelhante ao usado por WISCHMEIER e SMITH 1960 ao desenvolverem a equação universal de perda de solos. O seu comprimento é cerca de 22 m tendo um declive de 9 %.

Quadro 5.1 - Casos-tipo a considerar na modelação estocástica da produção de sedimentos

Factores condicionantes da produção de sedimentos	CASO - TIPO		
	CASO I	CASO II	CASO III
	Talhão experimental ou bacia hidrográfica muito pequena	Pequena bacia hidrográfica	Grande bacia hidrográfica
Erosividade da chuva	uniforme no espaço	uniforme no espaço	variável no espaço
Erodibilidade do solo	idem	variável no espaço	idem
Comprimento das vertentes	idem	idem	idem
Inclinação das vertentes	idem	idem	idem
Cobertura vegetal e técnica agrícola	idem	uniforme no espaço	idem
Técnicas de conservação do solo	idem	idem	idem

Na Fig. 5.3 apresentam-se realizações típicas dos processos estocásticos intensidade da precipitação  $I(t)$ , caudal líquido  $Q(t)$  e caudal sólido  $Q_s(t)$  relativos a este talhão experimental.

Designa-se por chuvada qualquer ocorrência de chuva durante um período contínuo, isto é, em que  $I(t) > 0$ ; por descarga líquida qualquer ocorrência de escoamento superficial durante um período contínuo, isto é, em que  $Q(t) > 0$ ; e por descarga sólida qualquer ocorrência de caudal sólido durante um período contínuo, isto é, em que  $Q_s(t) > 0$ .

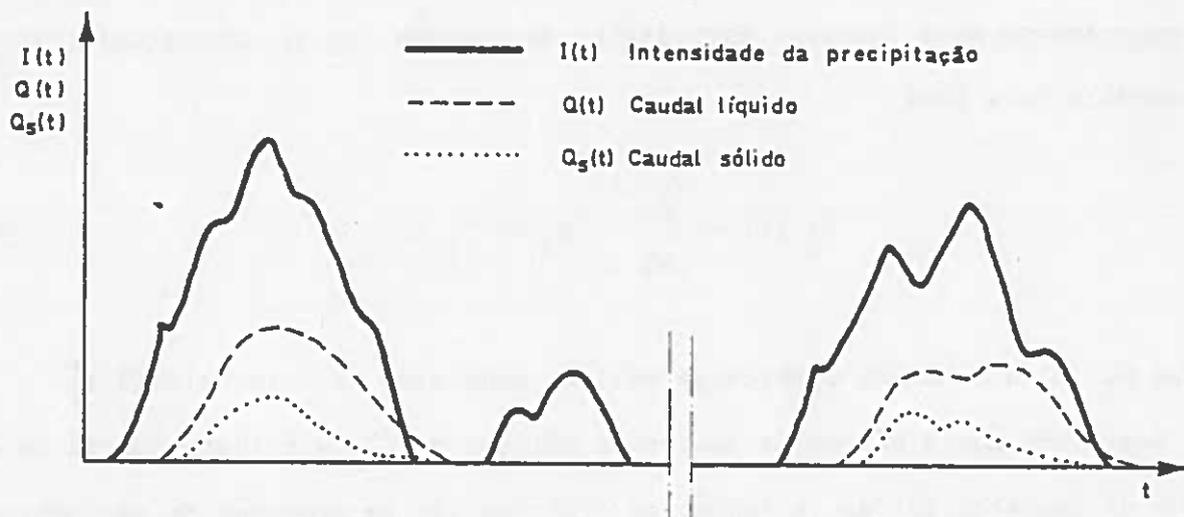


Fig. 5.3 - Realizações típicas dos processos estocásticos intensidade da precipitação, caudal líquido e caudal sólido relativos a um talhão experimental

Associado à chuva  $j$  pode definir-se o instante de fim de chuva  $T_{1j}$ , a quantidade de precipitação  $V_{1j}$ , a energia cinética total da chuva  $E_j$  e a intensidade máxima da precipitação em 30 min  $I_{30j}$ . De forma semelhante  $T_{2j}$  é o instante de fim de descarga líquida,  $T_{3j}$  o instante de fim de descarga sólida,  $V_{2j}$  o volume de descarga líquida e  $V_{3j}$  a quantidade (volume ou peso) de descarga sólida.

Assim

$$V_{1j} = \int_{T_{1j-1}}^{T_{1j}} I(u) \, du \quad (5.7)$$

$$V_{2j} = \int_{T_{2j-1}}^{T_{2j}} Q(u) \, du \quad (5.8)$$

$$V_{3j} = \int_{T_{3j-1}}^{T_{3j}} Q_s(u) \, du \quad (5.9)$$

A produção de sedimentos no intervalo de tempo  $(0, t]$  pode portanto exprimir-se exactamente pelo integral estocástico da equação (5.1) ou calcular-se aproximadamente pela soma

$$Y'_s(t) = \sum_{j=0}^{N_3(t)} V_{3j} \approx Y_s(t) \quad (5.10)$$

em que  $N_3(t)$  é o número e descarga sólidas completas no intervalo  $(0, t]$ .

Admitindo que o número de descargas sólidas em  $(0, t]$  é independente da quantidade da descarga sólida, a função de distribuição da produção de sedimentos em  $(0, t]$  pode escrever-se

$$F_{Y_s(t)}(y) \approx P[Y'_s(t) \leq y] = P[N_3(t) = 0] + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ P[Z_j \leq y] P[N_3(t) = j] \right\} \quad (5.11)$$

em que

$$Z_j = \sum_{i=1}^j V_{3i} \quad (5.12)$$

Como se pode ver pelas equações (5.11) e (5.12) torna-se necessário caracterizar o processo estocástico  $N_3(t)$  de contagem de descargas sólidas e a distribuição da soma de  $j$  descargas sólidas a fim de especificar a distribuição da produção de sedimentos em  $(0, t]$ .

Com base num vasto e exaustivo trabalho experimental WISCHMEIER 1959 verificou que a quantidade de descarga sólida está altamente correlacionada com o índice de erosividade da chuvada definido como o produto da energia cinética total da chuvada  $E_j$  pela intensidade máxima em 30 minutos  $I_{30j}$ . Tal verificação sugere que o peso da descarga sólida relativa a cada chuvada seja expressa por

$$V_{3j} = \begin{cases} \omega(E_j I_{30j}^{-\phi}) + \Gamma_j & \text{para } E_j I_{30j} > \phi \\ 0 & \text{para } E_j I_{30j} \leq \phi \end{cases} \quad (5.13)$$

em que  $\Gamma_j, j=1, 2, \dots$ , são variáveis aleatórias independentes com distribuição

normal de média nula e variância  $\sigma^2$ ,  $\omega$  é um parâmetro de proporcionalidade e  $\psi$  representa um valor crítico de  $E|_{30}$  abaixo do qual não existe erosão.

Conhecendo então a distribuição de  $E_j|_{30}$ , o valor de  $\beta$ , o valor de  $\lambda$ , o valor de  $\sigma^2$  e a distribuição de  $N_3(t)$  será, em princípio, possível determinar a distribuição da produção de sedimentos em  $(0, t]$ , combinando as equações 5.11, 5.12 e 5.13.

### 5.5 - Modelo estocástico da produção de sedimentos no caso de pequenas bacias hidrográficas

Considere-se agora o caso-tipo II indicado no Quadro 5.1 o qual corresponde a bacias hidrográficas da ordem das dezenas de milhares de metros quadrados em que a erosividade da chuva, a cobertura vegetal e a técnica agrícola e as técnicas de conservação do solo se podem admitir uniformes para toda a bacia mas em que os outros factores condicionantes da produção de sedimentos variam de ponto para ponto.

Este caso apresenta já uma complexidade bastante maior do que o anterior e é portanto de abordagem mais difícil.

WOOLHISER e BLINCO 1972 apresentam uma interessante esquematização deste caso com vista a facilitar o seu estudo e que consiste em admitir que a rede hidrográfica da bacia é bem definida e que cada ponto da bacia se caracteriza pelo tempo  $\tau$  que o escoamento leva a percorrer a distância entre esse ponto e a secção transversal de jusante 0 da bacia hidrográfica (Fig. 5.4).

O lugar geométrico dos pontos com igual tempo de percurso designa-se por isócrona e o comprimento de cada isócrona é dado por

$$L(\tau) = \frac{dA(\tau)}{d\tau} \quad (5.14)$$

em que  $A(\tau)$  é a área da bacia hidrográfica cujos pontos têm tempo de percurso menor ou igual a  $\tau$ .

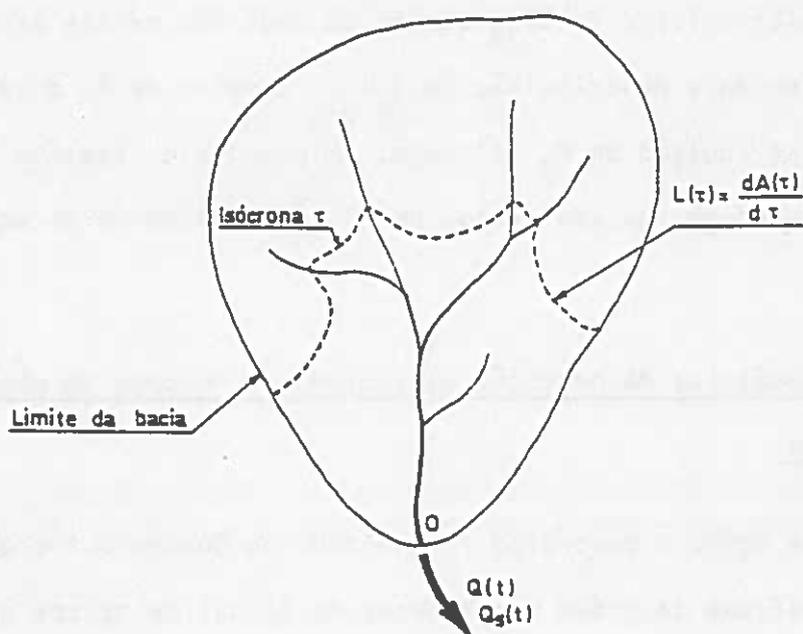


Fig. 5.4 - Esquematização de uma pequena bacia hidrográfica com base no tempo de percurso

Seja  $p_j(\tau)$  o peso médio de solo erodido por unidade de área ao longo da isócrona  $\tau$  durante a descarga sólida  $j$ , e seja  $P_j(\tau)$  a probabilidade de que uma partícula de solo erodida ao longo da isócrona  $\tau$  atinja a secção transversal de jusante durante o intervalo de tempo relativo à descarga sólida  $j$ . O peso de sedimentos relativo à descarga sólida será então

$$V_{3j} = \int_0^{\infty} P_j(\tau) p_j(\tau) \frac{dA}{d\tau} d\tau \quad (5.15)$$

Combinando as equações 5.11, 5.12 e 5.15 poder-se-á então determinar a distribuição da produção de sedimentos em  $(0, t]$ .

## 5.6 - Modelo estocástico da produção de sedimentos no caso de grandes bacias hidrográficas

Considere-se finalmente o caso-tipo III indicado no Quadro 5.1 o qual corresponde a uma grande bacia hidrográfica em que todos os factores condicionantes da produção de sedimentos se admitem variáveis no espaço.

Neste caso o caudal líquido e o caudal sólido na secção transversal de jusante  $0$  são, em geral, permanentes mas o escoamento superficial e a erosão em cada ponto do interior da bacia hidrográfica têm um carácter intermitente.

Devido à grande complexidade deste caso tem sido extremamente difícil desenvolver um modelo estocástico conceptual de produção de sedimentos aplicável a grandes bacias hidrográficas, especialmente enquanto não se avançar na modelação dos casos-tipo I e II.

Assim, segundo WOOLHISER e BLINCO 1972, este caso-tipo III terá, pelo menos provisoriamente, de ser abordado, seguindo uma das duas seguintes vias:

- introduzindo grandes simplificações no processo de produção de sedimentos;
- abandonando a via analítica e recorrendo à simulação em computador.

A primeira via foi a seguida por MUROTA e HASHINO 1969 que embora introduzissem grandes simplificações na análise do problema foram forçados a determinar a distribuição da produção de sedimentos recorrendo à análise numérica com a apoio de computador.

O modelo de Murota e Hashino parte da precipitação diária, transforma esta precipitação em escoamento, calcula o transporte sólido a partir de uma relação caudal líquido-caudal sólido e, finalmente, integra no tempo o caudal sólido de forma a obter a produção de sedimentos da bacia hidrográfica.

A estrutura aleatória da precipitação diária é determinada começando por dividir o ano em períodos cada um dos quais com condições meteorológicas uniformes. Para cada um destes períodos analisam-se as características das precipitação diã

ria e constrói-se um modelo estocástico de precipitação baseado nas observações registadas e tendo como objectivo a determinação das distribuições de ocorrências, intervalos entre ocorrências e intensidades da precipitação diária.

A transformação da precipitação diária em escoamento diário é feita à custa de um modelo determinístico, por exemplo, de um hidrograma. Ao mesmo tempo determina-se o valor crítico da intensidade de precipitação diária abaixo do qual não ocorre transporte de sedimentos.

A relação caudal líquido/caudal sólido sugerida, que é do tipo da fórmula de Brown, é a seguinte:

$$\frac{q_s}{U_* d_m} = K \left[ \frac{U_*}{(\gamma_s - 1) g d_m} \right]^w \quad (5.16)$$

em que  $q_s$  é o caudal sólido em peso por unidade de largura,  $U_*$  é a velocidade de atrito junto ao fundo,  $d_m$  é o diâmetro médio dos sedimentos,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\gamma_s$  é o peso específico dos sedimentos, e  $K$  e  $w$  são constantes experimentais.

Simulando o regime de precipitações e seguindo a metodologia indicada calcula-se o caudal sólido e, por integração ao longo do período que se escolheu, determina-se a produção de sedimentos, podendo-se assim dispor da curva de distribuição da produção de sedimentos.

A via da simulação foi a seguida, por exemplo, por NEGEV 1967, FOSTER e MEYER 1972 e CADENAS 1973.

Em qualquer destes modelos considera-se o processo erosivo, ao nível de cada área elementar, fundamentalmente composto de quatro subprocessos: desagregação do solo pela precipitação, transporte dos sedimentos pela precipitação, desagregação do solo pelo escoamento superficial e transporte dos sedimentos pelo escoamento superficial. Em cada uma das áreas elementares determina-se a capacidade de transporte total e a quantidade total de solo desagregado, adicionando-se a esta última a quantidade de sedimentos provenientes da área elementar de monta

tante. Se a quantidade de sedimentos disponível para ser transportada é inferior à capacidade de transporte, todo o material transita para a área seguinte; se a capacidade de transporte é inferior à quantidade de sedimentos disponível, então transita para a área elementar de jusante apenas a parte correspondente à capacidade de transporte, ficando a restante retida na área elementar onde se encontra.

Na Fig. 5.5 apresenta-se o fluxograma do modelo de simulação de Cadenas que segue o esquema que foi indicado.

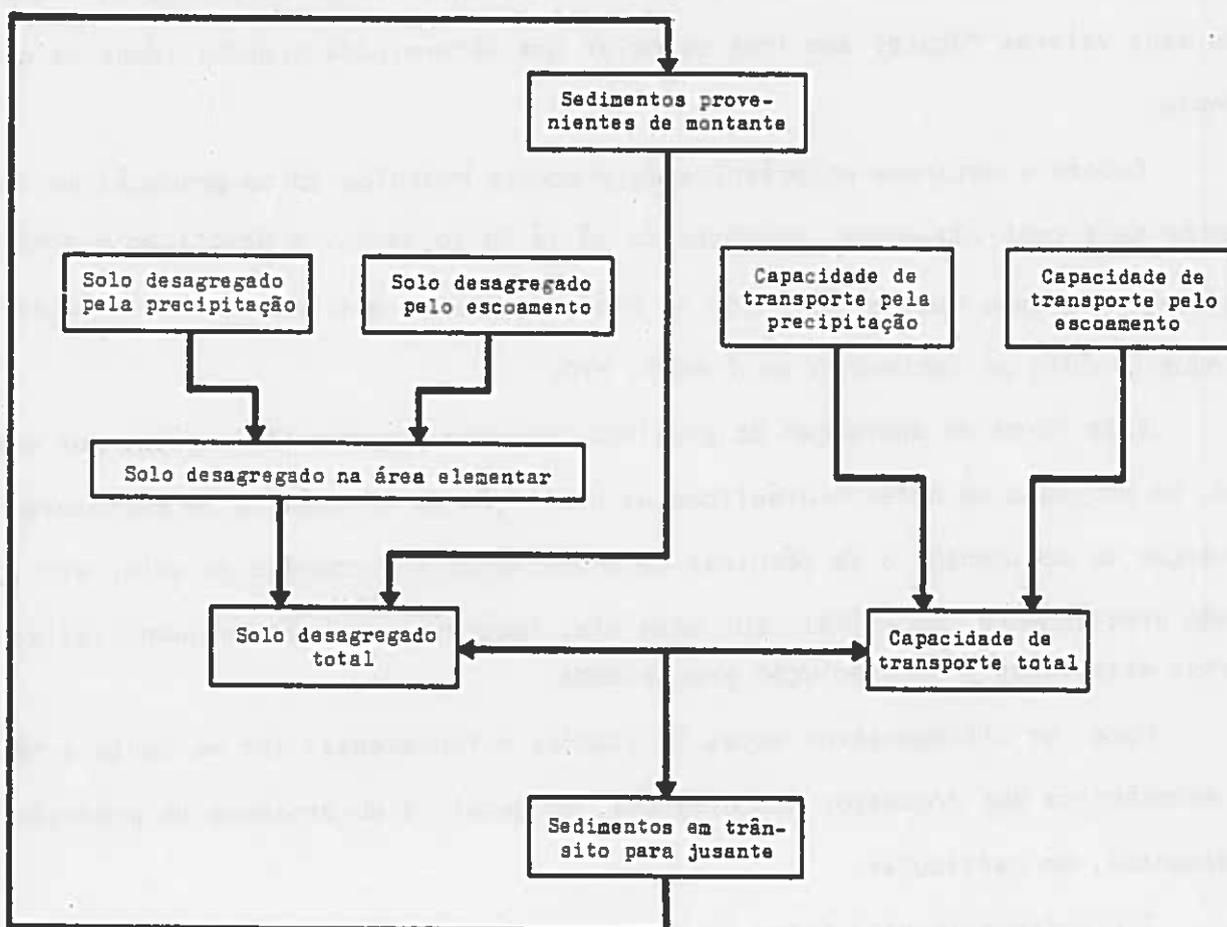


Fig. 5.5 - Fluxograma relativo ao modelo de simulação de Cadenas

## 6 - CONCLUSÕES

A produção de sedimentos num talhão experimental ou numa bacia hidrográfica é um processo natural muito complexo que, tal como outros processos hidrológicos, tem uma natureza estocástica, não sendo possível fazer-se previsões acerca dos seus valores futuros sem lhes associar uma determinada probabilidade de ocorrência.

Embora a natureza estocástica do processo hidrológico de produção de sedimentos seja implicitamente reconhecida há já muito tempo, a descrição e controle deste processo tem-se confinado na prática, apenas aos seus valores médios: produção média de sedimentos em T anos, etc.

Esta forma de abordagem do problema introduz enormes limitações, por exemplo, no projecto de obras hidráulicas, na avaliação da eficiência de estruturas de retenção de sedimentos e de técnicas de conservação e protecção do solo, etc., sendo praticamente impossível, por esta via, fazer-se uma análise quantitativa dos riscos associados a cada solução preconizada.

Para se ultrapassarem estas limitações é fundamental ter em conta a natureza estocástica dos processos hidrológicos, em geral, e do processo de produção de sedimentos, em particular.

É precisamente esta forma de abordagem do problema que se pretende justificar e descrever neste relatório, recorrendo-se, para isso, a três casos-tipo de complexidade crescente cuja modelação matemática é ensaiada.

- talhões experimentais e bacias hidrográficas muito pequenas
- pequenas bacias hidrográficas
- grandes bacias hidrográficas

Para os dois primeiros casos-tipo é possível desenvolver-se modelos estocásticos conceptuais, ainda que introduzindo importantes simplificações.

Para o terceiro caso-tipo a complexidade do problema tornou impossível, por enquanto, este tipo de abordagem, propondo-se, no entanto, caminhos de alternativa.

Os modelos estocásticos apresentados requerem, na sua aplicação prática a determinação dos parâmetros das funções de distribuição de certas variáveis hidrológicas consideradas determinantes no processo de produção de sedimentos.

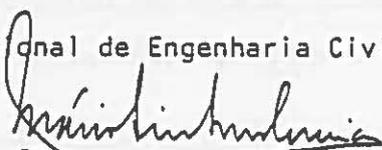
Para isso torna-se necessário recorrer a dados experimentais de observação da natureza e, a partir destes dados, à estimação daqueles parâmetros.

O presente relatório descreve as principais técnicas estatístico-matemáticas que permitem a determinação destes parâmetros.

A avaliação concreta da adequabilidade à realidade dos modelos estocásticos apresentados deverá ser posta através da sua aplicação aos dados de observação da natureza que se puderem compilar.

Verificada essa adequabilidade e generalização da aplicação destes modelos pressupõe a definição de campanhas racionais e sistemáticas de observação de dados da natureza e a regionalização dos parâmetros das distribuições das variáveis hidrológicas determinantes do processo de produção de sedimentos.

Lisboa e Laboratório Nacional de Engenharia Civil em Junho de 1982



Mário Lino Soares Correia  
Engenheiro Civil

VISTO

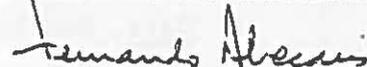
O CHEFE DO NÚCLEO



L. Veiga da Cunha

Especialista

O CHEFE DO DEPARTAMENTO



Fernando Abecasis

Investigador

VISTO

Ø ENGENHEIRO DIRECTOR



J. Ferry Borges

ML/OC

## BIBLIOGRAFIA

- AMOROCHO J.; HART, W. 1964 - A Critique of Current Methods in Hydrologic Systems Investigations. New York, Transactions of American Geophysical Union 45 (2), 1964, p. 307-321.
- ASCE 1970 - Sediment Sources and Sediment Yields. Chapter IV, Proc. ASCE, Journal of Hydraulic Division 96 (HY6), 1970 p. 1283-1329.
- BARNES, F. 1954 - Storage Required for a City Water Supply. Sydney, Journal of the Institution of Engineers of Australia 26, 1954.
- BONNE, J. 1971 - Stochastic Simulation of Monthly Streamflow by a Multiple Regression Model Utilizing Precipitation Data. Delft, Journal of Hydrology 12, 1971, p. 285-310.
- CADENAS, F. 1973 - Modelo matemático de la Erosion Hídrica. Hidrologia (11), Madrid, Instituto de Hidrologia, 1973, p. 39-72.
- CAVADIAS, G. 1966 - River Flow as a Stochastic Process. Symposium on Statistical Methods in Hydrology. Otava, 1966, p. 315-351.
- CHOW, V.; RAMASESHEN, S. 1965 - Sequential Generation of Rainfall and Runoff Data. New York, Journal of Hydraulic's Division, Proceedings of the Society of Civil Engineers 4416, 1965, p. 205-223.
- DAWDY, D.; KALININ, G. 1970 - Mathematical Modelling in Hydrology. Report to Mid-Decade Conference of International Hydrological Decade, Bulletin of International Association of Scientific Hydrology, Mar. 1970.

- DOOGE, J. 1968 - The Hydrologic Cycle as Closed System. Bulletin of International Association of Scientific Hydrology (1) Fev., 1968, p. 58-68.
- FCST 1962 - Scientific Hydrology. Ad hoc Panel on Hydrology, Washington D.C., U.S. Federal Council for Science and Technology, 1962.
- FISHER, R. 1950a - Tests of Significance in Harmonic Analysis. In Contributions to Mathematical Statistics, Paper 16-53 a 16-50, New York, John Wiley e Sons, 1950.
- FISHER, R. 1950b - On the Similarity of the Distributions Found for the Test of Significance in Harmonic Analysis and in Steven's Problem in Geometrical Probability. In Contributions to Mathematical Statistics, Paper 37-13 a 37-17, New York, John Wiley e Sons, 1950.
- FORT COLLINS 1967 - Proceedings of International Hydrology Symposium on New Techniques in Hydrology. Fort Collins, Colorado State University, 1967.
- FOSTER, G.; MEYER, L. 1972 - Mathematical Simulation of Upland Erosion Using Fundamental Erosion Mechanics. Sediment Yield Conference, Oxford, Mississippi, 1972.
- ILLINOIS 1969 - The Progress of Hydrology. Proceedings of the International Symposium for Hydrology Professors. Urbana, University of Illinois, 1969.
- JACQUET, J. et al. 1971 - Les Modèles Mathématiques en Hidrologie de Surface. La Houille Blanche (2) e (3), 1971.
- KARTVELISHVILI, N. 1967 - Theory of stochastic Processes in Hydrology and River Runoff Regulation. Leningrado, 1967.
- KISTEL, C. 1969 - Time Series Analysis of Hidrologic Data. In Advances in Hydroscience, vol. V. New York, Academic Press, 1969.

- KRUMBEIN, W. 1968 - Statistical Models in Sedimentology. Sedimentology 10 (1), 1968, p. 7-23.
- MARKOVIC, R. 1965 - Probability Functions on Best Fit to Distributions of Annual Precipitation and Runoff. Hydrology Paper nº 8, Fort Collins, Colorado State University, 1965.
- MATALAS, N.C. 1967 - Mathematical Assesment of Synthetic Hydrology. New York, Water Resources Research 4 (3), 1967, p. 937-945.
- MUROTA, A.; HASHINO, M. 1969 - Studies of a Stochastic Rainfall Model and its Application to Sediment Transportation. Technical Report, Osaka University, 1969.
- NEFF, E. 1967 - Discharge Frequency Compared to Long-Term Sediment Yields. 14th General Assembly of International Union of Geodesy and Geophysics, Symposium on River Morphology, Berna, 1967.
- NEGEV, M. 1967 - A Sediment Model on a Digital Computer. Technical Report 76, Department of Civil Engineering, Standfort University, 1967.
- OTTAWA 1973 - Proceedings of the International Symposium on Modelling Techniques in Water Resources Systems. Ottawa Department of Environment, 1973.
- PEIXOTO, J. 1973a - Da Natureza e da Estrutura do Ciclo Hidrológico. In Hidrometeorologia Dinâmica, cap. II, Lisboa, Instituto Geofísico Infante D. Luís, Universidade de Lisboa, 1973.
- PEIXOTO, J. 1973b - Dinâmica do Ciclo Hidrológico. In Hidrometeorologia Dinâmica, Cap. XI, Lisboa, Instituto Geofísico Infante D. Luís, Universidade de Lisboa, 1973.
- PIEST, R. 1963 - The Role of the Large Storms as a Sediment Contributor. Proceedings of the Federal Inter-Agency Sedimentology Conference, 1963, U.S. Department of Agriculture, Miscelaneous Pub. 970, 1963, p. 98-108.

- QUIMPO, R. 1966 - Stochastic Analysis of Daily River Flows. Ph. D. dissertation, Fort Collins, Colorado State University, 1966.
- QUIMPO, R. 1967 - Stochastic Model of Daily River Flow Sequences. Hydrology Paper nº 18, Fort Collins, Colorado State University, 1967.
- ROESNER, L.; YEVJEVICH, V. 1966 - Mathematical Models for Time Series of Monthly Precipitation and Monthly Runoff. Hydrology Paper nº 15, Fort Collins, Colorado State University, 1966.
- ROSENBLUETH, A.; WIENER, N. 1945 - The Role of Models in Science. Philosophy of Science XII (4) Out. 1945.
- SELLERS, W. 1965 - Physical Climatology. Chicago, The University of Chicago Press, 1965.
- SUDLER, C. 1927 - Storage Required for the Regulation of Streamflow. New York, Transaction of American Society of Civil Engineers 91, 1927, p. 622-670.
- TAO, P. et al. 1976 - Distributions of Hydrologic Independent Stochastic Components. Hydrology Paper nº 82, Fort Collins, Colorado State University, 1976.
- THOMAS, H.; FIERING, M. 1962 - Mathematical Synthesis of Streamflow Sequence for the Analysis of River Basins by simulation. In Mass, A. et al, Design of water - Resources Systems, Cambridge, Massachussets, Harward University Press, 1962, 459-493.
- TUCSON 1968 - Proceedings of International Symposium on the Use of Analog and Digital Computers in Hydrology. International Association of Hydrological Sciences, Publication 80/81, 1968.
- VARSOVIA 1971 - Proceedings of International Symposium on Mathematical Models in Hydrology. International Association of Hydrological Sciences, Publication 100/101/102, 1971.

- DEMURI, V.; DEMURI, N. 1970 - On the Systems Approach to Hydrology. Bulletin of International Association of Scientific Hydrology (2) Jun, 1970.
- YEVJEVICH, V. 1964 - Fluctuations of Wet and Dry Years, Part II, Analysis by Serial Correlation. Hydrology Paper n° 4, Fort Collins, Colorado State University, 1964.
- YEVJEVICH, V. 1972 - Structural Analysis of Hydrologic Time Series. Hydrology Paper 56, Fort Collins, Colorado State University, 1972.
- WISCHMEIER, W. 1959 - A Rainfall Erosion Index for a Universal Soil-Loss Equation. Soil Science Society of America Proceedings 23, 1959.
- WISCHMEIER, W.; SMITH, D. 1958 - Rainfall Energy and its Relationship to Soil Loss. Transactions of the American Geophysical Union 39 (2) 1958, p. 285-291.
- WISCHMEIER, W.; SMITH, D. 1960 - A Universal Soil-Loss Equation to Guide Conservation Farm Planning. 7th International Congress of the Soil Science, 1960.
- WISCHMEIER, W.; SMITH, D. 1965 - Predicting Rainfall - Erosion Losses from cropland East of the Rocky Mountains. U.S. Department of Agriculture Handbook N° 282, 1965.
- WOLMAN, M.; MILLER, J. 1960 - Magnitude and Frequency of Forces in Geomorphic Processes. Journal of Geology 68 (1), 1960, p. 54-74.
- WOOLHISER, D.; BLINCO, P. 1972 - Watershed Sediment Yield. A Stochastic Approach. Sediment Yield Conference, Oxford, Mississippi, 1972.
- WOOLHISER, D.; TODOROVIC, P. 1971 - A Stochastic Model of Sediment Yield for Ephemeral Streams. Proceedings of the Symposium of Hydrology, Tucson, U.S. Department of Agriculture, 1971.

