

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO HISTERETICO TRILINEAR DAS  
RELACÕES FORÇAS-DESLOCAMENTOS APLICAVEIS AO ESTUDO DE  
ELEMENTOS DE BETÃO ARMADO SUJEITOS A FLEXÃO**

**ANIBAL G. COSTA (I) ALFREDO C. COSTA (II)**

**SUMARIO:** Esta comunicação apresenta o desenvolvimento e implementação computacional de uma subrotina especificamente desenvolvida para o estudo das relações histeréticas forças-deslocamentos, observados nos ensaios de elementos de betão armado sujeitos à flexão, provocadas por cargas alternadas.

Neste algoritmo procurou-se reproduzir além dos efeitos provocados pelo esforço normal, os devido à degradação de rigidez e resistência, tendo-se por isso desenvolvido uma subrotina de carácter geral e aplicável a uma vasta gama de estudos dinâmicos não lineares de estruturas de betão armado.

São também apresentados alguns exemplos de aplicação que atestam aspectos relevantes do funcionamento da subrotina.

## 1. INTRODUÇÃO

As actuais disposições contidas nas regulamentações utilizadas no projecto estrutural de edificios de betão armado, [1] e [2], exigem em geral avaliações de comportamento dinâmico em regime não linear destas estruturas, tornando necessário o emprego de meios de análise tanto analíticos como experimentais, que traduzam esse comportamento.

Os meios analíticos vulgarmente utilizados baseiam-se em modelos de complexidades distintas, dependentes do detalhe pretendido. Assim, uma identificação do comportamento não linear histerético de edificios de betão armado poderá ser estabelecida em termos das relações tensões - deformações dos materiais componentes (betão e aço) até relações mais globais como por exemplo forças - deslocamentos ao nível dos pisos, ou caso limite, traduzindo essas relações num só grau de liberdade.

Qualquer análise deste tipo, passa por uma definição de modelos de comportamento histerético das relações forças - deslocamentos generalizados, (F,D) ao nível dos elementos estruturais (vigas, pilares, ligações vigas - pilares, etc).

O modelo analítico ideal a ser estabelecido para a obtenção da resposta não linear de elementos estruturais de betão armado, com comportamento predominante de flexão, requer uma definição das características geométricas e mecânicas dos materiais ao nível das seccões e em termos das relações tensões - deformações nos diversos materiais componentes. Estas relações seriam

- 
- I) Assistente da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, FEUP  
II) Assistente de Investigação, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, LNEC

posteriormente integradas ao longo da altura das seções, tendo em consideração as características geométricas e algumas hipóteses básicas quanto à natureza das deformações, (Hipótese de Bernoulli e de Navier). A integração posterior ao longo do comprimento dos elementos estruturais permitiria a definição das relações forças - deslocamentos generalizados ao nível das extremidades desses elementos. Este procedimento embora não seja invulgar em problemas de análise estática, é contudo ainda uma técnica muito pesada para os problemas de análise dinâmica.

Com o objectivo de estudar o comportamento não linear das estruturas de betão armado sujeitas à accção dos sismos, têm sido realizados muitos ensaios que sugeriram vários modelos, que reproduzem o comportamento em flexão através de relações forças - deslocamentos generalizados. Entre esses modelos, destacou-se o desenvolvido por Takeda, [3] quer pela sua ampla difusão como também pela larga aplicabilidade às situações mais diversas do comportamento estrutural.

A presente comunicação descreve os estudos efectuados no LNEC, [4] que visaram a implementação em algoritmo computacional de um modelo hysterético trilinear e uma primeira exploração das suas potencialidades, baseado no modelo de Takeda e que inclui as seguintes particularidades:

1. Degradação de Rigidez
2. Degradação de Resistência
3. Consideração da influência do esforço transversal, da deterioração da aderência e do escorregamento das armaduras (bond deterioration e bar slip)
4. Consideração do efeito P-Delta

A metodologia que presidiu à implementação deste algoritmo baseia-se nas potencialidades da linguagem FORTRAN 77, que permitiu a elaboração de uma subrotina de carácter geral. Assim, para um dado deslocamento imposto, esta fornece as forças de restituição inelásticas, e a rigidez em cada instante do carregamento (entendido como carga ou descarga).

## 2. CARACTERÍSTICAS HISTERÉTICAS DOS ELEMENTOS DE BETÃO ARMADO SUJEITOS A FLEXÃO

O comportamento em flexão de elementos de betão armado, sujeitos à imposição de deslocamentos alternados, tem vindo a ser cada vez melhor conhecido, como resultado de ensaios laboratoriais efectuados em quase todo o mundo.

Da análise dos diagramas obtidos, evidenciam-se certas características comuns, que permitem estabelecer regras no andamento das relações forças - deslocamentos generalizados, que se podem sintetizar nos seguintes pontos, Fig.1:

1. Mudança de rigidez devido à abertura de fendas no betão e cedência das armaduras longitudinais de tracção (ciclo 1);
2. Quando se dá uma inversão do carregamento, (ciclo 4) com amplitude máxima do deslocamento igual à do ciclo anterior

(ciclo 3, cedência das armaduras), este é efectuado com uma rigidez nitidamente inferior à do ciclo anterior, embora as forças de restituição atingidas sejam praticamente as mesmas. Esta redução de rigidez é atribuível à formação de fendas durante o ciclo anterior (ciclo 3) e também devido à redução de rigidez da armadura longitudinal devido ao efeito de Bauschinger no próprio ciclo (ciclo 4).

3. A rigidez média de um ciclo completo decresce com o deslocamento máximo atingido em ciclos anteriores. Repare-se na Fig.1 que o ciclo 5 possui uma rigidez média significativamente inferior à rigidez média do ciclo 2, apesar das amplitudes de deslocamentos impostas em ambos os ciclos serem praticamente as mesmas. Contudo a rigidez média do ciclo 5 é próxima da rigidez média do ciclo 4 e da do ciclo 3 após cedência das armaduras.

4. As características histeréticas do betão armado dependem de toda a história dos deslocamentos impostos.

Se os elementos de betão armado estão submetidos a elevadas tensões tangenciais, ou se verifica o escorregamento das armaduras longitudinais dentro dos seus comprimentos de amarração, estas relações apresentam um comportamento característico, (efeitos de pinching e slipping), Fig.2 e Fig.3.

Esta influência do esforço transversal traduz-se por uma redução da capacidade de dissipação da energia dos elementos estruturais sujeitos à flexão. Alguns autores, [5] e [6], têm estudado este problema analisando a importância relativa entre o esforço transversal e o momento flector, a partir da relação  $l/d$ , (shear ratio). Uma exemplificação desse efeito pode ser visto na Fig.4, [7]. O escorregamento das armaduras longitudinais nos seus comprimentos de amarração, foi estudado no LNEC, apresentando-se um exemplo dos resultados obtidos na Fig.3, [8].

A análise destas figuras permite constatar que estes dois fenómenos, apesar de fisicamente distintos têm um efeito semelhante no andamento de ambas as curvas.

A presença do esforço normal de compressão no comportamento dos elementos estruturais de betão armado sujeitos à flexão, traduz-se geralmente por um aumento da sua capacidade resistente e por uma perda de ductilidade desses elementos, reflectindo-se no andamento das suas relações histeréticas. Nas estruturas de betão armado sujeitas à acção dos sismos, estes efeitos são importantes nos pilares dos pisos inferiores, devido à presença de esforços normais elevados decorrentes das forças gravíticas e eventualmente dos momentos de derrubamento. Acrescente-se ainda que aproveitamentos de níveis elevados de ductilidade poderão levar a grandes deformações, começando os efeitos não lineares geométricos a serem importantes nas respostas. Este fenómeno, designado por efeito P-Delta pode traduzir-se por perda de estabilidade da estrutura com reflexos no andamento das relações histeréticas, Fig.5, [9].

Um modelo histerético de comportamento de elementos de betão armado sujeitos à flexão, deve ser capaz de em cada instante da história do deslocamento generalizado imposto, fornecer a rigidez e as forças generalizadas de restituição inelásticas. Foram desenvolvidos muitos modelos com diferentes graus de complexidade, sendo esta uma função do número de parâmetros e regras que definem completamente o modelo, [10], [11] e [12].

A complexidade dos modelos histeréticos não implica, em geral, uma maior ocupação quer da unidade central de processamento dos computadores (CPU), quer da sua memória disponível, traduzindo-se somente por encadeamentos lógicos mais complexos. Consequentemente, a utilização de modelos histeréticos simplificados, com menor número de parâmetros e regras, não conduz necessariamente à otimização do uso dos computadores. A escolha do modelo a implementar está mais condicionada pelo tipo de análise subsequente em que vai ser integrado. Um exemplo deste tipo de otimização de utilização, foi seguido no LNEC, [13] e [14]. Este mesmo raciocínio pode ser sempre aplicado, quando se pretende estudos paramétricos de comportamento global, [15].

Vários modelos analíticos que se adaptam ao comportamento em flexão de elementos estruturais de betão armado, têm vindo a ser implementados em todo o mundo, salientando-se os seguintes:

1. Modelo Bilinear
2. Modelo de Ramberg-Osgood
3. Modelo de Clough com Degradação de Rigidez
4. Modelo de Takeda
5. Modelo Trilinear com Degradação da Rigidez

Em todos eles considera-se que existe uma curva base obtida de ensaios monotónicos, simétrica em relação à origem. Esta curva, pode ser representada por uma sucessão de rectas, sendo os pontos de inflexão, definidos pelas forças e deslocamentos generalizados correspondentes à fendilhacão do betão e à cedência das armaduras longitudinais, constituindo-se curvas de restituição bilineares ou trilineares.

### 3. CARACTERISTICAS E IMPLEMENTACÃO COMPUTACIONAL DO MODELO HISTERETICO

O modelo histerético trilinear desenvolvido e implementado no VAX 7800 do LNEC baseou-se no modelo de Takeda incluindo as seguintes particularidades:

1. Degradação de rigidez com a deformação
2. Degradação de rigidez após inversão do carregamento
3. Degradação de resistência
4. Consideração do efeito P-Delta
5. Consideração da influência do esforço transversal, da deterioração da aderência e do escorregamento das armaduras.

Um modelo histerético com interesse prático, tem que ser definido por um número não muito grande de parâmetros e regras, que reproduzam andamentos observados experimentalmente.

Os parâmetros que identificam a curva base, Fig.6, são os seguintes:

- K0 - rigidez inicial (troco 1)
- K1 - rigidez após fissuração (troco 2)
- K2 - rigidez após cedência (troco 3)
- Dc - deslocamento generalizado correspondente à fissuração
- Dy - deslocamento generalizado correspondente à cedência

Além destes tornou-se necessário a definição de mais dois parâmetros adimensionais, que caracterizam a degradação da rigidez ( $\alpha$ ) e resistência ( $\gamma$ ).

A degradação da resistência foi levada em consideração através do parâmetro  $\gamma$ , que irá definir a envolvente das curvas de resistência máxima.

As regras estabelecidas para o modelo analítico exemplificadas na Fig. 7, traduzem-se nos pontos seguintes:

1. Enquanto o deslocamento generalizado máximo absoluto em cada passo não ultrapassar o valor Dy, o modelo comporta-se como um bilinear sem degradação da rigidez e resistência (troc0s 1, 2, 3, 4, 5 e 6);
2. Quando o deslocamento generalizado máximo absoluto ultrapassa Dy (troco 7 e 10) e se procede a uma inversão do carregamento, ela é feita considerando a degradação de rigidez dada pela expressão:

$$K_D = K_e (D_y / D_M)^\alpha$$

mantendo-se válida até se anular o valor da força generalizada (troco 8, 11, 14, 17, 19 e 21);

3. A inversão do sinal da força generalizada corresponde a uma mudança de rigidez, sendo definida com base no valor máximo absoluto da força e deslocamento generalizados do ciclo anterior (troco 9, 12, 15, 20, 18, 22 e 23);
4. Quando se considera a degradação de resistência ( $\gamma=0$ ) então o valor máximo da força e deslocamento generalizados do ciclo anterior, referidos em 3, são alterados para os seguintes valores (troco 12A, 13A e 15):

$$D_{UNC}^\pm = D_{CA}^\pm * (1+\gamma) \quad F_{UNC}^\pm = F_{CA}^\pm (1-\gamma)$$

em que:

- $D_{CA}^\pm$  - deslocamento generalizado máximo absoluto do ciclo anterior (ponto 3)
- $D_{UNC}^\pm$  - deslocamento generalizado máximo absoluto a atingir pelo ciclo presente
- $F_{CA}^\pm$  - força generalizada máxima absoluta do ciclo anterior
- $F_{UNC}^\pm$  - força generalizada máxima absoluta a atingir pelo ciclo presente

5. Os valores máximos absolutos a atingir nos pontos 3 e 4 só serão actualizados, caso sejam ultrapassados (troco 18 e

20).

6. Quando se dá a inversão do carregamento, antes de se atingir os valores máximos absolutos, torna-se necessário guardar os valores máximos relativos obtidos nessa inversão. Assim para ciclos mais internos, o ponto de resposta, move-se em direcção a esses máximos relativos, permitindo-se a reprodução de pequenos ciclos de carga e descarga (trocós 19, 20, 21 e 22) e suprime-se a deficiência anteriormente citada relativa ao modelo de Clough.
7. Caso sejam ultrapassados os valores máximos relativos, o ponto de resposta move-se em direcção ao máximo absoluto (troco 23).
8. A consideração do efeito de "pinching" poderá ser feito a partir do parâmetro  $\beta$  e é dado por uma rigidez, expressa por:

$$K^{\pm} = F_{CA}^{\pm} / (D_{CA}^{\pm} - D_{\phi}^{\pm}) * (D_y^{\pm} / D_{CA}^{\pm})^{\beta}$$

sendo  $D_{\phi}^{\pm}$  os valores dos deslocamentos generalizados correspondentes à força generalizada nula do ciclo anterior e  $F_{CA}^{\pm}$ ,  $D_{CA}^{\pm}$  os valores máximos obtidos no ciclo anterior. O valor desta rigidez é válido até se intersectar a recta que une a origem das coordenadas, aos pontos  $(F_{CA}^{\pm}, D_{CA}^{\pm})$ , sendo a rigidez a partir desse ponto dada pela inclinação dessa recta. Este efeito é traduzido pelos trocos 8-9 e 12-13 na Fig 8.

A implementação computacional do modelo anteriormente referido, baseou-se nos seguintes pontos:

1. A subrotina fornece a rigidez e as forças generalizadas de restituição inelásticas a partir da entrada de um deslocamento generalizado imposto, à custa de 25 parâmetros, que definem a curva base e a história do carregamento.
2. O número mínimo de parâmetros necessários à definição da história das relações,  $F-d$  foi de 17, Quadro 4.1. Os restantes 8 parâmetros, são constantes definidoras da curva base, do grau de degradação de rigidez, resistência, efeito de pinching.
3. As variáveis internas da subrotina são unidimensionais, sendo os parâmetros da curva base e da história do carregamento armazenados em matrizes ao nível do programa principal.
4. Todos os valores internos da subrotina são por isso variáveis mudas, sendo os seus conteúdos actualizados para cada chamada da subrotina.
5. A integração desta subrotina num programa mais geral de análise estática ou dinâmica com  $n$  graus de liberdade, terá de ser realizada de modo a que a chamada da subrotina se faça por grau de liberdade.

6. Para estes casos e à custa de um só valor para todos os graus de liberdade, a subrotina só memoriza a história no final do processo iterativo de convergência. Ou seja, não há actualização de valores máximos absolutos ou relativos antes de se atingir o equilíbrio.
7. A consideração do efeito do esforço normal é feita exteriormente à subrotina através da soma algébrica de um efeito adicional,[15].

#### 4. APLICACÕES E CONCLUSÕES

Nas Figs. 9 e 10 apresentam-se dois exemplos de aplicação da subrotina desenvolvida a um problema estático com imposição de deslocamentos e a um oscilador com 1 grau de liberdade onde se impôs uma aceleração na base.

Procurou-se com este trabalho, o desenvolvimento e implementação computacional de um algoritmo, representativo das relações histeréticas forcas-deslocamentos generalizados, observadas em ensaios de elementos de betão armado sujeitos à flexão.

Foi dado um carácter absolutamente geral à implementação do modelo, de forma a poder ser usado em trabalhos futuros de análise dinâmica em regime não linear de estruturas de betão armado sujeitas à accção de sismos.

O modelo pode incluir diversos tipos de comportamento, traduzidos por um certo número de regras e parâmetros, que permitirá reproduzir relações forcas-deslocamentos generalizados, a diversos níveis do comportamento estrutural. Assim, efeitos como:

1. Degradação de rigidez, com a deformação.
2. Degradação de rigidez após inversão do carregamento.
3. Degradação de resistência.
4. Efeito de "pinching" e "slipping".
5. Efeito P-delta.

podem ser considerados isoladamente ou qualquer combinação dos mesmos. Deste modo, uma estrutura resultante da associação de diversos elementos estruturais, com diferentes comportamentos histeréticos, poderá ser idealizada através deste modelo, (por exemplo o comportamento das alvenarias para forcas-deslocamentos horizontais contidas no seu próprio plano, é simulado levando ao extremo o efeito de "pinching").

Além disso, comportando-se o modelo como bilinear, até se atingir o ponto correspondente à cedência, a sua escolha criteriosa, permite a reprodução das relações histeréticas bilineares sem degradação de rigidez durante toda a história do carregamento.

Foram realizados diversos testes estáticos e dinâmicos que procuraram cobrir as potencialidades do modelo.

A utilização desta subrotina em programas de análise estática e dinâmica de associações em série e em paralelo com vários graus de liberdade, será objecto de trabalho futuro.

## AGRADECIMENTOS

Os autores exprimem o seu agradecimento aos Investigadores T. Duarte e S. Oliveira do LNEC, pelo apoio e estímulo dado ao presente trabalho.

## BIBLIOGRAFIA

- [1]-RSA, (1983), Regulamento de Segurança e Accões para Estruturas de Edifícios e Pontes, Lisboa.
- [2]-REBAP (1985) - Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado, Lisboa.
- [3]-Takeda, T.; M.A. Sozen; N.N. Nielsen (1970) - "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes", Journal Structural Division, ASCE, Vol.36, No.ST.12, EUA.
- [4]-Costa A.G; Costa A. C. (1987) - "Modelo Histerético das Relações Forças-Deslocamentos Adequado à Análise Sísmica de Estruturas", Relatório, LNEC, Lisboa.
- [5]-Bertero, V. (1979) - "Seismic Behaviour of Structural Concrete Linear Elements (Beams, Columns) and Their Connections", AICAP-CEB Symposium, Structural Concrete under Seismic Actions, CEB Bulletin d'Information no.131, Abril.
- [6]-Bertero, V.; Popov, E. (1977) - "Seismic Behaviour of Ductile Moment - Resisting Reinforced Concrete Frames", ACI Publication SP-53, Reinforced Concrete Structures in Seismic Zones, Detroit.
- [7]-LNEC (1985) - "Estruturas de Betão Armado Sujeitas à Accão dos Sismos", Curso LNEC, Lisboa.
- [8]-Borges, J.Ferry (1973) - "Structural Behaviour under Repeated Loading", Working Group on Resistance of Structures, European Association for Earthquake Engineering (EAEE), Lisboa.
- [9]-Soesianawati, M.T. (1986) - "Limited Ductility Design of Reinforced Concrete Columns", Research Report, Canterbury, New Zealand.
- [10]-Anderson, J.C.; Townsend, W.H. (1977) - "Models for R/C Frames with Degrading Stiffness", Journal of the Structural Division, ASCE, EUA.
- [11]-Ciampi, V.; Carlisimo, L. (1986) - "A Nonlinear Beam Element for Seismic Analysis of Structures", Apresentado na 8th European Conference on Earthquake Engineering, Lisboa.
- [12]-Keshavarzian, M.; Schnobrich, W.C. (1983) - "Analytical Model for the Nonlinear Analysis of R/C Structures", Apresentado na Annual Convention, ACI, Los Angeles.
- [13]-A. Ravara (1973) - "Comportamento Sísmico de Edifícios com Estrutura Parede", Tese, Memória no.423, LNEC, Lisboa.
- [14]-Carvalho, E.C. (1980) - "Comportamento Sísmico de Edifícios com Estrutura em Pórtico ou Mista", Tese LNEC, Lisboa.
- [15]-Unemura, H.; Takizawa, H. (1982) - "Dynamic Response of Reinforced Concrete Buildings", Structural Engineering Documents, IABSE, Zurich.



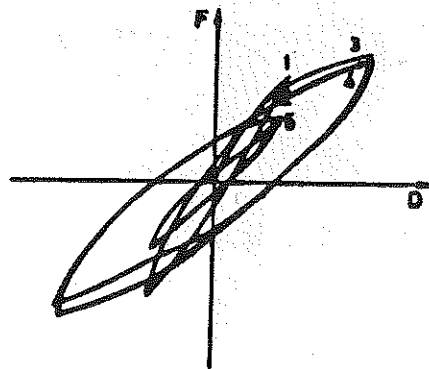


Fig. 1-Comportamento típico em flexão de um elemento de betão armado sujeito a deslocamentos alternados.

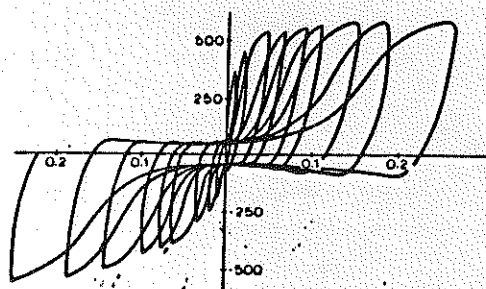


Fig. 3-Efeito do escorregamento das armaduras longitudinais nos seus comprimentos de amarração.

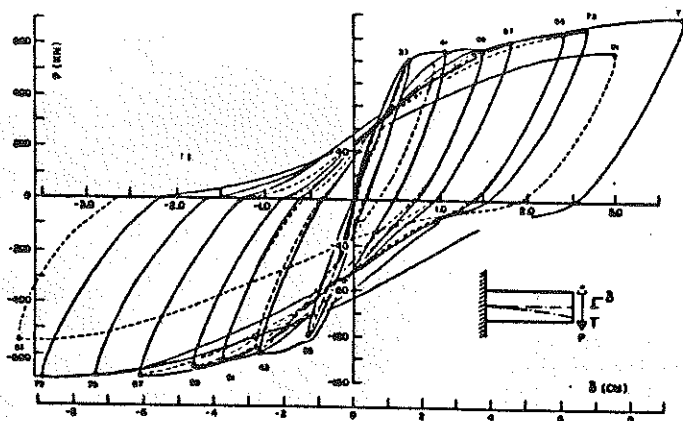


Fig. 2-Efeito de "pinching" observado experimentalmente

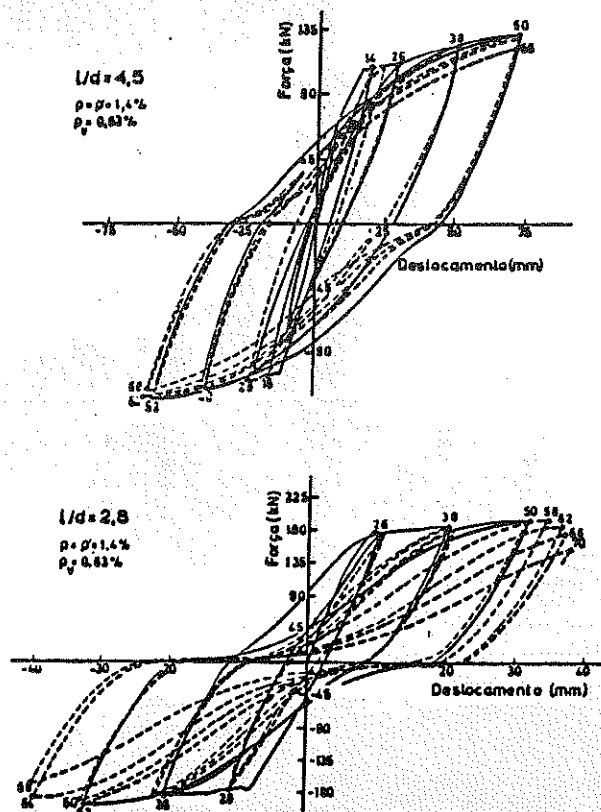


Fig. 4-Comparação da importância do esforço transverso no comportamento dos elementos de betão armado à flexão.

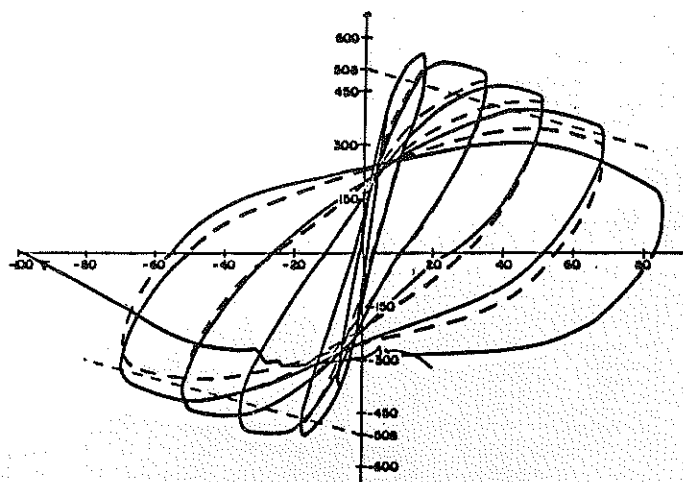


Fig. 5-Influência do esforço normal no comportamento dos elementos de betão armado sujeitos à flexão.

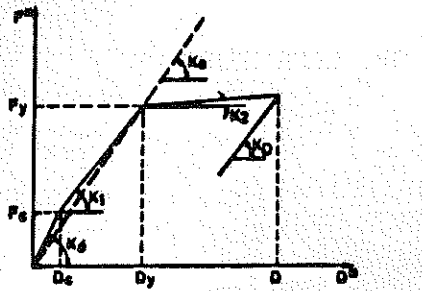


Fig. 6-Parâmetros de identificação da curva base

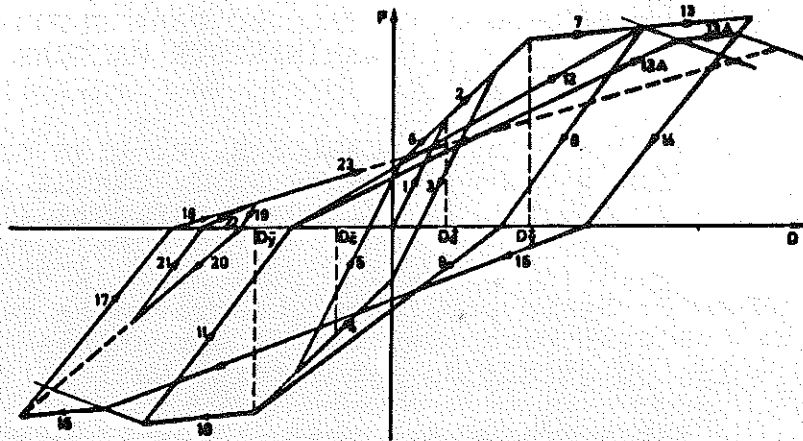


Fig. 7-Regras de histerese do modelo desenvolvido.

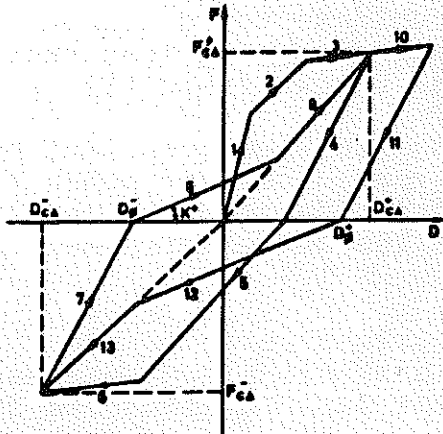
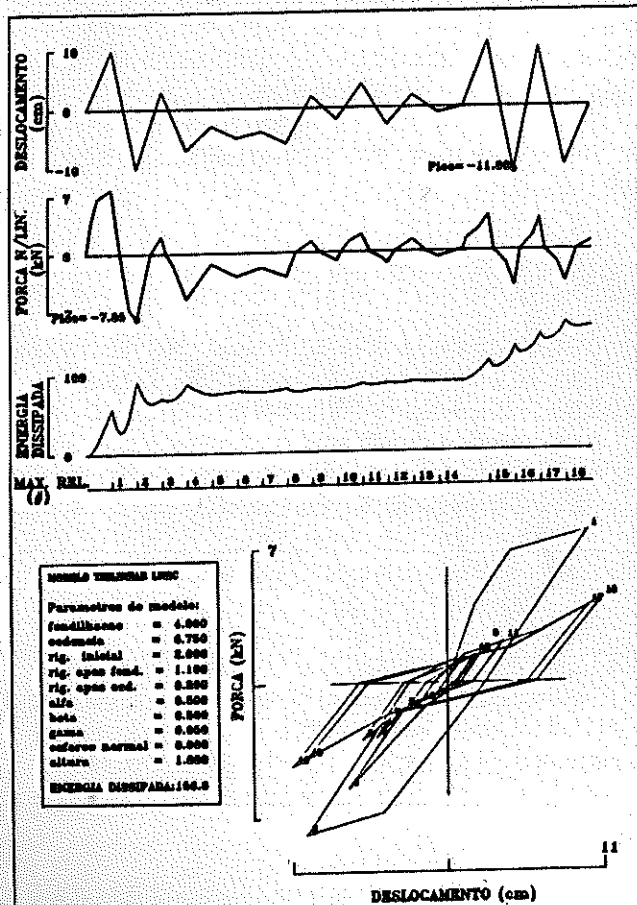
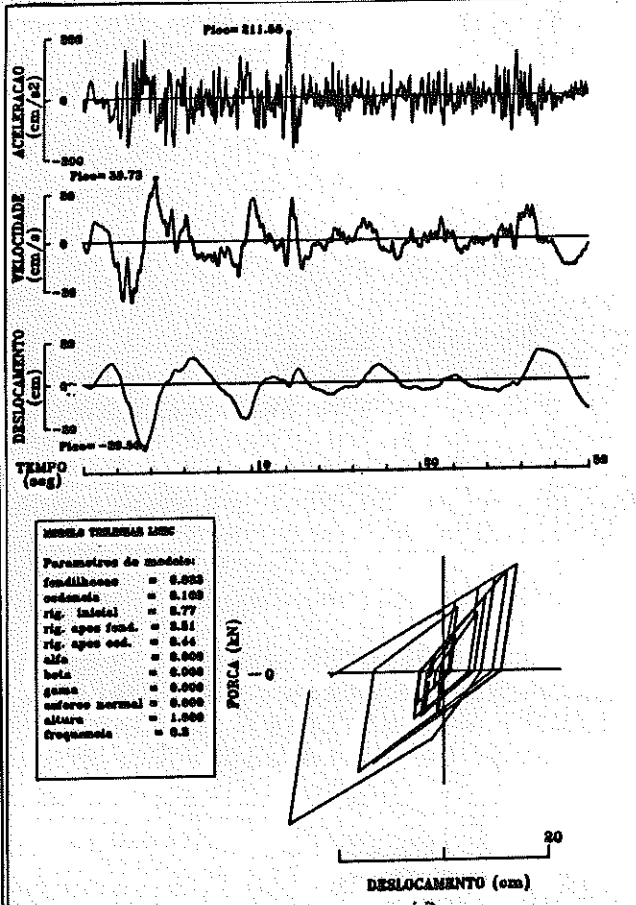


Fig. 8-Consideração do efeito de "pinching" no modelo desenvolvido.



MODELO HISTERETICO - LNEC (1/Maio/1987)  
IMPOSIÇÃO DE DESLOCAMENTOS ALTERNADOS - EXEMPLO 14

Fig. 9-Resultados obtidos em termos de relações F-d para deslocamentos alternados.



MODELO HISTERETICO - LNEC (13/Maio/1987)  
EL CENTRO 1940 S80W

Fig. 10-Resposta de um oscilador não linear com frequência própria inicial igual a 0.33Hz. Acelerações, velocidades e deslocamentos dados em valores relativos.