

# IDEALIZAÇÃO DE ACÇÕES SÍSMICAS POR UM MODELO ESTOCÁSTICO NÃO-ESTACIONÁRIO

Alfredo Campos Costa<sup>1</sup>  
Ricardo Teixeira Duarte<sup>2</sup>

## SUMÁRIO

Apresenta-se nesta comunicação um modelo estocástico não-estacionário para idealizar acções sísmicas. Neste modelo a não-estacionariedade verifica-se quer na intensidade quer na distribuição espectral; a sua definição, que é feita com base num espectro de potência e numa função de modulação, permite a sua quantificação a partir de um espectro de resposta de uma forma muito directa, através do algoritmo clássico de transformação espectro de resposta-espectro de potência. Apresenta-se, como ilustração, a quantificação de um modelo não-estacionário pelo espectro de resposta do Eurocódigo 8.

## INTRODUÇÃO

É bem conhecido, desde há alguns anos, que se a idealização das acções sísmicas por modelos que não têm em conta a evolução no tempo das características das vibrações sísmicas é aceitável para o estudo do comportamento em regime linear das estruturas, o mesmo não acontece quando se consideram comportamentos lineares (Amin, Ts'ao e Ang, 1969; Saragoni e Hart, 1973; T. Minami et al., 1977); igualmente se sabe que as propriedades estatísticas dos acelerogramas dificilmente podem ser consideradas estacionárias mesmo quando a análise apenas incide sobre a "fase mais intensa" (Jervis Pereira, 1974).

Assim, justifica-se desenvolver modelos que tenham adequadamente em conta a não-estacionariedade das vibrações sísmicas. Um dos modelos mais versáteis para este efeito é obtido pela justaposição criteriosa de troços de processos gaussianos estacionários (Ref. 5); no entanto a transição entre troços, caracterizando-se por uma variação brusca das propriedades do processo, introduz "descontinuidades" que presumivelmente não afectando a resposta estrutural introduzem uma certa "artificialidade" no modelo que só pode ser torneada à custa de um número muito grande de troços. Procurou-se assim desenvolver um modelo que permitisse uma variação contínua das suas características, e não onerasse excessivamente o cálculo de resposta das estruturas.

## O MODELO ESPECTRO - MODULANTE

O modelo espectro-modulante é um modelo estocástico não-estacionário que é especificado por um espectro de potência  $S(\omega)$  e uma função modulante  $m(\omega, t)$  e definido a partir das realizações de um modelo gaussiano estacionário  $y_\epsilon(t)$  correspondente ao espectro  $S(\omega)$  e à variável aleatória  $\epsilon \in E$ ;<sup>3</sup> admitir-se-á que o modelo é de duração finita ou seja  $m(\omega, t) \equiv 0$  para  $t \leq t_i$  e  $t_f \leq t$ . Seja:

$$C_\epsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_i}^{t_f} y_\epsilon(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

<sup>1</sup>Assistente de Investigação, Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

<sup>2</sup>Investigador Coordenador, Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

<sup>3</sup>onde  $E$  é um espaço de probabilidade adequado.

a transformada de Fourier da realização  $y_e(t)$  calculada para o intervalo  $(t_1, t_2)$ . Então a correspondente realização do modelo espectro-modulante  $x_e(t)$  é definida como sendo:

$$x_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_e(\omega) m(\omega, t) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

A estas realizações corresponde um "espectro de potência evolutivo" definido por:

$$S(\omega, t) = m^2(\omega, t) S(\omega) \quad (3)$$

A aplicabilidade deste modelo depende essencialmente da especificação que se adopte para a função modulante. Verifica-se que a seguinte especificação conduz a uma operacionalidade aceitável:

- (a) a função  $m(\omega, t)$  é especificada a partir de uma matriz  $m_{ij}$ , definida para uma sucessão crescente de frequências  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots \omega_M)$  e de instantes  $(t_1, t_2, t_3 \dots t_N)$ ; normalmente ter-se-á  $\omega_1 = 0, t_1 = t_i$  e  $t_N = t_f$ .
- (b) O valor de  $m(\omega, t)$  é dado por:

$$m_1 = m_{ij} + \frac{\omega - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} (m_{i+1,j} - m_{ij}) \quad (4)$$

$$m_2 = m_{ij+1} + \frac{\omega - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} (m_{i+1,j+1} - m_{ij+1}) \quad (5)$$

$$m(\omega, t) = \sqrt{m_1^2 + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} (m_2^2 - m_1^2)} \quad (6)$$

sendo  $i$  e  $j$  tais que  $\omega_i \leq \omega \leq \omega_{i+1}$  e  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ . Esta especificação de  $m(\omega, t)$  corresponde a uma interpolação linear em frequência e quadrática no tempo.

## CÁLCULO DA RESPOSTA DE OSCILADORES LINEARES

O cálculo da resposta de osciladores lineares ao modelo espectro-modulante tem, no contexto desta comunicação, uma especial importância em relação à determinação do espectro de resposta.

A resposta estocástica de um oscilador linear de um grau de liberdade<sup>4</sup>, com frequência  $\omega_n$  e razão de amortecimento  $\zeta_n$  quantificada pelo valor médio do valor máximo da resposta  $r_e(t)$  (determinística) a cada realização  $x_e(t)$ , pode ser calculada a partir da distribuição de Gumbel:

$$P(r) = \exp(-\exp(-\alpha(r - u))) \quad (7)$$

equivalente à distribuição de Vanmarcke das "primeiras passagens" de um processo por um nível  $l$  no tempo  $\tau$ :

$$P(l) \equiv P(r_e(t) \text{ menor que } l, 0 < t < \tau) = A \exp(-\alpha\tau) \quad (8)$$

em qua  $A$  é a probabilidade de no instante inicial o processo  $r_e(t)$  ser inferior a  $l$  (considerar-se-á sempre  $A \equiv 1$ ) e  $\alpha$  é a taxa de decaimento (Vanmarcke, 1975)

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \exp(-l^2/2\lambda_0) \frac{1 - \exp(-lq^{1.2} \sqrt{\pi/2\lambda_0})}{1 - \exp(-l^2/2\lambda_0)} \quad (9)$$

onde  $q = \sqrt{1 - \lambda_1^2/\lambda_0\lambda_2}$  e  $\lambda_0, \lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os momentos espectrais evolutivos. Estes momentos podem ser calculados a partir dos momentos espectrais estacionários  $\lambda_0^e, \lambda_1^e$  e  $\lambda_2^e$  através de funções  $\xi_r(\omega_n, \epsilon_n)$

<sup>4</sup>a resposta de osciladores lineares com vários graus de liberdade calcula-se de uma forma semelhante (Ref. 6).

(Ref. 6) definidas para um "intervalo de integração" ( $t'_r, t''_r$ ) suficientemente pequeno para que as características da acção se possam considerar estacionárias:

$$\xi_r = 0 \quad t < t'_r \quad (10)$$

$$\xi_r = (1 - \exp(2\omega_n \xi_n(t - t'_r)))^{1/2} \quad t'_r \leq t < t''_r \quad (11)$$

$$\xi_r = (\exp(2\omega_n \xi_n(t - t''_r)) - \exp(2\omega_n \xi_n(t - t'_r)))^{1/2} \quad t''_r < t \quad (12)$$

$$\lambda_g = \sum_r^R \xi_r \lambda_{gr}^e \quad g = 0, 1, 2 \quad t'_1 = t_i \quad t''_R = t_f \quad (13)$$

Os momentos espectrais estacionários são definidos por:

$$\lambda_g^e = \int_0^\infty \omega^g |H(\omega)|^2 S(\omega) d\omega \quad (14)$$

onde  $H(\omega)$  é a função de transferência<sup>5</sup> do oscilador.

A equivalência entre a distribuição de Gumbel e a de Vanmarcke é estabelecida em termos da igualdade dos quantis de 5% e 95% a que correspondem os níveis  $l_1$  e  $l_2$  (Ref. 6). Estes níveis são calculados pelo seguinte processo iterativo:

- (a) Arbitrio de valores para  $l_1$  e  $l_2$ ;
- (b) Cálculo dos valores de distribuição de Vanmarcke  $P(l_1)$  e  $P(l_2)$ ;
- (c) Cálculo dos parâmetros  $a$  e  $u$  da distribuição de Gumbel:

$$\alpha = \ln(\ln P(l_1) / \ln P(l_2)) / (l_2 - l_1) \quad (15)$$

$$u = l_1 + \ln(-\ln P(l_1)) / \alpha \quad (16)$$

- (d) Determinação de novos valores para  $l_1$  e  $l_2$ , a partir da distribuição de Gumbel quantificada pelos valores calculados de  $\alpha$  e  $u$ ;
- (e) Repetição das fases b, c, e d até se obter convergência.

Uma vez obtida a convergência, o valor médio de distribuição do maior valor da resposta é dado por:

$$\max r = U + 0,577 / \alpha \quad (17)$$

Tem interesse salientar que, de um ponto de vista numérico, o valor dos momentos espectrais estacionários para o "intervalo de integração" ( $t'_r, t''_r$ ) é obtido por combinação linear dos valores dos momentos espectrais nos instantes correspondentes aos valores de  $j$  da matriz  $m_{ij}$ ; devido à forma adoptada para a interpolação no domínio do tempo (expressão 4). Assim, torna-se possível usar um grande número de "intervalos de integração" sem onerar excessivamente o cálculo.

<sup>5</sup>considerando-se nesta comunicação e espectros de potência de aceleração,  $H(\omega)$  é a função de transferência de aceleração da base para deslocamentos relativos do oscilador.

## QUANTIFICAÇÃO DO MODELO ESPECTRO-MODULANTE A PARTIR DE UM ESPECTRO DE RESPOSTA

A quantificação do modelo espectro-modulante a partir de um espectro de resposta envolve duas fases. Na primeira fase são definidas as características evolutivas através da fixação de valores para a matriz  $m_{ij}$ . Esta fixação pode ser auxiliada através de apreciação de alguns parâmetros como a intensidade, energia total da história (total signal energy input), a frequência média e o número médio de passagens ascendentes pelo zero (Ref. 5 e 6).

Na segunda fase, é quantificado o espectro de potência a partir do algoritmo clássico (Ref. 8). Considere-se que o espectro de resposta para um amortecimento  $\zeta$  é definido por um conjunto de ordenadas espectrais  $A_i$  correspondentes a períodos  $T_i$ ; convém na prática que estes períodos formem aproximadamente uma sucessão geométrica. A função densidade espectral de potência admite uma forma poligonal cujos vértices são pares de frequências espectrais  $(\omega_j, S_j)$ . A escolha dos valores de  $\omega_j$  é regida pela largura de banda  $2\zeta(2\pi/T_i)$  da função de transferência do oscilador: se o intervalo entre os sucessivos  $\omega_j$  for muito superior a essa largura de banda, diminui-se bastante o conjunto de espectros de resposta para os quais existe um espectro de potência equivalente; se a separação entre os  $\omega_j$  for muito inferior, podem-se obter vários espectros de potência, alguns muito irregulares e que, em termos práticos, correspondem todos ao mesmo espectro de resposta; sublinhe-se também que o cálculo numérico envolvido neste algoritmo é aproximadamente proporcional ao número dos  $\omega_j$ . Assim escolhem-se os  $\omega_j$  de modo a formar uma sucessão geométrica de razão  $(1 + 2\zeta)$ . Atribuem-se a  $S_j$  valores  $S_j^1$  escolhidos arbitrariamente (por exemplo  $S_j^1 = 1/s^3$ ) ou a partir das regras apresentadas na secção 2.1.6. Determina-se as ordenadas espectrais correspondentes  $A_i^1$ , e a razão  $r_i = A_i/A_i^1$ . Altera-se o espectro multiplicando por  $r_i^2$  todos os valores de  $S_j^1$  a que correspondam valores de frequências  $\omega_j$  na vizinhança de  $2\pi/T_i$ ; seguidamente suaviza-se a série de valores  $r_i^2 S_j^1$  pela aplicação de uma "janela", na prática, os coeficientes clássicos de Tuckey 1/4, 1/2, 1/4 obtendo-se valores  $S_j^2$  com os quais se inicia um novo ciclo.

### EXEMPLO

Para exemplificar a utilização do modelo espectro-modulante, fez-se a sua aplicação a um espectro de resposta do Eurocódigo 8. Como foi referido, a primeira fase consiste na definição de função modulante através de matriz  $m_{ij}$ . Para obter uma evolução da intensidade e da distribuição espectral semelhante à existente nos acelerogramas obtidos para sismos de magnitude moderada a uma distância focal também moderada, arbitraram-se os seguintes valores para  $m_{ij}$ :

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.50 & 0.80 & 1.00 & 0.50 & 0.10 & 0.02 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 0.80 & 1.00 & 0.50 & 0.10 & 0.02 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 1.00 & 1.00 & 0.40 & 0.10 & 0.02 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 1.00 & 1.00 & 0.30 & 0.10 & 0.02 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 1.00 & 0.80 & 0.20 & 0.10 & 0.02 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 1.00 & 0.60 & 0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 1.00 & 0.40 & 0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

em que as colunas dizem respeito aos instantes 0, 1, 2, 5, 10, 15, 20 e 30 s, e as linhas dizem respeito às frequências 0, 0.1, 0.3, 1.0, 3.0, 10.0 e 30.0 Hz.

É necessário uma certa experiência para arbitrar os valores de  $m_{ij}$ ; no entanto, após a quantificação do modelo, a geração de séries e a observação dos acelerogramas geradas é geralmente fácil corrigir a função modulante.

O espectro de resposta foi definido por 27 pontos que se apresentam na figura 1, onde também se representa o espectro de resposta calculado a partir do modelo espectro-modulante quantificado como

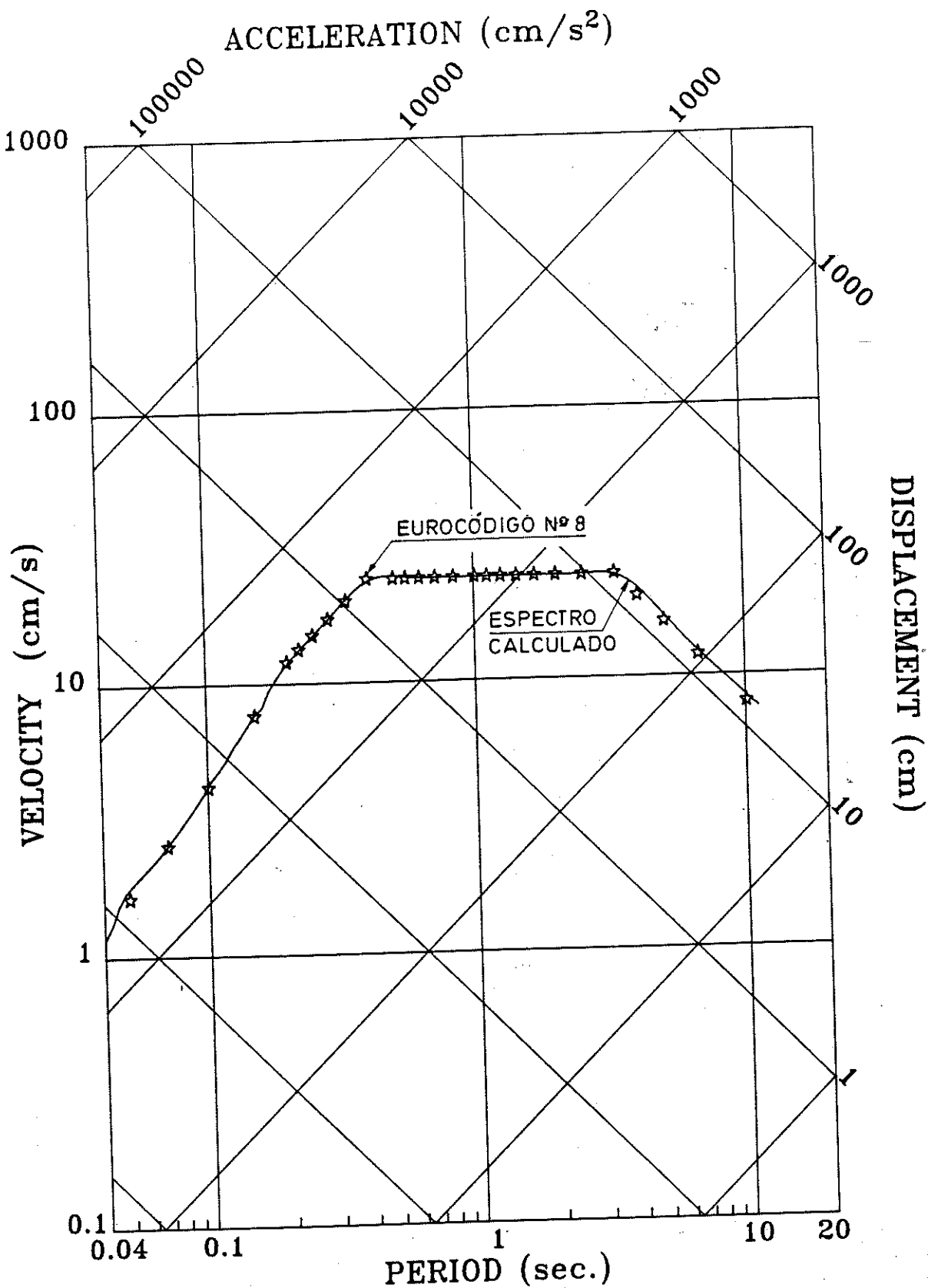


Figura 1: Espectro de resposta do Eurocódigo No.8 para acção A e 5% de amortecimento (estrelas). Espectro de resposta obtido a partir do modelo espectro - modulante (linha cheia).

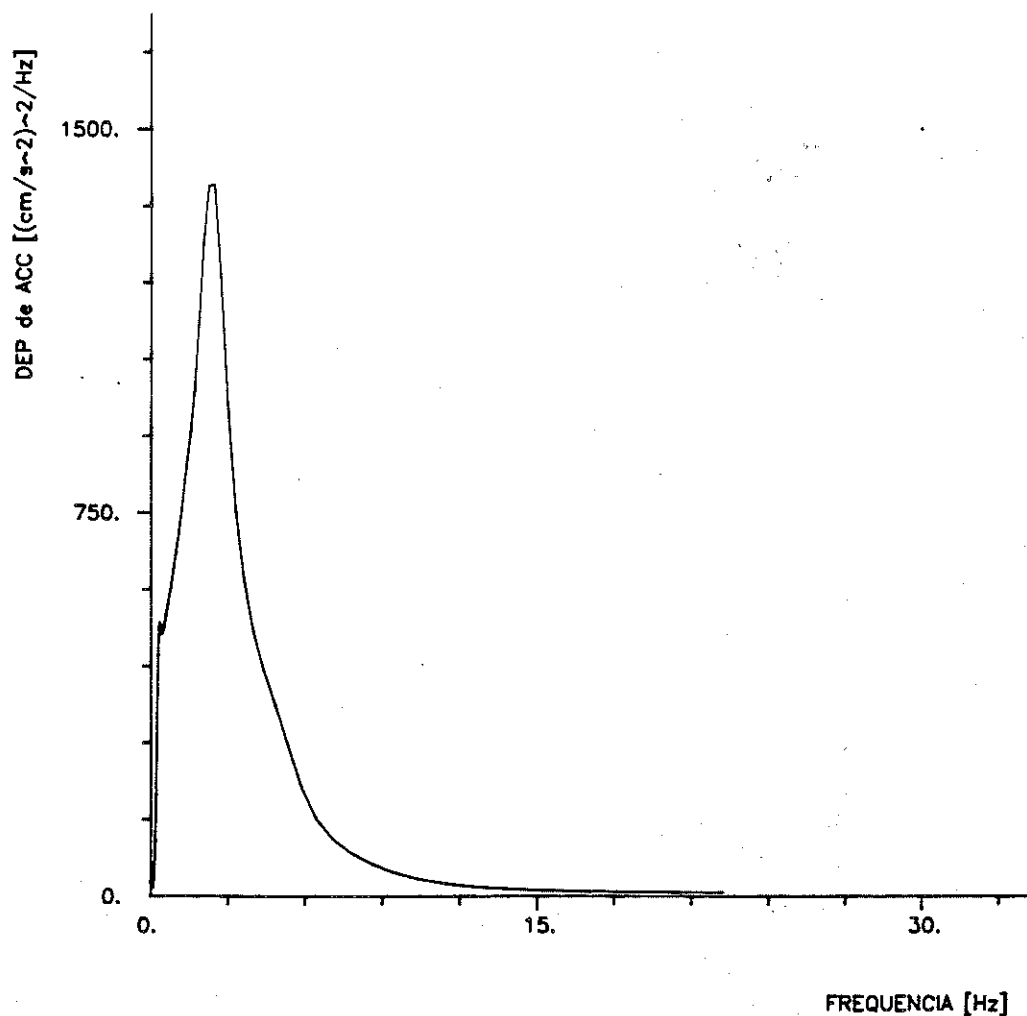


Figura 2: Espectro de potência correspondente ao espectro de resposta apresentado na figura 1.

atrás se descreveu; o espectro de potência correspondente é apresentado na figura 2. Gerou-se uma amostra de vinte realizações, de acordo com a técnica usual (Ref. 9); a título de exemplo, apresenta-se na figura 3 uma dessas realizações; nessa figura está explicitado o processo correctivo que permite controlar o valor dos deslocamentos. É facilmente observável as diferentes evoluções das histórias de aceleração, velocidade e deslocamentos que ilustram a não-estacionaridade da distribuição espectral e da intensidade.

Na figura 4, apresenta-se as estatísticas usuais do espectro de resposta correspondente à amostra de 20 realizações. Verifica-se um ajustamento algo deficiente na zona de velocidade espectral constante que, no entanto, poderá ser atribuído a variabilidade estatística. Como é propósito dos autores desta comunicação alargar a formulação apresentada de modo a poder incluir o valor do deslocamento máximo na quantificação do modelo não-estacionário (de acordo com a quantificação da acção sísmica no Eurocódigo 8), o que necessariamente alterará o algoritmo na zona das baixas frequências, analisar-se-á este problema em estudo futuro.

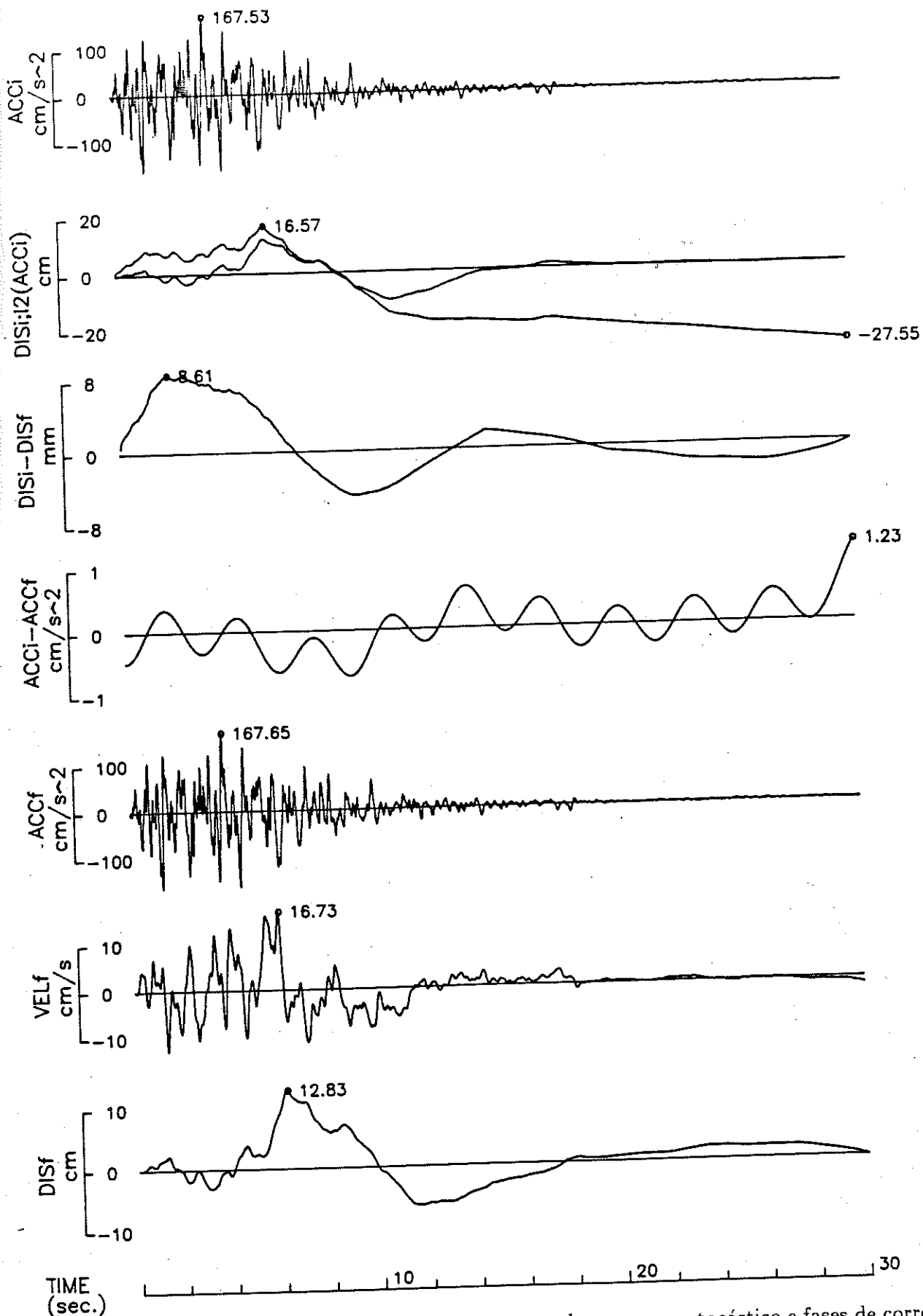


Figura 3: Realização não-estacionária de uma amostra do processo estocástico e fases de correcção de deslocamentos.

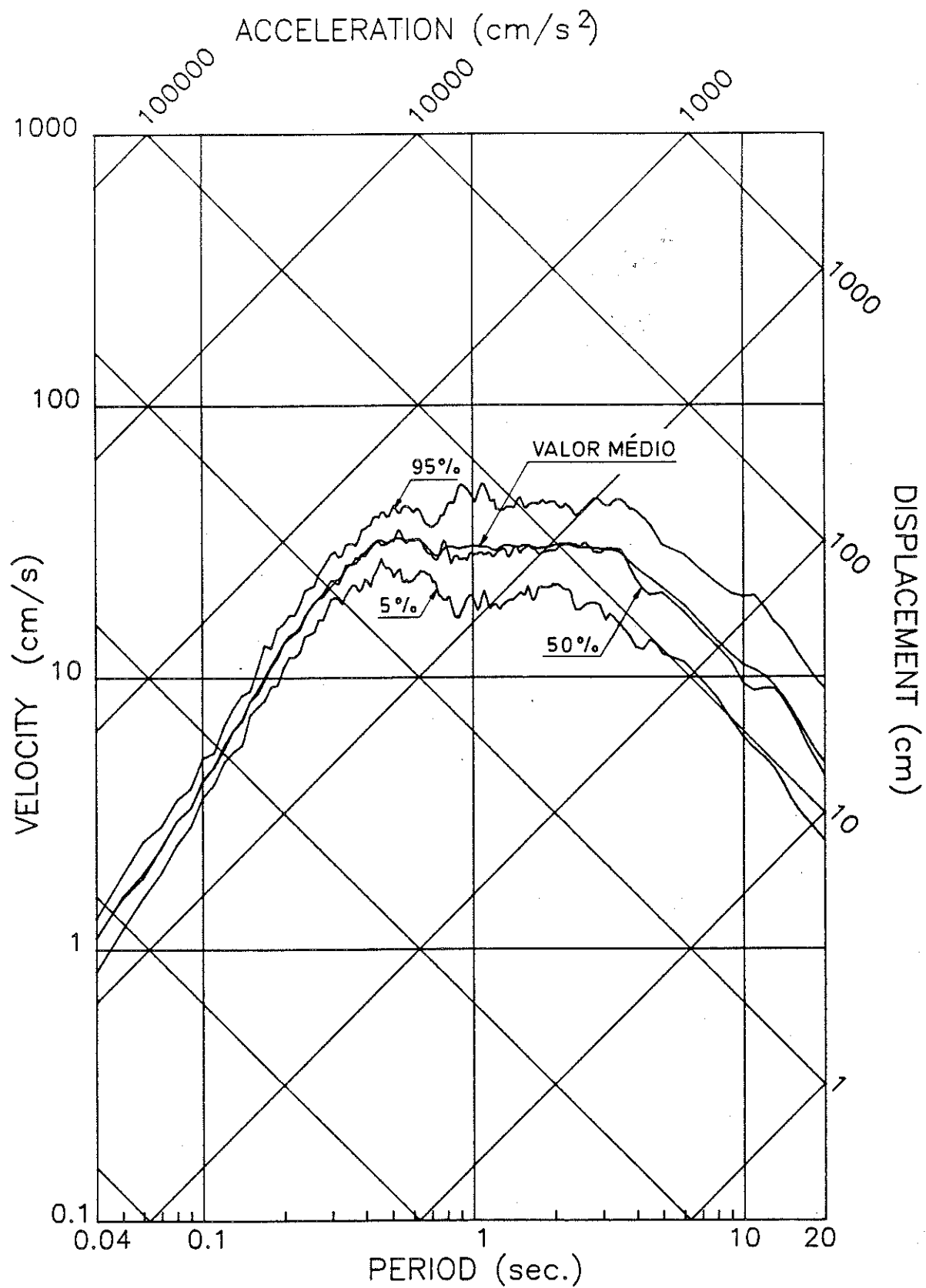


Figura 4: Espectro de resposta estatístico de uma amostra do processo estocástico correspondente a vinte realizações (Valores médios e quantilhos de 5%, 50% e 95%).



## REFERÊNCIAS

1. M.Amin, H.S. Ts'ao e A.H. - S.Ang, 1969 - Significance of Nonstationarity of Earthquake Motions, Proc. IV World Conf. Earthquake Engrg., Santiago, Chile.
2. GR. Saragoni e G.C. Hart, 1973 - Time Variation of Ground Motion Frequency Content: Characterization and Relevance, Proc. V World Conf. Earthquake Engrg., Roma.
3. t. Minami, T.Tanaka, Y. Sonoda e Y. Osawa, 1977 - Non-Stationarities Observed Strong-Motion Accelerograms and their Effects on Earthquake Response of Structures, Proc. VI World Conf. Earthquake Engrg., Nova Delhi.
4. J.M. Jervis Pereira, 1974 - Métodos Probabilísticos em Engenharia Sísmica, Memória n° 442, LNEC.
5. R.T. Duarte, 1978 - A Stochastic Model of Non-Stationary Ground Motion, Proc. 6th European Conf. Earthquake Engrg., Dubrovnik.
6. R.T. Duarte 1978 - Uma Teoria Linear do Comportamento Dinâmico das Estruturas Sujeitas a Acções Sísmicas, Tese, LNEC.
7. E.H. Vanmarcke, 1975 - On the Distribution of the First-Passage Time for Normal Stationary Processes, Jour. Appl. Mech., Vol. 42.
8. R.T. Duarte, 1974 - Oscilador de 1 Grau de Liberdade. Aplicações em Engenharia Sísmica, Relatório, LNEC.
9. R.T. Duarte and A.C. Costa, 1990 - Generation of Integrable Time Series of Accelerations, Relatório, LNEC (a ser publicado).