

METODOLOGIA BAYESIANA PARA A QUANTIFICAÇÃO DA
PROBABILIDADE DE RUÍNA E A OPTIMIZAÇÃO DA ANÁLISE

BAYESIAN METHODOLOGY FOR THE QUANTIFICATION OF THE
FAILURE PROBABILITY AND THE OPTIMIZATION OF ANALYSIS

Ricardo Teixeira Duarte¹

Manuel Ritto Corrêa²

Carlos Trancoso Vaz³

Alfredo Campos Costa⁴

SUMÁRIO

Apresenta-se uma metodologia bayesiana para estimar a relação não-linear acções-efeitos das acções (função de vulnerabilidade) para efeitos de cálculo de probabilidade de ruína; embora a metodologia seja geral, ela é apresentada para o caso das acções sísmicas. Esta metodologia assenta numa quantificação não-informativa de probabilidades à priori no espaço das funções de vulnerabilidade e o seu resultado é uma distribuição de probabilidade para o valor da probabilidade de ruína; as diversas etapas do cálculo são optimizadas por análise pre-posterior.

SUMMARY

The nonlinear relationship between the intensity of the actions and the values of the action-effects (vulnerability function), as far as regards the probability of failure, is evaluated through a bayesian approach. Although it is a general approach, it is presented only for the case of earthquake actions. This approach involves the definition of non-informative priors (both deterministic and markovian) on the space of vulnerability functions; the outcome is a probability distribution for the values of the probability of failure. The different computation steps are optimized by preposterior analysis.

¹Investigador Coordenador, Laboratório Nacional de Engenharia Civil

²Bolseiro de Investigação, Laboratório Nacional de Engenharia Civil

³Assistente de Investigação, Laboratório Nacional de Engenharia Civil

⁴Assistente de Investigação, Laboratório Nacional de Engenharia Civil

INTRODUÇÃO

Generalidades

O desenvolvimento de modelos muito sofisticados para estudar o comportamento sísmico não-linear das estruturas (e.g. ref. 1, 2 e 3), que é possibilitado e incentivado pelo desenvolvimento ainda mais rápido das capacidades de cálculo automático disponíveis, faz com que seja cada vez mais importante aperfeiçoar estratégias⁵ de análise que permitam otimizar a utilização desses meios e avaliar a contribuição efectiva da sua utilização para o acréscimo do conhecimento sobre o comportamento estrutural de uma determinada estrutura.

Poder-se-á definir uma estratégia de análise como sucessão de operações, envolvendo principalmente determinados meios de análise (e.g. um programa de elementos finitos), que permita estabelecer o nível de segurança da estrutura ou dimensionar a resistência e ductilidade dos seus elementos estruturais. A utilização de meios de análise sofisticados, inevitavelmente onerosa, justifica o desenvolvimento de meios complementares, de suporte às estratégias de análise, cuja utilização envolve, em princípio, um volume de cálculo muito inferior, que permitam enquadrar e definir as condições ou parâmetros que devem ser considerados na utilização desses meios sofisticados de análise. A título de ilustração, suponha-se que se pretende avaliar a segurança em relação à acção dos sismos de uma dada estrutura através de uma única análise dinâmica não-linear; então o que se pretenderá obter através dos meios complementares é o valor da aceleração máxima que deve ser utilizado no cálculo, de modo a que a quantidade de informação que se obterá da análise dinâmica seja a mais elevada possível em relação à segurança da estrutura. Repare-se que a utilização destes meios complementares adquire muito maior importância quando os meios de análise são de natureza experimental; com efeito, devido à "degradação" das propriedades mecânicas dos materiais, qualquer análise experimental em regime não-linear é essencialmente irreprodutível.

Análise Bayesiana

Apresenta-se nesta comunicação uma estratégia de análise baseada no teorema de Bayes que permite relacionar probabilidades *a priori* com probabilidades *a posteriori* tendo em conta um determinado acontecimento y . Considere-se um espaço de probabilidade $S = \{s_1, s_2, s_3 \dots\}$ em que os s_i são acontecimentos mutuamente exclusivos. Seja $P(s_i)$ a probabilidade *a priori* de s_i e $P(r | s_i)$ a probabilidade condicional de r dado s_i (i.e. $P(r | s_i) \equiv P_c(r \cap s_i) / P(s_i)$ sendo P_c a distribuição conjunta de r e S). A probabilidade *a posteriori* $P(s_i | r)$ é dada por

$$P(s_i | r) = \frac{P(s_i)P(r | s_i)}{\sum_i P(s_i)P(r | s_i)} \quad (1)$$

A interpretação usual do teorema de Bayes identifica o acontecimento r com o resultado de uma experiência e as probabilidades em S com o estado do conhecimento incerto em relação aos diferentes estados do universo⁶ s_1, s_2, \dots ; a passagem das probabilidades *a priori* para as probabilidades *a posteriori* corresponde à alteração do estado do conhecimento devido ao conhecimento do acontecimento r . A probabilidade condicional $P(r | s_i)$ representa a probabilidade do acontecimento y se verificar no estado do universo s_i .

⁵O termo estratégia deverá ser entendido no sentido de Von Newmann e Morgenstern, 1953.

⁶states of the world.

Estratégia de análise

A estratégia de análise incide sobre a identificação da função de vulnerabilidade V i.e. a função que relaciona os parâmetros descritivos h da severidade da acção dos sismos com os valores c das variáveis de controlo que representam a gravidade dos efeitos dessa acção sobre a estrutura; portanto ter-se-á $c = V(h)$. A definição rigorosa da função de vulnerabilidade pode encontrar-se na referência 5.

O interesse da função de vulnerabilidade deriva de que permite relacionar as distribuições de probabilidade da acção e da resistência e calcular a probabilidade de ruína. É importante a estima da probabilidade de ruína no âmbito das análises não-lineares porque estas análises só podem ser efectuadas quando os limites elásticos dos vários elementos estão definidos, e portanto não podem ser directamente utilizadas para o dimensionamento da estrutura.

A estratégia de análise consiste, em termos elementares, em definir um conjunto exaustivo de funções de vulnerabilidade e atribuir a essas funções probabilidades *a priori* de modo que esse conjunto seja não-informativo em relação à probabilidade de ruína p_r i.e. que a distribuição de probabilidade de p_r ⁷ tenha uma densidade constante; após uma análise, os valores das probabilidades *a priori* são transformados, em valores de probabilidades *a posteriori* a que corresponde uma nova distribuição da probabilidade de Bayes, com densidade não-constante, que representa uma informação não-nula em relação à probabilidade de ruína.

Esta estratégia é optimizada através da chamada *análise preposterior* (e.g. Ref. 6) em que o acréscimo de conhecimento resultante de todos os resultados possíveis, ponderado pela probabilidade de eles ocorrerem, é analisado de modo a obter-se a optimização de cada passo.

Exemplo de aplicação

Ilustram-se os conceitos apresentados com a sua aplicação ao caso de uma ponte de betão armado; para tornar mais fácil a leitura, cada conceito é ilustrado imediatamente após a sua apresentação, indicando-se igualmente alguns pormenores do âmbito do cálculo numérico.

Foi considerada a estrutura de uma ponte com 420 m de comprimento com eixo longitudinal recto por 9 vãos cujo comprimento é, em geral, de 50 m, excepto os vãos extremos cujo comprimento é de 35 m. Os pilares possuem uma secção de forma rectangular vazada com dimensões exteriores de 3,6 m \times 1,2 m e uma espessura de 0,3 m; a maior dimensão dos pilares está orientada segundo a direcção transversal da ponte. A altura máxima é de 48 m no meio vão central, considerando-se que a altura dos pilares varia linearmente dos encontros para o centro da ponte; a altura dos pilares é, portanto de 15, 24, 74 e 43 m. Os pilares foram considerados encastrados nas fundações e rigidamente ligados ao tabuleiro. Nos encontros o tabuleiro foi fixado para movimentos na direcção transversal, não se tendo imposto restrições aos movimentos na direcção do seu eixo longitudinal.

A estrutura da ponte foi idealizada por um modelo de elementos finitos constituído por 53 nós, com 6 graus de liberdade por nó, e elementos de barra. Assumiu-se que o comportamento não linear ocorre na base dos pilares, tendo sido considerados elementos de barra com comportamento não linear. As relações momento-curvatura para estes elementos são obtidas através duma formulação baseada no método dos filamentos (Ref. 2), admitindo-se a hipótese de as secções se manterem planas após deformação e também que não há degradação significativa das condições de aderência aço-betão. As secções são discretizadas num número arbitrário de filamentos de betão, considerando-se na discretização das armaduras um filamento por cada varão. A relação momento-curvatura é obtida através da equação de compatibilidade e das leis tensão-deformação

⁷utiliza-se o termo de probabilidade de p_r para evitar o termo "probabilidade da probabilidade de ruína"; note-se ainda que o valor total da probabilidade de p_r não é necessariamente unitário (nem finito).

adoptadas para os materiais. Neste modelo foram adoptados os modelos de Menegotto-Pinto para os varões e de Park-Thompson modificado para o betão.

Escolheu-se como variável de controlo a extensão do aço *maxima maximorum* i.e. a máxima extensão considerando todos os pilares, e todos os varões e a história total da resposta à acção dos sismos. Admitiu-se que o valor do correspondente estado limite tinha uma distribuição lognormal com uma mediana de 0,05 e um coeficiente de variação de 0,2. A acção dos sismos considerada é a acção tipo 1 do RSA para solos tipo II. Adoptou-se um modelo de base rígida, tendo-se desprezado as 3 componentes de rotação; a acção sísmica ficou portanto representada pelas 2 componentes horizontais e pela componente vertical. Para efectuar as análises dinâmicas, representou-se a acção dos sismos por uma amostra com quatro realizações. Como parâmetro descritivo da severidade da acção a aceleração máxima de uma componente horizontal. Admitiu-se que a aceleração máxima tinha uma distribuição probabilística representativa da sismicidade de Lisboa devido a sismos próximos de magnitude moderada (Oliveira, e Campos Costa 1979).

REPRESENTAÇÃO PROBABILÍSTICA DE FUNÇÕES DE VULNERABILIDADE

Introdução

Considere-se que o objectivo da análise é a determinação da probabilidade de ruína p_r da estrutura. Esta probabilidade pode ser determinada através do chamado *integral de convolução* (Ref. 8) que se pode escrever, no caso unidimensional:

$$p_r = \int_0^{\infty} f_h(h) F_c(V(h)) dh \quad (2)$$

em que:

- f_h - densidade de probabilidade da acção;
- V - função de vulnerabilidade;
- F_c - função cumulativa de probabilidade de resistência.

Note-se que o integral está escrito no *espaço das acções* como geralmente é mais conveniente em engenharia sísmica.

Admitindo que as distribuições de probabilidade da acção e da resistência são dados do problema, o cálculo da probabilidade de ruína fica condicionado ao conhecimento da função de vulnerabilidade. A estratégia de análise apresentada nesta comunicação tem exactamente como objectivo a estimativa desta função, de uma forma que seja óptima em termos dos erros de cálculo na probabilidade de ruína. Esta estimativa é formalizada através de uma representação probabilística da função de vulnerabilidade cujo valor médio tenderá para o verdadeiro valor da função e cuja variabilidade tenderá para zero com o desenvolvimento da estratégia de análise.

Conjunto de funções de vulnerabilidade

O facto de que a entidade que se pretende estimar directamente ser uma função levanta alguns problemas delicados e bem conhecidos (Ref. 9), que no entanto podem ser parcialmente contornados pelo facto de que a entidade que se pretende estimar efectivamente, a probabilidade de ruína, ser um escalar. Por outro lado, a análise Bayesiana é geralmente formulada em termos de uma única variável ou, quando muito, em termos de um número finito de variáveis. A aplicação de análise Bayesiana a uma função exige em principio a consideração de um número infinito de

variáveis e a passagem da teoria das probabilidades para a teoria dos procesos estocásticos, com a correspondente complicação formal e consequentes dificuldades de aplicação.

O processo estocástico representativo da função de vulnerabilidade pode ser definido a partir das distribuições de probabilidade definidas sobre as realizações (Ref. 10); estas realizações devem, naturalmente, obedecer a algumas condições, das quais a única importante é a de que a função de vulnerabilidade seja uma função monótona crescente. Parece ser pouco plausível, com efeito, que a um aumento da intensidade da acção dos sismos (medido pelo valor dos funcionais descritivos h) corresponda uma diminuição da severidade dos seus efeitos sobre a estrutura (medida pelo valor das variáveis de controlo c). O conjunto das realizações, por sua vez, deverá ser um conjunto exaustivo i.e. uma vez determinada a função de vulnerabilidade de uma estrutura arbitrária, deverá existir no conjunto uma função que seja igual (em termos da norma apropriada) a essa função de vulnerabilidade.

Repare-se que, de um ponto de vista das aplicações práticas, não é necessário, nem faz sentido, determinar o valor da probabilidade de ruína com grande precisão. Em consequência, não se justifica identificar a função de vulnerabilidade com grande precisão. Poder-se-á admitir, portanto, que bastará então que exista no conjunto das realizações da função de vulnerabilidade uma função que seja suficiente próxima da função de vulnerabilidade verdadeira, i.e. a norma (apropriada) da diferença entre essas duas funções seja inferior a um certo valor suficientemente pequeno. Decorre desta aproximação e de o domínio e o contradomínio das funções de vulnerabilidade serem finitos, como é natural que sejam uma vez que correspondem em geral a valores de parâmetros físicos (e.g. a aceleração máxima do sismo e a máxima ductilidade exigida na estrutura), que é finito o número de funções de vulnerabilidade que é necessário considerar. Este resultado sugere que se possa utilizar um número não muito grande de realizações, analisando durante o decorrer do cálculo, se as características dessas realizações são adequadas ou não, caso em que será necessário aumentar o seu número.

Para poder controlar a robustez das estimativas obtidas geraram-se dois conjuntos de funções de vulnerabilidade. O primeiro, que será referido como o conjunto analítico, é composto por funções do tipo

$$c = \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^3 \quad (3)$$

em que:

c - valor da variável de controlo considerada;

α , β e γ - constantes;

a - valor da aceleração máxima considerada como sendo o parâmetro descritivo da severidade da acção dos sismos.

São atribuídos criteriosamente diversos valores a α , β , e, γ de modo a gerar o número necessário de funções de vulnerabilidade.

Por razões de ordem computacional as funções de vulnerabilidade são representadas por um vector $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{11}\}^T$ que contém os seus valores para 11 valores da aceleração em progressão aproximadamente geométrica de razão $\sqrt{2}$: $a_1 = 50\text{cm/s}^2$, $a_2 = 70\text{cm/s}^2$, $a_3 = 100\text{cm/s}^2$, \dots , $a_{11} = 1600\text{cm/s}^2$. Esta representação vectorial serviu de base à definição do segundo conjunto de função de vulnerabilidade que será referido como o conjunto probabilístico. Este conjunto é composto por processos de Markov discretos em que o valor da variável de controlo c_i correspondente à aceleração a_i é dado por

$$c_i = (1 + \delta x)c_{i-1} \quad (4)$$

em que:

δ - constante;

x - realização de uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 0 e 1.

Diversos valores de δ são escolhidos criteriosamente de modo a gerar o conjunto de funções que se pretende. Note-se que se considera que as funções de vulnerabilidade são totalmente definidas pelos correspondentes vectores; correspondentemente, no cálculo da probabilidade de ruína, os valores da função de vulnerabilidade para valores de aceleração diferentes de a_1, a_2, \dots são obtidos por interpolação linear numa representação bilogarítmica.

Probabilização

O conjunto de funções de vulnerabilidade V_i é probabilizado atribuindo a cada função uma probabilidade $p_i = P(V_i)$. Estas probabilidades terão naturalmente que obedecer à condição $\sum_i p_i = 1$. Cada conjunto de valores $p = \{p_1, p_2, \dots\}^T$ representa um estado de conhecimento. Quando todas as funções de vulnerabilidade estão associadas a muito pequenos valores de probabilidade, com excepção daquelas que são próximas da verdadeira função de vulnerabilidade, que têm valores substancialmente maiores, o estado de conhecimento é satisfatório.

Admita-se que antes de se efectuar qualquer análise o estado do conhecimento corresponde a um conhecimento nulo. Admitindo-se que a entidade que pretende ser conhecida é a probabilidade de ruína p_r , o estado de conhecimento nulo pode ser representado como uma densidade de probabilidade constante. A investigação de qual deve ser o sistema de coordenadas em que a densidade é constante faz intervir conceitos matemáticos demasiado especializados para aqui dever ser apresentado (veja-se, por exemplo, a referência 6). O resultado que se obtém é que a densidade de probabilidade deverá ser constante quando a probabilidade de ruína é expresso numa escala logarítmica ou seja, por exemplo, que a probabilidade associada ao intervalo $(10^{-1}, 10^{-2})$ é igual à probabilidade associada ao intervalo $(10^{-2}, 10^{-3})$ e é ainda igual à probabilidade associada ao intervalo $(10^{-3}, 10^{-4})$ ⁸ ... Repare-se que neste caso o valor total da probabilidade é infinito, o que sucede com frequência em caso de distribuições não-informativas (Ref. 6). Em termos práticos, dividiu-se o domínio da probabilidade de ruína em 36 intervalos, aproximadamente iguais em escala logarítmica, cobrindo os valores desde 1 até 10^{-12} ; os intervalos considerados foram: 1 - 0,5; 0,5 - 0,2; 0,2 - 0,1; 0,1 - 0,05; ... $2_{10}^{-12} - 1_{10}^{-12}$. Geraram-se funções de vulnerabilidade analíticas e aleatórias até cada um destes intervalos conter as probabilidades de ruína associadas a cerca de 5 destas funções de cada tipo. Em seguida, atribuiu-se a cada função uma probabilidade proporcional ao inverso do número de funções correspondente a cada intervalo da probabilidade de ruína (calculada admitindo para o estado limite da variável de controlo uma distribuição lognormal normalizada). A correspondente distribuição de probabilidade no espaço das funções de vulnerabilidade é apresentada na Figura 1, podendo-se nela observar a grande incerteza que afecta a função de vulnerabilidade para um estado de conhecimento nulo da probabilidade de ruína.

TRATAMENTO BAYESIANO DOS RESULTADOS DA ANÁLISE

Suponha-se que se calcula a resposta da estrutura para um certo valor da aceleração máxima da acção dos sismos a_r . O valor da resposta assim obtido não passa de uma estimativa do verdadeiro valor da função de vulnerabilidade. Com efeito, a função de vulnerabilidade é definida pelo valor médio da distribuição da resposta (Ref. 5) e apenas se pode calcular a resposta para

⁸Suponha-se dois casos em que os valores das verdadeiras probabilidades de ruína são 10^{-4} e 10^{-6} e se estimaram os valores $1,01 \cdot 10^{-4}$ e 2_{10}^{-6} ; dificilmente fará sentido dizer que as estimativas obtidas têm o mesmo erro.

um número finito, necessariamente pequeno, de realizações do processo estocástico representativo da acção sísmica para a aceleração máxima considerada (amostra). Em consequência, o valor médio calculado a partir da amostra apresentará uma certa distribuição probabilística que, sendo as realizações estocasticamente independentes como é usual, dependerá do número de realizações e da distribuição de probabilidade do valor da resposta a uma única realização. As características probabilísticas desta distribuição, principalmente para osciladores com vários graus de liberdade, são ainda mal conhecidas. No entanto, poder-se-á invocar o teorema do limite central e considerar que a distribuição do valor médio pode ser representada por uma distribuição de Gauss cujo valor médio é igual ao valor médio da resposta a uma realização e a variância é igual à variância da resposta a uma realização dividida pelo número de respostas calculadas. Devido à grande largura dos intervalos de confiança das estimativas das variâncias (e.g. Ref. 11) não se justifica estimar o valor da variância a partir de estatísticas da amostra. Pode-se admitir que a resposta tem uma variância correspondente a um coeficiente de variação de 0,3; este valor parece ser razoavelmente representativo da variabilidade das respostas em regime não-linear de diferentes estruturas (Ref. 12 e 13). Proceder-se-á assim como se a probabilidade $P(r | V_i)$ de se obter a resposta r para a aceleração a_r da acção dos sismos, no caso de ser verdadeira a função de vulnerabilidade V_i fosse dada pela densidade de probabilidade:

$$P(r | V_i(a_r)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(r - V_i(a_r))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

em que variância σ^2 é obtida por:

$$\sigma^2 = (0,3V_i(a_r))^2 \quad (6)$$

sendo n o número de realizações considerado.

Portanto após a obtenção do valor r da resposta as probabilidades *a posteriori* $P(V_i | r)$ do conjunto das funções de vulnerabilidade são calculadas pelo teorema de Bayes:

$$P(V_i | r) = \frac{P(V_i)P(r | V_i)}{\sum_i P(V_i)P(r | V_i)} \quad (7)$$

Estas probabilidades representam o novo estado de conhecimento, isto é, a probabilidade associada a cada função de vulnerabilidade passa a ser

$$p_i = P(V_i | r) \quad (8)$$

ANÁLISE PREPOSTERIOR

Sendo o objectivo da análise a avaliação da probabilidade de ruína, coloca-se a questão de como escolher o valor da aceleração máxima da acção dos sismos a_r de modo a otimizar o desenvolvimento da análise. Esta optimização pode ser entendida como consistindo na escolha do valor de a_r a que corresponde a maior diminuição da incerteza expectável em relação à probabilidade de ruína p_r . Admita-se que a incerteza associada à distribuição de probabilidade de p_r é quantificada pelo quociente $\gamma = p_{r95}/p_{r05}$ em que p_{r95} e p_{r05} são os quantilhos de 95% e 5% respectivamente. Note-se que o parâmetro γ tendo para 1 quando aumenta o conhecimento em relação à probabilidade de ruína e tende para zero quando se diminui esse conhecimento.

A análise preposterior consiste em avaliar antes de efectuar um cálculo quais serão, em termos probabilísticos, as suas consequências em relação à variação do estado de conhecimento

avaliada através do parâmetro γ . Em princípio deveriam ser considerados todos os infinitos valores possíveis para a aceleração máxima a_r ; no entanto, em termos práticos, basta considerar os valores correspondentes aos diversos termos do vector representativo da função de vulnerabilidade e que no caso considerado nesta comunicação correspondem a 50 cm/s^2 , 70 cm/s^2 ... Para cada um destes valores de a_r calcula-se a distribuição cumulativa de probabilidade $F(c)$ dos resultados da análise, expressos através da variável de controlo c , a partir das probabilidades p_i atribuídas, nesta fase da análise, a cada função de vulnerabilidade. Esta distribuição é dada por

$$F(c) = \sum_{i \in I} p_i \quad I = \{i : V_i(a_r) \leq c\} \quad (9)$$

e representa, para o estado de conhecimento actual, a expectativa de se obter um valor num certo intervalo, i.e., $F(c_1) - F(c_2)$ representa a probabilidade de o resultado da análise cair no intervalo (c_1, c_2) . Pode-se agora construir um conjunto de resultados fictícios c_1, c_2, \dots representativo dos resultados prováveis. Estes resultados fictícios são associados a probabilidades $f_1 = F((c_1 + c_2)/2)$, $f_2 = F((c_2 + c_3)/2) - F((c_1 + c_2)/2)$, ... Para minorar o cálculo numérico convém que estas probabilidades sejam aproximadamente iguais. Seguidamente efectua-se o tratamento bayesiano dos resultados de análise para cada um destes resultados fictícios, ou seja, calculam-se as probabilidades *a posteriori*

$$P(V_i | c_j) = \frac{p_i P(c_j | V_i)}{\sum_i p_i P(c_j | V_i)} \quad (10)$$

Calcula-se agora a medida de incerteza γ para estas probabilidades, que se denotará como γ_j para indicar que o valor foi calculado admitindo que se iria obter o resultado fictício c_j . O valor esperado da incerteza das probabilidades de ruína é portanto

$$E(\gamma) = \sum_i f_j \gamma_j \quad (11)$$

A esperança relativa a este valor é entendida em relação ao estado de conhecimentos actual e à simulação de uma análise para o valor a_r da aceleração máxima. Repetindo os cálculos para todos os valores de a_r , o menor valor de $E(\gamma)$ indicará qual deve ser o valor da aceleração máxima a utilizar no próximo cálculo.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Referem-se nesta secção os resultados obtidos pela metodologia proposta aplicada à análise da estrutura de ponte atrás apresentada, pretendendo-se não só ilustrar os conceitos apresentados como motivar alguns comentários.

Na figura 1 é representada a distribuição de probabilidade no espaço das funções de vulnerabilidade correspondendo a um estado de conhecimento nulo i.e. não informativo em relação à probabilidade de ruína. Relembre-se que esta distribuição é obtida considerando para a acção dos sismos uma distribuição de probabilidade representativa da sismicidade de Lisboa e para a ductilidade exigida uma distribuição lognormal normalizada. Na figura 2 é representada a função cumulativa da distribuição de probabilidade de p_r ; o andamento (quase) linear desta função indica (a menos de uma certa aproximação) uma função densidade de probabilidade constante i.e. não-informativa; as flutuações de "alta frequência" da função cumulativa serão tanto menores quanto maior for o número de funções de vulnerabilidade existente no conjunto considerado e, consequentemente, quanto menor for a probabilidade de cada uma dessas funções.

Nas figuras 3 e 4 são representadas as distribuições de probabilidade para o conjunto analítico e para o conjunto probabilístico das funções de vulnerabilidade. Como se pode observar estas distribuições são razoavelmente semelhantes entre si e com a distribuição do conjunto total (Fig. 1) o que parece indicar que estes conjuntos podem efectivamente ser considerados como conjuntos exaustivos.

A análise preposterior indicou que se deveria calcular a resposta da ponte para um valor da aceleração máxima igual a 400 cm/s^2 , tendo-se obtido um valor de 0,016 para a extensão máxima média (a que corresponde um valor normalizado de 0,32). Com este valor procedeu-se ao tratamento bayesiano, representando-se a nova distribuição de probabilidade nas funções de vulnerabilidade na figura 5, sendo claramente visível, comparando com a figura 1, a diminuição geral da incerteza, especialmente perto do valor em que se fez o cálculo. A distribuição de probabilidade de p_r é apresentada na fig. 6, evidenciando-se a diminuição da incerteza.

O cálculo foi terminado ao fim de 3 etapas. Os resultados finais são apresentados nas figuras 7 e 8, em termos da distribuição de probabilidade nas funções de vulnerabilidade e da distribuição de probabilidade de p_r , respectivamente. Na figura 8 também se apresentam as distribuições de probabilidade intermédias. É interessante verificar na figura 7 a concentração das linhas representativas dos diversos quantilhos, na zona das altas acelerações, o que indica a quase ausência de incerteza em relação aos valores da função de vulnerabilidade nessa zona. Apresentam-se nas figuras 9 e 10 a evolução dos quantilhos de 95% e de 5% da distribuição de probabilidade de p_r e a evolução do seu quociente que constitui a medida de incerteza adoptada.

REFERÊNCIAS

- [1] R.T. Duarte, C.S. Oliveira, A. Campos Costa e A.G. Costa, 1989 - A Nonlinear Model for Seismic Analysis, Design and Safety Assessment of Reinforced Concrete Buildings, em *Earthquake Damage Evaluation and Vulnerability Analysis of Building Structures*, A Koridze ed., Omega Scientific, Oxford.
- [2] C.T. Vaz, 1990 - Modelo de Comportamento Sísmico Não Linear de Estruturas de Pontes de Betão Armado e Pré-esforçado, Comunicação apresentada às 2^{as} Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas.
- [3] Ema Coelho e E.C. Carvalho, 1990 - Nonlinear Seismic Behaviour of Reinforced Concrete Structures, 9th European Conference on Earthquake Engineering, Moscovo.
- [4] J. Von Neumann e O. Morgenstern, 1953 - Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton University Press, Princeton.
- [5] R.T. Duarte, 1990 - Avaliação da Segurança em Relação à Acção dos Sismos, Comunicação apresentada às 2^{as} Jornadas Portuguesas de Engenharia Sísmica.
- [6] J.O. Berger, 1985 - Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2nd. Edition, Springer-Verlag, New-York.
- [7] C.S. Oliveira e A. Campos Costa, 1984 - Updating Seismic Hazard Maps, Proc. 8th World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

- [8] J. Ferry Borges e M. Castanheta, 1971 - Structural Safety, Curso 101, LNEC, Lisboa.
- [9] V. Grenander, 1981 - Abstract Inference, John Wiley & Sons, Nova York.
- [10] I. Ibrahimov e Y. Rozanov, 1974 - Processus Aleatoires Gaussiens, Editions Mir, Moscovo.
- [11] V.E. Gmurman, 1977 - Teoria das Probabilidades e Estatística Matemática, Editora Mir, Moscovo.
- [12] R.T. Duarte e A. Campos Costa, 1988 - Earthquake Behaviour of Reinforced Concrete Frame Structures Infilled With Masonry Panels, Relatório, LNEC, Lisboa.
- [13] R.T. Duarte, C.T. Vaz e M.R. Corrêa, 1990 - Evaluation of Earthquake Behaviour of Reinforced Concrete Bridges - Quantification of Behaviour Coefficients, EC8, Part 2: Bridges, Background Document, LNEC.

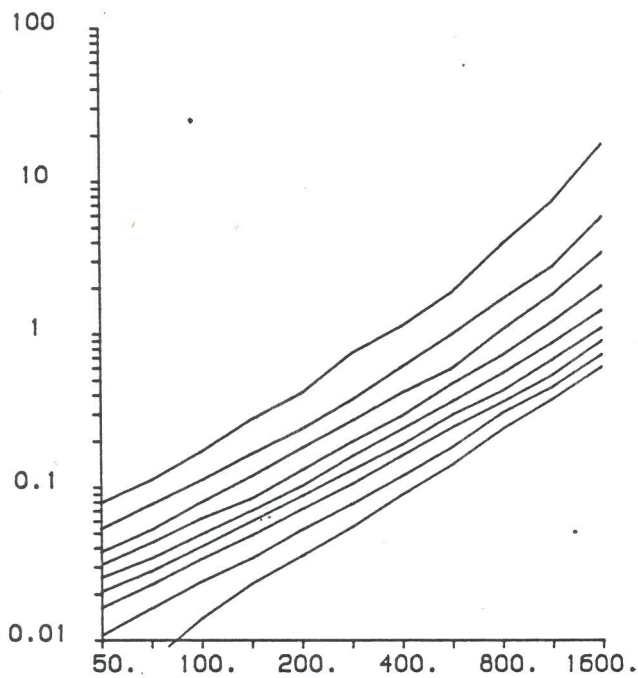


Fig. 1 - Distribuição de probabilidade inicial no espaço das funções de vulnerabilidade. Estão desenhados os quantilhos de 10%, 20%, ... 90%

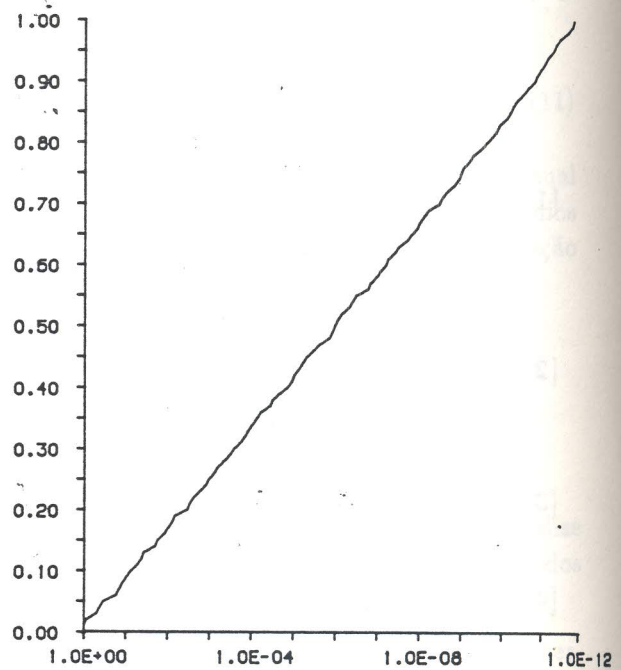


Fig. 2 - Distribuição cumulativa de probabilidade não-informativa em relação à probabilidade de ruína p_r .

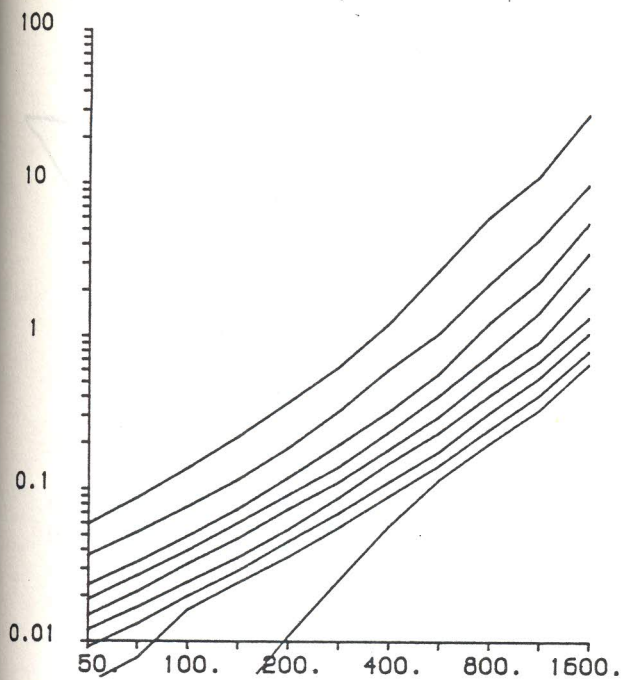


Fig. 3 - Distribuição cumulativa de probabilidade inicial no espaço das funções de vulnerabilidade analíticas. Estão desenhados os quantilhos de 10%, 20%, ... 90%

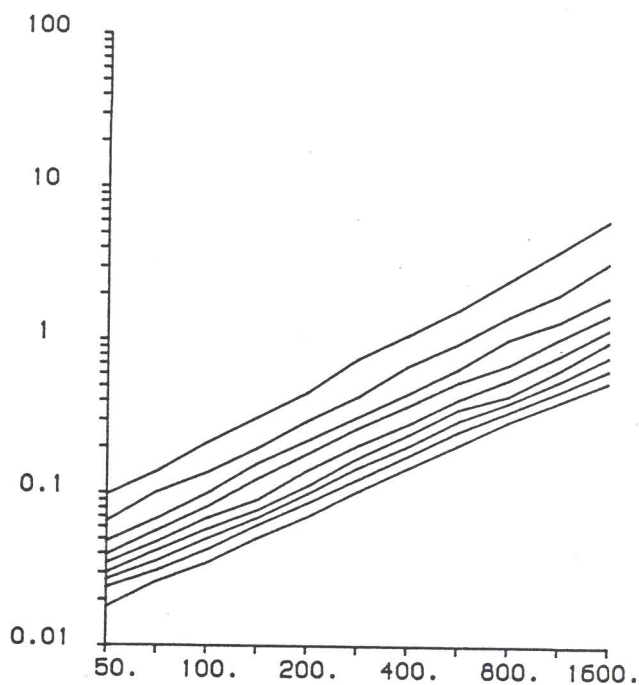


Fig. 4 - Distribuição cumulativa de probabilidade inicial no espaço das funções de vulnerabilidade probabilísticas. Estão desenhados os quantilhos de 10%, 20%, ... 90%.

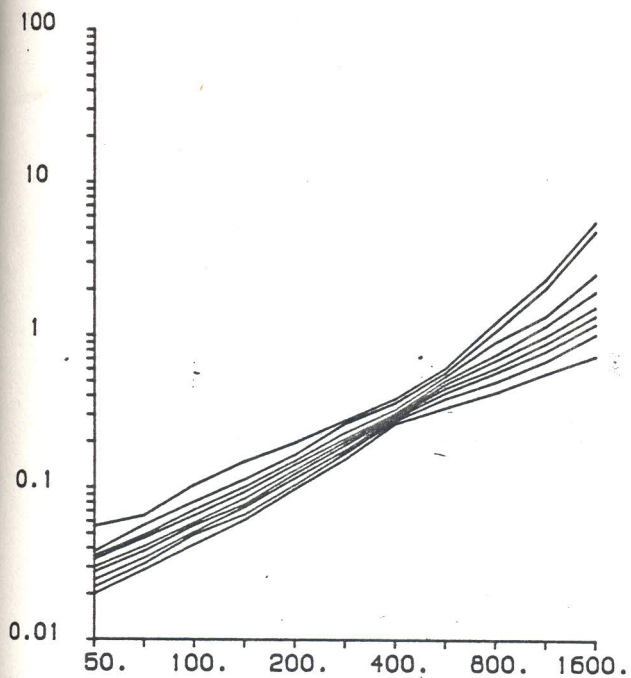


Fig. 5 - Distribuição cumulativa de probabilidade no espaço das funções de vulnerabilidade ao fim da 1ª análise. Estão desenhados os quantilhos de 10%, 20%, ... 90%.

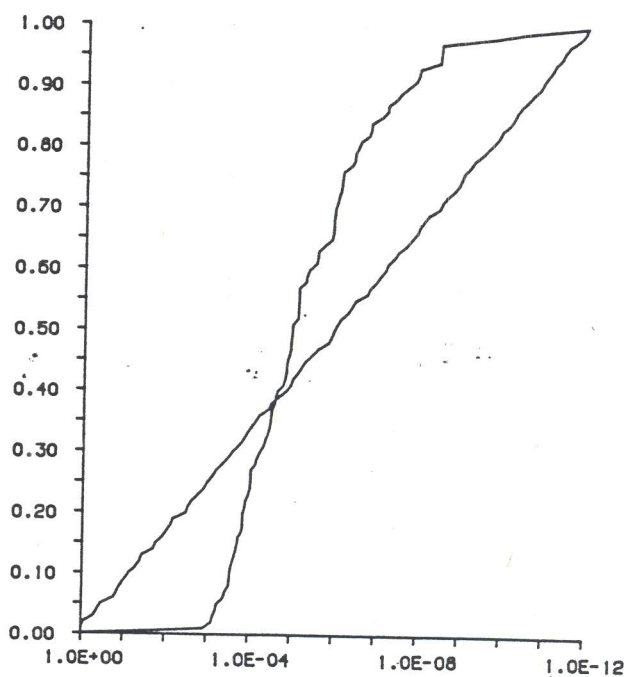


Fig. 6 - Comparação entre as distribuições de probabilidade inicial e após a 1ª análise.

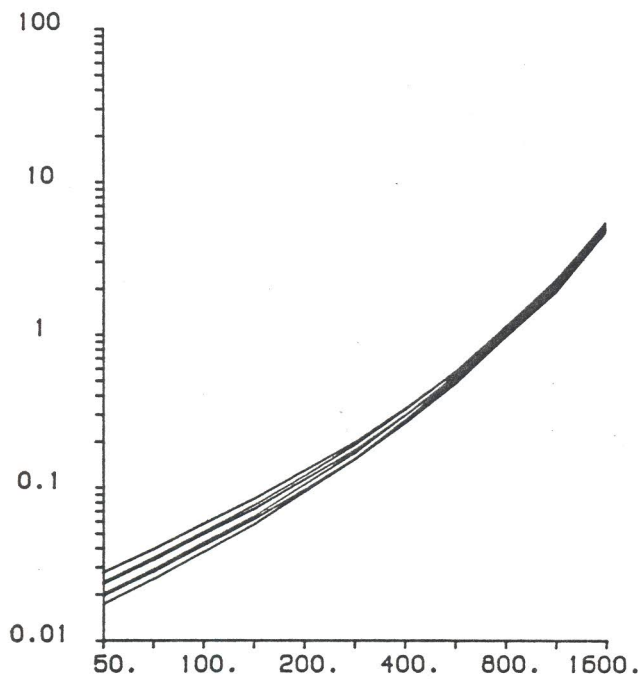


Fig. 7 - Distribuição cumulativa de probabilidade no espaço das funções de vulnerabilidade ao fim de 3 análises. Estão desenhados os quantilhos de 10%, 20%, ... 90%.

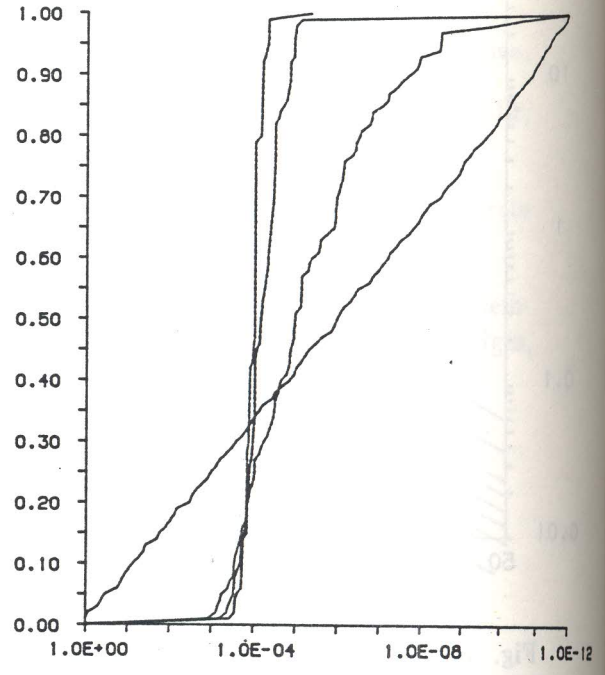


Fig. 8 - Distribuições cumulativas de probabilidade para a probabilidade de ruína ao longo do cálculo.

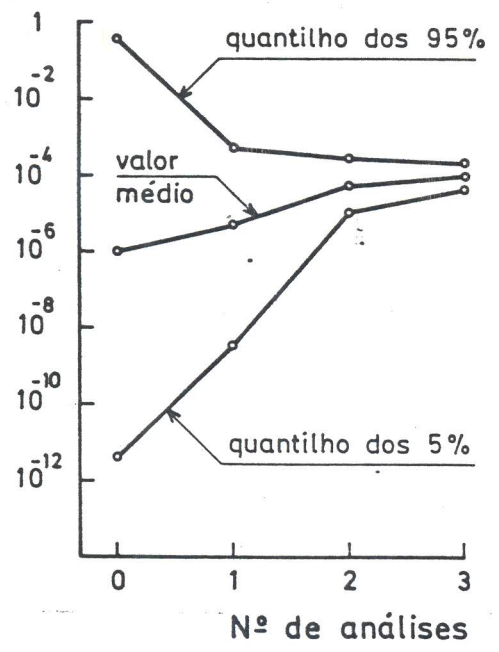


Fig. 9 - Evolução dos quantilhos de 5% e 95% e do valor médio da distribuição de probabilidade da probabilidade de ruína ao longo do cálculo.

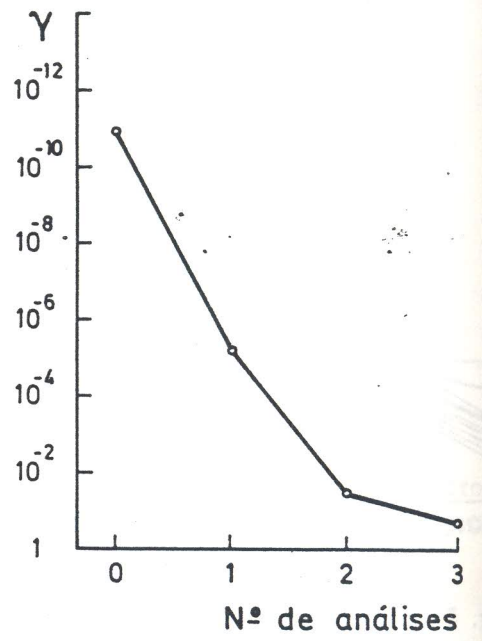


Fig. 10 - Evolução do parâmetro γ ao longo do cálculo.