

## **Modelo probabilístico para representação do nível de água na albufeira em análises de fiabilidade de barragens de betão**



**Renato Pereira<sup>1</sup>**



**António Lopes  
Batista<sup>2</sup>**



**Luís Canhoto  
Neves<sup>3</sup>**

### **Resumo**

O Regulamento de Segurança de Barragens estipula que, em condições normais de exploração, deve considerar-se, nas verificações de segurança, o nível de água na albufeira correspondente ao nível pleno de armazenamento (NPA). Contudo, devido a diversos fatores relacionados com a exploração de barragens, incluindo a gestão de situações de cheia, o nível de água na albufeira pode exceder o NPA em períodos de tempo de duração considerável.

No contexto da análise de fiabilidade de barragens de betão, o nível de água na albufeira deve ser considerado como variável aleatória e a sua quantificação probabilística pode ser baseada nos registos da monitorização contínua. Em Portugal existe um acervo de informação que permite este tipo de quantificação. Assim, para condições normais de exploração das albufeiras portuguesas, caracterizou-se a variação do nível de água em função de um conjunto de parâmetros característicos das albufeiras. Começou-se com a compilação dos registos do nível de água na albufeira de 27 grandes barragens de betão portuguesas, individualizando as albufeiras de regularização e as de fio de água. Para a caracterização da incerteza da variação anual do nível propõe-se um modelo representado por uma função sinusoidal. Aos parâmetros do modelo foram atribuídas as funções de distribuição de probabilidades que melhor se ajustaram aos registos disponíveis.

Mostram-se alguns exemplos de obtenção das funções de distribuição de probabilidade do nível máximo anual da albufeira, em função do NPA, considerando barragens de diferentes alturas.

**Palavras-chave:** Barragens de betão, nível de água na albufeira, incerteza, modelo probabilístico, análise de fiabilidade.

---

<sup>1</sup> Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Caparica, Portugal; e-mail: r.pereira@campus.fct.unl.pt

<sup>2</sup> Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Departamento de Barragens de Betão, Lisboa, Portugal; e-mail: a.l.batista@lnec.pt

<sup>3</sup> University of Nottingham, Nottingham Transportation Engineering Centre, Nottingham, United Kingdom; e-mail: luis.neves@nottingham.ac.uk

## 1. INTRODUÇÃO

As principais ações da água envolvidas na segurança de barragens de betão são a pressão hidrostática e as subpressões. Ambas são função do nível de água na albufeira, embora as subpressões também dependem das características naturais e das intervenções realizadas no maciço rochoso de fundação com vista ao melhoramento das suas propriedades hidráulicas, nomeadamente a construção de sistemas de impermeabilização e drenagem.

As barragens são construídas para produção de energia, abastecimento das populações, rega, controlo de cheias, entre outros fins. São estruturas de retenção de água implantadas no vale de cursos de água, criando uma albufeira a montante. As regras de exploração das barragens são estabelecidas de forma a garantir-se a sua segurança estrutural, hidráulica, operacional e ambiental, e também para maximizar os proveitos da sua exploração [1]. Por este motivo, o nível de água na albufeira varia, ao longo do ano, de acordo com a função da barragem. Em barragens construídas para abastecimento das populações e rega, o nível de água na albufeira é mantido o mais próximo possível do nível de pleno armazenamento (NPA) durante a primavera e verão para assegurar o abastecimento durante a estiagem. Em barragens construídas para produção de energia, de acordo com a política energética nacional e com as Normas de Exploração de Barragens [2], sempre que possível (por intermédio de turbinas reversíveis), a água deve ser bombada de jusante para montante, aproveitando o excedente da energia eólica que geralmente se verifica durante a noite. Por outro lado, como medida de segurança e prevenção na gestão de situações de cheia, o nível de água na albufeira é controlado durante o inverno, apesar da demanda de energia ser maior. Nessas situações, se o sistema de descarga não for suficiente para aliviar, em condições de segurança, a afluência de cheia, o nível de água na albufeira subirá.

Em síntese, o nível de água na albufeira de barragens de betão varia, ao longo do ano, em função de eventos hidrológicos e de diversos fatores relacionados com a exploração das obras.

No contexto da análise de fiabilidade de barragens novas, as tendências observadas em barragens existentes podem ser consideradas para definir um modelo probabilístico do nível de água na albufeira, considerando os parâmetros geométricos que a define. Este modelo pode ser entendido como um modelo probabilístico *a priori* desta grandeza.

A monitorização contínua do nível de água nas albufeiras das grandes barragens de betão portuguesas mostra que o NPA, considerado no Regulamento de Segurança de Barragens [3] como o nível máximo em exploração normal, é ocasionalmente excedido durante o ano e, por vezes, durante consideráveis períodos de tempo. A análise desta informação mostra diferentes tendências, quanto à variação do nível de água nas albufeiras, em barragens de exploração por fio de água e barragens de regularização ou armazenamento. No primeiro caso, por serem barragens com pouca capacidade de armazenamento, o nível de água na albufeira está permanentemente próximo do NPA. No segundo caso, os níveis de água nas albufeiras variam consideravelmente ao longo do ano.

Na caracterização probabilística do nível de água da albufeira, foram consideradas as recomendações do Joint Committee on Structural Safety [4], que indicam que a população de amostras deve ser dividida em subpopulações quando evidentes diferenças de comportamento forem identificadas. Assim, os dados recolhidos foram agrupados em dois grupos, correspondentes a barragens de exploração por fio de água (FA) e barragens de armazenamento ou regularização (AR).

Neste trabalho utiliza-se a informação disponível da monitorização das obras em exploração para propor um modelo probabilístico de previsão do nível de água na albufeira de barragens de betão novas, em condições normais de exploração, considerando apenas o tipo de exploração e as características geométricas da barragem e albufeira, nomeadamente a altura máxima da barragem e o NPA. A caracterização probabilística desta grandeza é fundamental na análise de segurança de barragens de betão, designadamente no caso de combinações com as ações sísmicas.

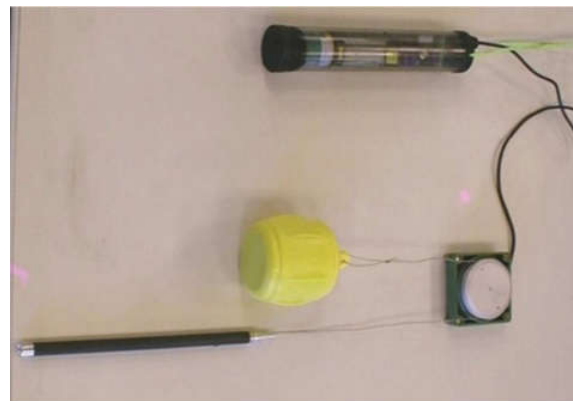
No modelo probabilístico considerou-se a distribuição de probabilidades beta, pois sendo uma distribuição com limites inferior e superior, admite-se que, em condições normais de exploração, o nível de água na albufeira não pode ultrapassar o coroamento. Considerou-se um modelo representado por uma função sinusoidal, ajustando a variação média ao longo do ano desta grandeza aos registos do nível de água nas albufeiras de 27 grandes barragens de betão portuguesas, por intermédio da análise de regressão beta.

## 2. MONITORIZAÇÃO DO NÍVEL DE ÁGUA NA ALBUFEIRA

De acordo com as Normas de Observação e Inspeção de Barragens [5], a monitorização do comportamento de barragens de betão deve permitir o controlo da segurança das obras por forma a poder-se identificar atempadamente comportamentos anómalos. Entre outras grandezas, o nível de água na albufeira é continuamente registado. As medições podem ser efetuadas diariamente ou semanalmente por intermédio da escala limnimétrica localizada na albufeira, ou continuamente por intermédio de registo automático (Fig. 1). Em ambas as situações são garantidas precisões da ordem de 0,1 m [6].



a) Escala limnimétrica.



b) Sondas de monitorização automática.

Figura 1. Equipamentos de medição do nível de água na albufeira.

O nível de água na albufeira deve ser medido desde o início do primeiro enchimento da albufeira. Neste trabalho utilizaram-se os registos do nível de água na albufeira de 27 grandes barragens de betão portuguesas, disponibilizados pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) com a permissão dos respetivos donos de obra, para ajustar o modelo probabilístico proposto.

## 3. MODELO PROBABILÍSTICO PARA REPRESENTAÇÃO DO NÍVEL DE ÁGUA NA ALBUFEIRA

De acordo com as Normas de Projeto de Barragens [7], para a análise da segurança estrutural em condições normais de exploração, devem considerar-se os valores médios anuais do nível de água na albufeira e as variações em torno destes. Com base nas tendências observadas dos registos analisados, propõe-se um modelo representado por uma função sinusoidal ( $H_R$ ), de período anual, para quantificação da variação do nível de água na albufeira ao longo do ano. Esta função é dada por,

$$H_R(t) = H_m + S_a \cdot \cos(t - \phi) \quad (1)$$

em que  $H_m$  é o nível de água médio anual,  $S_a$  é a semi-amplitude ou a variação máxima sazonal em torno do valor médio,  $t$  é o tempo, dado em dias e considerando  $t=0$  o início do ano, e  $\phi$  é a fase ou o tempo correspondente ao valor máximo da função.

Devido à consideração de registos de barragens com diferentes características geométricas, a análise de regressão não deverá ser feita considerando o valor absoluto do nível de água na albufeira, mas o valor relativo normalizado. Assim, considera-se uma grandeza normalizada ( $k_R$ ), que representa o quociente entre a altura de água e a altura máxima da barragem, ou seja,

$$k_R(t) = \frac{H_R(t)}{H_{\text{máx}}} = k_m + k_{sa} \cdot \cos(t - \phi) \quad (2)$$

em que  $k_m$  e  $k_{sa}$  são os quocientes entre o nível médio anual ( $H_m$ ) e a semi-amplitude ( $S_a$ ), respetivamente, e a altura máxima da barragem ( $H_{\text{máx}}$ ).

A análise de regressão tradicional é baseada no método dos mínimos quadrados (MMQ) e na hipótese de a variável dependente seguir uma distribuição normal. No entanto, uma vez que este modelo representa um quociente, podendo apenas variar entre 0 e 1, o MMQ não deve ser utilizado uma vez que os pressupostos do MMQ não se verificam [8]. Nestas situações, tem-se optado por uma análise de regressão alternativa, designada por análise de regressão beta, em que a variável dependente segue uma distribuição beta [8, 9].

Neste caso o modelo preditivo de  $k_R$ , em termos de  $t$ , é dado por,

$$k_R | t \sim B(\alpha, \beta) \quad (3)$$

em que os parâmetros da distribuição beta,  $\alpha$  e  $\beta$ , devem ser tais que o valor esperado de  $k_R$ ,  $E(k_R)$ , seja dado pela Eq. (1). De acordo com a função de densidade da distribuição beta, o seu valor esperado é dado por,

$$E(k_R) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (4)$$

Tal como no caso da análise de regressão tradicional, a variância do ajuste do modelo,  $V(k_R)$ , contém informação sobre os resíduos e pode ser considerada como uma medida da incerteza do modelo [4], associada ao nível de aproximação na formulação física do problema [10]. A variância da distribuição beta é dada por,

$$V(k_R) = \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta + 1)} \quad (5)$$

A análise de regressão beta usa o método da máxima verossimilhança (MMV) para estimar os parâmetros desconhecidos do modelo ( $k_m$ ,  $k_{sa}$  e  $\phi$ ) e a variância do ajuste.

Ajustou-se o modelo proposto ao histórico dos níveis de água na albufeira de 27 grandes barragens de betão portuguesas registados em fase de exploração. No Quadro 1 resumem-se as características relevantes das barragens consideradas. Na Fig. 2 mostra-se um exemplo do ajuste do modelo proposto aos registos de 2010 do nível de água na albufeira da barragem do Alto Lindoso, pela análise de regressão beta e, em termos comparativos, pelo MMQ.

No total, obtiveram-se 650 amostras (uma por cada ano de exploração) dos parâmetros  $k_m$ ,  $k_{sa}$ ,  $\phi$  e  $V(k_R)$ . Como referido, as amostras foram divididas em dois grupos a que correspondem as barragens de exploração por fio de água (277) e as barragens de armazenamento ou regularização (373). Como esperado, no caso de barragens de exploração por fio de água, o facto do nível de água na albufeira estar constantemente próximo do NPA traduziu-se em valores menores do parâmetro da semi-amplitude,  $k_{sa}$ , e da variância do modelo. Os valores obtidos do parâmetro  $\phi$  são dispersos, mostrando

que o valor máximo anual do nível de água na albufeira pode ser atingido em qualquer altura do ano, em função dos aspetos referidos relacionados com a exploração de barragens.

Quadro 1. Principais características das barragens consideradas.

<i>Nome (tipo de albufeira)</i>	<i>Altura máxima (m)</i>	<i>Altura correspondente ao NPA (m)</i>	<i>Ano de entrada em exploração</i>
Alqueva (AR)	96,0	94,0	2003
Alto Lindoso (AR)	110,0	109,0	1991
Alto Rabagão (AR)	94,1	94,0	1964
Belver (FA)	30,0	28,65	1952
Bouçoais-Sonim (FA)	43,0	36,0	2004
Cabril (AR)	132,0	129,0	1954
Caldeirão (AR)	39,0	33,9	1993
Carrapatelo (FA)	57,0	48,5	1972
Castelo do Bode (AR)	115,0	111,7	1951
Catapereiro (AR)	37,5	34,9	1999
Crestuma-Lever (FA)	65,0	52,5	1985
Ferradosa (AR)	33,4	31,0	2005
Fratel (FA)	48,0	35,0	1973
Fronhas (AR)	62,0	56,1	1985
Olgas (AR)	34,5	30,25	2007
Pedrogão (AR)	43,0	33,7	2006
Penha Garcia (AR)	25,0	22,0	1979
Pocinho (FA)	49,0	35,5	1982
Pretarouca (AR)	28,5	24,6	2007
Raiva (FA)	36,0	33,0	1981
Rebordelo (FA)	35,5	28,0	2005
Régua (FA)	41,0	33,5	1973
Touvedo (FA)	42,5	37,5	1993
Valeira (FA)	48,0	40,0	1975
Varosa (AR)	76,0	75,0	1976
Venda Nova (AR)	97,0	96,0	1951
Vilarinho das Furnas (AR)	94,0	93,5	1972

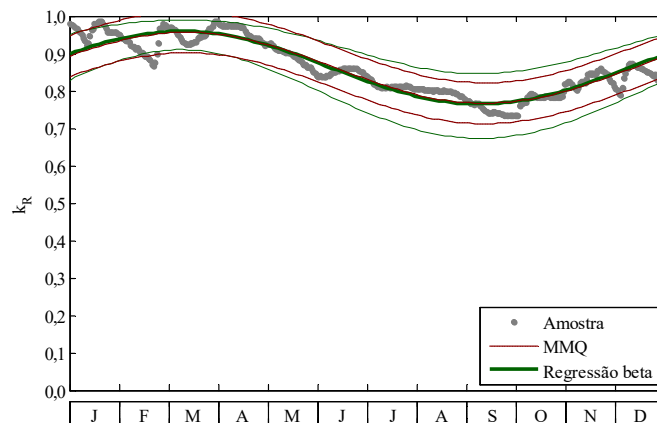


Figura 2. Ajuste do modelo proposto aos registos de 2010 do nível de água na albufeira da barragem do Alto Lindoso.

#### 4. QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO

O valor esperado e a variância do modelo dado pela Eq. (2) são considerados como variáveis aleatórias. A quantificação da incerteza destas variáveis é apresentada nas secções seguintes.

#### 4.1. Valor esperado do modelo

Uma vez que o NPA é designado como o nível máximo em exploração normal [3], considera-se que, em média, o nível de água na albufeira não o excederá durante o ano, ou seja,

$$E(k_R) \leq k_{NPA} \Leftrightarrow \frac{k_m + k_{sa} \cdot \cos(t - \phi)}{k_{NPA}} \leq 1 \quad (6)$$

em que  $k_{NPA}$  é o quociente entre altura correspondente ao NPA,  $H_{NPA}$  e  $H_{máx}$ .

Assim, sendo o valor esperado do modelo limitado a  $k_{NPA}$ , considera-se que o quociente apresentado segue uma distribuição beta, cujos parâmetros,  $\alpha_E$  e  $\beta_E$ , variam no tempo, ou seja,

$$\frac{E(k_R)}{k_{NPA}} \sim B(\alpha_E(t), \beta_E(t)) \quad (7)$$

Uma vez que a variabilidade anual do nível de água na albufeira não depende do parâmetro  $\phi$ , os valores obtidos deste parâmetro não são considerados no procedimento de caracterização probabilística. De acordo com Eq. (2), combinaram-se os pares de valores  $[k_m, k_{sa}]$ , obtidos da análise de regressão beta, para calcular amostras do valor esperado do modelo,  $E(k_R)$ , em função de  $\cos(t - \phi)$ . Na Fig. 3 mostram-se os histogramas obtidos e as distribuições beta ajustadas, para os grupos FA e AR, separadamente.

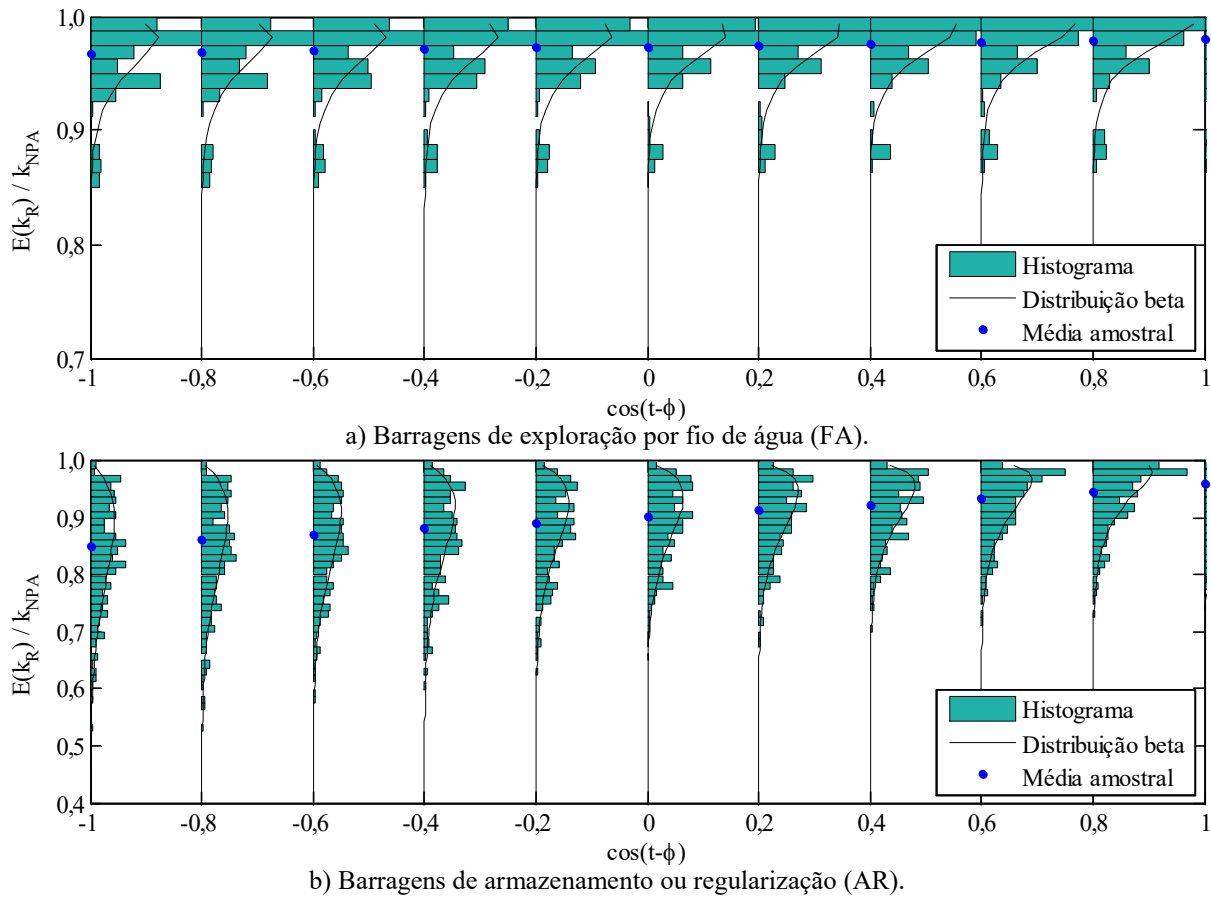
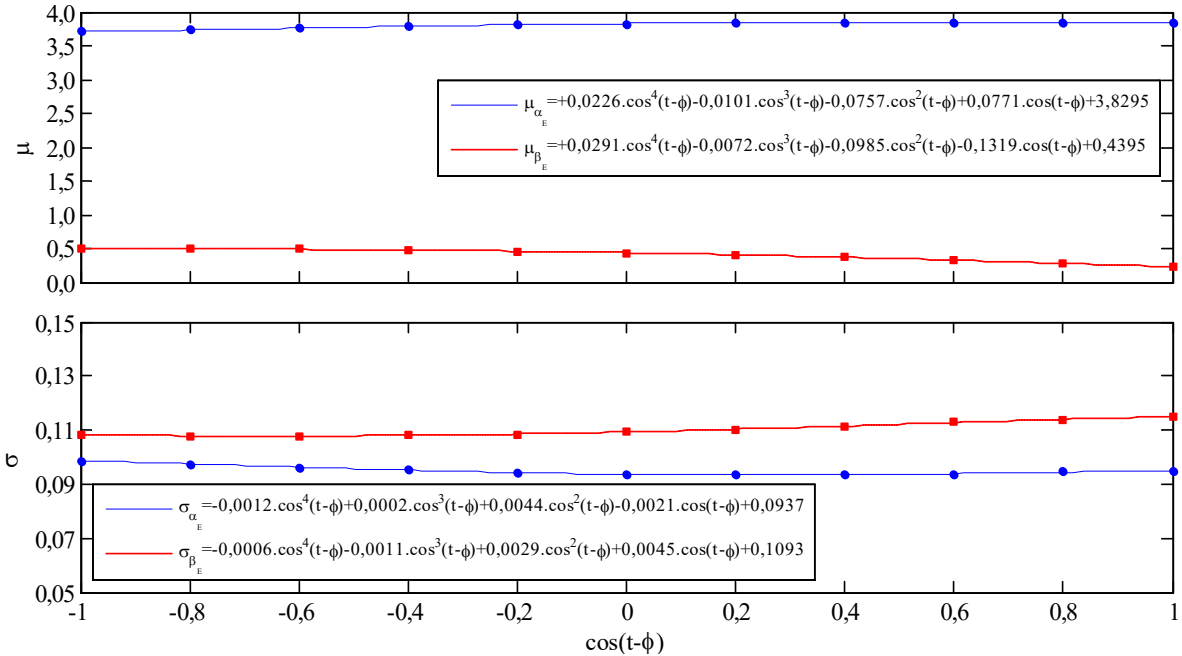


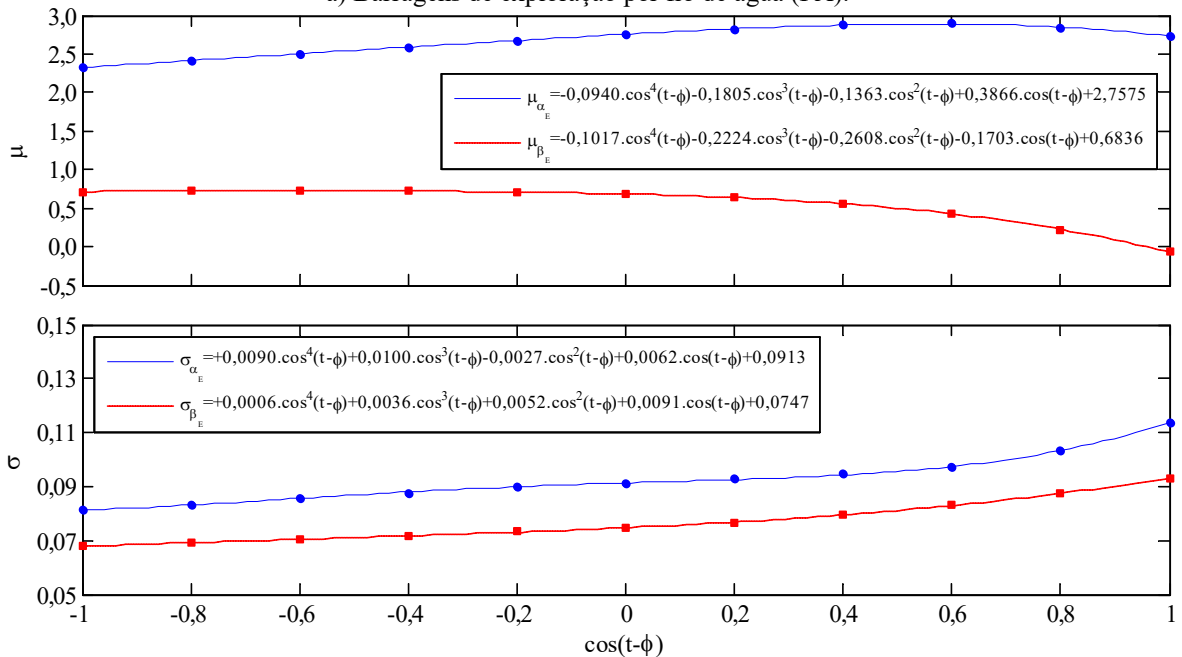
Figura 3. Histogramas e distribuições beta ajustadas aos valores de  $E(k_R)/k_{NPA}$ , em função de  $\cos(t - \phi)$ .

As distribuições beta foram ajustadas pelo MMV, no qual os estimadores dos parâmetros da distribuição,  $\hat{\alpha}_E$  e  $\hat{\beta}_E$ , são aqueles que melhor se ajustam às amostras observadas. No entanto, devido à

incerteza estatística, estes parâmetros são na realidade incertos e devem ser considerados como variáveis aleatórias [10]. Assim, uma vez que os parâmetros da distribuição beta são necessariamente positivos, ajustou-se uma distribuição log-normal (LN ( $\mu$ ,  $\sigma$ )) aos estimadores desses parâmetros associados a diferentes intervalos de confiança. Na Fig. 4 mostram-se os parâmetros da distribuição log-normal, em função de  $\cos(t-\phi)$ , aos quais se aproximaram polinómios de 4º grau, para os grupos FA e AR, separadamente.



a) Barragens de exploração por fio de água (FA).



b) Barragens de armazenamento ou regularização (AR).

Figura 4. Ajuste de polinómios de 4º grau aos parâmetros da distribuição log-normal que representam a incerteza estatística de  $\alpha_E$  e  $\beta_E$ , em função de  $\cos(t-\phi)$ .

## 4.2. Variância do modelo

A variância do modelo pode ser interpretada como uma medida das variações diárias do nível de água na albufeira. Neste caso, como mostra a monitorização contínua, o nível de água na albufeira pode exceder o NPA.

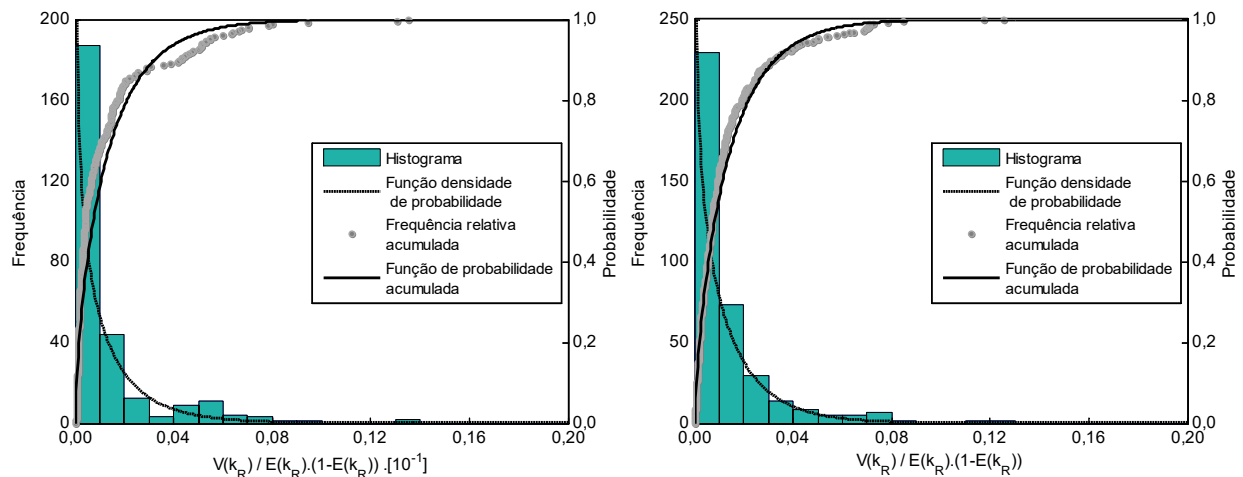
Uma vez que os parâmetros da distribuição beta da Eq. (3),  $\alpha$  e  $\beta$ , são necessariamente positivos, pelas Eqs. (4) e (5) a seguinte condição tem de ser garantida:

$$0 \geq V(k_R) \geq E(k_R) \cdot (1 - E(k_R)) \Leftrightarrow 0 \geq \frac{V(k_R)}{E(k_R) \cdot (1 - E(k_R))} \geq 1 \quad (8)$$

Assim, sendo a variância limitada a  $E(k_R) \cdot (1 - E(k_R))$ , considera-se que o quociente apresentado segue uma distribuição beta com parâmetros  $\alpha_V$  e  $\beta_V$ , ou seja,

$$\frac{V(k_R)}{E(k_R) \cdot (1 - E(k_R))} \sim B(\alpha_V, \beta_V) \quad (9)$$

Pelas mesmas razões apresentadas anteriormente, estimaram-se os parâmetros da distribuição beta,  $\hat{\alpha}_V$  e  $\hat{\beta}_V$ , pelo MMV e considerou-se, devido à incerteza estatística, que os seus valores reais seguem distribuições log-normal. Na Fig.5 mostra-se o ajuste obtido. No Quadro 3 resumem-se os parâmetros da distribuição log-normal.



a) Barragens de exploração por fio de água (FA). b) Barragens de armazenamento ou regularização (AR).

Figura 5. Histograma e distribuição beta ajustada aos valores de  $V(k_R)/E(k_R) \cdot (1 - E(k_R))$ .

Quadro 3. Parâmetros da definição probabilística de  $V(k_R)/E(k_R) \cdot (1 - E(k_R))$ .

Tipo de albufeira	Estimador dos parâmetros $\alpha_V$ e $\beta_V$	Distribuição probabilística dos parâmetros $\alpha_V$ e $\beta_V$
FA	$\hat{\alpha}_V = 0,75$ $\hat{\beta}_V = 55,45$	$\alpha_V \sim \text{LN}(\mu = -0,288, \sigma = 0,038)$ $\beta_V \sim \text{LN}(\mu = 4,016, \sigma = 0,059)$
AR	$\hat{\alpha}_V = 0,68$ $\hat{\beta}_V = 533,27$	$\alpha_V \sim \text{LN}(\mu = -0,379, \sigma = 0,116)$ $\beta_V \sim \text{LN}(\mu = 6,279, \sigma = 0,097)$

Como esperado, a variância do modelo é menor em barragens de exploração por fio de água do que em barragens de armazenamento ou regularização. Conclui-se assim que este modelo prevê o nível de água nas albufeiras de barragens de exploração por fio de água com melhor qualidade que na albufeira de barragens de armazenamento ou regularização.



## 5. COMPARAÇÃO COM OS REGISTOS OBSERVADOS EM DUAS BARRAGENS

Considerando a informação apresentada no capítulo anterior, gerou-se um histograma virtual para representar a variação anual do nível de água nas albufeiras de duas barragens, Belver (FA) e a barragem do Caldeirão (AR). Estes histogramas foram obtidos por sobreposição dos histogramas diários gerados pelo método de Monte Carlo. De acordo com a Eq. (3), para obter a distribuição de probabilidades *a priori* do nível de água nas albufeiras destas barragens, ajustou-se uma distribuição beta e multiplicou-se pela altura máxima. Na Fig. 6 compara-se a distribuição de probabilidades *a priori* com os registos do nível de água nas albufeiras das barragens consideradas.

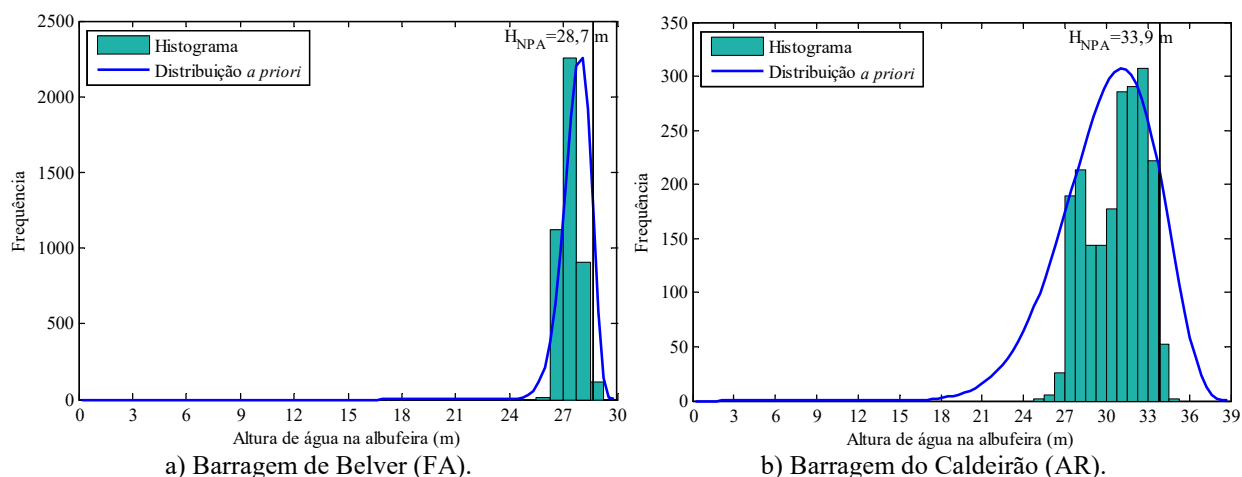


Figura 4. Comparação da distribuição de probabilidades *a priori* com os registos do nível de água na albufeira.

A distribuição *a priori*, em ambos os casos, é mais dispersa que os registos observados numa barragem em particular. Este facto deve-se a terem sido considerados os registos provenientes de diversas barragens, que são afetados de aspetos particulares que não foram explicitamente tidos em conta na formulação do modelo proposto. Confirma-se que a previsão do nível de água na albufeira é de melhor qualidade no caso de barragens de exploração por fio de água que em barragens de armazenamento ou regularização.

## 6. CONCLUSÕES

O nível de água na albufeira de barragens de betão varia, ao longo do ano, em função de eventos hidrológicos e de diversos fatores relacionados com a exploração das obras.

A monitorização contínua do nível de água nas albufeiras das grandes barragens de betão portuguesas mostra que o NPA é ocasionalmente excedido durante o ano e, por vezes, durante consideráveis períodos de tempo. A análise desta informação mostra diferentes tendências nas barragens de exploração por fio de água (FA) e barragens de regularização ou armazenamento (AR). Assim, os dados recolhidos foram agrupados e tratados considerando estes dois grupos.

Consideraram-se os registos do nível de água nas albufeiras de 27 grandes barragens de betão para ajustar um modelo probabilístico de previsão desta grandeza em barragens de betão novas, em condições normais de exploração, considerando apenas o tipo de exploração e as características geométricas da barragem e albufeira, nomeadamente a altura máxima da barragem e o NPA.

Pela análise da tendência dos registos analisados, propõe-se um modelo sinusoidal normalizado, que representa o quociente entre a altura de água e a altura máxima da barragem, para quantificar a variação do nível de água na albufeira ao longo do ano. Uma vez que este modelo representa um quociente, utiliza-se a análise de regressão beta, em que a variável dependente segue uma distribuição beta, para ajustar o modelo aos registos anuais do nível de água na albufeira. Neste tipo de análise, os

parâmetros da distribuição beta são posteriormente obtidos a partir do valor esperado e da variância do modelo, por inversão das Eqs. (4) e (5).

O valor esperado e a variância do modelo são considerados como variáveis aleatórias. Consideraram-se as amostras dos parâmetros do modelo obtidas através de 650 análises de regressão, relativas aos anos em exploração das barragens consideradas, para quantificar a incerteza das variáveis aleatórias através do MMV.

Por fim, compara-se a distribuição de probabilidades *a priori*, obtida pelo método de Monte Carlo de acordo com o procedimento proposto, com os registos observados em duas barragens, Belver (FA) e Caldeirão (AR). A distribuição *a priori*, em ambos os casos, é mais dispersa que os registos observados numa barragem em particular. Este facto deve-se a terem sido considerados os registos provenientes de diversas barragens, que são afetados de aspetos particulares que não foram explicitamente tidos em conta na formulação do modelo proposto. Confirma-se que a previsão do nível de água na albufeira é de melhor qualidade no caso de barragens de exploração por fio de água que em barragens de armazenamento ou regularização.

## 7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a autorização concedida pelos donos de obra para a utilização dos registos provenientes da monitorização. Agradecem também ao LNEC pelo apoio recebido e à Fundação para a Ciência e Tecnologia pelo financiamento através da bolsa SFRH/BD/91131/2012.

## REFERÊNCIAS

- [1] You, JY. (2008) Hedging rule for reservoir operation: How much, when and how long to hedge. PhD Thesis, University of Illinois, USA.
- [2] NEB (1993) Normas de Exploração de Barragens. Proposta de portaria.
- [3] RSB (2007) Regulamento de Segurança de Barragens. Decreto-Lei 344/2007.
- [4] JCSS (2001) Probabilistic model code – Part I: Basis of design. Technical report, Joint Committee on Structural Safety.
- [5] NOIB (1993) Normas de Observação e Inspeção de Barragens. Portaria 847/93.
- [6] Mata, J. (2013) Structural safety control of concrete dams aided by automated monitoring systems. PhD Thesis, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- [7] NPB (1993) Normas de Projeto de Barragens. Portaria 846/93.
- [8] Paolino, P. (2001) Maximum likelihood estimation of models with beta-distributed dependent variables. *Political Analysis* Vol. 9, No. 4, pp. 325-346.
- [9] Ferrari, S.; Cribari-Neto, F. (2004) Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics* Vol. 31, No. 7, pp. 799-815.
- [10] Faber, M.H. (2005) Risk and Safety in Civil, Surveying and Environmental Engineering. Lecture Notes, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.