

# Modelo Histerético das Relações Forças-Deslocamentos Adequado à Análise Sísmica de Estruturas

## Hysteretic Model for Forces-Displacements Relationships to be Used in the Seismic Analysis of Structures

Anibal Guimarães da Costa \*  
Alfredo Campos Costa \*\*

### RESUMO

O presente relatório descreve os estudos efectuados no LNEC, que visaram o desenvolvimento e implementação computacional de um algoritmo representativo das relações histeréticas forças-deslocamentos generalizados observados em ensaios de elementos de betão armado sujeitos à flexão.

Foi dado um carácter geral à implementação do modelo e, de forma a poder ser usado em trabalhos futuros de análise dinâmica em regime não linear de estruturas de betão armado, sujeitas à acção dos sismos.

O algoritmo computacional resultante é suficientemente versátil uma vez que através da introdução de alguns parâmetros pode reproduzir diferentes comportamentos estruturais, tais como: degradação de rigidez e resistência, efeito de "pinching" e "slipping" e efeito P-delta.

### SUMMARY

This report describes the studies made at LNEC aiming at development and implementation of a computational algorithm which represents the generalized force-displacement relationship.

The algorithm can be used in the solution of general non-linear dynamics problems which occur in the seismic analysis of RC structures. The force-displacement relationships were developed in order to consider the following features: i) tri-linear skeleton curve; ii) stiffness degradation; iii) strength degradation; iv) pinching or slipping effects; and v) P- $\Delta$  effect.

The work is the result of joint efforts between the Applied Dynamic Division of LNEC and the Structural Division of FEUP.

### 1 — INTRODUÇÃO

As actuais disposições contidas nas regulamentações utilizadas no projecto estrutural de edifícios de betão armado, [1] e [2], implicam em geral avaliações de comportamento dinâmico em regime não linear destas estruturas, tornando necessário o emprego de meios de análise tanto analítico como experimentais, que traduzam esse comportamento.

Os meios analíticos vulgarmente utilizados baseiam-se em modelos de complexidades distintas, dependentes do detalhe pretendido. Assim, uma identificação do comportamento não linear histerético de edifícios de betão armado poderá ser estabelecida em termos das relações tensões-deformações dos materiais componentes (betão e aço) até relações mais globais como por exemplo forças-deslocamentos ao nível dos pisos ou, caso limite, traduzindo essas relações num só grau de liberdade.

Qualquer análise deste tipo passa por uma definição de modelos de comportamento histerético das relações forças-deslocamentos generalizados, ( $F, D$ ), ao nível dos elementos estruturais (vigas, pilares, ligações vigas-pilares, etc.)

O modelo analítico ideal a ser estabelecido para a obtenção da resposta não linear de elementos estruturais de betão armado, com comportamento predominante de flexão,

requer uma definição das características geométricas e mecânicas dos materiais ao nível das secções e em termos das relações tensões-deformações nos diversos materiais componentes. Estas relações são então integradas ao longo da altura das secções, tendo em consideração as características geométricas e algumas hipóteses básicas quanto à natureza das deformações. (Hipótese de Bernoulli e de Navier). A integração posterior ao longo do comportamento dos elementos estruturais permite a definição das relações forças-deslocamentos generalizados ao nível das extremidades desses elementos. Este procedimento embora não seja invulgar em problemas de análise estática, é contudo ainda uma técnica muito pesada para os problemas de análise dinâmica.

Diversos aspectos diferenciam os problemas dinâmicos dos estáticos nomeadamente:

- 1 — Presença das forças de inércia e do amortecimento
- 2 — A natureza cíclica e oscilatória (mudança de sinal dos esforços).
- 3 — Possibilidade de ocorrência de efeitos devido à velocidade de aplicação das deformações (strain-rate effect).

Note-se ainda que a velocidade de aplicação das deformações (strain-rate) dentro de determinadas bandas de frequências poderá constituir uma dificuldade adicional nas análises dinâmicas.

Com o objectivo de estudar o comportamento não linear das estruturas de betão armado sujeitas à acção dos sis-

\* Eng.º Civil, Assistente da FEUP, Porto

\*\* Eng.º Civil, Assistente de Investigação do LNEC

mos, têm sido realizados muitos ensaios que sugeriram vários modelos que reproduzem o comportamento em flexão através de relações força-deslocamentos generalizados.

Na década de 60 utilizaram-se principalmente modelos simplificados baseados em curvas de restituição elastoplástica. Esta limitação era imposta pela capacidade computacional quer no que diz respeito à velocidade de execução como, principalmente, à memória disponível.

No começo da década de 70, com o desenvolvimento dos métodos numéricos e das potencialidades do cálculo automático, foram surgindo modelos mais aperfeiçoados que procuravam reproduzir o comportamento das peças de betão armado, sujeitas à flexão, verificado nos ensaios laboratoriais.

Entre esses destacou-se o modelo desenvolvido por Takeda [3], amplamente difundido devido à sua fiabilidade e à sua aplicabilidade às situações mais diversas do comportamento estrutural.

O presente artigo descreve os estudos, efectuados no LNEC, que visaram a implementação em algoritmo computacional de um modelo hysterético trilinear e uma primeira exploração das suas potencialidades. Este modelo baseou-se no modelo de Takeda, podendo incluir as seguintes particularidades:

- 1 — Degradação de rigidez
- 2 — Degradação de Resistência
- 3 — Consideração da influência do esforço transversal, da deterioração da aderência e do escorregamento das armaduras (bond deterioration e bar slip)
- 4 — Considerações do efeito P-Delta

A metodologia que presidiu à implementação deste algoritmo baseia-se nas potencialidades da linguagem FORTRAN 77, que permitiu a elaboração de uma subrotina de carácter geral. Assim, para um dado deslocamento imposto, o algoritmo fornece as forças de restituição inelásticas, e a rigidez em cada instante do carregamento (entendido como carga ou descarga).

O artigo está estruturado do seguinte modo: no capítulo 2, descreve-se as características principais do comportamento de elementos de betão armado sujeitos à flexão; a apresentação dos modelos hysteréticos mais difundidos na literatura da especialidade é feita no capítulo 3; no capítulo 4 descreve-se o modelo desenvolvido e implementado, com todas as suas potencialidades; no capítulo 5, estuda-se a influência de alguns parâmetros; a resposta dinâmica em regime não linear de um oscilador com 1 grau de liberdade, excitado por acelerações na base, é estudado no capítulo 6; finalmente, no capítulo 7 é feita uma apreciação do trabalho desenvolvido.

## 2 — CARACTERÍSTICAS HISTERÉTICAS DOS ELEMENTOS DE BETÃO ARMADO SUJEITOS À FLEXÃO

O comportamento em flexão de elementos de betão armado, sujeitos à imposição de deslocamentos alternados, tem vindo a ser cada vez melhor conhecido, como resultado de ensaios laboratoriais efectuados em quase todo o mundo.

Da análise dos diagramas obtidos evidenciam-se certas características comuns que permitem estabelecer regras no

andamento das relações forças-deslocamentos generalizados, e que podem ser sintetizadas nos seguintes pontos, Fig. 2.1:

- 1 — Mudanças de rigidez devido à abertura de fendas no betão e cedência das armaduras longitudinais de tracção (ciclo 1);
- 2 — Quando se dá uma inversão do carregamento, (ciclo 4) com amplitude máxima do deslocamento igual à do ciclo anterior (ciclo 3, cedência das armaduras), este é efectuado com uma rigidez nitidamente inferior, embora as forças de restituição atingidas sejam praticamente as mesmas. Esta redução de rigidez é atribuível à formação de fendas durante o ciclo anterior (ciclo 3) e também devido à redução de rigidez da armadura longitudinal devido ao efeito de Bauschinger no próprio ciclo (ciclo 4).
- 3 — A rigidez média de um ciclo completo decresce com o deslocamento máximo atingido em ciclos anteriores. Repare-se na Fig. 2.1 que o ciclo 5 possui uma rigidez média significativamente inferior à rigidez média do ciclo 2, apesar das amplitudes de deslocamentos impostas em ambos os ciclos serem praticamente as mesmas. Contudo a rigidez média do ciclo 5 é próxima da rigidez média do ciclo 4 e da do ciclo 3 após cedência.
- 4 — As características históricas do betão armado dependem de toda a história dos deslocamentos impostos.

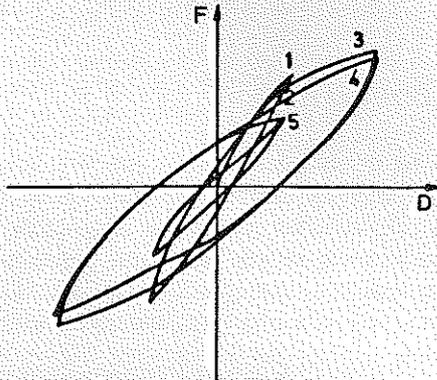


Fig. 2.1 — Comportamento típico em flexão de um elemento de betão armado sujeito a deslocamentos alternados

Se os elementos de betão armado estão submetidos a elevados esforços transversos, ou se verifica o escorregamento das armaduras longitudinais dentro dos seus comprimentos de amarração, estas relações apresentam um comportamento característico, efeitos de "pinching" e "slipping", Fig. 2.2 e Fig. 2.4.

Esta influência do esforço transversal traduz-se por uma redução da capacidade de dissipação da energia dos elementos estruturais sujeitos à flexão. Alguns autores, [4] e [5], têm estudado este problema analisando a importância relativa entre o esforço transversal e o momento flector, a partir da relação  $l/d$ , (shear ratio). Uma exemplificação desse efeito pode ser vista na Fig. 2.3, [6]. O escorregamento das armaduras longitudinais nos seus comprimentos de amarração, foi estudado no LNEC, apresentando-se um exemplo dos resultados obtidos na Fig. 2.4, [7].

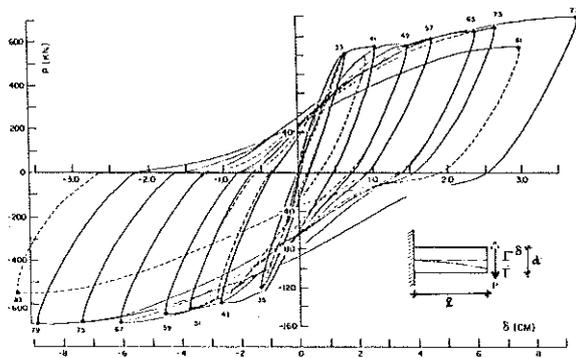


Fig. 2.2 — Efeito de "pinching" observado experimentalmente

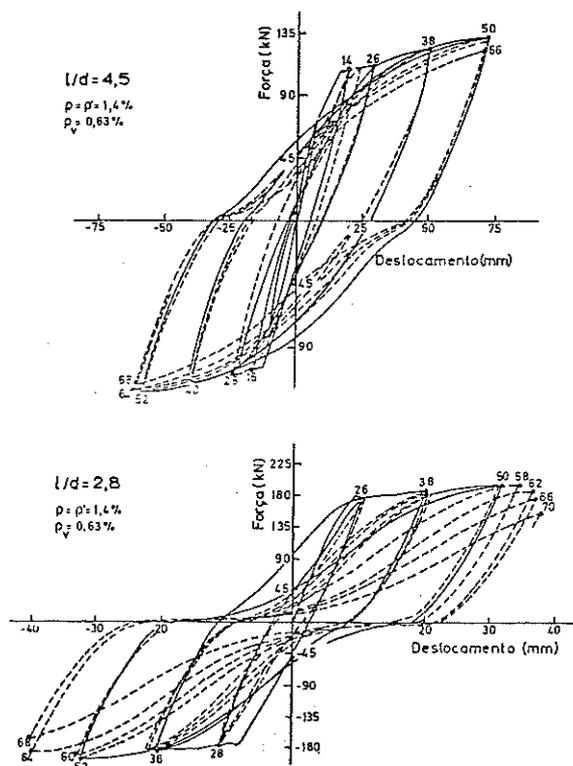


Fig. 2.3 — Comparação da importância do esforço transverso no comportamento dos elementos de betão armado sujeitos à flexão

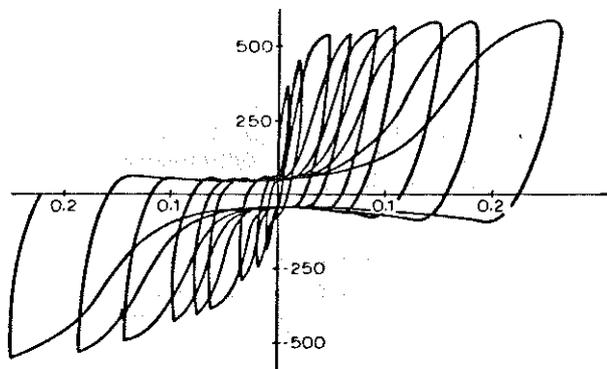


Fig. 2.4 — Efeito do escorregamento das armaduras longitudinais nos seus comprimentos de amarração

A análise destas figuras permite constatar que estes dois fenómenos, apesar de fisicamente distintos têm um efeito semelhante no andamento de ambas as curvas.

A presença do esforço normal de compressão no comportamento dos elementos estruturais de betão armado sujeito à flexão traduz-se, geralmente, por um aumento da sua capacidade resistente e por uma perda de ductilidade desses elementos, reflectindo-se no andamento das suas relações histeréticas. Nas estruturas de betão armado, sujeitas à acção dos sismos, estes efeitos são importantes nos pilares dos pisos inferiores, devido à presença de esforços normais elevados decorrentes das forças gravíticas e eventualmente dos momentos de derrubamento. Acrescente-se ainda que o aproveitamento de níveis elevados de ductilidade poderá levar a grandes deformações, começando os efeitos não lineares geométricos a serem importantes nas respostas. Este fenómeno, designado por efeito P-Delta, pode traduzir-se por perda de estabilidade da estrutura com reflexos no andamento das relações histeréticas, Fig. 2.5, [8].

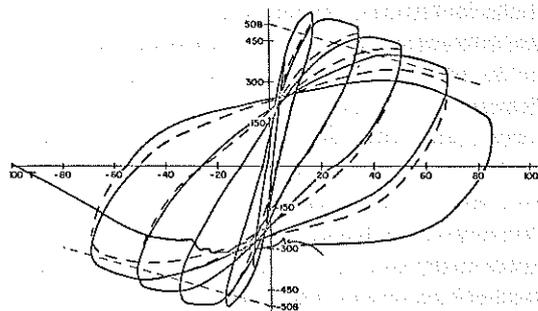


Fig. 2.5 — Influência do esforço normal no comportamento dos elementos de betão armado sujeitos à flexão

A extrapolação das relações observadas nos ensaios referidos anteriormente, para modelos histeréticos aplicáveis a análises dinâmicas, passa pela verificação da importância da velocidade de aplicação das deformações nas propriedades dos materiais. Com este fim, foram levados a efeito diversos ensaios, [9], cujas conclusões podem ser resumidas nos seguintes pontos:

- 1 — A rigidez inicial pouco depende da velocidade de aplicação dos deslocamentos.
- 2 — Altas velocidades de aplicação de deformação (0.05/s) aumentam o limite de cedência em 20%, mas somente para a primeira incursão no regime inelástico.
- 3 — Em ciclos sucessivos com carregamentos até à mesma amplitude de deslocamento, comparável ao regime estacionário dos movimentos oscilatórios, as diferenças tanto em rigidez como em resistência são muito pequenas.
- 4 — Os efeitos das velocidades das deformações nas resistências diminuem com o aumento das incursões na zona de endurecimento.
- 5 — Não são observadas mudanças substanciais quer na ductilidade quer na capacidade de absorção de energia.

Acrescente-se que as velocidades de deformação durante oscilações dinâmicas são maiores para níveis de tensão baixa e diminuem gradualmente até se atingir o valor máximo da extensão [10]. Por outro lado com a progressão da fendilhação no betão e da cedência nas armaduras, o período das oscilações vai aumentando, dado que há uma redução de

rigidez. Consequentemente, os efeitos da velocidade de aplicação das deformações podem ser considerados pouco relevantes.

Em conclusão, os parâmetros e regras que interessam na definição de modelos hysteréticos, representativos do comportamento dinâmico de elementos de betão armado sujeitos à acção dos sismos, podem ser obtidos de ensaios estáticos sobre cargas alternadas.

### 3 — MODELOS HISTERÉTICOS MAIS UTILIZADOS

Um modelo hysterético de comportamento de elementos de betão armado sujeitos à flexão deve ser capaz de, em cada instante da história do deslocamento generalizado imposto, fornecer a rigidez e as forças generalizadas de restituição inelásticas. Foram desenvolvidos muitos modelos com diferentes graus de complexidade, sendo esta uma função do número de parâmetros e regras que definem completamente o modelo, [11], [12] e [13].

A complexidade dos modelos hysteréticos não implica, em geral, uma maior ocupação quer da unidade central de processamento dos computadores (CPU), quer da sua memória disponível, traduzindo-se somente por encadeamentos lógicos mais complexos. Consequentemente, a utilização de modelos hysteréticos simplificados, com menor número de parâmetros e regras, não conduz necessariamente à optimização do uso dos computadores. A escolha do modelo a implementar está mais condicionada ao tipo de análise subsequente em que vai ser integrado. Um exemplo deste tipo de optimização de utilização, foi seguido no LNEC, [14] e [15]. Esta metodologia pode ser aplicada quando se pretende estudos paramétricos de comportamento global [16].

Vários modelos analíticos, que se adaptam ao comportamento em flexão de elementos estruturais de betão armado, têm vindo a ser implementados em todo o mundo, salientando-se os seguintes:

- 1 — Modelo Bilinear
- 2 — Modelo de Ramberg-Osgood
- 3 — Modelo de Clough com Degradação de Rigidez
- 4 — Modelo de Takeda
- 5 — Modelo Trilinear com Degradação da Rigidez

Seguidamente será feita uma breve descrição destes modelos. Em todos eles considera-se que existe uma curva base obtida de ensaios monotónicos, simétrica em relação à origem. Esta curva pode ser representada por uma sucessão de rectas, sendo os pontos de inflexão definidos pelas forças e deslocamentos generalizados correspondentes à fendilhação do betão e à cedência das armaduras longitudinais, constituindo-se curvas de restituição bilineares ou trilíneas.

#### 3.1 — Modelo Bilinear

Os primeiros passos, encetados no sentido do desenvolvimento de modelos hysteréticos de comportamento, foram dados usando relações elasto-plásticas ideais como curva base. Na sequência, foi introduzido o modelo bilinear, com

rigidez não nula após cedência, na tentativa de simular as propriedades de endurecimento do aço e do betão armado.

A constatação experimental da diminuição de rigidez em ciclos sucessivos de carga e descarga, para valores cada vez maiores dos deslocamentos impostos, levou à sua modelização através de formulas empíricas, que traduzissem este efeito. A expressão que normalmente se utiliza, deve-se a Nielsen e Imbeault, [17].

$$K_r = k_y |D_y / D_m|^\alpha$$

em que:

- $K_r$  — nova rigidez de carga ou descarga após inversão do carregamento
- $K_y$  — rigidez elástica inicial
- $D_m$  — máximo deslocamento atingido em ciclos anteriores
- $D_y$  — deslocamento correspondente à cedência
- $\alpha$  — parâmetro de degradação de rigidez ( $0 < \alpha < 1.0$ )

Note-se que o valor de  $K_r$  mantém-se constante até que as amplitudes dos deslocamentos atingidos, em qualquer das direcções, excedam o valor máximo de ciclos anteriores, Fig. 3.1. Além disso para  $\alpha$  igual a zero teremos o modelo bilinear sem degradação de rigidez, Fig. 3.1. Em estruturas de betão armado, o valor de  $\alpha$  deve ser considerado entre 0 e 0.5. Um valor de  $\alpha$  pouco elevado implica obviamente em deformações residuais mais elevadas. Acrescente-se, finalmente, que este modelo só dissipa energia após cedência.

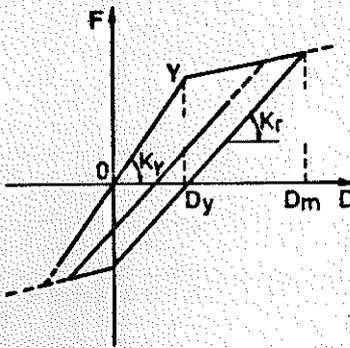


Fig. 3.1 — Modelo hysterético bilinear com degradação de rigidez

Um modelo bilinear foi desenvolvido no LNEC [18], tendo sido melhorado e testado por diversos investigadores, [14], [15], [19] e [20], sendo posteriormente utilizado em diversos estudos, [14] e [15]. Com este modelo procurava-se reproduzir o comportamento de peças de betão armado, introduzindo transições parabólicas na passagem de carga para descarga e vice-versa, permitindo uma reprodução mais exacta da capacidade de dissipação de estruturas de betão armado.

#### 3.2 — Modelo de Ramberg-Osgood

A partir da relação tensão - deformação, deduzida por Ramberg - Osgood para os aços, Jennings aperfeiçoou essa curva pela introdução de mais um parâmetro.

A curva base de carregamento deste modelo pode ser expressa por:

$$D/D_y = F/F_y \left( 1 + \eta |F/F_y|^{(\gamma-1)} \right)$$

$\gamma$  — parâmetro do modelo inicial de Ramberg - Osgood

$\eta$  — parâmetro introduzido por Jennings

$F/D_y$  — representa o modulo tangente inicial

A forma da curva base é controlada pelo expoente  $\gamma$ , assim teremos comportamento linear elástico para  $\gamma = 1$ . O comportamento elasto-plástico para  $\gamma =$  infinito. Para valores elevados de  $\gamma$ , temos um comportamento semelhante ao bilinear.

O descarregamento após se atingir um determinado valor mínimo, ( $D\phi$ ,  $F\phi$ ), será efectuado a partir da relação, Fig. 3.2.

$$\frac{D - D\phi}{2D_y} = \frac{F - F\phi}{2F_y} \left( 1 + \eta \left| \frac{F - F\phi}{2F_y} \right|^{(\eta-1)} \right)$$

sendo o carregamento posterior efectuado usando a mesma expressão, isto será válido até ser ultrapassado o valor máximo em qualquer uma das direcções.

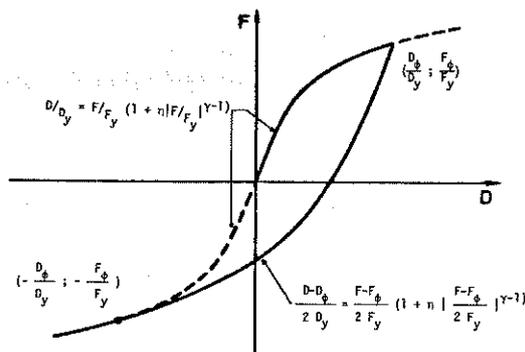


Fig. 3.2 — Modelo hysterético de Ramberg - Osgood

### 3.3 — Modelo de Clough com Degradação de Rigidez

O modelo desenvolvido por Clough e Johnston [21], com degradação de rigidez, utiliza uma curva base bilinear.

A rigidez em descarga é tomada igual à rigidez elástica inicial mesmo após fendilhação e cedência. Por outro lado, para inversão do sinal da força de restituição, a rigidez é obtida, apontando ao último valor máximo atingido no ciclo anterior, simulando assim a degradação de rigidez, com a deformação.

Este modelo é normalmente criticado no seguinte aspecto, [9]: conforme se pode ver na Fig. 3.3, depois da descarga no ponto A, considere-se um recarregamento a partir do ponto B (sem inversão do sinal da força de restituição), o modelo inicialmente apontava do ponto B para o ponto C, que era o máximo atingido no ciclo anterior, não se reproduzindo assim o observado experimentalmente. Portanto uma ligeira modificação foi introduzida de tal maneira que durante o recarregamento se aponta para o ponto A, e só depois para o ponto C. Além disso foi considerada a degradação de rigidez, em função da deformação.

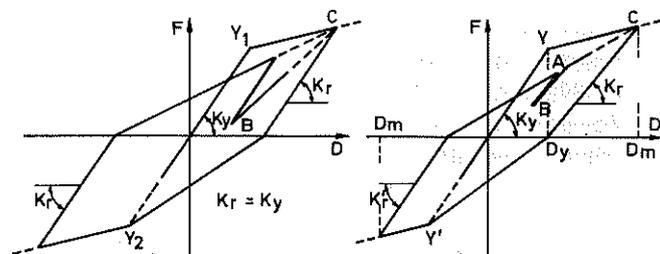


Fig. 3.3 — Modelo hysterético de Clough com degradação de rigidez

Note-se que depois de ultrapassado o limite de cedência, o modelo de Clough dissipa continuamente energia, mesmo em pequenos ciclos de oscilação.

### 3.4 — Modelo de Takeda

Takeda [3], desenvolveu um modelo hysterético, através da observação dos resultados experimentais de ensaios de consolas verticais em betão armado, com cerca de 50 cm de altura e com uma secção de 15 x 15 armada simetricamente. Estes ensaios foram realizados em 5 modelos, sendo 3 testados em mesa sísmica e os restantes estaticamente com imposição de deslocamentos alternados no topo.

Através da medição dos deslocamentos e das acelerações no topo foi possível estabelecer as relações forças-deslocamentos dos modelos ensaiados. A análise dos resultados permitiu estabelecer uma série de parâmetros e regras que constituem o modelo.

A curva base deste modelo é trilinear com mudanças de rigidez após fendilhação e cedência.

Este modelo inclui as seguintes particularidades:

- 1 — Regras de histerese para os ciclos mais internos
- 2 — Degradação de rigidez após inversão do carregamento, em função da deformação máxima atingida anteriormente,  $D_m$ , dada por

$$K_r = \frac{F_c + F_y}{D_c + D_y} |D_m/D_y|^{-\alpha}$$

em que  $\alpha$  o parâmetro de degradação após inversão do carregamento.

- 3 — Quando se dá a inversão do sinal da força, o ponto da resposta ( $D$ ,  $F$ ) aponta para o valor mais elevado ( $D_m$ ,  $F_m$ ) do ciclo anterior mais externo em que esse ponto se inclui.

A curva base no modelo de Takeda pode ser tomada bilinear, considerando os pontos de fendilhação na origem. Este modelo é parecido com o modelo de Clough, excepto no que diz respeito às regras dos ciclos internos em que o de Takeda é mais complexo.

Neste último modelo o andamento da resposta, segue em direcção ao ponto máximo do ciclo envolvente. Enquanto que no modelo de Clough, esse andamento segue em direcção ao ponto máximo atingido nos ciclos anteriores. Na Fig. 3.4 exemplifica-se os andamentos das relações forças — deslocamentos no modelo de Takeda. Observe-se que para ciclos cada vez menores, o ponto das respostas segue em direcção ao máximo do ciclo anterior, Fig. 3.4 c), enquanto que para ciclos com andamentos mais irregulares, esse ponto move-se em direcção ao máximo do ciclo en-

volvente, Fig. 3.4 d). Verifica-se, deste modo, que as regras de histerese no modelo de Takeda são completas e extensivas, dado que a história do andamento das relações forças-deslocamentos idealizadas por este modelo está presente ao longo do carregamento.

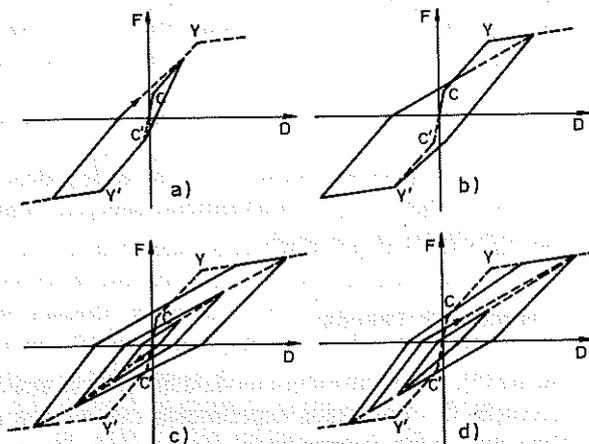


Fig. 3.4 — Modelo histerético de Rigidez

### 3.5 — Modelo Trilinear com Degradação de Rigidez

Este modelo simula as características de rigidez em flexão do betão armado, partindo de uma curva base trilinear, com mudança de rigidez nos pontos correspondentes à fendilhação e cedência, comportando-se como bilinear até à cedência, Fig. 3.5 a). Quando a força de restituição excede a cedência, o ponto da resposta segue a curva de endurecimento (3.º ramo da curva base trilinear). Ocorrida a descarga o ponto onde o descarregamento se iniciou é considerado o novo ponto de cedência naquela direcção, comportando-se como um bilinear entre estes dois pontos, Fig. 3.5 b).

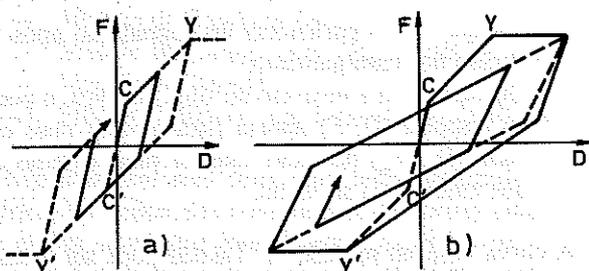


Fig. 3.5 — Modelo histerético trilinear com degradação de rigidez

Este modelo apresenta as seguintes particularidades:

- 1 — Degradação contínua de rigidez, com o aumento de amplitude após cedência
- 2 — Dissipação de energia maior no primeiro ciclo depois da cedência tornando-se estacionária nos ciclos seguintes para a mesma amplitude de deslocamentos
- 3 — A dissipação estacionária de energia histerética é proporcional à amplitude do deslocamento imposto

## 4 — CARACTERÍSTICAS E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO HISTERÉTICO

O comportamento em flexão de elementos de betão armado sujeitos a deslocamentos alternados foi apresentado no capítulo 2, onde se definiu o andamento geral das curvas de restituição, os parâmetros e as regras verificadas experimentalmente. Também se referiu que os parâmetros e as regras podem ser obtidos dos ensaios estáticos sobre cargas alternadas.

Neste capítulo descreve-se em detalhe o modelo histerético trilinear desenvolvido e implementado no VAX 7800 do LNEC e que inclui as seguintes particularidades:

- 1 — Degradação de rigidez com a deformação
- 2 — Degradação de rigidez após inversão do carregamento
- 3 — Degradação de resistência
- 4 — Consideração do efeito P-Delta
- 5 — Consideração da influência do esforço transversal, da deterioração da aderência e do escorregamento das armaduras.

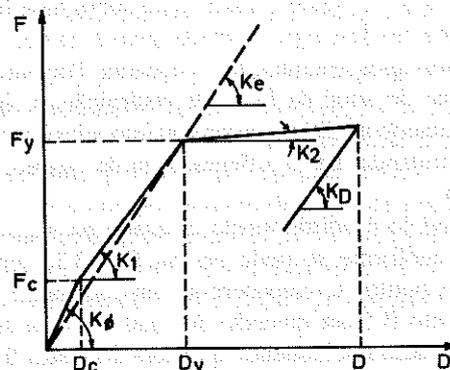
### 4.1 — Descrição do Modelo

Um modelo histerético, com interesse prático, tem que ser definido por um número não muito grande de parâmetros e regras que produzam andamentos observados experimentalmente.

O modelo analítico desenvolvido e implementado em computador no LNEC, baseou-se no modelo de Takeda anteriormente citado.

Os parâmetros que identificam a curva base, Fig. 4.1, são os seguintes:

- $K_0$  — rigidez inicial (troço 1)
- $K_1$  — rigidez após fissuração (troço 2)
- $K_2$  — rigidez após cedência (troço 3)
- $D_c$  — deslocamento generalizado correspondente à fissuração
- $D_y$  — deslocamento generalizado correspondente à cedência



4.1 — Parâmetros de identificação da curva base

Além destes tornou-se necessário a definição de mais dois parâmetros adimensionais, que caracterizam a degradação da rigidez ( $\alpha$ ) e de resistência ( $\gamma$ ).

A degradação da resistência foi levada em consideração através do parâmetro  $\gamma$ , que irá definir a envolvente das curvas de resistência máxima.

As regras estabelecidas para o modelo analítico exemplificadas na Fig. 4.2, traduzem-se nos pontos seguintes:

- 1 — Enquanto o deslocamento generalizado máximo absoluto em cada passo não ultrapassar o valor  $D_y$ , o modelo comporta-se como um bilinear sem degradação da rigidez e resistência (troços 1, 2, 3, 4, 5 e 6);
- 2 — Quando o deslocamento generalizado máximo absoluto ultrapassa  $D_y$  (troço 7 e 10) e se procede a uma inversão do carregamento, esta é feita considerando a degradação de rigidez dada pela expressão:

$$K_D = K_e (D_y / D_M)^\alpha$$

mantendo-se válida até se anular o valor da força generalizada (troço 8, 11, 14, 17, 19 e 21);

- 3 — A inversão do sinal da força generalizada corresponde a uma mudança de rigidez, sendo definida com base no valor máximo absoluto da força e deslocamento generalizados do ciclo anterior (troço 9, 12, 15, 20, 18, 22 e 23);
- 4 — Quando se considera a degradação de resistência ( $\gamma \neq 0$ ) então o valor máximo da força e deslocamento generalizados do ciclo anterior, referidos em 3, são alterados para os seguintes valores (troço 12A, 13A e 15):

$$D_{UNC}^\pm = D_{CA}^\pm * (1 + \gamma) \quad F_{UNC}^\pm = F_{CA}^\pm * (1 - \gamma)$$

em que:

$D_{CA}^\pm$  — deslocamento generalizado máximo absoluto do ciclo anterior (ponto 3)

$D_{UNC}^\pm$  — deslocamento generalizado máximo absoluto a atingir pelo ciclo presente

$F_{CA}^\pm$  — força generalizada máxima absoluta do ciclo anterior

$F_{UNC}^\pm$  — força generalizada máxima absoluta a atingir pelo ciclo presente

- 5 — Os valores máximos absolutos a atingir nos pontos 3 e 4 só serão actualizados caso sejam ultrapassados (troço 18 e 20).
- 6 — Quando se dá a inversão do carregamento, antes de se atingir os valores máximos absolutos, torna-se necessário guardar os valores máximos relativos obtidos nessa inversão. Assim, para ciclos mais internos, o ponto de resposta move-se em direcção a esses máximos relativos, permitindo-se a reprodução de pequenos ciclos de carga e descarga (troços 19, 20, 21 e 22) e suprime-se a deficiência anteriormente citada relativa ao modelo de Clough.
- 7 — Caso sejam ultrapassados os valores máximos relativos, o ponto de resposta move-se em direcção ao máximo absoluto (troço 23).
- 8 — A consideração do efeito de "pinching" poderá ser feito a partir do parâmetro  $\beta$  e é dado por uma rigidez expressa por:

$$K^\pm = F_{CA}^\pm / (D_{CA}^\pm - D_\phi^\pm) * (D_y^\pm / D_{CA}^\pm)^\beta$$

sendo  $D_\phi^\pm$  os valores dos deslocamentos generalizados correspondentes à força generalizada nula do ciclo anterior e  $F_{CA}^\pm$  e  $D_{CA}^\pm$  os valores máximos obtidos no ciclo anterior. O valor desta rigidez é válido até se intersectar a recta que une a origem das coordenadas aos pontos  $(F_{CA}^\pm, D_{CA}^\pm)$ , sendo a rigidez a partir desse ponto dada pela inclinação dessa recta. Este efeito é traduzido pelos troços 8-9 e 12-13 na Fig. 4.3.

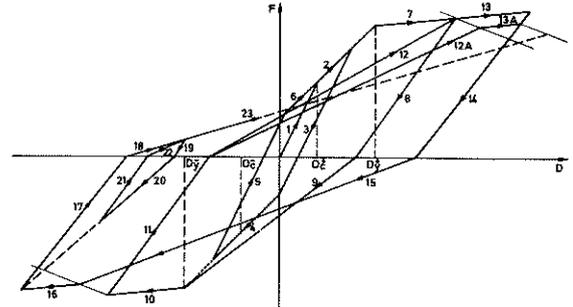


Fig. 4.2 — Regras de histerese do modelo desenvolvido

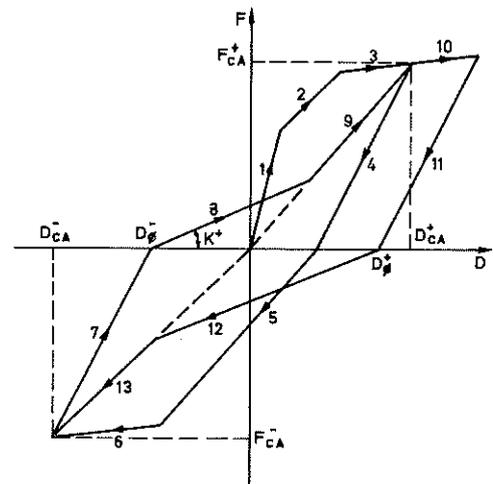


Fig. 4.3 — Consideração do efeito de "pinching" no modelo desenvolvido

#### 4.2 — Implementação em Computador do Modelo Desenvolvido

A implementação computacional do modelo anteriormente referido baseou-se nos seguintes pontos:

- 1 — A subrotina fornece a rigidez e as forças generalizadas de restituição inelástica, a partir da entrada de um deslocamento generalizado imposto, à custa de 25 parâmetros que definem a curva base e a história do carregamento.
- 2 — O número mínimo de parâmetros necessários à definição da história das relações F-d é de 17. Os restantes 8 parâmetros são constantes definidoras da curva base, do grau de degradação de rigidez e resistência e do efeito de "pinching".
- 3 — As variáveis internas da subrotina são unidimensionais, sendo os parâmetros da curva base e da história do carregamento armazenados em matrizes ao nível do programa principal.

- 4 — Todos os valores internos da subrotina são por isso variáveis mudas, sendo os seus conteúdos actualizados para cada chamada da subrotina.
- 5 — A integração desta subrotina num programa mais geral de análise estática ou dinâmica com  $n$  graus de liberdade, terá de ser realizada de modo a que a chamada da subrotina se faça por grau de liberdade.
- 6 — Para estes casos e à custa de um só valor para todos os graus de liberdade, a subrotina só memoriza a história no final do processo iterativo de convergência. Ou seja, não há actualização de valores máximos absolutos ou relativos antes de se atingir o equilíbrio.
- 7 — A consideração do efeito do esforço normal é feita exteriormente à subrotina através da soma algébrica de um efeito adicional, [16].

A título de exemplificação e verificação da subrotina implementada apresenta-se na Fig. 4.4 as relações  $F-d$  obtidas para a imposição de deslocamentos alternados representados na mesma figura.

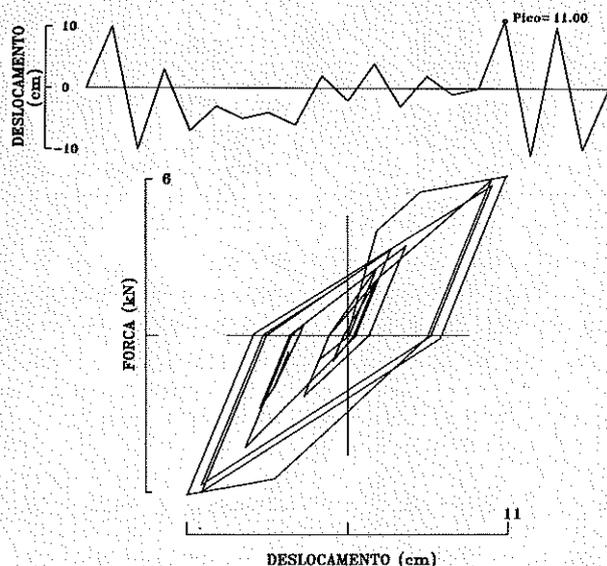


Fig. 4.4 Resultados obtidos em termos de relações  $F-d$  para deslocamentos alternados

## 5 — INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS

De forma a analisar a influência de alguns parâmetros do modelo na capacidade de dissipação de energia histerética foram realizados diversos cálculos que exprimem essa capacidade em termos de um parâmetro adimensional, percentagem de amortecimento equivalente, utilizado com o mesmo fim por outros autores [10].

Os parâmetros do modelo seleccionados para estudar essa influência foram:

- 1 — Degradação de rigidez após inversão do carregamento ( $\alpha$ )
- 2 — Efeito de "pinching" ( $\beta$ )
- 3 — Relação rigidez após cedência, rigidez inicial ( $K2/K0$ )

O termo de comparação, entre a influência dos diversos parâmetros na resposta a uma imposição de deslocamentos alternados de igual amplitude, foi calculado igualando-se a energia dissipada em cada ciclo ( $E_{\xi}$ ) à energia que seria dissipada por um oscilador linear com amortecimento viscoso,  $C$ , actuado por uma excitação sinusoidal em ressonância atingindo-se a mesma amplitude máxima  $D_m$  de deslocamentos. Deste modo,  $E_{\xi}$ , é dado por:

$$E_{\xi} = \int_0^T C \cdot \dot{u}^2 \cdot dt$$

em que

$$u = D_m \cdot \text{sen } \omega t$$

Assim, a percentagem de amortecimento crítico equivalente é dada por:

$$\xi = \frac{E_{\xi}}{2 \pi F_m D_m}$$

sendo  $F_m$  o valor máximo da força de restituição inelástica, obtida da subrotina, correspondente ao valor  $D_m$ .

Fazendo variar o deslocamento máximo ( $D_m$ ) o factor de ductilidade  $\mu$  também varia proporcionalmente, uma vez que  $D_y$  é mantido constante,

$$\mu = \frac{D_m}{D_y}$$

podendo-se assim estudar também a influência deste parâmetro.

No Quadro 5.1 comparam-se valores obtidos em [10], para os modelos referidos no capítulo terceiro, com os obtidos pelo modelo desenvolvido.

Quadro 5.1

Comparação dos valores da % de amortecimento equivalente em função de  $\alpha$ , para  $\mu = 4$ , entre diversos modelos

$\alpha$	Modelo	% de Amortecimento
0.5	Clough	11
	Trilinear	11
	Takeda	14
	Bilinear	19
	Desenvolvido	11
0.0	Clough	21
	Takeda	23
	Ramberg-Osgood	28
	Bilinear	33
	Desenvolvido	22

Na Fig. 5.1, 5.2 e 5.3 são apresentadas a influência dos parâmetros e  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $K2/K0$ , respectivamente em função do factor de ductilidade.

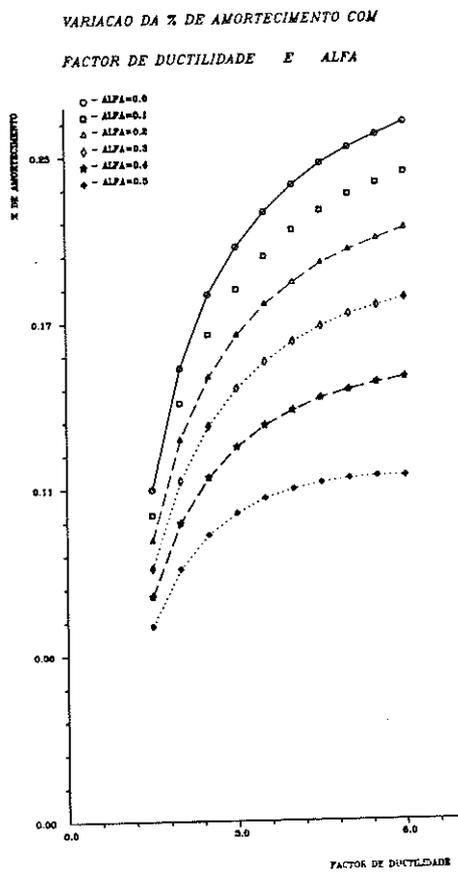


Fig. 5.1 — Influência do parâmetro alfa na variação da percentagem de amortecimento equivalente, em função da ductilidade

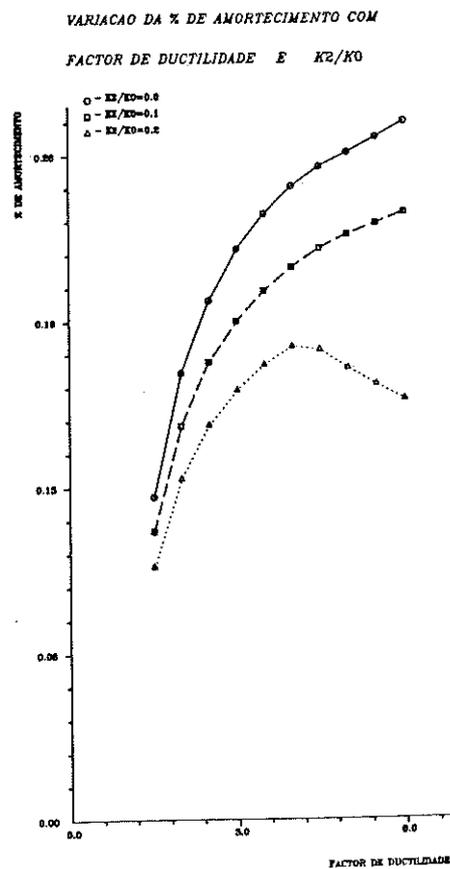


Fig. 5.3 — Influência do parâmetro K2/K0 na variação da percentagem de amortecimento equivalente, em função da ductilidade

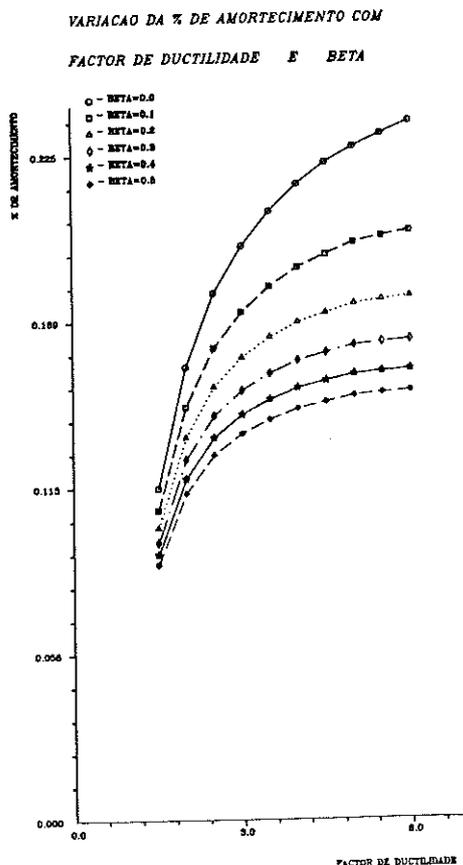


Fig. 5.2 — Influência do parâmetro beta na variação da percentagem de amortecimento equivalente, em função da ductilidade

Na Fig. 5.4 apresenta-se a variação da percentagem de amortecimento equivalente, com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para diferentes relações  $K2/K0$ , tendo-se tomado um factor de ductilidade igual a 4. Na Fig. 5.5 mostra-se a mesma variação, mantendo constante a relação  $K2/K0 = 0.1$ , e fazendo variar o factor de ductilidade entre 2 e 6.

Da análise do Quadro 5.1 e destas figuras, pode-se concluir o seguinte:

- 1 — O modelo desenvolvido apresenta características em termos de capacidade dissipativa de energia, muito semelhantes aos modelos de Clough e ao Trilinear de Takeda, apresentando valores contudo bastante inferiores aos modelos bilineares e de Ramberg-Osgood, dado, que estes últimos não incluem a degradação de rigidez, (Quadro 5.1).
- 2 — Verifica-se que à medida que se aumentam os factores de ductilidade os valores da percentagem de amortecimento equivalente tendem para um valor constante. Sendo a ocorrência deste facto mais rápida quanto mais elevados forem os parâmetros em estudo, (Figs. 5.1, 5.2 e 5.3).
- 3 — Para a mesma ductilidade a percentagem de amortecimento equivalente apresenta maiores variações para valores crescentes de alfa, verificando-se o oposto para o parâmetro beta e sendo mais ou menos constantes essa variação no caso da relação  $K2/K0$ , (Figs. 5.1, 5.2 e 5.3).
- 4 — Como seria de esperar para o mesmo factor de ductilidade e quanto menor é a rigidez após cedência

maior é a percentagem de amortecimento equivalente, (Fig. 5.3 ou Fig. 5.4).

- 5 — Considerando-se beta constante, a influência das variações de alfa no valor da percentagem de amortecimento equivalente, será tanto menor quanto maior for beta. Ou seja, quando se considera efeitos

agravados de "pinching", a influência da degradação de rigidez após inversão de carregamento, em termos de energia dissipada, revela-se pouco significativa. Para valores crescentes da relação  $K2/K0$  e do factor de ductilidade este facto torna-se mais evidente, (Figs. 5.4 e 5.5).

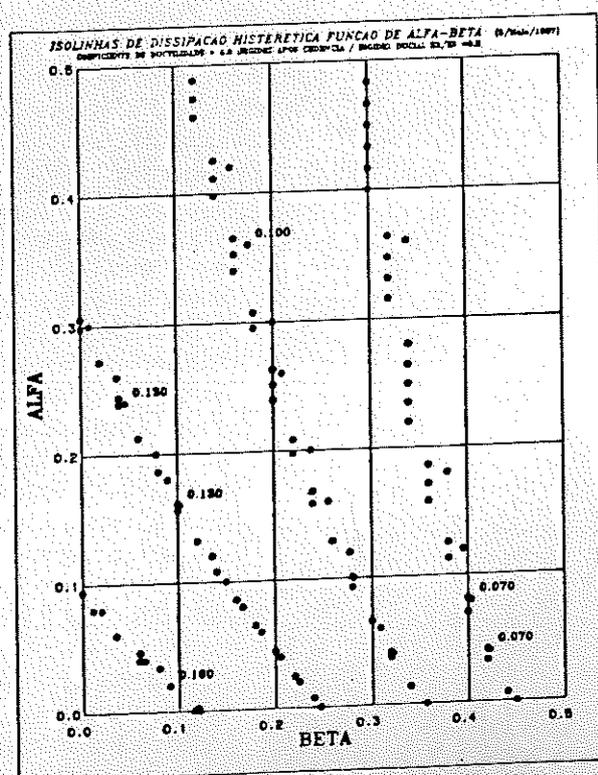
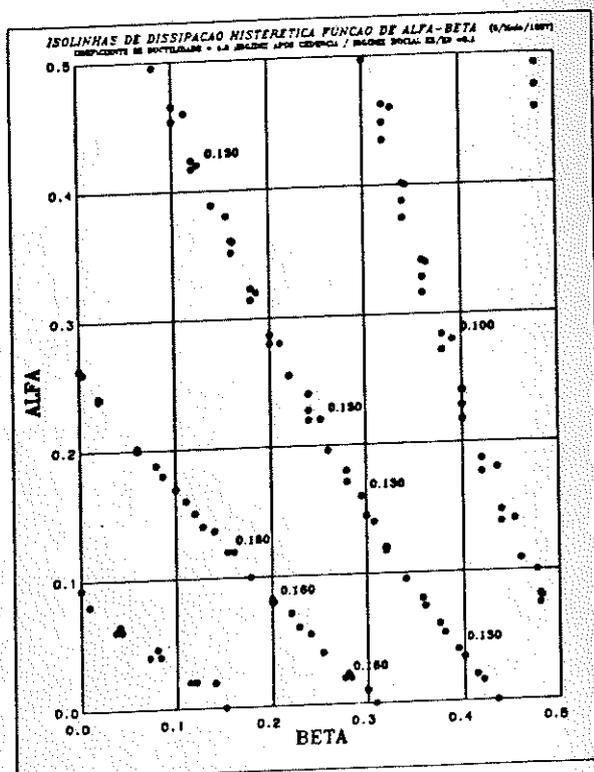
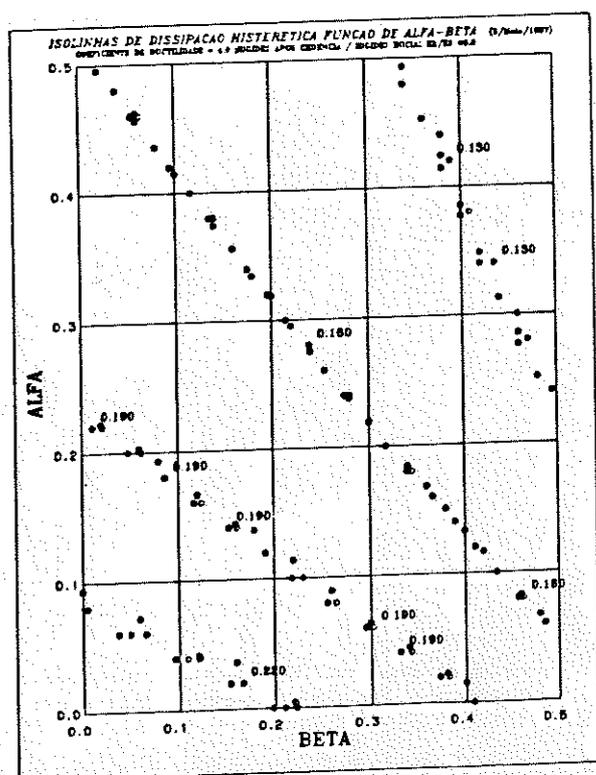


Fig. 5.4 — Variação da percentagem de amortecimento equivalente, com os parâmetros alfa e beta, para diferentes relações  $K2/K0$  (0.0, 0.1 e 0.2) e um factor de ductilidade constante



## 6 — APLICAÇÃO A OSCILADORES NÃO LINEARES COM 1 GRAU DE LIBERDADE

De modo a testar a eficiência do modelo desenvolvido, na análise dinâmica não linear, estudou-se a resposta de um oscilador de 1 g.l., actuado na base por uma aceleração correspondente à componente corrigida S90W do sismo de El Centro [22], Fig. 6.1.

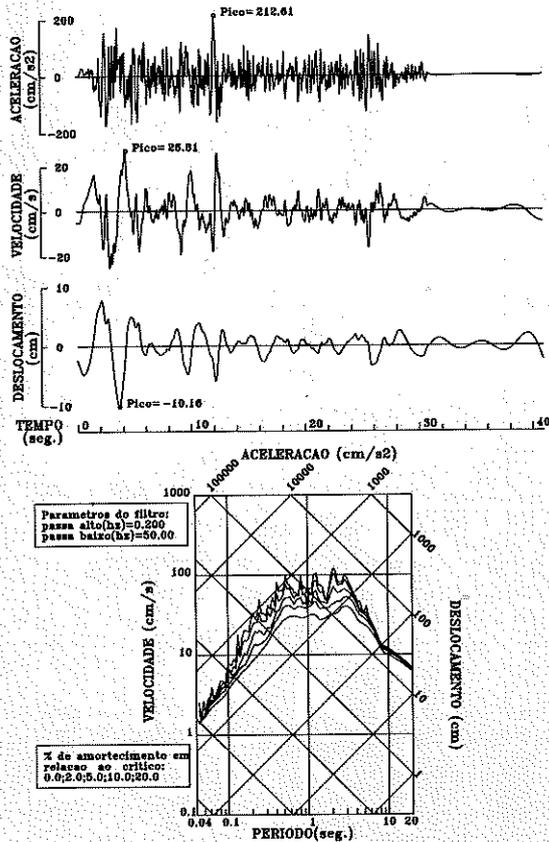


Fig. 6.1 — Sismo de El Centro 1940 S90W

Utilizou-se o método de Newmark de integração passo a passo na resolução da equação de movimento, tendo-se adoptado o conceito de forças fictícias no tratamento da formulação não linear do problema. A resposta não linear do oscilador com 1 g.l. foi efectuada utilizando-se um programa desenvolvido para o efeito, onde se incorporou a subrotina, calculando-se a resposta ao longo do tempo e as respectivas relações  $F-D$ . Foram efectuados dois cálculos sobre osciladores de características distintas, um com período igual a 3.0s e outro com o período igual a 0.4s e considerando-se massas unitárias.

Na escolha dos parâmetros definidores da curva base adoptou-se o critério de Newmark [23], usualmente utilizado em estudos paramétricos, onde se pretende que osciladores com diferentes períodos possuam factores de ductilidade comparáveis.

Neste critério, e para os dois casos presentes, o limite de cedência ( $F_y$ ) é determinado dividindo a força de restituição elástica máxima por um dos seguintes valores:

$$T = 0.4 \text{ s} \quad F_y = F_e / \sqrt{2\mu - 1}$$

$$T = 3.0 \text{ s} \quad F_y = F_e / \mu$$

sendo  $\mu$  o coeficiente de ductilidade que no presente estudo se adoptou igual a 4.

A rigidez elástica obtida para os valores adoptados, dos períodos e da massa, considerou-se igual à rigidez de cedência ( $K_y$ ), Fig. 6.2). Tomou-se um factor de amortecimento igual a 5% do amortecimento crítico. A rigidez após cedência ( $K_2$ ) foi considerada igual a 10% de  $K_y$ , tendo-se adoptado uma rigidez inicial ( $K_0$ ) igual a  $2 K_y$ . As forças correspondentes à fendição ( $F_c$ ) foram tomadas iguais a  $1/3$  de  $F_y$ .

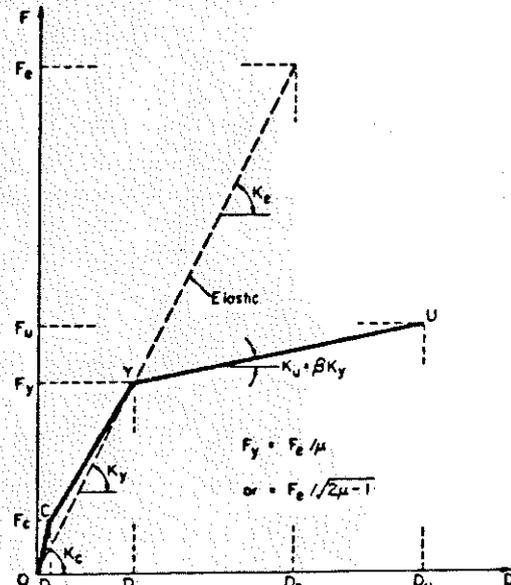


Fig. 6.2 — Definição dos parâmetros da curva base e do coeficiente de ductilidade

A equação de movimento de um oscilador não linear com 1 g.l., é expressa por:

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K(u) \cdot u = F$$

A força de restituição inelástica,  $K(u) \cdot u$ , pode ser encarada como a soma algébrica de duas parcelas

$$K(u) \cdot u = F_{\text{linear}} - F_{\text{fict}}$$

em que a força linear, ( $F_{\text{linear}}$ ) é o produto da rigidez elástica pelo deslocamento, sendo a força fictícia, ( $F_{\text{fict}}$ ) uma função do deslocamento. Assim, a equação de movimento pode ser reescrita do seguinte modo:

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F + F_{\text{fict}}(u)$$

Note-se que a força fictícia, sendo função do deslocamento, torna a resolução analítica da equação diferencial só possível para casos bastantes simples. Contudo, nos métodos numéricos de integração passo a passo, em que a solução da equação diferencial para um dado instante depende do instante anterior, será aceitável considerar para força fictícia, nesse instante, o valor obtido no instante anterior. De modo a evitar iterações no intervalo de integração, para satisfazer o equilíbrio, escolhe-se um valor suficientemente pequeno do passo de integração.

Como já foi referido usou-se o método de Newmark na resolução da equação de movimento. Este método admite a

hipótese de uma variação linear das acelerações, que pode ser expressa por:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \left\{ (1-\delta)\ddot{U}_t + \delta\ddot{U}_{t+\Delta t} \right\} \cdot \Delta t$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t \Delta t + \left\{ (1/2 - \alpha)\ddot{U}_t + \alpha\ddot{U}_{t+\Delta t} \right\} \cdot \Delta t^2$$

sendo delta e alfa parâmetros que podem ser determinados de modo a obter-se precisão e estabilidade no processo de integração. Para valores de delta = 1/2 e alfa = 1/4 o método é incondicionalmente estável [24]. Substituindo estas expressões na equação de movimento esta pode ser resolvida em ordem a  $U_{t+\Delta t}$ , que, em termos de método de Newmark, é normalmente expresso do seguinte modo:

$$U_{t+\Delta t} \cdot K_{eff} = F_{eff}$$

onde  $K_{eff}$  é a rigidez efectiva, que neste caso só depende da rigidez elástica e portanto mantem-se constante ao longo da integração e  $F_{eff}$  é a força efectiva que é dada por:

$$F_{eff} = F_{t+\Delta t} + F_{fict} + M(a_0 u_t + a_2 \dot{u}_t + a_3 \ddot{u}_t) + C(a_1 u_t + a_4 \dot{u}_t + a_5 \ddot{u}_t)$$

onde  $a_i$  são os parâmetros do método e  $F_{fict}$  será obtido directamente da subrotina a partir do deslocamento  $u_t$  do instante anterior. Esta análise foi efectuada para os dois osciladores, apresentando-se nas Fig. 6.3, Fig. 6.4, Fig. 6.5 e Fig. 6.6 os resultados obtidos.

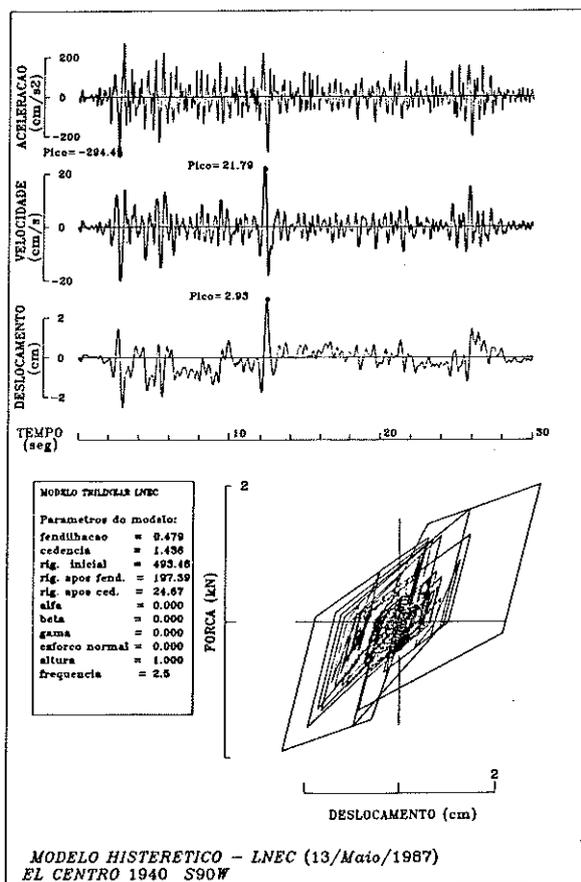


Fig. 6.3 — Resposta de um oscilador não linear com frequência própria inicial igual a 2.5 Hz. Aceleração, velocidades e deslocamentos dados em valores relativos

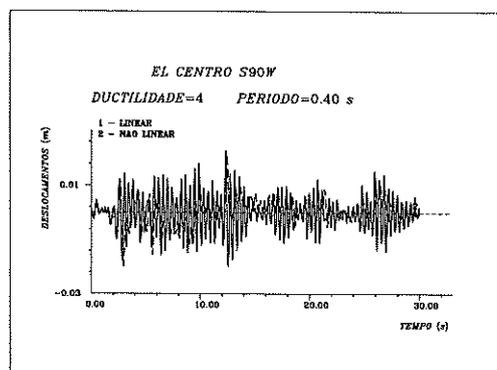


Fig. 6.4 — Comparação da resposta linear e não linear em termos de deslocamentos relativos para o oscilador referido na Fig. 6.3

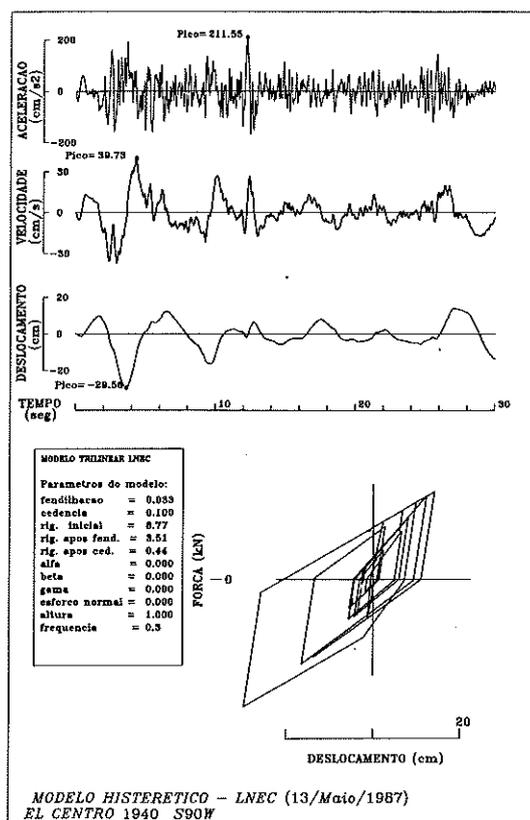


Fig. 6.5 — Resposta de um oscilador não linear com frequência própria inicial igual a 0.33 Hz. Aceleração, velocidades e deslocamentos dados em valores relativos

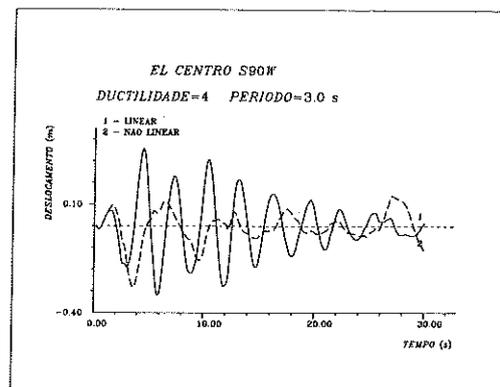


Fig. 6.6 — Comparação da resposta linear e não linear em termos de deslocamentos relativos para o oscilador referido na Fig. 6.5

## 7 — APRECIACÃO DO TRABALHO DESENVOLVIDO

Procurou-se com este trabalho o desenvolvimento e implementação computacional de um algoritmo representativo das relações histeréticas, forças-deslocamentos generalizados, observadas em ensaios de elementos de betão armado sujeitos à flexão.

Foi dado um carácter geral à implementação do modelo, de forma a poder ser usado em trabalhos futuros de análise dinâmica em regime não linear de estruturas de betão armado sujeitas à acção de sismos.

O modelo pode incluir diversos tipos de comportamento, traduzidos por um certo número de regras e parâmetros, que permitirá reproduzir relações forças-deslocamentos generalizados a diversos níveis do comportamento estrutural. Assim, efeitos como:

- 1 — Degradação de rigidez com a deformação
- 2 — Degradação de rigidez após inversão do carregamento
- 3 — Degradação de resistência
- 4 — Efeito de "pinching" e "slipping"
- 5 — Efeitos P-delta

podem ser considerados isoladamente ou qualquer combinação dos mesmos. Deste modo, uma estrutura resultante da associação de diversos elementos estruturais, com diferentes comportamentos histeréticos, poderá ser idealizada através deste modelo, por exemplo o comportamento das alvenarias para forças-deslocamentos horizontais contidas no seu próprio plano é simulado levando ao extremo o efeito de "pinching".

Além disso, comportando-se o modelo como bilinear, até se atingir o ponto correspondente à cedência, a sua escolha criteriosa permite a reprodução das relações histeréticas bilineares sem degradação de rigidez durante toda a história do carregamento.

Foram realizados diversos testes estáticos, com imposições de deslocamentos, que procuraram cobrir as potencialidades do modelo. Foi também efectuada a sua implementação num programa mais geral de análise dinâmica, com 1 g.l, utilizando-se o método de Newmark de integração passo a passo, mostrando-se assim a sua aplicabilidade neste tipo de análise.

Procurou-se fazer o estudo da influência de alguns parâmetros em termos da capacidade de dissipação de energia expressa através da percentagem de amortecimento equivalente e de um factor de ductilidade. Os resultados obtidos foram comparados com modelos desenvolvidos por outros autores.

A utilização desta subrotina, em programas de análise estática e dinâmica de associações em série e em paralelo com vários graus de liberdade, será objecto de trabalho futuro.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] RSA, (1983), Regulamento de Segurança e Acções para estruturas de Edifícios e Pontes, Lisboa.
- [2] REBAP (1985) — Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado, Lisboa.
- [3] TAKEDA, T.; M. A. SOZEN; N. N. NIELSEN (1970) — "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes", Journal Structural Division, ASCE, Vol. 36, No. St. 12, EUA.
- [4] BERTERO, V. (1979) — "Seismic Behaviour of Structural Concrete Linear Elements (Beams, Columns) and Their Connections", AICAP-CEB Symposium, Structural Concrete under Seismic Actions, CEB Bulletin d'Information no. 131, Abril.
- [5] BERTERO, V.; POPOV, E. (1977) — "Seismic Behaviour of Ductile Moment — Resisting Reinforced Concrete Frames", ACI Publication SP - 53, Reinforced Concrete. Structures in Seismic Zones, Detroit.
- [6] LNEC (1985) — "Estruturas de Betão Armado Sujeitas à Acção dos Sismos", Curso LNEC, Lisboa.
- [7] BORGES, J. FERRY (1973) — "Structural Behaviour under Repeated Loading", Working Group on Resistance of Structures, European Association for Earthquake Engineering (EAEE), Lisboa.
- [8] SOESIANAWATI, M. T. (1986) — "Limited Ductility Design of Reinforced Concrete Columns", Research Report, Canterbury, New Zealand.
- [9] MAHIN, S. A.; BERTERO, V. V. (1976) — "Nonlinear Seismic Response of a Coupled Wall System", Journal Structural Division, ASCE, Vol. 102, no. ST9, EUA.
- [10] OTANI, S. (1981) — "Hysteretic Models of Reinforced Concrete for Earthquake Response Analysis", Journal of the Faculty of Engineering, The University of Tokyo, Tokio.
- [11] ANDERSON, J. C.; TOWNSEND, W. H. (1977) — "Models for R/C Frames with Degrading Stiffness", Journal of the Structural Division, ESCE, EUA.
- [12] CIAMPI, V.; CARLISIMO, L. (1986) — "A Nonlinear Beam Element for Seismic Analysis of Structures", apresentado na 8th European Conference on Earthquake Engineering, Lisboa.
- [13] KESHAVARZIAN, M.; SCHNOBRICH, W. C. (1983) — "Analytical Model for the Nonlinear Analysis of R/C Structures", apresentado na Annual Convention, ACI, Los Angeles.
- [14] A. RAVARA (1973) — "Comportamento Sísmico de Edifícios com Estrutura Parede", Tese, Memória no. 423, LNEC, Lisboa.
- [15] CARVALHO, E. C. (1980) — "Comportamento Sísmico de Edifícios com Estrutura em Pórtico ou Mista", Tese LNEC, Lisboa.
- [16] UNEMURA, H.; TAKIZAWA, H. (1982) — "Dynamic Response of Reinforced Concrete Buildings", Structural Engineering Documents, IABSE, Zurich.
- [17] NIELSEN, N. N.; IMBEAULT, F. A. (1971) — "Vality of Various Hysteretic Systems", Proceeding, Third Japan National Conference on Earthquake Engineering, Japão.
- [18] PRIESTLEY, M. J. N. (1969) — "A Computer Programme for Dynamic Inelastic Analysis of Cantilevers Subjected to Earthquake Excitation", Relatório, LNEC, Lisboa.
- [19] QUIRINO, M. (1970) — "Programa Algol para a Análise Dinâmica em Regime Não Linear de Consolas Sujeitas a Acelerações Aplicadas na Base", Relatório, LNEC, Lisboa.
- [20] OLIVEIRA, C. S.; ROYO, J. M. R. (1970) — "Análise Dinâmica de Estruturas de Edifícios Redutíveis a Consolas em Regime Linear e Não Linear", Relatório, LNEC, Lisboa.
- [21] CLOUGH, R. W.; JOHNSTON, S. B. (1966) — "Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements", Proceeding, Japan Earthquake Engineering Symposium, Toquio.
- [22] EARTHQUAKE ENGINEERING RESEARCH LABORATORY (1973) — "Strong Motion Earthquakes Accelerograms", Partes A, B, e C dos volumes II e III, Califórnia Institute of Technology Pasadena, Califórnia.
- [23] VELETSOS, A. S.; NEWMARK N. M. (1960) — "Effect of Inelastic Behaviour on the Response of Simple Systems to Earthquake Motions", Proceedings, Second World Conference on Earthquake Engineering, Vol. II, p. p. 895 - 912.
- [24] DUARTE, R. T. (1983) — "Princípios e Métodos da Dinâmica Aplicada à Engenharia de Estruturas" (versão preliminar), Seminário 265, LNEC, Lisboa.