

ESTUDO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DE PARTÍCULAS DE ENROCAMENTO ATRAVÉS DO ENSAIO DE ESMAGAMENTO

STUDY OF THE MECHANICAL PROPERTIES OF ROCKFILL PARTICLES BY PERFORMING CRUSHING TESTS

Manso, João; *LNEC, Lisboa, Portugal, jmanso@lnec.pt*

Marcelino, João; *LNEC, Lisboa, Portugal, marcelino@lnec.pt*

RESUMO

O comportamento dos materiais de enrocamento é fortemente condicionado pela resistência ao esmagamento das suas partículas. A resposta deformacional de um provete de ensaio resulta na rotura dos elementos de rocha, quando as tensões de contacto ultrapassam a resistência ao esmagamento, ou de um rearranjo das suas partículas, até se atingir um estado de equilíbrio. É sabido que certos aspetos do comportamento de enrocamento, como a compressibilidade e resistência ao corte, dependem da tensão de confinamento e que essa dependência é em grande parte devida à quebra das partículas. Como tal, torna-se importante caracterizar mecanicamente os fragmentos rochosos com o intuito de prever o comportamento estrutural de aterros de enrocamento. Este artigo apresenta vários ensaios de esmagamento realizados sobre partículas de granito isoladas, de várias dimensões, onde se diferenciam os mecanismos de quebra de irregularidades e quebra completa da partícula. Os resultados são depois analisados e comparados, recorrendo à função de distribuição de Weibull, com especial atenção à influência do tamanho das partículas.

ABSTRACT

The behaviour of rockfill materials is considerably influenced by the crushing strength of their particles. The specimen strain response results in the crushing of its elements, when the contact stresses exceed particle's crushing strength, or in their rearrangement, until the equilibrium is reached. Certain aspects of rockfill behaviour, like compressibility and shear strength, are connected to the confining stress, which is mainly due to particle's crushability. Therefore, it is important to mechanically characterise rockfill fragments in order to predict an embankment's structural behaviour. This work presents several crushing tests performed over single granite particles, with different dimensions, considering the breakage of asperities and the entire particle. The results were analysed and compared with the Weibull distribution function, focusing in the influence of the particles size.

INTRODUÇÃO

O esmagamento de partículas de um enrocamento é um dos micro-mecanismos que controla o comportamento tensão-deformação do material, mas também, em certa medida, a sua permeabilidade por alteração da curva granulométrica. Como tal, considera-se importante prever o ponto de rotura de uma partícula e, conseqüentemente, quantificar a evolução desse esmagamento possibilitando a caracterização do comportamento do material. Este é um assunto que interessa a várias áreas da engenharia, além da geotecnia, tais como a geologia, geofísica, mineralogia e engenharia de minas (Einav, 2007).

Há certos aspetos que influenciam a resistência ao esmagamento de uma partícula num material granular, desde logo: a granulometria do material granular, a forma e o tamanho das partículas, a sua natureza, o estado de tensão efetiva, a trajetória de tensão efetiva, o índice de vazios, a dureza da partícula (controlada pela parte mais frágil de um elemento – os cristais em si ou o material cimentício), a presença de água e a influência do tempo (Hardin, 1985, e Gamboa, 2011). Em resposta a um dado carregamento as partículas constituintes de um enrocamento tendem a fragmentar-se. Nakata et al. (1999) mostrou que o tamanho das partículas influencia a tensão de cedência do material, quando submetido a um ensaio de compressão unidimensional,

e que está diretamente relacionado com a resistência ao esmagamento de uma partícula. Normalmente, as partículas de menores dimensões têm maior probabilidade de rotura que as maiores, uma vez que as partículas de maiores dimensões se encontram rodeadas por outras de menores dimensões, ocorrendo uma distribuição de tensões pelos vários contactos. Outro aspeto que influencia a resistência ao esmagamento é a carga aplicada e as condições de carregamento, sendo que um aumento de tensão num provete de material granular origina um aumento de probabilidade de rotura dos seus elementos. A forma da partícula tem também um papel relevante, tendo Lee and Farhoomand (1967) mostrado que partículas angulosas são mais suscetíveis de partir, originando uma maior compressibilidade, e tendem a ser menos influenciadas pelo número de contactos que partículas arredondadas. Considerando estes factores pretende-se estudar o esmagamento de partículas de enrocamento, com várias dimensões, através da realização de ensaios laboratoriais.

CARACTERIZAÇÃO DO ENSAIO

1.1- Material estudado

O material estudado foi um granito da zona da reserva natural de Montesinho, que será empregue na construção da Reserva de Água de Montesinho. As dimensões das partículas variaram entre os 9,5 e os 50,4 mm, encontrando-se divididas em quatro intervalos: 50,4–38,1, 38,1–25,4, 25,4–19,1, 19,1–9,5 mm correspondentes aos peneiros 2"–1,5", 1,5"–1", 1"–3/4", 3/4"–3/8". Através dos vários ensaios de caracterização do material foi possível determinar as propriedades apresentadas na Quadro 1.

Quadro 1- Propriedades do material

Propriedade	
Peso volúmico aparente (>50 mm)	24,0 – 25,4 [kN/m^3]
Peso volúmico real (>50 mm)	25,7 – 26,0 [kN/m^3]
Porosidade (>50 mm)	1,9 – 7,6 [%]
Ensaio Sónicos (ondas P)	1321 – 2471 [m/s]
Ensaio Sónicos (ondas S)	782 – 1386 [m/s]

1.2- Equipamento de ensaio

Na Figura 1 apresenta-se um esquema do equipamento utilizado por Nakata et al. (1999) no estudo de ensaios de esmagamento de partículas de areia. Neste trabalho utilizou-se um equipamento em tudo semelhante, colocando uma partícula de rocha entre duas placas de aço (com o apoio de uma calha para evitar desvios axiais) e depois deslocando a placa inferior a uma dada velocidade constante (0,306 mm/min) até originar a quebra da partícula. As placas tinham 75 mm de diâmetro e utilizaram-se dois anéis de carga, um para as partículas de menores dimensões com capacidade de 4,9 kN, com uma resolução de cerca de 0,5 N, e outro, para as maiores partículas com uma capacidade de 49,0 kN e uma resolução de 5,0 N. Para cada dimensão realizaram-se 30 ensaios de esmagamento, perfazendo um total de 120 ensaios, tendo-se registado as tensões e as deformações.

CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE UMA PARTÍCULA DE ENROCAMENTO

Cheng et al. (2001) apresentaram uma técnica de análise de imagem que permitiu estudar o comportamento micro-mecânico de um material granular. Para este estudo realizaram um ensaio edométrico, cujas características se apresentam na Figura 2, em que foi possível observar a quebra progressiva de um grão de areia durante as várias fases do ensaio (Figura 3). A primeira fratura surgiu com uma tensão de 0,63 MPa (ponto B) e decorreu até se descarregar o provete (ponto C). Durante a fase de recarga (ponto E) deu-se o rearranjo dos fragmentos, neste caso sem alteração da posição da partícula original, e a quebra continuou a acompanhar o aumento de

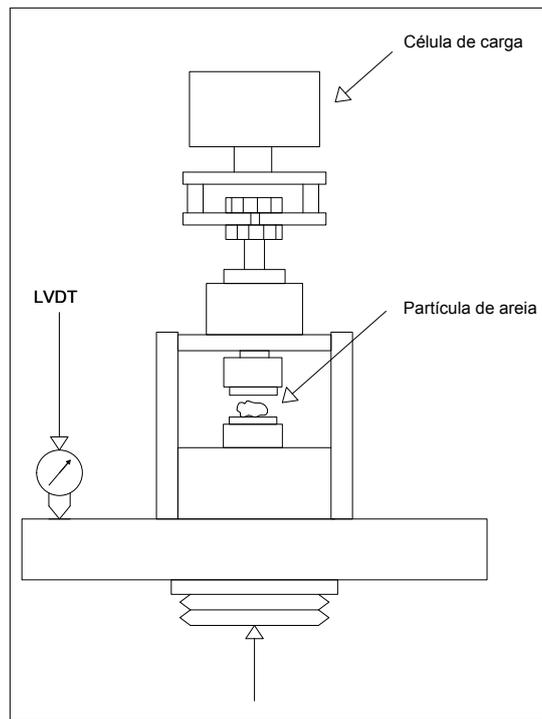


Figura 1- Esquema do equipamento utilizado por Nakata et al. (1999) para o ensaio de esmagamento

tensão ao longo da curva de compressão virgem. É curioso observar que a formação das fendas foi progressiva e não ocorreu toda de uma vez.

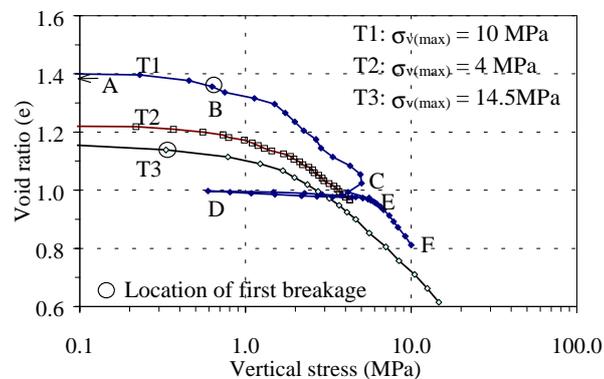


Figura 2- Quebra progressiva de um grão de areia num ensaio edométrico (Cheng et al., 2001)

Schönert (2004), por seu lado, estudou o modo como as fraturas se desenvolviam numa partícula, tendo para isso realizado ensaios uniaxiais sobre discos (Figura 4 e 5) e esferas de vidro (Figura 6). Através do registo fotográfico com elevada frequência (1 MHz) ele concluiu que a abertura de fendas ocorre num dos contactos e que a propagação das mesmas decorre de acordo com o campo de tensões original. Quando as fendas primárias de um disco ou de uma esfera em compressão atingem o contacto oposto dá-se a criação de novas fendas, propagando-se no sentido contrário. Como tal, pode concluir-se que assim que se inicia uma fendilhação ocorre uma rápida evolução, originando o esmagamento de toda a partícula.

A Figura 7 apresenta relações típicas força-deslocamento obtidas em ensaios de esmagamento de areias realizadas por Nakata et al. (1999), para diferentes materiais (quartzo, feldspato alcalino, plagioclase). A diferença entre comportamentos julga-se devida ao material constituinte e estrutura interna das partículas. Enquanto as partículas de quartzo registaram um comportamento elástico até ser atingida a rotura, os outros materiais apresentaram pequenas diminuições de carga (quebra de um fragmento) antes de ocorrer a rotura completa da partícula. Como tal, Nakata et al. (1999) definiu dois tipos de fratura, o primeiro máximo que uma partícula apresenta representou por F_c (correspondendo a uma fratura inicial por quebra de uma

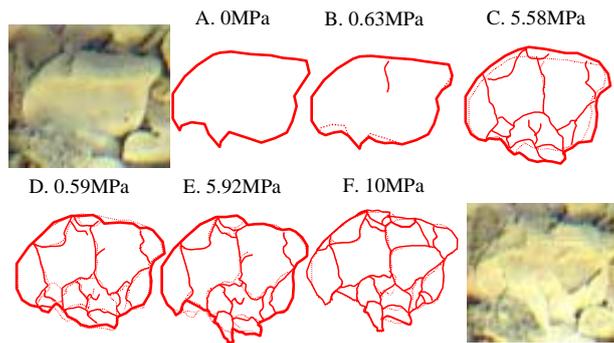


Figura 3- Quebra progressiva de um grão de areia num ensaio edométrico (Cheng et al., 2001)

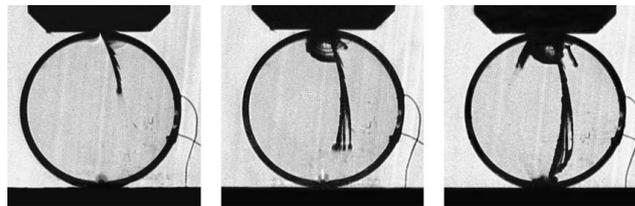


Figura 4- Quebra de discos de vidro para uma carga de 18 kN (Schönert, 2004)

irregularidade) e a força máxima que origina a rotura da partícula define-se por F_f .

Nas Figuras 8 a 11 podem observar-se várias das partículas ensaiadas, antes e depois dos ensaios de esmagamento, com as respectivas curvas Força–Deslocamento obtidas. Analisando as várias figuras observam-se algumas semelhanças. Na parte elástica do comportamento surgem alguns pontos de cedência antes de atingir a fratura, que podem ser de quebra de irregularidades (caracterizados pela diminuição repentina de carga e acompanhados de um ruído forte, facilmente observados nas Figuras 8 e 9) ou esmagamento de cantos (caracterizados pela mudança de direção da parte elástica do material ou força quase constante com aumento de deslocamento, sem ocorrência praticamente de ruído, sendo possíveis de observar nas Figuras 10 e 11).

2.1- Teoria de Weibull

Para compreender melhor os mecanismos que ocorrem numa partícula durante um ensaio de esmagamento é necessário estudar o comportamento da partícula relativamente ao seu estado de tensão e às condições de fratura (início e progressão). Colocando grãos de rocha entre 2 placas é possível medir indiretamente a resistência ao esmagamento por compressão diametral. McDowell e Bolton (1998) e Nakata et al. (1999) utilizaram esta técnica para estudar o comportamento individual de partículas de areia e adotaram a definição de resistência característica das partículas de Jaeger et al. (2007), que é consistente com a definição de resistência indireta à tração (ensaio brasileiro). A tensão característica de tração σ induzida num grão de diâmetro d sob



Figura 5- Quebra de discos de vidro para uma carga de 46 kN (Schönert, 2004)

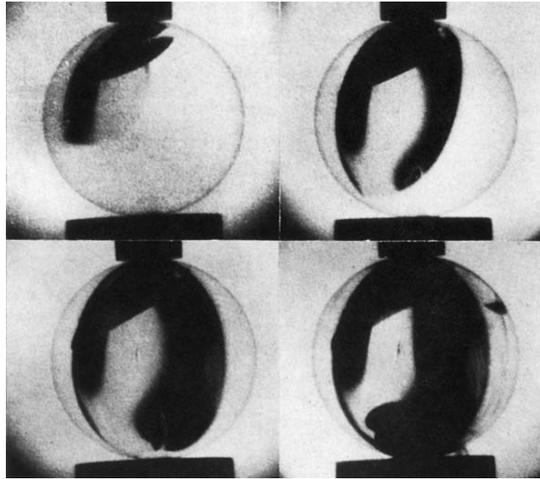


Figura 6- Quebra de esferas de vidro para uma carga de 7.3 kN, apresentando uma resistência de 36 N/mm² (Schönert, 2004)

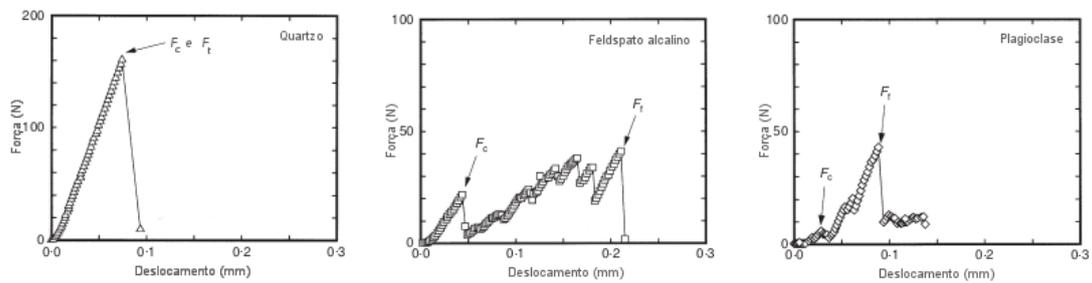


Figura 7- Curvas tensão deformação de um ensaio de esmagamento sobre uma partícula de: a) quartzo, b) feldspato alcalino e c) plagioclase

ação de uma força diametral F pode ser definida como:

$$\sigma = \frac{F}{d^2} \quad [1]$$

Adotando a nomenclatura que Nakata et al. (1999) usou no seu trabalho pode determinar-se a máxima força (F_f) que origina a rotura de uma partícula, permitindo determinar a sua resistência ao esmagamento (σ_f). Esta pode ser calculada dividindo a força obtida pelo quadrado da altura inicial da partícula, h_0 (distância entre as placas – Figura 1):

$$\sigma_f = \frac{F_f}{h_0^2} \quad [2]$$

em que o subscrito f se refere à separação completa da partícula (do inglês *failure*).

Para estudar as propriedades de resistência de materiais, Weibull (1951) propôs uma função de distribuição estatística que pode ser definida por:

$$P_s(V_0) = \exp \left[- \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{f0}} \right)^{m_f} \right] \quad [3]$$

em que σ_{f0} representa a tensão característica em que 37 % das partículas sobrevivem, considerando $\sigma_f = \sigma_{f0}$ na Eq. 3 tem-se $P_s(V_0) = 1/e$, e m_f é o módulo de Weibull, também designado por coeficiente de uniformidade.

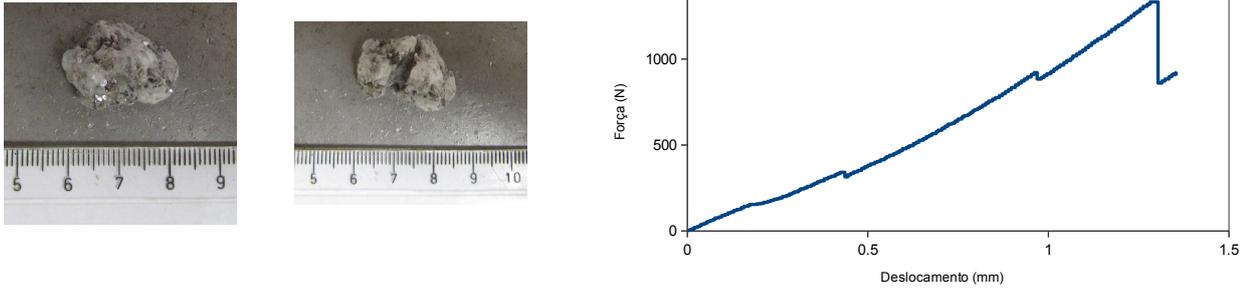


Figura 8- Dimensões 3/8" a 3/4" – Partícula antes e depois do ensaios de esmagamento. Curva força-deslocamento.

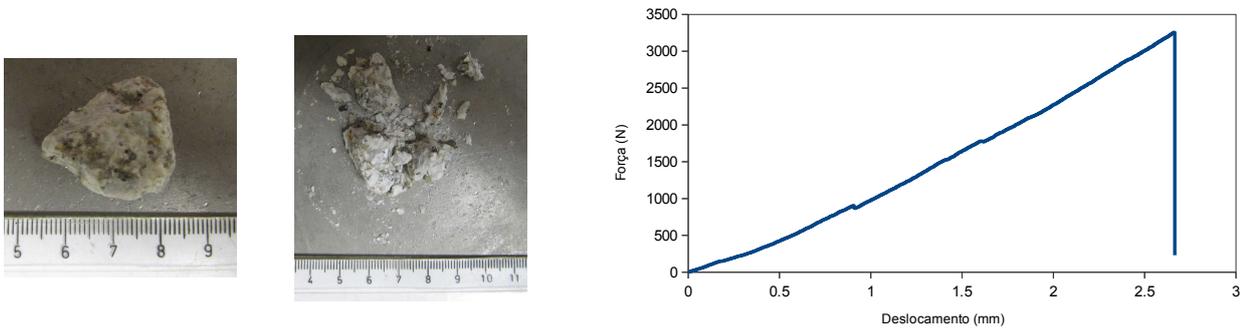


Figura 9- Dimensões 3/4" a 1" – Partícula antes e depois do ensaios de esmagamento. Curva força-deslocamento.

$P_s(V_0)$ representa a probabilidade de sobrevivência de uma partícula de volume V_0 sob ação de uma tensão característica, σ_f , definida como:

$$P_s(V_0) = \frac{\text{número de partículas esmagadas a uma dada tensão } \sigma \geq \sigma_f}{\text{número total de partículas ensaiadas}} \quad [4]$$

Quando a tensão característica é nula todas as partículas sobrevivem ($P_s(V_0) = 1$) e à medida que a tensão aumenta as partículas vão atingindo a rotura, originando uma diminuição de $P_s(V_0)$. Finalmente, é possível levar ao esmagamento todas as partículas simplesmente aumentando a tensão, assim $P_s(V_0) \rightarrow 0$ com $\sigma \rightarrow \infty$.

Na Figura 12 apresentam-se curvas obtidas para cada uma das dimensões estudadas, separando-se a curva referente às fraturas iniciais da curva referente às tensões máximas obtidas. Como era de esperar observa-se que as tensões que originam a quebra das partículas têm uma probabilidade maior de não ocorrer, quando comparando, para a mesma tensão, com a quebra de contactos.

Para analisar cada dimensão em particular apresenta-se a Figura 13. A Figura 13a refere-se à probabilidade de uma dada tensão, σ_c , provocar uma fratura inicial e a Figura 13b apresenta a probabilidade de uma dada tensão, σ_f , originar a rotura da partícula. Nestas figuras agruparam-se as partículas pelos respectivos intervalos de dimensões e pode observar-se que enquanto que as curvas referentes à tensão σ_c apresentam valores bastante semelhantes, no que diz respeito à tensão σ_f já existe um maior desfazamento. Observa-se ainda que as partículas de menores dimensões (3/8" a 3/4") apresentam-se mais resistentes ao esmagamento, porém não é possível determinar uma tendência clara em relação às restantes dimensões. Comparando as figuras observa-se que as tensões máximas que originam as fracturas iniciais das partículas variam entre 6 e 8 MPa, enquanto que as tensões que originam a rotura das partículas varia entre 8 e 16 MPa. Esta diferença decorre do comportamento das várias partículas ao esmagamento que originavam geralmente fracturas iniciais antes da completa rotura do grão.

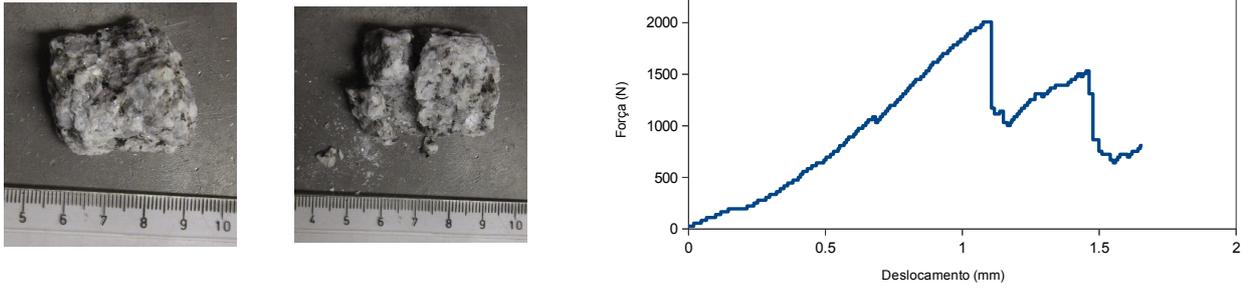


Figura 10- Dimensões 1" a 1,5" – Partícula antes e depois do ensaios de esmagamento. Curva força-deslocamento.

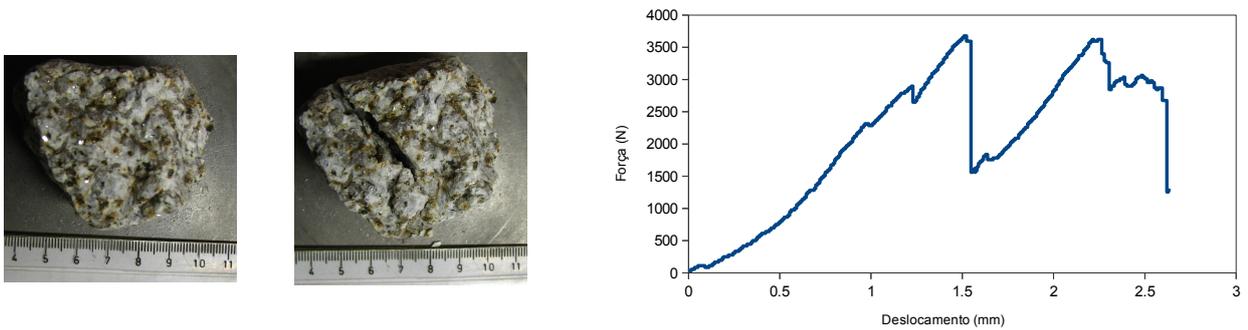


Figura 11- Dimensões 1,5" a 2" – Partícula antes e depois do ensaios de esmagamento. Curva força-deslocamento.

Na Figura 14 as curvas da função de Weibull foram normalizadas em relação às tensões características para valores de m , variando entre 1.0 (variabilidade alta) e 100.0 (variabilidade baixa). O módulo de Weibull define a variabilidade da resistência ao esmagamento de uma partícula, que será tanto maior quanto menor a variabilidade apresentada por um dado material. Assim, um material com um módulo m igual a 100 pode considerar-se que apresenta uma tensão de rotura única e bem definida. Existem alguns valores característicos adotados para vários materiais, por exemplo para materiais cerâmicos tradicionais (tijolos, telhas), obtêm-se valores de m_f inferiores a 3 (sinónimo de grande variabilidade), enquanto que para materiais com resistências menos variáveis, como sendo metais e outras ligas, obtêm-se valores próximos de 100 (Ashby and Jones, 1986).

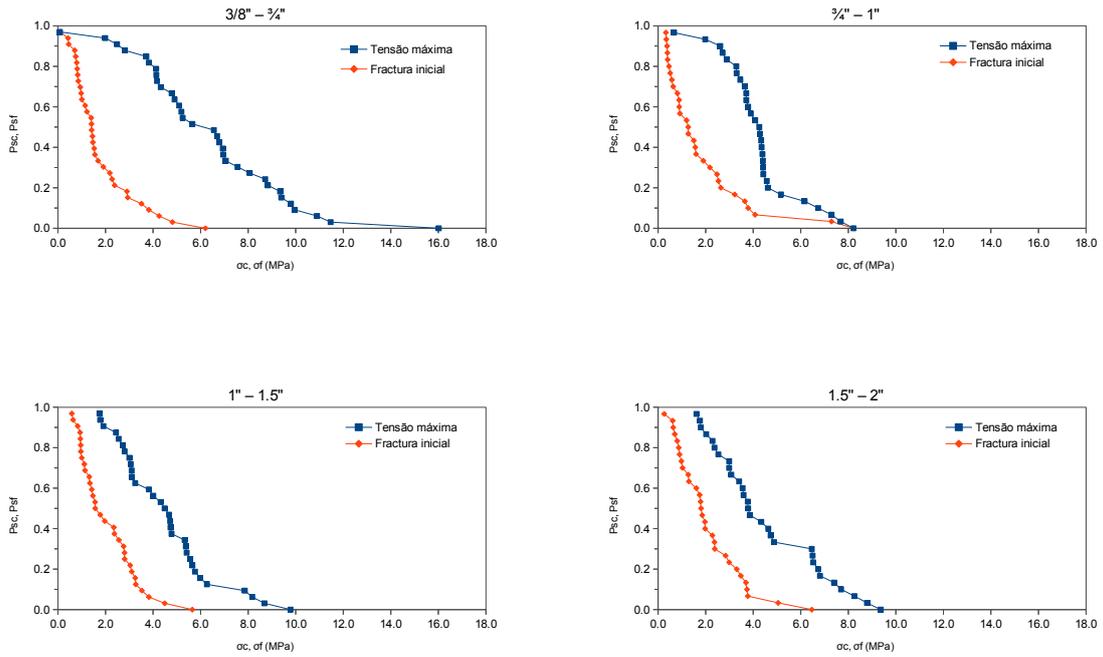
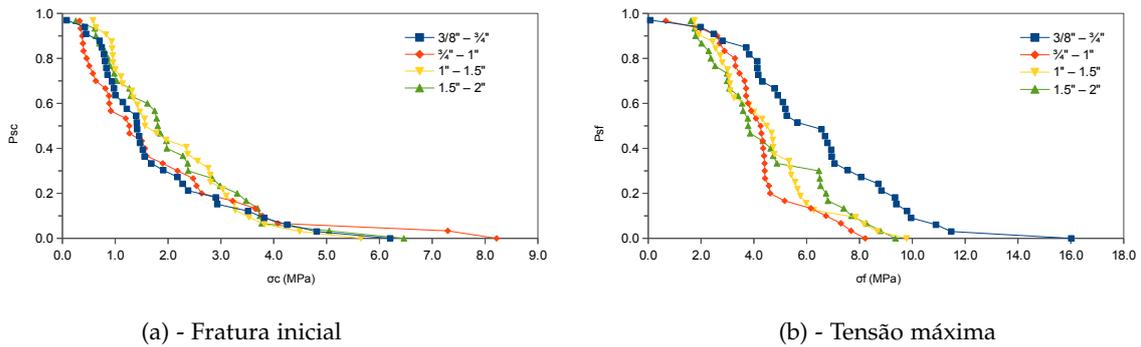


Figura 12- Comparação das probabilidades de sobrevivência para as várias dimensões considerando a fratura inicial e a tensão máxima: a) 3/8" a 3/4", b) 3/4" a 1", c) 1" a 1,5", d) 1,5" a 2"



(a) - Fratura inicial (b) - Tensão máxima

Figura 13- Comparação das probabilidades de sobrevivência para as várias dimensões

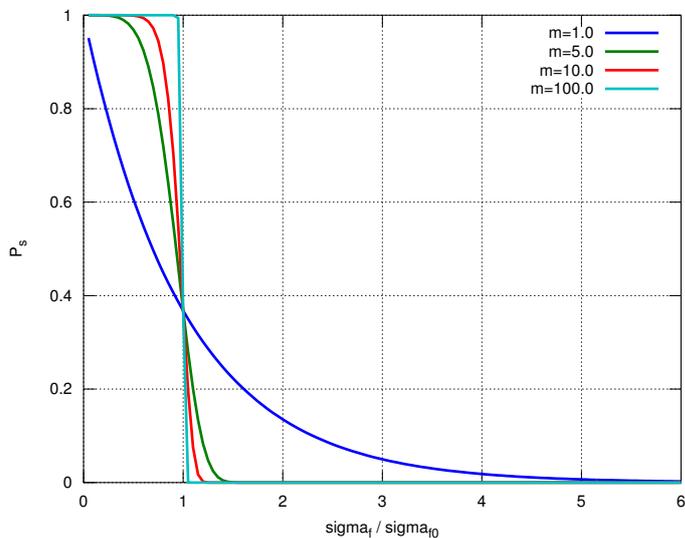


Figura 14- Representação das curvas da função de Weibull com módulos m variando de 1.0 a 100.0

Normalizando os resultados apresentados na Figura 13 pelas respectivas tensões características, σ_{c0} e σ_{f0} , obtêm-se as curvas que se apresentam na Figura 15. Esta representação aproximou as várias curvas, que apresentam comportamentos semelhantes entre si, sinónimo de que o tamanho das partículas não tem muita influência na variabilidade do material, para as dimensões estudadas. Comparando os resultados referentes à rotura dos contactos (fratura inicial) e a rotura total da partícula, a forma das curvas indica uma maior variabilidade dos valores de σ_c/σ_{c0} .

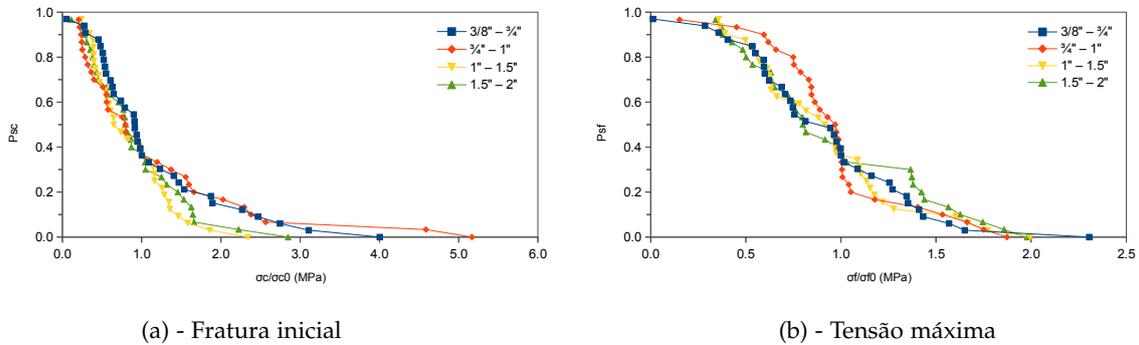


Figura 15- Comparação das probabilidades de sobrevivência normalizadas pelas tensões características para as várias dimensões

É possível determinar as tensões características (σ_{c0} e σ_{f0}) e m experimentalmente, bastando para isso ensaiar uns provetes de volume V_0 e representar graficamente. As tensões características determinam-se diretamente através do gráfico, mas o módulo m tem de ser obtido por ajuste da curva. Para facilitar esta operação, os dados podem ser representados de modo diferente. Assim, aplicando logaritmos em ambos os termos da Eq. 3 tem-se:

$$P_s(V_0) = \exp\left\{-\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{f0}}\right)^{m_f}\right\} \Leftrightarrow \ln\left[\frac{1}{P_s(V_0)}\right] = \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{f0}}\right)^{m_f} \Leftrightarrow \ln\left[\ln\left(\frac{1}{P_s(V_0)}\right)\right] = m_f \ln\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{f0}}\right) \quad [5]$$

sendo apenas necessário calcular o declive da reta $\ln[\ln(1/P_s(V_0))]$ versus $\ln(\sigma/\sigma_0)$ para determinar o módulo de Weibull (Figura 16).

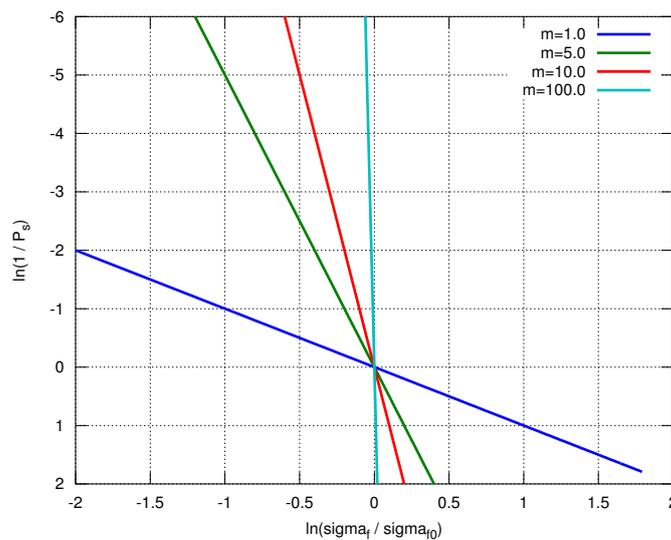


Figura 16- Curvas de função de Weibull reescritas para permitir a determinação do módulo m

Na Figura 17 apresenta-se essa transformação, para cada dimensão, e na Figura 18 apresentam-se os resultados agrupados para os valores que provocam a fratura inicial (Figura 18a) e para os valores que provocam a quebra da partícula (Figura 18b). Os valores obtidos para o módulo de Weibull, m , variaram de 1,17 a 1,95,

considerando fracturas iniciais (m_c), e de 2,20 a 3,21, considerando a rotura das partículas (m_f). Os restantes valores apresentam-se na Quadro 2.

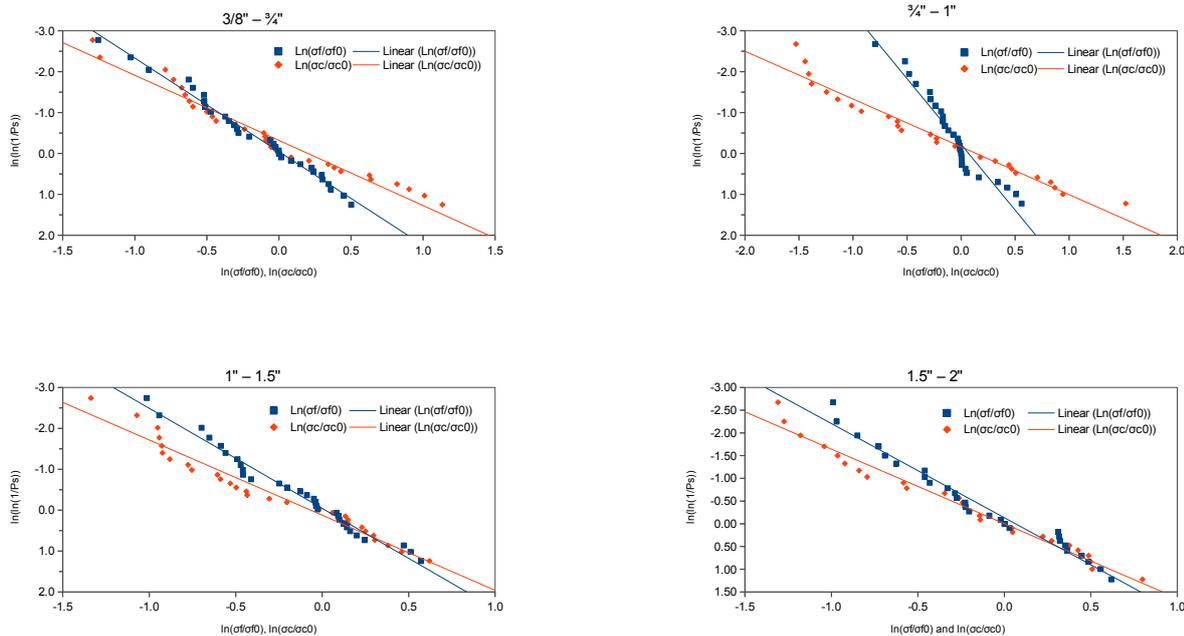


Figura 17- Comparação dos coeficientes de Weibull para as várias dimensões considerando a fratura inicial e a tensão máxima: a) 3/8" a 3/4", b) 3/4" a 1", c) 1" a 1,5", d) 1,5" a 2"

Quadro 2- Valores obtidos do módulo de Weibull

Dimensões	m_c	m_f
3/8" a 3/4"	1,59	2,29
3/4" a 1"	1,17	3,21
1" a 1,5"	1,95	2,58
1,5" a 2"	1,61	2,20

A maior variabilidade evidenciada com os valores referentes às fracturas iniciais reflete-se também nos valores obtidos para os módulos de Weibull, tendo m_c apresentado valores inferiores a m_f .

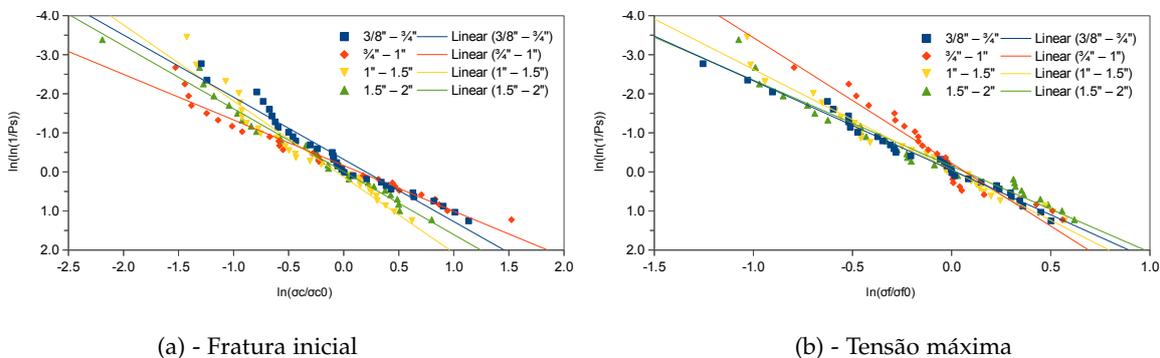


Figura 18- Comparação dos resultados obtidos para a determinação do coeficiente de Weibull considerando: a) fratura inicial, b) tensão máxima

Outra possibilidade interessante da teoria de Weibull é permitir o estudo da dependência de volume de P_s . Como indicado anteriormente $P_s(V_0)$ é a probabilidade de um provete sobreviver a uma dada tensão σ . Assim, a probabilidade que n provetes sobrevivam a essa tensão é $[P_s(V_0)]^n$. Se esses n provetes estiverem confinados num elemento de volume $V = nV_0$, a sua probabilidade de sobrevivência deverá manter-se $[P_s(V_0)]^n$, i.e.:

$$P_s(V) = [P_s(V_0)]^n = [P_s(V_0)]^{V/V_0} \quad [6]$$

Aplicando logaritmos em ambos os lados da equação tem-se:

$$\ln [P_s(V)] = \frac{V}{V_0} \ln [P_s(V_0)] \Leftrightarrow P_s(V) = \exp \left\{ \frac{V}{V_0} \ln [P_s(V_0)] \right\} \quad [7]$$

inserindo a Eq. 5 neste resultado obtém-se:

$$P_s(V) = \exp \left\{ -\frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad [8]$$

Esta equação mostra a dependência da probabilidade de sobrevivência na tensão σ e no volume V do provete (Ashby and Jones, 1986). Reescrevendo a teoria de Weibull torna-se possível mostrar que o rácio de resistência só depende do rácio do volume:

$$m \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = \ln \left(\frac{V_0}{V} \right) \quad [9]$$

Este foi o ponto de partida do trabalho de Yoshinaka et al. (2008) quando estudou o efeito de escala da resistência à compressão de rocha, tendo reparado nas semelhanças que existiam entre a relação empírica do efeito de escala de Hoek e Brown:

$$\sigma_c = \sigma_{c.50} \left(\frac{d}{50} \right)^{-0.18} \quad [10]$$

e a teoria estatística de Weibull (Eq. 3):

$$\sigma_c = \sigma_{c0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{1}{m}} \quad [11]$$

em que $\sigma_{c.50}$ representa a resistência de compressão uniaxial de um provete cilíndrico com um diâmetro $d = 50mm$ e σ_c representa a resistência à compressão uniaxial de um provete cilíndrico com um diâmetro arbitrário, variando de 10 a 200 mm. Assim, Yoshinaka et al. (2008) sugere uma equação de efeito de escala para comparar os resultados dos ensaios em provetes com formas e tamanhos diferentes do estandardizado provete cilíndrico de relação 2:1. Definindo o comprimento equivalente como $d_e = V^{1/3}$ pode reescrever-se a Eq. 11 como:

$$\sigma_c = \sigma_{c0} \left(\frac{d}{d_0} \right)^{-\frac{3}{m}} \quad [12]$$

e assim, a utilização desta relação permite prever o efeito do tamanho da partícula na resistência ao esmagamento. Considerando os resultados obtidos para todas as dimensões obteve-se um m_f de 2,4. Na Figura 19 apresenta-se a Eq. 12 juntamente com os valores obtidos das tensões máximas em relação às dimensões das partículas. A previsão de Weibull da variação da resistência ao esmagamento com a dimensão da partícula parece ter um efeito mais pronunciado que os resultados obtidos mostram. Esta diferença pode dever-se a aspetos geométricos das partículas ensaiadas (possibilidade de diferenças entre as partículas e a semelhança geométrica assumida na Eq. 12) e a aspetos mecânicos relacionados com a distribuição de fissuras em cada partícula.

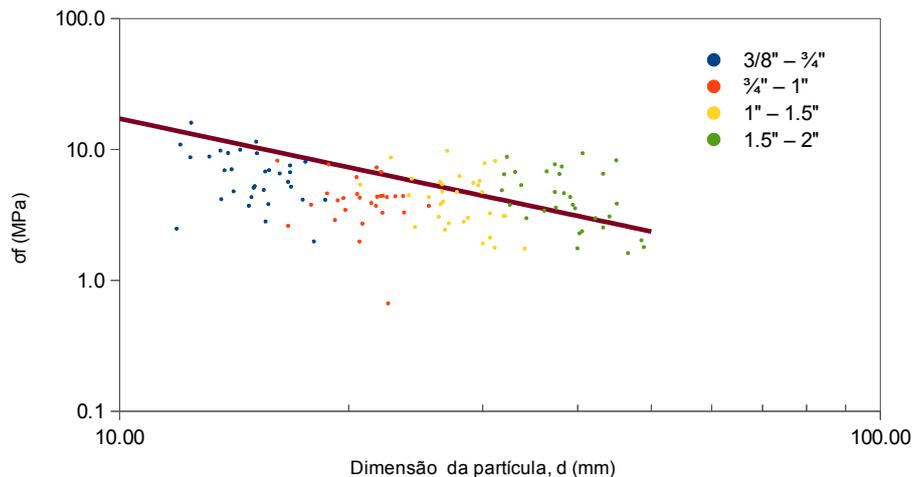


Figura 19- Efeitos do tamanho da partícula na resistência ao esmagamento

CONCLUSÕES

Este trabalho resume os ensaios de esmagamento realizados sobre 120 partículas (divididas por 4 intervalos de dimensões diferentes) de um granito que será empregue na construção da Reserva de Água de Monteseinho. Utilizando um equipamento que permitia realizar o ensaio sobre uma partícula isoladamente registaram-se as forças e os deslocamentos, permitindo assim analisar o comportamento do material até ser atingida a rotura da partícula. Para analisar a resistência ao esmagamento deste material aplicou-se a teoria de Weibull tendo-se optado por estudar duas forças distintas: a força que produzia uma fratura inicial, originando uma diminuição da força aplicada, e a força que produzia a rotura do provete. Os resultados obtidos nessa análise mostraram uma maior variabilidade da primeira força, em relação à segunda, refletindo-se nos módulos de Weibull obtidos. Este trabalho servirá posteriormente de suporte para o estudo do comportamento mecânico de materiais granulares no contexto da sua quebra de partículas individuais, por comparação com resultados obtidos em ensaios edométricos e triaxiais.

AGRADECIMENTOS

Os autores querem agradecer a valiosa colaboração das Águas de Trás-os-Montes e Alto-Douro pela total disponibilidade e ajuda na recolha do material utilizado neste trabalho.

Referências

- Ashby, M. and Jones, D. (1986). *Engineering materials 2, an introduction to microstructures, processing and design*. Oxford: Pergamon Press.
- Cheng, Y., Nakata, Y., and Bolton, M. D. (2003). Discrete element simulation of crushable soil. *Géotechnique*, 53(7):633–641.
- Cheng, Y., White, D., Bowman, E., Bolton, M. D., and Soga, K. (2001). The observation of soil microstructure under load. In *4th ICMGM, Powders and Grains*, pages 69–72.
- Cho, N., Martin, C. D., and Sego, D. C. (2007). A clumped particle model for rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 44(7):997–1010.

- Einav, I. (2007). Breakage mechanics - Part I: Theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(6):1274–1297.
- Gamboa, C. (2011). *Mechanical behaviour of rockfill materials application to concrete face rockfill dams*. PhD thesis.
- Hardin, B. O. (1985). Crushing of soil particles. *Journal of Geotechnical and Engineering, ASCE*, 111(10):1177–1192.
- Jaeger, J. C., Cook, N. G. W., and Zimmerman, R. W. (2007). *Fundamentals of Rock Mechanics*. John Wiley & Sons.
- Lee, K. and Farhoomand, I. (1967). Compressibility and crushing of granular soil in anisotropic triaxial compression. *Canadian Geotechnical Journal*, IV(1).
- Mcdowell, G. and Bolton, M. (1998). On the micromechanics of crushable aggregates. *Geotechnique*, 48(5):667–679.
- Nakata, F. L., Hyde, M., and Hyodo, H. (1999). A probabilistic approach to sand particle crushing in the triaxial test. *Géotechnique*, 49(5):567–583.
- Schönert, K. (2004). Breakage of spheres and circular discs. *Powder Technology*, 143-144:2–18.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18:293–297.
- Yoshinaka, R., Osada, M., Park, H., Sasaki, T., and Sasaki, K. (2008). Practical determination of mechanical design parameters of intact rock considering scale effect. *Engineering Geology*, 96(3-4):173–186.