LABORATÓRIO NACIONAL
DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE BARRAGENS DE BETÃO
Núcleo de Modelação Matemática e Física

Proc. 0402/11/17726

MÉTODO DE EULER NÃO LINEAR APLICADO A ÓRBITAS DO SISTEMA n-CORPOS

Lisboa • março de 2013

I&D BARRAGENS DE BETÃO

RELATÓRIO 83/**2013 – DBB/NMMF**

MÉTODO DE EULER NÃO LINEAR APLICADO A

ÓRBITAS DO SISTEMA n-CORPOS

RESUMO

Neste relatório é apresentado o método de Euler para calcular as órbitas do sistema n-corpos, por exemplo, o dos planetas do sistema Solar, tendo em conta a propagação das forças gravíticas entre o Sol e os planetas e entre os planetas entre si. Apenas requer como dados iniciais uma observação anterior das órbitas em termos de posição e velocidade. A correcção da interacção entre planetas não é suavizada, o que se justifica pelos seus valores. A correcção relativista é importante.

n-BODIES SYSTEM ORBITS

COMPUTED BY NON LINEAR EULER METHOD

ABSTRACT

This Report presents the Euler method of computing n-bodies system orbits, e.g. Solar system planet orbits, taking into account gravity forces propagation between planets and Sun and in between planets. The required initial data consists of an early orbits monitoring in what concerns position and velocity. The planets interaction is not smoothed, owing to theirs values. The relativist adjustment is important to take into account.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	(1)
MODELO	(1)
CONCLUSÕES	(4)
BIBLIOGRAFIA	(4)
AGRADECIMENTOS	(4)
ANEXO	(5)

MÉTODO DE EULER NÃO LINEAR APLICADO A

ÓRBITAS DO SISTEMA n-CORPOS

Câmara, R.

INTRODUÇÃO

No caso particular das órbitas dos planetas do sistema Solar é de salientar a não validade do princípio da sobreposição de efeitos, ou seja, não se pode somar órbitas. Isto deve-se à não linearidade do operador retardado e aos efeitos relativistas. Deste modo tem em cada instante de se calcular a resposta à soma de todas as forças no mesmo referencial cartesiano.

MODELO

Seja:

M-Sol; m-Terra; N, P-Planetas (inclusive Terra); C-Velocidade da luz; A-Operador Retardado; G- Constante gravítacional; B- Operador que traduz as equações de Estado, com

$$\tilde{G}_i \stackrel{def}{=} G\frac{r_i(t-\Delta t)}{r(t-\Delta t)} \quad ; \quad t-\Delta t = \frac{r(t-\Delta t)}{C} \quad ; \quad \left\{\begin{matrix} r_i \\ \dot{r}_i \end{matrix}\right\}_{t-\Delta t} \quad ; \quad f_i = f_i(t+n\Delta t-\Delta t) \quad n = 0,1,\cdots$$

$; \mathrm{r_i = x_i^m - x_i^M} \quad ; \quad \mathrm{r} = \sqrt{(\mathrm{r_1})^2+(\mathrm{r_2})^2+(\mathrm{r_3})^2}$ Assim da igualdade das forças f_i:

$$f_i(t-\Delta t) = \frac{\tilde{G}_i Mm\Delta t}{r^2(t-\Delta t)}\delta\left(t-\Delta t-\frac{r(t-\Delta t)}{C}\right) \quad ; \quad \delta(t) \approx \frac{1}{\Delta t}$$

$$f_i(t-\Delta t) = \Delta\left(m\dot{r}_i(t-\Delta t)\right)/\Delta t = (\dot{m}\dot{r}_i)_{t-\Delta t} + (m\ddot{r}_i)_{t-\Delta t}$$

$$\frac{Gr_i(t-\Delta t)M}{r(t-\Delta t)r^2(r(t-\Delta t)/C)} = (\frac{\dot{m}}{m}\dot{r}_i)_{t-\Delta t} + (\ddot{r}_i)_{t-\Delta t}$$

As órbitas são poligonais. Num dado instante, se actuam várias forças no planeta Terra os operadores apresentados seguidamente somam-se, referidos aos eixos cartesianos do Sol.

Seja o operador $B^k = B_k \ldots B_2 B_1$. Então para que a órbita seja fechada $|B_1|=1 \ldots |B_k|=1$.

Seja A o operador retardado dado por:

$$A^M_{t-\Delta t} = \frac{GM}{r(t-\Delta t)r^2(r(t-\Delta t)/C)}$$

Então com:

$$\begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i^m \\ \dot{x}_i^m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_i^M \\ \dot{x}_i^M \end{Bmatrix}$$

Obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix}^{\bullet}_{t-\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A^M & \Delta t A^M \end{bmatrix}_{t-\Delta t} \begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix}_{t-\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\dot{m}}{m} \end{bmatrix}_{t-\Delta t} \begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix}_{t-\Delta t}$$

$$\begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix}^{\bullet}_{t-\Delta t} \Delta t = \begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix}_{t} - \begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix}_{t-\Delta t}$$

Seja V a velocidade constante em cada lado da poligonal antes e depois da actuação das forças.

As fórmulas relativistas que se seguem permitem que, visto do Sol, haja uma quase igualdade entre a expansão do raio e do perímetro da órbita. Por outro lado a dilatação do espaço e do tempo consideradas é a mesma. Assim, esta "relatividade" apresenta vantagens numéricas em relação à relatividade restrita numa situação em que se aplica a relatividade geral, ou seja nas órbitas quase circulares.

$$\begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix}_{t} = \begin{bmatrix} I & \Delta t I \\ A_{t-\Delta t}^M \Delta t & A_{t-\Delta t}^M \Delta t^2 + I + \left(I - \dfrac{m_t}{m_{t-\Delta t}} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_i^M \\ \dot{r}_i^M \end{Bmatrix}_{t-\Delta t}$$

Fórmulas relativistas:

$$\frac{m_t}{m_{t-\Delta t}} \approx \frac{1-\dfrac{V(t-\Delta t)}{C}}{1-\dfrac{V(t)}{C}} \quad ; \quad \Delta t' \approx \frac{1+\dfrac{V}{C}}{1-\dfrac{V^2}{C^2}} \Delta t \quad ; \quad \Delta l' \approx \frac{1+\dfrac{V}{C}}{1-\dfrac{V^2}{C^2}} \Delta l$$

Relatividade considerada: $\Delta l' = C\Delta t + V\Delta t' = C\Delta t'$

; $\Delta t'$ - relógio em M ; Δt - relógio em m.

A interacção dos planetas entre si começa após estabilização das suas órbitas em torno do Sol. Estas são determinadas após chegada da gravidade do Sol, considerando como dados a posição do planeta e a velocidade na sua órbita.

Quando se refere ao Sol (M) e Planetas (N,P) a interacção entre planetas (-) é pequena e pode-se somar às órbitas em torno do Sol. Assim, para a interacção entre os planetas N, P vem:

$$\begin{Bmatrix}\bar{r}_i^N\\ \dot{r}_i^N\end{Bmatrix}_t = \begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^N_{t-\Delta t}\Delta t & A^N_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{r}_i^N\\ \dot{r}_i^N\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}+\begin{Bmatrix}0\\ \dfrac{f_i^N\Delta t}{m^N}\end{Bmatrix}_{t-\Delta t} \; ; \; \begin{Bmatrix}r_i^N\\ \dot{r}_i^N\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}x_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}$$

e,

$$\begin{Bmatrix}\bar{r}_i^P\\ \dot{r}_i^P\end{Bmatrix}_t = \begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^P_{t-\Delta t}\Delta t & A^P_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{r}_i^P\\ \dot{r}_i^P\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}+\begin{Bmatrix}0\\ \dfrac{f_i^P}{m^P}\Delta t\end{Bmatrix}_{t-\Delta t} \; ; \; \begin{Bmatrix}r_i^P\\ \dot{r}_i^P\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}x_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^P_{t-\Delta t}\Delta t & A^P_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\bar{x}_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}-\begin{Bmatrix}x_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}\right)$$

$$+\begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^M_{t-\Delta t}\Delta t & A^M_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}+\begin{Bmatrix}0\\ \dfrac{f_i^P\Delta t}{m^P}\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}=\begin{Bmatrix}\bar{x}_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_t$$

$$\begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^N_{t-\Delta t}\Delta t & A^N_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\bar{x}_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}-\begin{Bmatrix}x_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}\right)$$

$$+\begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^M_{t-\Delta t}\Delta t & A^M_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}+\begin{Bmatrix}0\\ \dfrac{f_i^N\Delta t}{m^N}\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}=\begin{Bmatrix}\bar{x}_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_t$$

$$\begin{Bmatrix}x_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_t=\begin{Bmatrix}\bar{x}_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_t+\begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^M_{t-\Delta t}\Delta t & A^M_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}$$

$$\left(\begin{Bmatrix}x_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_t=\begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^M_{t-\Delta t}\Delta t & A^M_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}\right)$$

$$\begin{Bmatrix}x_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_t=\begin{Bmatrix}\bar{x}_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_t+\begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^M_{t-\Delta t}\Delta t & A^M_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_i^P\\ \dot{x}_i^P\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}$$

$$\left(\begin{Bmatrix}x_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_t=\begin{bmatrix} I & \Delta t I\\ A^M_{t-\Delta t}\Delta t & A^M_{t-\Delta t}\Delta t^2+I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_i^N\\ \dot{x}_i^N\end{Bmatrix}_{t-\Delta t}\right)$$

Considera-se a diferença de cada planeta com os restantes. As forças de fixação quando libertadas originam o movimento do planeta.

As coordenadas do centro de massas de cada planeta incluiu o planeta e satélites em cada instante. A posição relativa do planeta e seus satélites implica a solução aproximada das órbitas dos satélites em torno do planeta.

CONCLUSÕES

No caso de um movimento rectilíneo uniforme a expansão espacial segundo a recta é diferente da verificada na direcção perpendicular. Trata-se de um problema de relatividade restrita. No caso de um movimento circular uniforme a expansão segundo o perímetro tem de ser igual à expansão segundo o raio. Trata-se de um problema de relatividade geral. Neste trabalho optou-se por modificar ligeiramente a relatividade restrita de modo a obter uma melhor aproximação no caso da relatividade geral, como se pode constatar no anexo.

A utilização de impulsos gravíticos do tipo de Delta de Dirac permite obter órbitas poligonais que apenas serão fechadas no caso exposto no texto. Com a consideração da relatividade as órbitas são abertas.

BIBLIOGRAFIA

Rodrigues, João – “Introdução à teoria da relatividade restrita”. IST Press, 1998.

Henriques, Alfredo – “Teoria da relatividade geral. Uma introdução”. IST Press, 2009.

Einstein, Albert – “O significado da relatividade”.Gradiva.

AGRADECIMENTOS

O Autor expressa o seu agradecimento ao Investigador Nuno Azevedo, pela sugestão da importância do amortecimento $\Delta t\,A$, e ao Investigador Sérgio Oliveira pela sugestão do uso dos Delta de Dirac.

ANEXO

Seja r’ no referencial Sol relacionado com r no referencial Terra. A velocidade entre os dois referenciais, V, admite-se proporcional a r. Substituindo a segunda na primeira relação e diferenciando em relação a r obtém-se aproximadamente a mesma relação (dr’,dr) que (r’,r). Enquanto (r’,r) se dirige segundo o perímetro da circunferência, (dr’,dr) dirige-se segundo o raio. Assim a expansão do perímetro é aproximadamente igual à expansão do raio.

$$r' = \frac{1+\frac{V}{C}}{1-\frac{V^2}{C^2}}r \quad ; \quad \frac{V}{C} = Kr$$

$$dr' = \left(\frac{(1+Kr)(1-K^2r^2)+K(1-K^2r^2)+2rK^2(1+Kr)}{(1-K^2r^2)^2} \right) dr$$

$$dr' = \left(\frac{(1+Kr)(1-K^2r^2+rK^2+K)}{(1-K^2r^2)^2} \right) dr$$

$$dr' = \left(\frac{(1+Kr)^2(1-Kr+K)}{(1+Kr)^2(1-Kr)^2} \right) dr \approx \frac{dr}{1-Kr} = \frac{dr}{1-\frac{V}{C}}$$

$$T' = \frac{1+\frac{V}{C}}{1-\frac{V^2}{C^2}}T \quad ; \quad P' = 2\pi r' \quad ; \quad v' = \frac{P'}{T'} = \frac{2\pi r}{T} = v$$

Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Março de 2013

VISTOS

O Chefe do Núcleo de Modelação

Matemática e Física

José Vieira de Lemos

O Director do Departamento de

Barragens de Betão

José Vieira de Lemos

AUTORIA

Romano Jorge Calhau Câmara

Romano Jorge Calhau Câmara

Engenheiro Civil

Investigador Coordenador