

## SELECÇÃO DO MÉTODO MATEMÁTICO PARA DETERMINAÇÃO DA TANGENTE NO ENSAIO DE COMPRESSÃO MARSHALL, SUPOSTADA NA AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO

L. Lages Martins, A. Silva Ribeiro, F. Batista, A. Maia, A. C. Freire

Laboratório Nacional de Engenharia Civil

### RESUMO

A presente comunicação descreve o processo de selecção do método matemático visando a parametrização da tangente à curva estabilidade versus deformação obtida na realização do ensaio de compressão Marshall de misturas betuminosas. A definição desta tangente constitui uma etapa intermédia essencial para a determinação das mensurandas de interesse no referido ensaio. Numa perspectiva de propagação de incertezas de medição das grandezas de entrada até às grandezas de saída, a determinação da qualidade intrínseca à parametrização efectuada, expressa pela sua incerteza de medição, constitui uma matéria relevante neste contexto. Deste modo, a metodologia de parametrização apresentada é suportada na avaliação de incertezas de medição de cada uma das abordagens matemáticas estudadas.

### 1. Introdução

No contexto actual da actividade laboratorial, é possível constatar uma crescente automatização dos processos experimentais em virtude da utilização de equipamentos de ensaio que incorporam recentes desenvolvimentos tecnológicos obtidos nas áreas da Electrónica e da Computação que asseguram, por exemplo, a aquisição, processamento, cálculo e representação gráfica automática de dados experimentais. Este facto é traduzido numa redução significativa da intervenção humana na concretização de ensaios laboratoriais com a consequente melhoria da qualidade dos resultados obtidos bem como na redução dos custos económicos e no aumento de produtividade.

O ensaio de compressão Marshall, realizado no contexto experimental da caracterização laboratorial de misturas betuminosas aplicadas em infra-estruturas rodoviárias e aeroportuárias, constitui um exemplo ilustrativo desta situação. Este ensaio pode ser descrito, de forma sumária, como a aplicação de uma carga de compressão uniaxial a um provete cilíndrico, inserido num estabilómetro Marshall, segundo uma taxa de deformação aproximadamente constante. O ensaio admite uma representação gráfica das grandezas de entrada: estabilidade (força de compressão aplicada) e deformação, mediante a qual se torna possível determinar um conjunto de grandezas de interesse. A automatização do processo de aquisição, processamento, cálculo e representação dos dados experimentais que compõem a curva de ensaio estabilidade *versus* deformação, apresenta substanciais vantagens de natureza operacional e integridade da informação recolhida no ensaio.

Neste âmbito, o Laboratório de Ensaio de Materiais para Pavimentação (PAVMAT) do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), em colaboração com o Centro de Instrumentação Científica (CIC) do LNEC, promoveu o desenvolvimento de uma aplicação computacional de apoio à realização do ensaio de compressão Marshall no referido laboratório. Esta aplicação recorre aos dados provenientes do equipamento de ensaio e aplica algoritmos matemáticos conhecidos e validados, de modo a obter estimativas das grandezas por via indirecta e respectivas incertezas de medição, em particular, no que se refere à parametrização da tangente à curva de ensaio estabilidade *versus* deformação.

Existindo diversos métodos aplicáveis visando a determinação da tangente mencionada, o presente estudo promoveu uma análise comparativa entre diferentes abordagens utilizando a avaliação das incertezas de medição como critério de selecção daquela que permitiria obter o nível de exactidão mais elevado. O conhecimento adquirido possui um interesse complementar que resulta de ser necessário para o estudo de propagação de incertezas de medição do ensaio de compressão Marshall na sua

globalidade, visto que, quer o declive da tangente, quer a sua ordenada na origem, constituem grandezas intermédias nesse processo.

## 2. Ensaio de Compressão Marshall

O ensaio de compressão Marshall tem por objectivo a determinação de um conjunto de grandezas de natureza mecânica associadas a uma mistura betuminosa compactada, constituindo um dos vários ensaios experimentais realizados pelo LNEC/PAVMAT no âmbito da sua actividade laboratorial acreditada de caracterização de materiais utilizados na pavimentação de infra-estruturas rodoviárias e aeroportuárias. Neste laboratório, a concretização experimental do ensaio Marshall segue os requisitos preconizados no enquadramento normativo aplicável (EN 12697-34:2004+A1:2007) [1] no que respeita ao equipamento, método e procedimento de ensaio adoptados.

De acordo com a referida norma de ensaio, um provete cilíndrico compactado em laboratório a partir da amostra em estudo é sujeito a uma carga de compressão uniaxial segundo uma taxa de deformação aproximadamente constante numa prensa (vide Figura 1) equipada com transdutores de força e de deslocamento. Em regra, este equipamento de ensaio incorpora uma aplicação computacional visando a aquisição, processamento, cálculo e representação gráfica automática de dados, salientando-se que se desconhecem os algoritmos que suportam a componente gráfica (*software* tipo “caixa-negra”) o que constitui uma importante limitação para a sua validação no enquadramento da acreditação do ensaio de compressão Marshall, constituindo este facto uma das motivações do estudo apresentado.

Neste ensaio, tem particular interesse a representação gráfica da curva das grandezas de entrada estabilidade e deformação, cuja configuração geométrica típica é apresentada na Figura 2.



Figura 1: Equipamento para ensaio uniaxial.

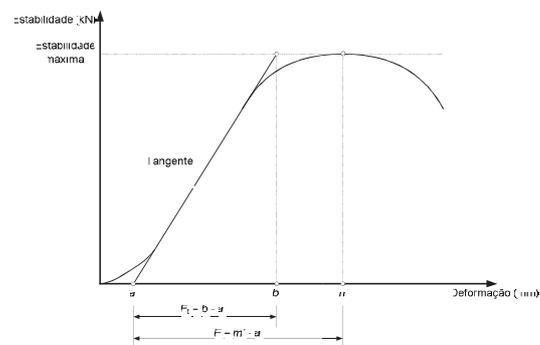


Figura 2: Representação gráfica de *estabilidade* versus deformação obtida no ensaio Marshall.

Na curva obtida é possível destacar duas zonas com interesse: a zona onde o provete de ensaio evidencia um comportamento aproximadamente linear, representado graficamente pela tangente; e a zona onde se verifica a ocorrência da carga de compressão máxima, na qual se dá a rotura do provete ensaiado. Com efeito, a caracterização mecânica do provete ensaiado é suportada na determinação de um conjunto de grandezas associadas a estas zonas de interesse – estabilidade máxima, deformação ( $F$ ), deformação tangencial ( $F_t$ ) e quociente Marshall (definido como o quociente entre as grandezas estabilidade máxima e deformação) – o que evidencia a relevância que o processo de parametrização da tangente à curva possui no ensaio em estudo.

### 3. Métodos de Parametrização Estudados

A aplicação computacional desenvolvida é suportada no registo automático das medições de estabilidade e deformação obtido pelo sistema de aquisição e processamento que integra o equipamento de ensaio utilizado pelo LNEC/PAVMAT. Os dados experimentais obtidos permitem construir uma curva de ensaio discreta, na qual o ponto de inflexão na região onde o provete de ensaio apresenta um comportamento linear constitui um ponto de interesse (*vide* Figura 3). De facto, numa perspectiva matemática, este ponto integra a tangente à curva cuja parametrização se pretende obter, sendo definido como o ponto da curva com derivada de segunda ordem nula. A utilização de técnicas de diferenciação numérica permite concretizar a sua localização na referida curva sendo possível determinar os dois pontos experimentais entre os quais está compreendido.

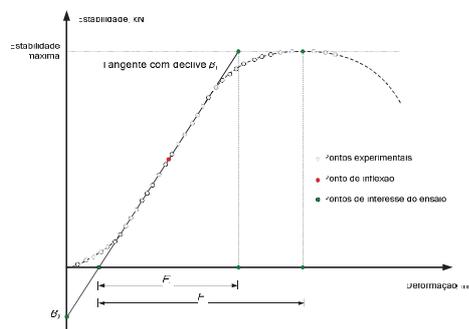


Figura 3 – Localização do ponto de inflexão na curva de ensaio.

Este facto justifica que o primeiro método de parametrização estudado consista na determinação analítica da recta que intersecta os dois pontos experimentais referidos anteriormente. Considerando  $(S_1, F_1)$  e  $(S_2, F_2)$  como os dois pontos experimentais de estabilidade,  $S$ , e deformação,  $F$ , entre os quais está localizado o ponto de inflexão da curva, os parâmetros que definem a tangente à curva – ordenada na origem,  $\beta_0$ , e declive,  $\beta_1$ , – são dados pelas expressões

$$\beta_0 = S_1 - \frac{S_2 - S_1}{F_2 - F_1} \cdot F_1 \quad (1)$$

e

$$\beta_1 = \frac{S_2 - S_1}{F_2 - F_1} \quad (2)$$

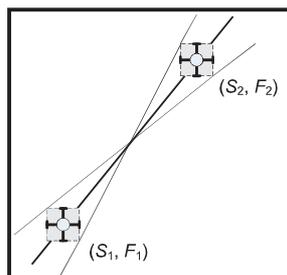


Figura 4 – Análise de extremos.

Conhecidos os modelos matemáticos que suportam a determinação das estimativas de parametrização importa, igualmente, avaliar as respectivas dispersões de natureza aleatória dos valores atribuídos a ambas as estimativas, representativas da qualidade intrínseca à parametrização efectuada.

Numa perspectiva clássica, de base determinística, um dos métodos que pretende alcançar este objectivo é designado por **análise de extremos**. Este método consiste na determinação dos limites de variabilidade das estimativas da parametrização com base no conhecimento das incertezas de medição dos dois pontos experimentais utilizados na definição da recta e na combinação dos seus valores extremos, conforme ilustrado esquematicamente na Figura 4. Neste âmbito, foram utilizados os valores de incertezas de medição das grandezas estabilidade e deformação determinados com base nas componentes de incerteza identificadas para o LNEC/PAVMAT e que se encontram descritas em [2].

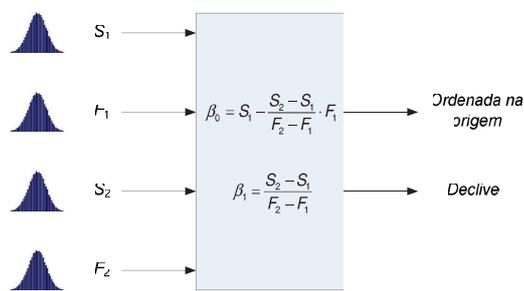


Figura 5 – Análise funcional pelo MMC.

Em alternativa, é possível adoptar uma abordagem de base probabilística na qual a dispersão de valores atribuídos aos parâmetros declive e ordenada na origem resulta de uma **análise funcional** de propagação das incertezas de medição dos dois pontos experimentais até aos dois parâmetros de interesse, tendo em conta os modelos matemáticos (1) e (2) que estabelecem a parametrização da tangente.

Atendendo à não-linearidade que caracteriza os referidos modelos, este estudo foi concretizado numericamente mediante processos de simulação computacional pelo

Método de Monte Carlo (MMC), conforme previsto em [3].

Note-se que ambas as abordagens estudadas – análise de extremos e análise funcional – se recorre aos mesmos valores de estimativas e incertezas de medição (expandidas num intervalo de confiança de 95 %) dos pontos experimentais  $(S_1, F_1)$  e  $(S_2, F_2)$ , que se encontram na Tabela 1, possibilitando uma comparação dos resultados obtidos no que se refere à magnitude dos intervalos de dispersão obtidos.

Tabela 1 – Dados de entrada utilizados na análise de extremos e funcional.

$S_1$ (kN)	$F_1$ (mm)	$S_2$ (kN)	$F_2$ (mm)
$4,629 \pm 0,063$	$1,396 \pm 0,025$	$5,138 \pm 0,065$	$1,464 \pm 0,025$

O segundo método de parametrização estudado tem por base a aplicação do **Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)** [4] para caracterização de uma regressão linear em torno do ponto de inflexão da curva e tendo em conta os pontos experimentais mais próximos, conforme representado na Figura 6.



Figura 6 – Regressão linear em torno do ponto de inflexão com amostras de pontos experimentais com dimensões distintas.

Neste âmbito foram analisadas duas amostras compostas, respectivamente, por quatro e seis pontos experimentais. O estudo de amostras com dimensão,  $n$ , ímpar ou superior a seis não foi efectuado atendendo ao esperado afastamento da recta de regressão relativamente ao ponto de inflexão, o que se traduz na obtenção de rectas que não correspondem geometricamente a tangentes à curva de ensaio. O recurso ao MMQ possibilita a determinação analítica das estimativas de cada um dos parâmetros da tangente, bem como, da respectiva matriz de variância-covariância que suporta a avaliação de incertezas de medição pretendida.

Os dados de entrada utilizados na aplicação deste método de parametrização são apresentados na Tabela 2, notando-se que incluem as estimativas utilizadas no primeiro método anteriormente referido (determinação analítica da recta que intersecta os dois pontos experimentais em torno do ponto de inflexão), contribuindo para a robustez da comparação de resultados produzidos por diferentes métodos.

**Tabela 2** – Dados de entrada utilizados na aplicação do MMQ.

$S_i$ (kN)	$F_i$ (mm)
3,617	1,258
4,133	1,330
4,629	1,396
5,138	1,464
5,737	1,544
6,401	1,635

Estimativas também utilizadas no método de determinação analítica que intersecta os dois pontos experimentais em torno do ponto de inflexão.

Amostra de quatro pontos experimentais em torno do ponto de inflexão

Amostra de seis pontos experimentais em torno do ponto de inflexão

#### 4. Resultados Obtidos

A Tabela 3 apresenta os resultados da determinação analítica das estimativas de parametrização da recta que intersecta os dois pontos experimentais entre os quais se localiza o ponto de inflexão da curva de ensaio analisada. Refere, igualmente, os respectivos valores mínimo e máximo dos intervalos de variabilidade obtidos pela análise de extremos.

**Tabela 3** – Resultados da análise de extremos.

Parâmetro	Valor mínimo	Estimativa	Valor máximo
Declive (kN/mm)	3,23	7,49	35,39
Ordenada na origem (kN)	-45,72	-5,82	0,27

Como se pode observar na Tabela 3, os limites de variabilidade de ambas as estimativas de parametrização apresentam uma elevada amplitude assumindo valores geometricamente irrealistas, suscitando uma análise crítica dos valores obtidos no contexto de avaliação da qualidade da parametrização efectuada.

Embora recorra aos intervalos de incerteza de medição das grandezas de entrada e aos modelos matemáticos de medição indirecta das grandezas de interesse, a abordagem determinística de análise de extremos apenas permite obter intervalos de variabilidade que não são representativos da dispersão

aleatória de valores atribuídos às grandezas de interesse, não correspondendo a intervalos de incertezas de medição que efectivamente se pretendem obter como indicadores de qualidade, neste caso, da parametrização efectuada.

Os valores expressos na Tabela 3 apenas podem ser vistos como majorantes desses mesmos intervalos de incertezas de medição, motivo pelo qual este tipo de análise é frequentemente realizada no contexto da Engenharia, no qual é comum o recurso a métodos de majoração de variáveis de projecto e construção tendo em vista a garantia da segurança de pessoas e bens.

Estes aspectos inerentes à análise de extremos reforçam o interesse em promover uma avaliação de incertezas pela via da análise funcional com recurso ao MMC e cujos resultados constam na Tabela 4.

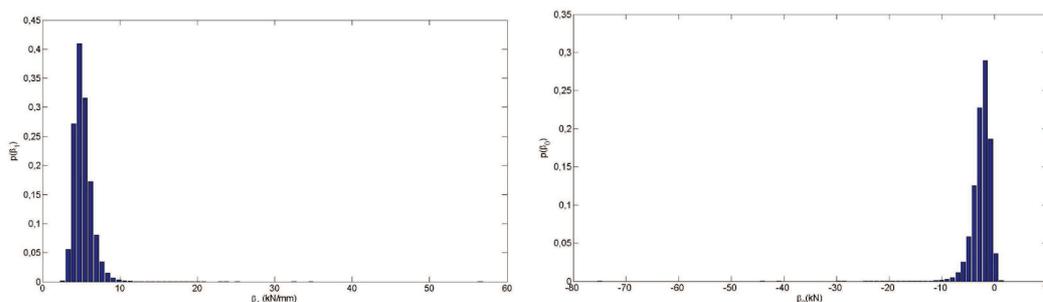
**Tabela 4** – Resultados da análise funcional.

Parâmetro	Estimativa	Incerteza de medição expandida (95 %)	Nível de exactidão numérica (95%)	
Declive (kN/mm)	5,21	2,71	0,006	0,025
Ordenada na origem (kN)	-2,48	3,07	0,033	0,009

O primeiro aspecto a realçar nos resultados obtidos consiste no afastamento de ambas as estimativas obtidas por esta via numérica comparativamente com a solução analítica anteriormente determinada (*vide* estimativas declaradas na Tabela 3).

Em segundo lugar, é possível destacar a amplitude dos intervalos de incerteza de medição que, embora seja inferior à registada para os intervalos de variabilidade obtidos pela análise de extremos, continua a traduzir uma dispersão de valores significativamente elevada que, face ao conhecimento existente acerca do problema de determinação da tangente, não se considera representativa da incerteza de medição que efectivamente caracteriza o processo de parametrização.

Salienta-se, igualmente, a diferença de amplitude existente nos níveis de exactidão numérica associados a cada um dos percentís que compõem os intervalos de incerteza de medição obtidos numericamente para cada um dos parâmetros analisados, facto que é confirmado pela observação da assimetria existente ao nível das extremidades das respectivas funções densidade de probabilidade apresentadas nas Figuras 7 e 8.



**Figuras 7 e 8** – Funções densidade de probabilidade do declive (à esquerda) e da ordenada na origem (à direita) obtidas por simulação numérica pelo MMC.

Estes aspectos evidenciam que a análise funcional, visando a propagação de incertezas de medição no processo de parametrização, é influenciada por factores de natureza numérica em virtude dos modelos matemáticos adoptados. A observação das expressões (1) e (2) permite constatar que ambos os modelos apresentam operações de subtracção de deformações consecutivas no denominador de fracções. O resultado desta diferença aritmética apresenta valores tipicamente muito reduzidos, efeito que pode ser acentuado pelo processo de simulação numérica no qual se promove a utilização de sequências numéricas representativas da dispersão de valores atribuídos às grandezas de interesse. Com efeito, a aplicação do MMC em modelos matemáticos com estas características é, em regra, desaconselhada atendendo à existência de denominadores com valores significativamente reduzidos que originam um efeito de inflação numérica das fracções presentes nos referidos modelos matemáticos justificando, deste modo, os resultados obtidos.

A Tabela 5 apresenta os resultados da parametrização da tangente suportada na realização de regressão linear pelo MMQ considerando duas amostras de pontos experimentais com dimensões distintas. Salienta-se que as incertezas de medição apresentadas se encontram expandidas para um intervalo de confiança de 95 %.

**Tabela 5 – Resultados da aplicação do MMQ.**

Dimensão da amostra	Parâmetro da tangente		Coeficiente de correlação
	Declive (kN/mm)	Ordenada na origem (kN)	
4	7,497 ± 0,032	-5,838 ± 0,023	-0,999
6	7,410 ± 0,108	-5,714 ± 0,081	-0,998

A aplicação deste método permitiu obter estimativas de parametrização próximas das soluções analíticas expostas na Tabela 3, em particular, no caso da amostra composta por quatro pontos experimentais. O recurso a amostras com dimensão superior conduz, por um lado, a um afastamento da recta obtida relativamente à solução geométrica ideal pretendida (tangente à curva) e, por outro lado, a incertezas de medição mais elevadas.

Salienta-se, igualmente que, os coeficientes de correlação entre o declive e a ordenada na origem estão bastante próximos do valor teoricamente esperado (unitário negativo), coerente com a natureza geométrica do problema em estudo: um aumento do declive da recta é reflectido numa correspondente diminuição da ordenada na origem e, igualmente, de forma recíproca.

## 5. Conclusões

O estudo efectuado permitiu seleccionar o MMQ, suportado numa amostra de quatro pontos experimentais em torno ponto de inflexão, como método matemático adequado à parametrização da tangente à curva estabilidade *versus* deformação no ensaio de compressão Marshall de misturas betuminosas. Tendo em conta o conjunto de métodos estudados, esta escolha é justificada pelo facto de permitir conjugar a obtenção de estimativas de parametrização que traduzem uma recta bastante

próxima da solução geométrica ideal, com uma avaliação robusta e fiável das incertezas de medição que resulta da determinação analítica da respectiva matriz de variância-covariância.

O método matemático alternativo – determinação analítica da recta que intersecta os dois pontos experimentais em torno do ponto de inflexão – confirmou o comportamento expectável no que respeita à determinação das incertezas de medição associadas à parametrização da tangente com recurso às abordagens aplicadas: análise de extremos e análise funcional pelo MMC.

No caso da análise de extremos, os intervalos de valores de parametrização obtidos apenas constituem majorantes dos intervalos de incertezas de medição pelo que a sua utilização como indicador de qualidade de medições é limitada não dispondo de informação do comportamento probabilístico da grandeza de saída. Esta limitação decorre de ser uma aplicação determinística baseada na caracterização probabilística das grandezas de entrada.

A análise funcional com recurso à aplicação do MMC mostrou que, sendo um método de simulação numérica, dever-se-á ter particular atenção à existência de características dos modelos matemáticos que determinam a divergência de algumas soluções e, como expectável e recomendável, não devem ter este tipo de enquadramento.

Realça-se, no contexto deste estudo, a abordagem inovadora do problema em causa, que consistiu em centrar a análise na questão da avaliação das incertezas de medição e, com base nestas, seleccionar o método mais adequado, ao contrário do processo habitual em que se escolhe o método e, em seguida, efectua-se a estimativa das respectivas incertezas. Com efeito, esta abordagem poderá ser generalizada a casos similares onde se pretenda dispor de um critério de qualidade para a selecção de métodos de ensaio.

A escolha efectuada permite que se proceda à sua aplicação em estudo de avaliação de incertezas de medição de grandezas no ensaio acreditado de compressão Marshall [2] e promover a sua concretização em aplicação computacional de apoio à realização do referido ensaio no laboratório LNEC/PAVMAT.

## REFERÊNCIAS

- [1] EN 12697-34:2004+A1:2007 – Bituminous mixtures – Test methods for hot mix asphalt. Part 34: Marshall test, Brussels: European Committee for Standardization (CEN), July 2007.
- [2] Lages Martins, L. e Silva Ribeiro, A., “Avaliação de Incertezas de Medição no Laboratório de Ensaio de Materiais para Pavimentação (LNEC/PAVMAT) – Ensaio Marshall”, Relatório LNEC 221/2010 – NQM, Lisboa (Portugal): Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), Junho de 2010.
- [3] Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, 1<sup>st</sup> edition, Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM), 2008.
- [4] Mood, A. *et al.*, Introduction to the theory of statistics, 3<sup>rd</sup> edition, Singapore: McGraw-Hill International Editions, 1974.