



LABORATÓRIO NACIONAL
DE ENGENHARIA CIVIL

CENTRO DE INSTRUMENTAÇÃO CIENTÍFICA
Núcleo de Qualidade Metrológica

Proc. 1104/551/00878
Proc. 0702/073/12711

AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO NO LABORATÓRIO DE ENSAIO DE MATERIAIS PARA PAVIMENTAÇÃO (PAVMAT/LNEC)

**Ensaio *wheel tracking* com equipamento de pequena
dimensão, procedimento de ensaio B e acondicionamento
dos provetes ao ar**

Estudo realizado por solicitação do
Departamento de Transportes do LNEC

Lisboa • junho de 2012

I&D INSTRUMENTAÇÃO CIENTÍFICA

RELATÓRIO 169/2012 – CIC/NQM

**Avaliação de Incertezas de Medição no
Laboratório de Ensaio de Materiais para Pavimentação (PAVMAT/LNEC):
ensaio *wheel tracking* com equipamento de pequena dimensão,
procedimento de ensaio B e acondicionamento dos provetes ao ar**

Resumo

Este relatório descreve o processo de avaliação de incertezas de medição do ensaio *wheel tracking* de misturas betuminosas a quente, realizado pelo Laboratório de Ensaio de Materiais para a Pavimentação do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (PAVMAT/LNEC), com recurso a equipamento de pequena dimensão, aplicando o procedimento de ensaio B e com acondicionamento dos provetes ao ar, conforme previsto no respetivo enquadramento normativo (EN 12 697-22). O presente documento contém uma descrição sumária do ensaio estudado apresentando, igualmente, o conjunto de relações funcionais aplicáveis e as tabelas de balanço de incertezas de medição obtidas com base na aplicação do método GUM.

**Evaluation of Measurement Uncertainties at the
Laboratório de Ensaio de Materiais para Pavimentação (PAVMAT/LNEC):
wheel tracking test using small size device, testing procedure B and
specimens air conditioning**

Abstract

This report describes the measurement uncertainty evaluation procedure related with the wheel tracking test for hot bituminous mixtures performed at the Laboratório de Ensaio de Materiais para a Pavimentação of the Laboratório Nacional de Engenharia Civil (PAVMAT/LNEC), using small size device, applying the testing procedure B and specimens air conditioning, as prescribed in the reference standard (EN 12 697-22). The present document contains a brief description of the studied test and presents the related functional relationships and measurement uncertainty budget tables obtained through the use of the GUM method.

**Évaluation des Incertudes de Mesure au
Laboratório de Ensaio de Materiais para Pavimentação (PAVMAT/LNEC):
essai d'orniérage avec d'appareil de petite échelle, procédure d'essai B et
conditionnement des éprouvettes à l'air**

Résumé

Ce rapport décrit la procédure d'évaluation des incertudes de mesure de l'essai d'orniérage des mélanges bitumineux à chaud réalisé au Laboratório de Ensaio de Materiais para a Pavimentação du Laboratório Nacional de Engenharia Civil (PAVMAT/LNEC), utilisant l'appareil de petite échelle, selon la procédure d'essai B et conditionnement des éprouvettes à l'air prévue dans la norme de référence (EN 12 697-22). Le présent document contient une brève description de l'essai étudié, présent les relations fonctionnelles appliquées et les tableaux du bilan des incertitudes de mesure basé sur l'application de la méthode GUM.

Índice de matérias

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. ENSAIO <i>WHEEL TRACKING</i> COM EQUIPAMENTO DE PEQUENA DIMENSÃO, PROCEDIMENTO DE ENSAIO B E ACONDICIONAMENTO DOS PROVETES AO AR.....	3
2.1 Descrição sumária do ensaio	3
2.2 Relações e diagrama funcionais	8
2.3 Tabelas de balanço de incertezas de medição	10
2.3.1 Estágio inicial.....	10
2.3.2 Estágio intermédio	12
2.3.3 Estágio final	15
3. CONSIDERAÇÕES FINAIS	19
4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	22
ANEXO A – MÉTODO GUM PARA AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO ..	23
A.1 Introdução.....	23
A.2 Fase de formulação.....	24
A.3 Fase de cálculo	25
A.4 Tabela de balanço de incertezas de medição	32

1. INTRODUÇÃO

No Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) coexistem diversos laboratórios que desenvolvem uma significativa atividade experimental incorporando, nos ensaios desenvolvidos, a medição de grandezas mensuráveis e, conseqüentemente, os requisitos de qualidade para a expressão dos resultados dessa medição (as suas estimativas e as respetivas incertezas associadas).

O Núcleo de Qualidade Metrológica (NQM), inserido no Centro de Instrumentação Científica, é um setor do LNEC com competências apropriadas para promover estudos de caracterização metrológica quer relacionados com a calibração e ensaio de instrumentação científica quer com o desempenho de sistemas de medição.

No que respeita aos ensaios desenvolvidos por outros setores do LNEC, a colaboração entre o NQM e esses setores é traduzida na concretização de estudos de caracterização metrológica onde se insere, com particular destaque, a avaliação das incertezas de medição associadas às grandezas de interesse. Este estudo, relacionado com o ensaio *wheel tracking* de misturas betuminosas a quente, efetuado pelo Laboratório de Ensaio de Materiais para Pavimentação (PAVMAT/LNEC), foi realizado por solicitação do Núcleo de Infraestruturas Rodoviárias e Aeroportuárias do Departamento de Transportes do LNEC.

Atendendo a que este laboratório se encontra integrado no Sistema de Gestão da Qualidade do LNEC, este estudo permite, também, cumprir um requisito normativo importante que decorre da aplicação da norma de referência NP EN ISO/IEC 17025 [1], que indica o conjunto de requisitos gerais de competência que os laboratórios de calibração e de ensaio devem cumprir.

Em particular, a declaração da incerteza de medição constitui um dos requisitos normativos aplicáveis aos ensaios laboratoriais, correspondendo a um elemento de quantificação da qualidade das medições realizadas. Faz-se notar que este parâmetro adquire uma importância particular ao permitir a comparação entre medições obtidas em ensaios de aptidão (interlaboratoriais) realizados por outras entidades.

Neste documento é descrito o processo de avaliação das incertezas de medição no ensaio *wheel tracking* de misturas betuminosas a quente com equipamento de pequena dimensão, segundo o procedimento de ensaio B e acondicionamento dos provetes ao ar, tendo por base a atividade laboratorial desenvolvida pelo PAVMAT/LNEC no âmbito da

caracterização experimental de materiais utilizados em pavimentação de infraestruturas rodoviárias e aeroportuárias.

O Capítulo 2 apresenta uma descrição sumária do ensaio estudado no que se refere ao objetivo, método, preparação e procedimento de ensaio adotados. Menciona, igualmente, o conjunto de relações funcionais que se estabelecem entre as várias grandezas de entrada e saída envolvidas, bem como, a caracterização probabilística das componentes de incerteza que conduz à elaboração das respetivas tabelas de balanço de incertezas pelo método GUM [2]. O Capítulo 3 é dedicado às considerações finais onde são expressas as melhores incertezas de medição do PAVMAT/LNEC na realização do ensaio *wheel tracking*.

Com o intuito de facilitar a compreensão do processo de avaliação de incertezas de medição realizado para o ensaio laboratorial analisado, são descritos, no Anexo A, os aspetos fundamentais relacionados com a formulação e o cálculo de incertezas de medição pelo método GUM.

2. ENSAIO *WHEEL TRACKING* COM EQUIPAMENTO DE PEQUENA DIMENSÃO, PROCEDIMENTO DE ENSAIO B E ACONDICIONAMENTO DOS PROVETES AO AR

2.1 *Descrição sumária do ensaio*

A adequada condição de serviço da superfície dos pavimentos rodoviários encontra-se sujeita a um desgaste que decorre da ação do tráfego, sendo necessário garantir que o seu projeto permita manter condições de serviço apropriadas ao longo da sua vida útil e que sejam evitados estados de deformação e de ruína com impacto na segurança rodoviária e com implicações económicas significativas.

Conforme exposto em [3] um dos estados de ruína considerado no dimensionamento de pavimentos consiste no aparecimento de depressões longitudinais na superfície do pavimento, ao longo das zonas de passagem dos rodados de veículos pesados (rodeiras). Estas deformações permanentes designam-se por “cavados de rodeira”.

A formação deste tipo de deformações tem como uma importante grandeza de influência a temperatura ao afetar a viscosidade dos ligantes betuminosos [3], sendo o seu estudo particularmente relevante tendo em consideração as temperaturas que ocorrem em Portugal durante o verão, constituindo esta uma das motivações para o estudo deste fenómeno no LNEC pelo Núcleo de Infraestruturas Rodoviárias e Aeroportuárias.

O ensaio designado por “*wheel tracking*” é um ensaio de simulação em pista de laboratório, com condições de ensaio monitorizadas e controladas, visando efetuar a avaliação do comportamento à deformação permanente de misturas betuminosas e permitindo uma análise comparativa de desempenho de materiais sujeitos à ação de passagens sucessivas de um rodado [3].

Este ensaio tem por objetivo avaliar, a nível laboratorial, a resistência à deformação de amostras de misturas betuminosas quando sujeitas a uma determinada carga contribuindo, deste modo, para a sua caracterização experimental no contexto de materiais aplicados na pavimentação de infraestruturas rodoviárias. Do ponto de vista normativo, os elementos essenciais à sua realização – método e equipamentos de ensaio, preparação de provetes das amostras e procedimentos de ensaio – encontram-se definidos na norma EN 12 697-22 [4], a qual é adotada pelo PAVMAT/LNEC no âmbito da sua atividade laboratorial acreditada.

O método de ensaio consiste em submeter um provete representativo da mistura betuminosa em análise a um número conhecido de passagens sucessivas de uma roda em carga a uma temperatura, aproximadamente, constante. O cavado de rodeira que, entretanto, se forma no provete de ensaio é caracterizado pela medição da sua profundidade tendo em conta a sua espessura inicial. Desta forma, pretende-se efetuar, em laboratório, a simulação da solicitação de carga proveniente da circulação rodoviária a que este tipo de material está sujeito quando aplicado em pavimentos de estradas e determinar a sua resistência à correspondente deformação.

A concretização experimental deste método requer um equipamento de ensaio dedicado, de acordo com a norma de referência [4], diferenciado em três alternativas consoante a sua dimensão: pequena, grande e muito grande.

A utilização de um determinado tipo de equipamento condiciona o procedimento de ensaio adotado, em particular, no que diz respeito ao tipo de provete e ao acondicionamento em que decorre o ensaio (ar ou água). No caso dos equipamentos de grande ou muito grande dimensão, o ensaio decorre obrigatoriamente com acondicionamento dos provetes ao ar enquanto que, no caso do equipamento de pequena dimensão, existem as alternativas do ensaio ser efetuado com acondicionamento dos provetes em água e de se efetuar o ensaio com provetes cilíndricos (carotes).

O PAVMAT/LNEC executa o ensaio de simulação em pista mediante o recurso ao equipamento de ensaio *wheel tracker* de duplo braço da Cooper Technology (*vide* Figura 1), constituído por uma estrutura que suporta uma câmara com temperatura controlada, onde se efetua o acondicionamento de um par de provetes ao ar. Dispõe, ainda, de duas rodas com pneus de borracha maciços que se deslocam longitudinalmente sobre provetes fixados a uma mesa de ensaio, sob carga, e com uma velocidade pré-definida. De acordo com a norma de ensaio [4], este equipamento possibilita a execução de dois procedimentos distintos – A e B – tendo o PAVMAT/LNEC adotado este último para a concretização laboratorial do ensaio *wheel tracking*. Deste modo, justifica-se que o presente estudo incida unicamente nesta variante de ensaio: equipamento de pequena dimensão, aplicação do procedimento de ensaio B e acondicionamento dos provetes ao ar.

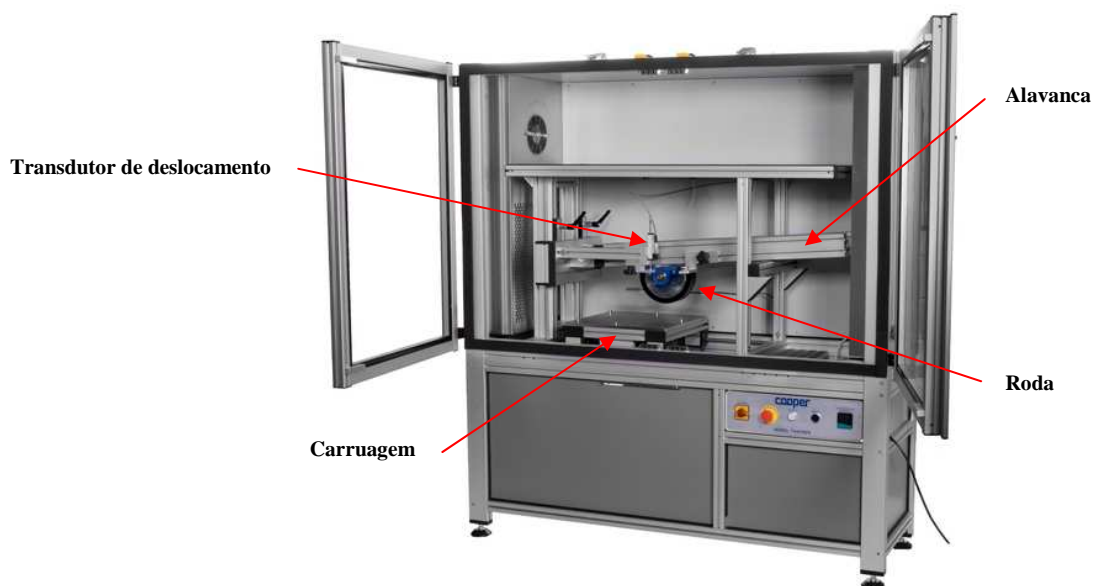


Figura 1 – Equipamento de ensaio wheel tracker de pequena dimensão utilizado pelo PAVMAT/LNEC (www.cooper.co.uk).

Este equipamento apresenta como principais elementos constituintes:

- roda com pneu de borracha maciço;
- mecanismo de aplicação de carga (alavanca com peso na extremidade);
- molde de colocação do provete de ensaio;
- carruagem de suporte do molde com o provete de ensaio;
- mecanismo de movimentação da carruagem;
- câmara térmica de ensaio;
- sistema computacional de atuação, controlo e monitorização.

O mecanismo de movimentação da carruagem assegura que a superfície de topo do provete seja exposta à passagem cíclica (movimento harmónico simples) da roda em carga. Note-se que cada ciclo inclui duas passagens – ida e volta – que são registadas de forma automática pelo equipamento de ensaio. De acordo com a norma de ensaio [4], o movimento harmónico simples da carruagem deverá apresentar uma frequência de $(26,5 \pm 1,0)$ ciclos/minuto, permitindo percorrer uma distância total de (230 ± 10) mm.

O equipamento descrito deverá permitir o cumprimento de um conjunto de requisitos estipulados pela norma de referência no que se refere a diversas mensurandas de interesse para o processo de medição descrevendo-se, em seguida, alguns destes:

- diâmetro externo do pneu, 200 mm, espessura de 20 mm e largura de 50 mm;
- programação da temperatura no interior da câmara entre 5 °C e 60 °C, com uma exatidão de $\pm 0,5$ °C;
- deformação observada usando um transdutor de deslocamento;
- força aplicada nas rodas (aplicável ao equipamento de pequenas dimensões e roda com 50 mm de largura) de $700 \text{ N} \pm 10 \text{ N}$.

Tendo em conta o método e procedimento de ensaio adotados, o equipamento acima descrito assegura a medição automática das seguintes mensurandas:

- deslocamento vertical da roda em carga, cuja cadeia de medição incorpora um transdutor de deslocamento com uma gama de medição compreendida entre 0 mm e 20 mm;
- temperatura do provete e da câmara de ensaio, recorrendo a termómetros com indicação digital.

Previamente à realização do ensaio, decorre a fase de preparação da amostra e dos provetes de ensaio representativos da mistura betuminosa cuja resistência à deformação se pretende caracterizar. Em regra, os provetes de ensaio podem ser obtidos a partir de uma mistura betuminosa produzida em laboratório ou extraída de um pavimento [3]. Em ambos os casos (amostra laboratorial ou de pavimento) a produção dos respetivos provetes de ensaio segue um conjunto sequencial de processos normalizados, conforme ilustrado na Figura 2.

A caracterização experimental dos provetes posteriormente sujeitos a ensaio é assegurada pela determinação da baridade (segundo o método e procedimento de ensaio descrito na norma EN 12 697-6), da espessura e da regularidade superficial.

No caso da determinação da espessura do provete, a norma de ensaio estipula que a quantificação desta grandeza corresponda ao valor médio de quatro medições em locais distintos (no ponto médio das laterais, no caso de provete retangular ou em intervalos de 90°, no caso de provetes cilíndricos), devendo ser cumpridos os requisitos normativos relativos aos desvios obtidos face ao valor nominal de espessura do provete. No PAVMAT/LNEC, as referidas medições de espessura são obtidas com recurso a um paquímetro rastreado a padrões dimensionais.

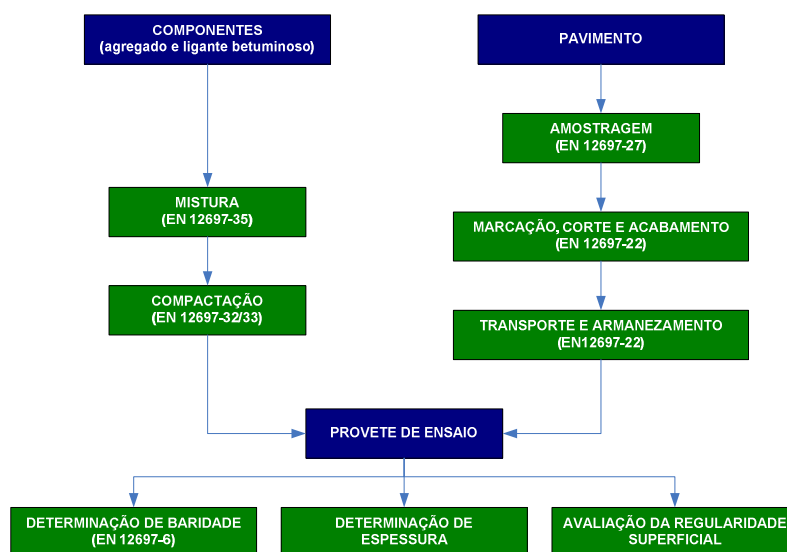


Figura 2 – Preparação da amostra e dos provetes de ensaio .

Por sua vez, a regularidade superficial do provete é avaliada com recurso a uma régua colocada sobre a superfície do provete sujeita a ensaio, promovendo-se a observação de desvios em quatro direções separadas por intervalos de, aproximadamente, 45°. De acordo com a norma de ensaio [4], o provete será rejeitado para ensaio caso apresente algum desvio superior a 2 mm.

O procedimento adotado pelo PAVMAT/LNEC, suportado na norma de referência EN 12 697-22 [4], exige que os provetes de ensaio sejam sujeitos a um condicionamento prévio em temperatura visando promover a sua estabilidade térmica em torno da temperatura de ensaio (a tolerância normativa corresponde a ± 1 °C). O período de tempo de condicionamento apresenta um valor mínimo de quatro horas ou seis horas, consoante os provetes possuam uma espessura nominal de inferior ou superior a 60 mm, respetivamente. De acordo com a norma de ensaio [4], o período de tempo de condicionamento não deverá exceder as 24 horas, sendo efetuado com recurso ao equipamento de ensaio dedicado o qual funciona, também, como câmara visando a manutenção de condição térmica estável (tipicamente em torno de 60 °C) antes e durante o ensaio.

O provete de ensaio e respetivo molde são colocados fixos, de forma rígida, sobre a carruagem do equipamento de ensaio sendo instalado um sensor de temperatura no provete a uma profundidade de cerca de 20 mm relativamente à superfície exposta. O início do ensaio

é antecedido pela realização prévia de cinco ciclos de carga, os quais têm como objetivo avaliar a viabilidade técnica da montagem experimental anteriormente descrita.

O ensaio decorre de forma automática, uma vez que o equipamento de ensaio dispõe de um sistema de atuação, controlo e monitorização, efetuando um conjunto de 10 000 ciclos de carga (correspondente a um total de 20 000 passagens de ida e volta) ou até ao instante em que é atingida uma profundidade da rodeira igual a 20 mm. No ensaio realizado pelo PAVMAT/LNEC, a grandeza mensurável, profundidade da rodeira (após um determinado número de ciclos de carga), corresponde ao valor médio da medição de profundidade em 27 posições da superfície numa passagem, com espaçamento regular de 4 mm, cumprindo os requisitos estabelecidos no procedimento de ensaio [4].

Tendo em conta a dimensão do equipamento utilizado no PAVMAT/LNEC, o procedimento de ensaio adotado e o tipo de exposição ambiental do provete, a norma de ensaio [4] prevê que sejam ensaiados, no mínimo, dois provetes de uma amostra de mistura betuminosa.

2.2 Relações e diagramas funcionais

Na descrição apresentada na secção anterior, é possível identificar duas grandezas de entrada – a **espessura do provete** e o **deslocamento vertical da roda em carga** – com interesse para a avaliação de incertezas de medição das grandezas de saída do ensaio *wheel tracking* realizado pelo PAVMAT/LNEC. Numa representação funcional, a medição destas grandezas contém um conjunto de grandezas intermédias que estabelecem a ligação entre as grandezas de entrada e de saída, uma vez que o referido ensaio envolve a medição indireta das grandezas de interesse. No conjunto de grandezas intermédias, destaca-se:

- a **espessura média do provete de ensaio**, \bar{h} , obtida a partir das quatro medições individuais de espessura, h_i , o que se traduz na seguinte expressão

$$\bar{h} = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4}; \quad (1)$$

- a **profundidade da rodeira após 10 000 ciclos de carga**, RD_{air}^1 ou d_{10000} , que é definida como o valor médio das medições de deslocamento vertical da roda em carga (no PAVMAT/LNEC são realizadas 27 medições numa passagem completa) após 10 000 ciclos de carga, $d_{10000,i}$, ou seja,

$$RD_{\text{air}} = d_{10000} = \frac{d_{10000,1} + d_{10000,2} + \dots + d_{10000,27}}{27}; \quad (2)$$

- a **profundidade da rodeira após 5 000 ciclos de carga**, d_{5000} , que corresponde ao valor médio das medições de deslocamento vertical da roda em carga após 5 000 ciclos, $d_{5000,i}$, ou seja,

$$d_{5000} = \frac{d_{5000,1} + d_{5000,2} + \dots + d_{5000,27}}{27}. \quad (3)$$

O conhecimento destas grandezas intermédias permite que se definam as duas grandezas de saída – **profundidade da rodeira** e a **taxa de deformação** que contribuem para a caracterização do provete ensaiado em função da resistência à deformação.

A grandeza **profundidade da rodeira**, PRD_{air} , é habitualmente expressa de forma percentual, correspondendo ao rácio entre a profundidade da rodeira após 10 000 ciclos de carga e a espessura média do provete de ensaio, isto é,

$$PRD_{\text{air}} = \frac{RD_{\text{air}}}{h} \times 100. \quad (4)$$

Esta mensuranda permite caracterizar a resistência à deformação da mistura betuminosa em análise mediante uma comparação relativa entre a profundidade da rodeira provocada pela realização do ensaio e a espessura média inicial do provete. Deste modo, quanto maior é a magnitude desta grandeza, menor será a resistência à deformação.

Por sua vez, a grandeza **taxa de deformação**, WTS_{air} , é obtida com base na diferença entre as profundidades da rodeira após 10 000 ciclos e 5 000 ciclos de carga, ou seja,

$$WTS_{\text{air}} = \frac{d_{10000} - d_{5000}}{5}, \quad (5)$$

¹ Note-se que o índice inferior “air” do símbolo da grandeza refere a condição de exposição da superfície de ensaio do provete, no caso do procedimento de ensaio adotado pelo PAVMAT/LNEC trata-se do meio “ar”.

sendo expressa em $\text{mm}/10^3$ ciclos de carga, pretendendo caracterizar a velocidade do processo de formação da rodeira no provete após um período inicial transiente (número de ciclos de carga inferior a 5 000). A sua quantificação permite avaliar, numa vertente dinâmica, a deformação da amostra betuminosa ao longo do tempo quando sujeita a um número elevado de passagens.

A Figura 3 apresenta o conjunto de relações funcionais anteriormente descrito, permitindo identificar as diversas grandezas envolvidas e as respetivas funções que determinam os diferentes estágios de propagação de incertezas de medição (inicial, intermédio e final) até às mensurandas de interesse do ensaio.

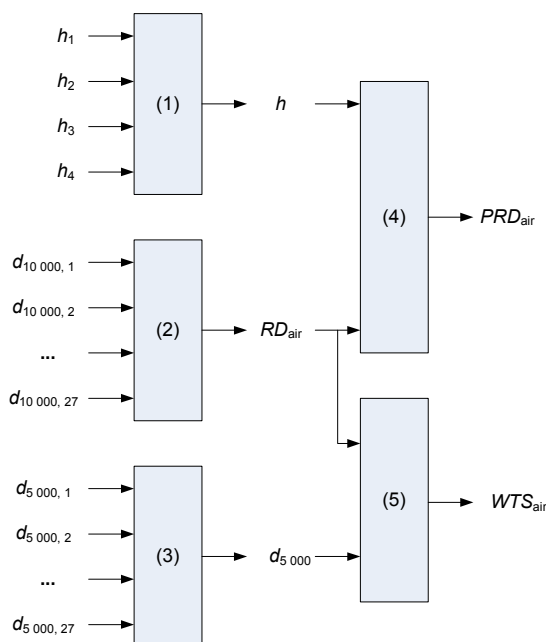


Figura 3 – Diagrama funcional do ensaio wheel tracking com recurso a equipamento de pequena dimensão, procedimento de ensaio B e acondicionamento dos provetes ao ar .

2.3 Tabelas de balanço de incertezas de medição

2.3.1 Estágio inicial

A medição individual da espessura do provete é efetuada com recurso a um paquímetro rastreado a padrões dimensionais. A consulta do seu certificado de calibração

permite identificar várias fontes de incerteza de natureza instrumental e metodológica, cuja caracterização probabilística se encontra exposta no Quadro 1.

Quadro 1 – Componentes de incerteza da medição individual da espessura do provete de ensaio.

Componente de incerteza	Fonte de incerteza	Limites de variação	Função densidade de probabilidade	Fonte de informação
δh_{cal}	Calibração	$\pm 0,008$ mm	Gaussiana	Certificado de calibração
δh_{par}	Paralelismo das pontas	$\pm 0,020$ mm	Triangular	
δh_{rep}	Repetibilidade instrumental	$\pm 0,005$ mm	Gaussiana	
δh_{res}	Resolução	$\pm 0,005$ mm	Uniforme	

A soma quadrática destas componentes de incerteza mediante aplicação do método GUM (Lei de Propagação de Incertezas) [2] traduz-se numa incerteza-padrão da medição da espessura igual a **0,013 mm** com 146 graus de liberdade.

No Quadro 2 são declaradas as componentes de incerteza associadas à medição do deslocamento vertical da roda em carga, tendo como fonte de informação o certificado de calibração e ensaio metrológico do equipamento de ensaio do PAVMAT/LNEC. Salienta-se a existências de três componentes associadas às folgas entre os vários elementos constituintes do equipamento de ensaio e o desvio de circularidade da roda.

Quadro 2 – Caracterização probabilística das componentes de incerteza de medição da grandeza deslocamento vertical da roda em carga.

Componente de incerteza	Fonte de incerteza	Limites de variação	Função densidade de probabilidade	Fonte de informação
δl_{cal}	Calibração dimensional	$\pm 0,027 5$ mm	Gaussiana	Certificado de calibração
δl_{res}	Resolução	$\pm 0,005 0$ mm	Uniforme	
δl_{zer}	Desvio de zero	$\pm 0,005 0$ mm	Uniforme	
δl_{rod}	Desvio de circularidade	$\pm 0,002 0$ mm	Uniforme	
δl_{rol}	Folga vertical nos rolamentos da roda	$\pm 0,007 5$ mm	Gaussiana	
δl_{ala}	Folga vertical no braço da alavanca	$\pm 0,007 5$ mm	Gaussiana	
δl_{car}	Movimento vertical da carruagem	$\pm 0,007 5$ mm	Gaussiana	

Neste caso, a soma quadrática destas componentes de incerteza, por aplicação do método GUM [2], traduz-se numa incerteza-padrão da medição igual a **0,037 mm** com 121 graus de liberdade.

Refira-se que ambos os valores de incerteza de medição obtidos nesta secção (espessura do provete e deslocamento vertical da roda em carga) serão os adotados no estágio intermédio de propagação de incertezas descrito na secção que se segue.

2.3.2 Estágio intermédio

Conforme referido na secção 2.2, a grandeza espessura média do provete de ensaio é obtida com base em quatro medições locais de espessura igualmente distribuídas. Neste caso, a incerteza de medição associada apresenta, essencialmente, duas componentes: o desvio-padrão experimental da média e a variabilidade associada à irregularidade superficial intrínseca ao provete medido.

A primeira componente mencionada é quantificada mediante o conhecimento da incerteza-padrão, $u(h_i)$, associada a uma medição local de espessura (*vide* secção 2.3.1) e do número de medições efetuadas (quatro, por imposição normativa). No que se refere à segunda componente mencionada, a sua quantificação mediante o cálculo do desvio-padrão das quatro medições individuais de espessura revela uma significativa influência do tipo de mistura betuminosa que compõe o provete de ensaio. Considera-se adequada a adoção de uma função de densidade de probabilidade uniforme cujo limite de variação é definido pelo valor máximo admissível de irregularidade superficial, δ_{sup} , indicado na norma de ensaio [4] (correspondente a 2 mm). Deste modo, a variância associada à espessura média do provete de ensaio, $u^2(\bar{h})$, traduz-se na seguinte expressão

$$u^2(\bar{h}) = \frac{u^2(h_i)}{4} + \left(\frac{\delta_{\text{sup}}^2}{3} \right), \quad (6)$$

que constitui a base para a elaboração da tabela de balanço de incertezas de medição apresentada no Quadro 3.

Quadro 3 – Tabela de balanço de incertezas de medição da grandeza espessura média do provete.

Grandezas de entrada X_i	Estimativas x_i	Incertezas-padrão $u(x_i)$	Coefficientes de sensibilidade c_i	Contribuições para a incerteza-padrão de medição $u_i(y)$	Graus de liberdade ν_i
\bar{h}	50 mm	0,006 4 mm	1	0,006 4 mm	3
δh_{sup}	0 mm	1,2 mm	1	1,2 mm	50
				Incerteza-padrão de medição	1,2 mm
				Graus de liberdade efetivos	50
				Fator de expansão	2,01
				Incerteza expandida de medição (95 %)	2,3 mm

A observação deste Quadro permite concluir que a incerteza de medição da espessura média é dominada pela contribuição associada à irregularidade superficial do provete de ensaio, tornando a componente de incerteza da medição associada à espessura desprezável face à sua magnitude reduzida.

No que se refere às grandezas profundidade da rodeira após 5 000 ciclos ou 10 000 ciclos², as suas estimativas também são obtidas pelo cálculo da média aritmética das medições individuais de deslocamento vertical da roda em carga numa passagem completa (o procedimento de ensaio adotado pelo PAVMAT/LNEC define a realização de 27 medições por passagem completa).

Deste modo, a incerteza de medição associada a ambas as grandezas incorpora, por um lado, a componente relativa ao desvio-padrão experimental da média e, por outro lado, a componente $s(d_i)$ associada ao desvio-padrão da amostra de medições de deslocamento vertical da roda em carga numa passagem completa (com dimensão $n = 27$), tal como se estabelece na expressão seguinte

$$u^2(d_{5000}) = u^2(d_{10000}) = u^2(RD_{\text{air}}) = \frac{u^2(d_i)}{n} + s^2(d_i). \quad (7)$$

No primeiro caso, a quantificação do desvio-padrão experimental da média é suportada na incerteza-padrão, $u(d_i)$, associada a uma medição de deslocamento (*vide*

² A utilização do mesmo método e instrumento de medição para a medição de ambas as grandezas permite justificar que a incerteza de medição associada às suas estimativas seja idêntica.

secção 2.3.1) e no número de medições efetuadas numa determinada passagem de volta associada ao ciclo 5 000 ou 10 000.

A quantificação do desvio-padrão da amostra de medições é suportada na análise dos resultados experimentais produzidos pelo PAVMAT/LNEC na realização de seis ensaios em pista (*wheel tracking*) de misturas betuminosas distintas. De cada um destes ensaios é possível obter uma amostra de 200 estimativas de desvios-padrão, correspondente ao número de passagens com registo de medições de deslocamento vertical da roda em carga num ensaio.

A Figura 4 apresenta a sua representação gráfica em função do número de passagens sendo possível observar que o desvio-padrão da amostra após 10 000 passagens (5 000 ciclos de carga) e 20 000 passagens (10 000 ciclos de carga) apresenta uma dispersão variável de valores consoante o provete ensaiado, podendo variar entre 0,05 mm e 0,15 mm.

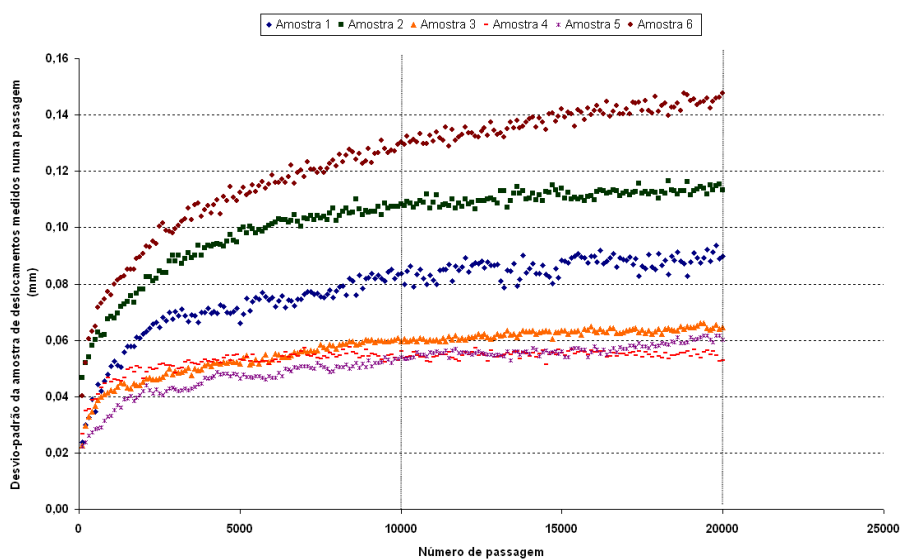


Figura 4 – Desvios-padrão da amostra de deslocamentos verticais versus número de passagem.

Atendendo a um dos principais objetivos delineado para este estudo – a determinação das melhores incertezas de medição do PAVMAT/LNEC na realização do ensaio *wheel tracking* – considera-se adequado proceder à adoção do menor valor do desvio-padrão da amostra observado para um número de passagens compreendido entre 10 000 e 20 000 ciclos de carga, ou seja, o valor de 0,05 mm.

O conhecimento destas duas componentes, seguida da aplicação da expressão (7) visando a propagação de incertezas de medição, torna possível construir a respetiva tabela de balanço de incertezas de medição do valor médio da profundidade da rodeira após 10 000 ciclos de carga (ou de forma idêntica para 5 000 ciclos de carga), conforme exposto no Quadro 4.

Quadro 4 – Tabela de balanço de incertezas de medição da grandeza valor médio da profundidade da rodeira após 10 000 ciclos de carga num ensaio tipo³.

Grandezas de entrada X_i	Estimativas x_i	Incertezas-padrão $u(x_i)$	Coefficientes de sensibilidade c_i	Contribuições para a incerteza-padrão de medição $u_i(y)$	Graus de liberdade ν_i
RD_{air}	3,91 mm	0,007 mm	1	0,007 mm	26
$s(RD_{air})$	0 mm	0,050 mm	1	0,050 mm	26
				Incerteza-padrão de medição	0,050 mm
				Graus de liberdade efetivos	27
				Fator de expansão	2,05
				Incerteza expandida de medição (95 %)	0,10 mm

2.3.3 Estágio final

Conhecidas as incertezas de medição associadas às grandezas espessura média do provete de ensaio e profundidade da rodeira após 5 000 ciclos ou 10 000 ciclos de carga, é possível proceder à sua propagação, por aplicação do método GUM (Lei de Propagação de Incertezas) [2], às grandezas de saída: profundidade de rodeira (em valor percentual), PRD_{air} , e a taxa de deformação, WTS_{air} .

Tendo em conta a relação funcional (*vide* secção 2.2) pela qual se obtém o valor percentual de profundidade de rodeira relativamente à espessura inicial do provete, a aplicação do método GUM permite que a sua variância seja estimada pela expressão:

$$u^2(PRD_{air}) = c_{RD_{air}}^2 u^2(RD_{air}) + c_h^2 u^2(\bar{h}), \quad (8)$$

³ Os valores de incerteza apresentados são igualmente válidos para a grandeza valor médio da profundidade da rodeira após 5 000 ciclos de carga visto que se recorre ao mesmo método e instrumento de medição.

$$\text{com } c_{RD_{\text{air}}} = \frac{100}{\bar{h}} \text{ e } c_{\bar{h}} = -\frac{100 \cdot RD_{\text{air}}}{\bar{h}^2}.$$

Desta resulta a incerteza de medição que se pretende obter para o caso de um ensaio tipo realizado no PAVMAT/LNEC, apresentando-se os resultados obtidos no Quadro 5.

Quadro 5 – Tabela de balanço de incertezas de medição da grandeza valor percentual da profundidade da rodeira num ensaio tipo.

Grandezas de entrada X_i	Estimativas x_i	Incertezas-padrão $u(x_i)$	Coefficientes de sensibilidade c_i	Contribuições para a incerteza-padrão de medição $u_i(y)$	Graus de liberdade ν_i
RD_{air}	3,91 mm	0,05 mm	2 % mm ⁻¹	0,10 %	27
\bar{h}	50,0 mm	1,2 mm	-0,16 % mm ⁻¹	0,18 %	50
				Incerteza-padrão de medição	
					0,21 %
				Graus de liberdade efetivos	
					73
				Fator de expansão	
					1,99
				Incerteza expandida de medição (95 %)	
					0,41 %

No que se refere à grandeza taxa de deformação, a aplicação do método GUM (Lei de Propagação de Incertezas) [2] permite estimar a sua variância usando a expressão,

$$u^2(WTS_{\text{air}}) = c_{d_{10000}}^2 u^2(d_{10000}) + c_{d_{5000}}^2 u^2(d_{5000}) + 2c_{d_{10000}} c_{d_{5000}} u(d_{10000})u(d_{5000})r(d_{10000}, d_{5000}), \quad (9)$$

onde $c_{d_{10000}} = \frac{1}{5}$ e $c_{d_{5000}} = -\frac{1}{5}$ e $r(d_{10000}, d_{5000})$ corresponde ao coeficiente de correlação entre as grandezas d_{5000} e d_{10000} .

Note-se que, nesta expressão, se assume que o equipamento de ensaio efetua uma contagem do número de ciclos de carga com uma incerteza bastante reduzida tendo em conta a automação do método e o sistema de contagem utilizado. Refira-se que o ensaio metrológico periódico do equipamento de ensaio, na vertente da frequência de rotação, permite reforçar a hipótese assumida.

As amostras relativas aos deslocamentos verticais registados no ensaio de seis provetes (mencionadas na secção 2.3.2) suportaram a realização de uma análise de

covariância entre as grandezas d_{5000} e d_{10000} justificada pelo facto da medição destas grandezas recorrer ao mesmo método e à mesma cadeia de medição dimensional. O Quadro 6 expõe os principais resultados que resultaram dessa análise tendo em conta a incerteza-padrão de medição obtida para ambas grandezas envolvidas (0,050 mm, de acordo com o conteúdo exposto no Quadro 4). O sinal negativo do coeficiente $c_{d_{5000}}$ na expressão (9) indica que o efeito de correlação entre grandezas contribuirá para uma redução da incerteza-padrão de medição combinada.

Quadro 6 – Análise de covariância entre as grandezas profundidade da rodeira após 5 000 e 10 000 ciclos.

Amostra de dados	Covariância (mm ² /10 ⁶)	Coefficiente de correlação	Contribuição da correlação de grandezas para a redução da incerteza-padrão de medição combinada, (mm/10 ³)
1	0,000 12	0,05	0,000 4
2	0,000 74	0,29	0,002 2
3	0,000 15	0,06	0,000 4
4	0,000 11	0,04	0,000 3
5	0,000 28	0,11	0,000 8
6	0,000 46	0,18	0,001 4

Os valores obtidos, expostos no Quadro anterior, permitem concluir que a redução da incerteza-padrão de medição combinada da grandeza taxa de deformação não é significativa face ao valor obtido excluindo a correlação de grandezas, pelo que o seu efeito não é contabilizado no respetivo balanço, o que se traduz, numa ótica do conceito de melhor capacidade de medição do laboratório, na majoração do valor de incerteza de medição.

Tendo em conta a expressão (9) e os resultados anteriormente obtidos para as outras grandezas de interesse num ensaio tipo do PAVMAT/LNEC, o Quadro 7 apresenta o valor de incerteza de medição da estimativa da grandeza taxa de deformação.

Quadro 7 – Tabela de balanço de incertezas de medição da grandeza taxa de deformação num ensaio tipo.

Grandezas de entrada	Estimativas	Incertezas-padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza-padrão de medição	Graus de liberdade
X_i	x_i	$u(x_i)$	c_i	$u_i(y)$	ν_i
d_{10000}	3,91 mm	0,050 mm	0,2	$0,010 \text{ mm}/10^3$	27
d_{5000}	3,21 mm	0,050 mm	0,2	$0,010 \text{ mm}/10^3$	27
WTS_{air}	$0,140 \text{ mm}/10^3$	Incerteza-padrão de medição		$0,014 \text{ mm}/10^3$	
		Graus de liberdade efetivos			54
		Fator de expansão			2,00
		Incerteza expandida de medição (95 %)		$0,029 \text{ mm}/10^3$	

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo permitiu efetuar a avaliação de incertezas de medição associadas às estimativas de grandezas mensuráveis no ensaio *wheel tracking* de misturas betuminosas a quente realizado pelo PAVMAT/LNEC, com recurso a equipamento de pequena dimensão e seguindo o procedimento de ensaio B com acondicionamento de provetes ao ar.

A caracterização probabilística efetuada para as grandezas de entrada, bem como, a propagação de incertezas de medição pelas restantes grandezas intermédias até às grandezas de saída permitiram obter, para um provete de ensaio, as seguintes incertezas expandidas de medição (para um intervalo de confiança de 95 %):

- **profundidade da rodeira a 10 000 ciclos de carga**, $U_{95}(RD_{\text{air}}) = 0,10 \text{ mm}$;
- **valor percentual de profundidade da rodeira**, $U_{95}(PRD_{\text{air}}) = 0,41 \%$;
- **taxa de deformação**, $U_{95}(WTS_{\text{air}}) = 0,029 \text{ mm}/10^3 \text{ ciclos de carga}$.

Neste processo recorreu-se ao método GUM, por aplicação da Lei de Propagação de Incertezas, atendendo à linearidade dos modelos matemáticos que suportam as relações funcionais entre mensurandas.

A avaliação das incertezas de medição obtidas nos vários estágios de propagação permite concluir que a componente instrumental de medição de espessura e deslocamento vertical têm uma contribuição pouco significativa no balanço final das incertezas de medição. De facto, observa-se que a dispersão obtida resulta, por um lado, da variação intrínseca de espessura do próprio provete e, por outro lado, das irregularidades superficiais na rodeira formada durante o ensaio. No caso específico da grandeza taxa de deformação, a análise efetuada permitiu concluir que a correlação entre as suas grandezas de entrada possui uma contribuição pouco significativa na redução da magnitude da incerteza de medição desta grandeza de interesse.

Atendendo à reduzida influência das estimativas das grandezas de entrada na quantificação das componentes de incerteza identificadas, os valores de incertezas expandidas de medição mencionados podem ser considerados como representativos das melhores incerteza de medição do laboratório, evidenciando o cumprimento do requisito imposto pela norma de referência NP EN ISO/IEC 17025 e quantificando a capacidade

metrológica do PAVMAT/LNEC para a realização do referido ensaio no âmbito da sua acreditação no contexto do Sistema Português da Qualidade.

Note-se que os valores de incertezas de medição das grandezas de saída apresentados nesta secção dizem respeito ao ensaio em pista (*wheel tracking*) de apenas um provete de mistura betuminosa recordando que, por imposição normativa, deverão ser ensaiados, no mínimo, dois provetes. Neste caso, o cálculo das incertezas de medição das grandezas de saída deverá contabilizar as incertezas de medição dos valores médios obtidos (correspondem aos desvios-padrão experimentais das médias), bem como, a componente relativa à variabilidade da amostra de mistura betuminosa, expressa pelo desvio-padrão da amostra (com dimensão mínima igual a dois), sendo aplicáveis as seguintes expressões:

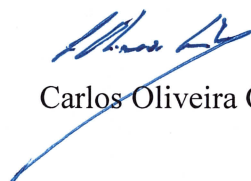
$$u^2(\overline{PRD}_{\text{air}}) = \frac{u^2(PRD_{\text{air}})}{2} + s^2(PRD_{\text{air}}), \quad (10)$$

$$u^2(\overline{RD}_{\text{air}}) = \frac{u^2(RD_{\text{air}})}{2} + s^2(RD_{\text{air}}), \quad (11)$$

$$u^2(\overline{WTS}_{\text{air}}) = \frac{u^2(WTS_{\text{air}})}{2} + s^2(WTS_{\text{air}}). \quad (12)$$

VISTOS

O Diretor do CIC,



Carlos Oliveira Costa

AUTORIA



Luís Filipe Lages Martins

Lic.º em Engenharia Mecânica
Bolsheiro de Doutoramento



Álvaro Silva Ribeiro

Lic.º Física Tecnológica, Doutor
Investigador Auxiliar, Chefe do NQM

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NP EN ISO/IEC 17025:2005 – Requisitos gerais de competência para laboratórios de ensaio e calibração. Caparica (Portugal): Instituto Português da Qualidade (IPQ), dezembro de 2005.
- [2] *Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)*. Genève (Suíça): International Organization for Standardization (ISO), 1995.
- [3] Freire, A. C., Batista, F., Maia, A., “Caracterização do Comportamento à Deformação Permanente de Misturas Betuminosas”, Informação Científica e Técnica (ICT), Lisboa (Portugal): Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), a publicar.
- [4] EN 12 697-22:2003+A1:2007 – Bituminous mixtures – Test methods for hot mix asphalt. Part 22: Wheel tracking. Brussels (Bélgica): European Committee for Standardization (CEN), July 2007.
- [5] *Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM)*, 3ª edição. Caparica (Portugal): Instituto Português da Qualidade (IPQ), novembro de 2008.
- [6] Satterthwaite, F. E., (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110-114.
- [7] Welch, B. L., (1947) *Biometrika.* **34**, 28-35.

ANEXO A – MÉTODO GUM PARA AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO

A.1 Introdução

A evolução recente da Metrologia tem como uma das suas principais consequências a introdução do conceito de incerteza de medição como parâmetro inerente ao resultado da medição (associado ao valor da estimativa de uma grandeza mensurável), constituindo este o elemento indicativo do nível de exatidão da medição.

Um dos métodos que suporta a sua determinação é descrito no *Guide to the expression of Uncertainty in Measurement (GUM)*⁴[2] adotado pela comunidade metrológica contendo, entre outros aspetos: o enquadramento da medição no contexto probabilístico atualmente aceite; os conceitos e definições aplicáveis; as fontes genéricas que contribuem para a avaliação da incerteza; e o procedimento de avaliação de incertezas de medição incorporando a conhecida Lei de Propagação de Incertezas (cuja designação abreviada é “LPI”).

A informação que se encontra no GUM deve ser complementada com a consulta do conjunto de definições que se encontra no *Vocabulário Internacional de Metrologia* [5], cuja 3ª edição foi publicada em 2008 pelo *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM), constituído pelas principais organizações metrológicas a nível internacional.

Com o intuito de facilitar a compreensão das tabelas de balanço de incerteza apresentadas em capítulos anteriores, é promovida, então, a descrição que se segue.

Qualquer procedimento de avaliação das incertezas de medição e, em particular, aquele que é preconizado pelo GUM, tem na sua base duas fases distintas: a fase de formulação e a fase de cálculo.

É na concretização destas fases que se estabelece o modelo matemático essencial para traduzir o problema físico envolvido e que se constitui a LPI necessária à avaliação pretendida.

⁴ De acordo com a revisão do GUM em curso, envolvendo a introdução de alguns documentos suplementares, a nova sigla adotada é “GUF” apontando o âmbito do Guia para um contexto mais alargado (Framework) englobando diversos métodos de avaliação de incertezas de medição.

A.2 Fase de formulação

Esta fase contém como elemento fundamental o modelo matemático descritivo do problema metrológico, no qual se baseia a estimativa de uma grandeza mensurável e a incerteza associada a essa estimativa.

Assim, o modelo matemático relaciona a grandeza de saída – a mensuranda – Y , com um conjunto de grandezas de entrada, X_i , através do que se designa por relação funcional:

$$Y = f(X_1, \dots, X_N). \quad (\text{A.1})$$

Este modelo matemático possui uma tradução para a realidade experimental que é, necessariamente, imperfeita devido às limitações naturais da instrumentação, dos métodos e de outros fatores, determinando a existência de um erro de medição. Da medição resultam observações e estimativas, \hat{x}_i , associadas a variáveis aleatórias do modelo matemático, conduzindo a uma estimativa da grandeza mensurável de saída, \hat{y} , cuja expressão é:

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N). \quad (\text{A.2})$$

A definição de *erro (absoluto) da medição*, ε , diz-nos que este representa a *diferença entre o valor da estimativa ou observação (\hat{A}) e o valor verdadeiro da grandeza (\tilde{A})*. Sendo este último, na perspetiva atual da medição, considerado inatingível, resulta a impossibilidade prática da sua quantificação

$$\varepsilon = \hat{A} - \tilde{A}. \quad (\text{A.3})$$

Este facto, no entanto, não impede que seja possível identificar as fontes que contribuem para esse erro e distinguir, nestas, as componentes cuja contribuição é de natureza sistemática ou aleatória.

Em relação a estas contribuições, de acordo com o disposto no GUM [2], considera-se que o conhecimento das componentes sistemáticas do erro – de natureza determinística – impõe a sua correção, enquanto que as contribuições aleatórias – de natureza estocástica – devem incorporar um intervalo de dispersão global, relativo à estimativa da mensuranda, no que se designa por incerteza de medição.

No que se refere à sua origem, estas *componentes aleatórias do erro* resultam de variações imprevisíveis de natureza espacial ou temporal, sendo provocadas por *grandezas*

de influência, manifestando-se na variação das observações da grandeza mensurável no que se designa por *efeitos aleatórios*. O GUM [2] admite como fontes de incerteza as seguintes:

- *definição incompleta da mensuranda;*
- *realização imperfeita da definição da mensuranda;*
- *não-representatividade da amostra;*
- *conhecimento inadequado ou a medição imperfeita dos efeitos das condições ambientais na determinação da mensuranda;*
- *derivas na leitura efetuada por operadores de instrumentos com indicadores analógicos;*
- *resolução ou a discriminação finita dos instrumentos de medição;*
- *valores inexatos de padrões e de materiais de referência;*
- *valores inexatos de constantes e outros parâmetros obtidos mediante o recurso a fontes externas e usados em algoritmos computacionais;*
- *aproximações e os valores assumidos, os quais são incorporados no método e no procedimento de medição;*
- *variações obtidas em observações repetidas da mensuranda em condições aparentemente idênticas (próximas das condições ideais de repetibilidade).*

É do cômputo das contribuições aleatórias provenientes destas fontes que resulta, então, a quantificação da incerteza de medição, definida como [2]: “*parâmetro, associado ao resultado da medição, caracterizando a dispersão de valores que podem, razoavelmente, ser atribuídos à mensuranda*”. Desta definição, é admitido implicitamente que, em resultado da medição, não é possível atribuir um valor único – verdadeiro – da mensuranda mas, antes, um intervalo de valores prováveis.

A.3 Fase de cálculo

A fase de cálculo sucede à fase de formulação e tem como finalidade obter a incerteza expandida de medição, sendo este objetivo atingido mediante a aplicação do método GUM [2] envolvendo um conjunto de etapas. Estas contêm expressões e envolvem conceitos de cuja compreensão depende a sua aplicação.

Desde logo, é conveniente ter presente que as observações associadas às grandezas de entrada têm uma natureza aleatória e, como tal, possuem uma dispersão de valores que é determinada pelos parâmetros variância e desvio-padrão experimental.

Logo, a primeira etapa do procedimento GUM [2] estabelece a necessidade de distinguir as componentes de incerteza consoante a origem da informação que lhes fornece os elementos para a determinação dos parâmetros referidos.

No GUM são admitidas duas vias para a obtenção dos parâmetros estatísticos: a amostra experimental; ou o conhecimento prévio do tipo de distribuição de probabilidade. No primeiro caso, diz-se que essa avaliação é feita de acordo com o “*método tipo A*” e no segundo caso, de acordo com o “*método tipo B*”.

Tendo em vista o objetivo de obter o parâmetro estimador dessa dispersão, o desvio-padrão experimental e sabendo que este se determina a partir da variância, $s^2(x_i)$, torna-se necessário, portanto, concretizar a quantificação deste último parâmetro.

No caso em que se adota o método do tipo A, subentende-se que se determina a contribuição para a incerteza de medição a partir da estatística da variância de uma amostra experimental de observações (de acordo com uma perspetiva frequencista do problema). No caso de adoção do método do tipo B, considerando apropriada a utilização de determinada função densidade de probabilidade, cujos limites se estabelecem com base em conhecimento previamente adquirido⁵, é utilizada a expressão analítica da variância dessa distribuição para quantificar a pretendida contribuição para a incerteza de medição (neste caso, a abordagem segue a perspetiva bayesiana do problema).

Do ponto de vista prático, quando se recorre ao método do tipo A, é utilizada uma amostra experimental de uma grandeza de entrada Q , contendo observações q_i , obtendo-se o seu valor médio – utilizado na determinação da estimativa da grandeza de acordo com o modelo matemático (A.1) – cuja expressão é:

$$\hat{q} = \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i . \quad (\text{A.4})$$

A variância experimental da média é determinada por

⁵ Por exemplo: dados relativos a medições anteriores; experiência ou conhecimento comum relativo ao comportamento e propriedades de materiais e instrumentos de medição; especificações de fabricantes e documentação de caráter técnico e científico; dados obtidos em calibrações, ensaios e certificados.

$$s^2(\bar{q}) = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2, \quad (\text{A.5})$$

de onde se obtém o pretendido valor do desvio-padrão experimental da média

$$s(\bar{q}) = \sqrt{s^2(\bar{q})}. \quad (\text{A.6})$$

Em alternativa, a utilização do método do tipo B, admite que se possui informação suficiente para se estipular qual a função densidade de probabilidade, os seus parâmetros e o grau de confiança dessa aceitação. Com base nesta informação, recorrendo às expressões analíticas, é possível determinar a variância e o respetivo desvio-padrão. Em Metrologia, os casos mais comuns de distribuições de probabilidade estão tipificados de acordo com o exposto no Quadro A.1 que apresenta, igualmente, as expressões das variâncias.

Conhecendo-se a forma de determinar a dispersão das grandezas de entrada, x_i , independentemente de resultarem de abordagens de acordo com o método do tipo A ou do tipo B, a etapa seguinte consiste em estabelecer a forma como estas se combinam, conduzindo à determinação da incerteza de medição da grandeza de saída, y .

O método utilizado no GUM recorre ao desenvolvimento em série de Taylor para obter a LPI.

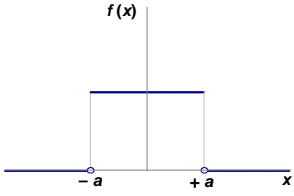
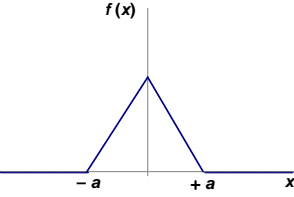
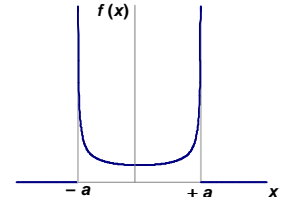
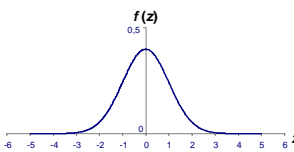
Considerando que o modelo matemático admite as estimativas x_i de N grandezas de entrada X_i , para as quais existem valores esperados (μ_1, \dots, μ_N) , o desenvolvimento em série de Taylor de 1ª ordem em torno de μ_i conduz a:

$$y = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - \mu_i) + r_2(x_i) \quad (\text{A.7})$$

sendo exato apenas para modelos matemáticos lineares⁶. Na expressão anterior, $f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ representa o valor esperado μ_y , da mensuranda y e r_2 representa o resto de 2ª ordem do desenvolvimento em série de Taylor.

⁶ Modelos matemáticos que não sejam fortemente não-lineares podem admitir a aplicação desta expressão enquanto aproximação. Em alternativa, poder-se-ão incorporar termos do desenvolvimento de ordem superior, notando-se que estes introduzem um aumento significativo do grau de complexidade.

Quadro A.1: Distribuições de probabilidade, limites de variação e expressões da variância.

Denominação do tipo	Configuração característica	Limites de variação	Expressão da variância
Uniforme (centrada)		$\pm a$	$\frac{a^2}{3}$
Triangular (centrada)		$\pm a$	$\frac{a^2}{6}$
Configuração U ou arcoseno (centrada)		$\pm a$	$\frac{a^2}{2}$
Gaussiana normalizada		$\pm s$	s^2

Sabendo que, $\mu_y = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, a expressão anterior adquire a forma,

$$y - \mu_y = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - \mu_i) + r_2(x_i) \quad (\text{A.8})$$

cujo primeiro termo é uma componente da definição de variância aplicado à grandeza de saída, y , permitindo estabelecer a relação seguinte:

$$s_y^2 = \hat{\sigma}_y^2 = E \left[(y - \mu_y)^2 \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - \mu_i) \right)^2 \right]. \quad (\text{A.9})$$

Utilizando as propriedades do “valor esperado”, E , é obtida a expressão genérica da LPI:

$$s^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot E[(x_i - \mu_i)^2] + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \cdot E[(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)] \quad (\text{A.10})$$

que, na sua formulação exposta no GUM [2], substitui os termos $s^2(y)$ por $u^2(y)$, reportando-se à incerteza de medição (“ u ” de “*uncertainty*”) e apresenta a simbologia convencional para representar as variâncias e covariâncias

$$u^2(y) = s^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \cdot s_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

No GUM as derivadas parciais são designadas por “coeficientes de sensibilidade”, representando-os por c_i apresentando-se, por essa razão, uma expressão alternativa para a LPI, que é a mais conhecida,

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j) \quad (\text{A.12})$$

onde r_{ij} representa o coeficiente de correlação para o par de variáveis x_i e x_j .

A expressão anterior é simplificável quando não existe ou não é significativa a correlação entre os pares de grandezas de entrada, resultando:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y). \quad (\text{A.13})$$

As expressões (A.12) e (A.13) determinam o valor da incerteza-padrão de medição nas condições apresentadas.

O conhecimento do resultado da aplicação da LPI permite partir para a etapa seguinte da fase cálculo: a avaliação da incerteza de medição expandida. Esta avaliação parte do pressuposto (inerente ao GUM) de aplicabilidade do Teorema do Limite Central, estipulando que a distribuição de probabilidade da grandeza de saída, y , possui uma configuração do tipo gaussiana. Sendo assim, a incerteza expandida de medição, $U_p(y)$, resulta do produto da *incerteza-padrão de medição*, $u_c(y)$, por um *fator de expansão*, k_p , que é função do intervalo de confiança pretendido,

$$U_p(y) = k_p \cdot u_c(y). \quad (\text{A.14})$$

Nos casos em que a dimensão da amostra permita, de facto, aceitar este pressuposto, então, a incerteza-padrão de medição obtida usando a LPI equivale a um desvio-padrão experimental que, de acordo com esta distribuição, representa um intervalo de confiança da ordem de 68%. A sua expansão para um intervalo de confiança de cerca de 95 % implica que se multiplique este valor por um *fator de expansão* conhecido que é igual a 2,00,

$$U_{95}(y) = k_{95} \cdot u_c(y) = 2,00 \cdot u_c(y). \quad (\text{A.15})$$

Contudo, grande parte das medições não dispõe de amostras com dimensão suficientemente grande para que se possa considerar apropriada a aplicação do Teorema do Limite Central. É, portanto, necessário recorrer a uma abordagem alternativa aplicável nestes casos (recomendada num dos anexos do GUM⁷) baseada na distribuição de probabilidade *t*-Student. Neste caso, a relação (A.14) é substituída por outra,

$$U_p(y) = t_p(\nu) \cdot u_c(y) \quad (\text{A.16})$$

em que o *fator de expansão*, $t_p(\nu)$, depende do número de graus de liberdade efetivos, ν ou ν_{ef} , da grandeza de saída.

A obtenção deste fator resulta da aplicação da fórmula de Welch-Satterthwaite [6,7],

$$\nu_{\text{ef}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}, \quad (\text{A.17})$$

contendo no numerador uma potência de 4ª ordem da incerteza-padrão de medição da grandeza de saída e no denominador os rácios das diversas potências de 4ª ordem das contribuições para a incerteza divididas pelos números de graus de liberdade respetivos.

Para completar a exposição acerca deste processo de avaliação da incerteza expandida de medição resta indicar a forma como se obtêm os elementos do denominador.

⁷ O GUM [2] refere que “reconhecendo a dificuldade de confirmar experimentalmente a presunção de aplicabilidade da distribuição gaussiana aos casos reais, apontam-se circunstâncias em que esta adequação se pode assumir, designadamente, quando os casos de aplicação possuem, pelo menos, 3 componentes distintas de incerteza, com distribuições de probabilidade bem comportadas e provenientes de grandezas independentes, por exemplo, distribuições normais e distribuições uniformes, contribuindo para a estimativa da incerteza-padrão de medição com quantidades comparáveis. Nessas circunstâncias (e considerando que as amostras que as suportam também o permitem), admite-se que se está no âmbito de validade do Teorema do Limite Central e, conseqüentemente, que a distribuição de probabilidade da grandeza de saída (mensuranda) é, com elevado grau de aproximação, do tipo gaussiana. Do mesmo modo, considera-se que este critério é atingido se nenhuma das componentes de incerteza obtidas por um método do tipo A for baseada numa amostra inferior a 10 observações”.

Relativamente às componentes contributivas da incerteza de medição, elas são determinadas conforme se descreveu na expressão (A.13) anterior,

$$u_i^2(y) = c_i^2 \cdot u^2(x_i). \quad (\text{A.18})$$

Quanto ao número de graus de liberdade relativo a cada grandeza de entrada, determina-se consoante a componente de incerteza é obtida pelo método do tipo A ou pelo método do tipo B conforme se expõe a seguir:

- *no caso de componentes de incerteza do tipo A, essa avaliação é direta, uma vez que, sendo a dimensão da sua amostra constituída por n observações, o número de graus de liberdade, ν_i , corresponde a (n-1) valores independentes (considerando que $n > 1$);*
- *no caso de componentes de incerteza do tipo B é utilizada uma expressão exposta no GUM que visa relacionar o número de graus de liberdade com o grau de fiabilidade da informação utilizada⁸:*

$$\nu_i = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^{-2}. \quad (\text{A.19})$$

A relação estabelecida entre o número de graus de liberdade efetivos e o *fator de expansão t-Student* é exposta sob a forma de Quadro, como o que se apresenta em seguida.

Quadro A.2: Determinação do fator de expansão a partir do número de graus de liberdade efetivos (para um intervalo de confiança de 95%).

ν_{ef}	k_p	ν_{ef}	k_p	ν_{ef}	k_p	ν_{ef}	k_p
1	13,97	8	2,37	15	2,18	30	2,09
2	4,53	9	2,32	16	2,17	35	2,07
3	3,31	10	2,28	17	2,16	40	2,06
4	2,87	11	2,25	18	2,15	45	2,06
5	2,65	12	2,23	19	2,14	50	2,05
6	2,52	13	2,21	20	2,13	> 50	2,00
7	2,43	14	2,20	25	2,11		

⁸ Considerando que se exprime o *grau de fiabilidade* por, R , então, $R=1-[\Delta u(x_i)/u(x_i)]$, onde $\Delta u(x_i)$ representa a estimativa da percentagem de “incerteza” inerente ao valor limite atribuído à incerteza de medição, $u(x_i)$. Um exemplo: considerando que o rácio $\Delta u(x_i)/u(x_i)$ é igual a 0,1 (i.e., 10%), o *grau de fiabilidade* da informação corresponde a 0,9 (ou seja, admite-se que se dispõe de um intervalo de confiança de 90% das possibilidades) e, conseqüentemente, $\nu_i = \frac{1}{2} \cdot [0,1]^{-2} = 50$ graus de liberdade.

A.4 Tabela de Balanço de Incertezas de Medição

O procedimento de avaliação de incertezas de medição é sintetizado em Quadros designados por “*Tabelas de Balanço de Incertezas de Medição*”, de acordo com duas abordagens tipo: uma, aplicável quando é válida a aproximação gaussiana; outra, aplicável quando se utiliza a distribuição *t*-Student.

Na primeira, quando é válida a aplicação da distribuição gaussiana, a *Tabela de Balanço de Incertezas de Medição* tem a forma que se apresenta no Quadro A.3. Neste caso, a incerteza expandida de medição é obtida usando a expressão (A.15).

Quadro A.3: Tabela de balanço de incertezas de medição (distribuição gaussiana).

<i>Grandezas de entrada</i>	<i>Estimativas</i>	<i>Incertezas-padrão</i>	<i>Coefficientes de sensibilidade</i>	<i>Contribuições para a incerteza-padrão de medição</i>
X_i	x_i	$u(x_i)$	c_i	$u_i(y)$
X_1	x_1	$u(x_1)$	c_1	$u_1(y)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$
...
X_N	x_N	$u(x_N)$	c_N	$u_N(y)$
Y	y			$u_c(y)$

Na segunda, quando é válida a aplicação da distribuição de probabilidade *t*-Student, sendo necessário incluir no Quadro anterior um conjunto de células adicionais, incluindo uma coluna destinada ao número de graus de liberdade relativos a cada componente de incerteza associada a grandezas de entrada e o acréscimo de informação requerido para se determinar o *fator de expansão*, resultando a Tabela de Balanço de Incertezas de Medição seguinte.

Quadro A.4: Tabela de balanço de incertezas de medição (distribuição t-Student).

<i>Grandezas de entrada</i>	<i>Estimativas</i>	Incertezas-padrão	Coefficientes de sensibilidade	Contribuições para a incerteza-padrão de medição	Graus de liberdade
X_i	x_i	$u(x_i)$	c_i	$u_i(y)$	ν_i
X_1	x_1	$u(x_1)$	c_1	$u_1(y)$	ν_1
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$	ν_2
...
X_N	x_N	$u(x_N)$	c_N	$u_N(y)$	ν_N
		Incerteza-padrão de medição		$u_c(y)$	
		Graus de liberdade efetivos			ν_{ef}
Y	y	Fator de expansão			$t_p(\nu_{\text{ef}})$
		Incerteza expandida de medição		$U_p(y)$	

