



LABORATÓRIO NACIONAL  
DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
Núcleo de Engenharia Sísmica e Dinâmica  
de Estruturas

Proc. 305/11/17713

# **MODELOS DE COMPORTAMENTO DINÂMICO PARA FLUIDOS NO INTERIOR DE RESERVATÓRIOS**

## **Relatório de estágio – Parte III**

Plano de Investigação Programada n.º 0305/11/17713.

Lisboa • Novembro de 2011

**I&D ESTRUTURAS**

**RELATÓRIO 373/2011 – NESDE**



## NOTA PRÉVIA

O presente trabalho constitui parte do relatório de estágio da Eng<sup>a</sup> Maria João Serpa da Lança Falcão da Silva no Núcleo de Engenharia Sísmica e Dinâmica de Estruturas (NESDE) do Departamento de Estruturas (DE) do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC).

O estágio foi realizado entre 3 de Agosto de 2009 e 16 de Setembro de 2011 sob a orientação do Engenheiro Alfredo Peres de Noronha Campos Costa, Investigador Principal do NESDE, enquadrado no Plano de Investigação Programada (2009-2012) nº 0305/11/17713 e subordinado ao tema Protecção Sísmica de Estruturas: Reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.

O trabalho desenvolvido pela estagiária, não só durante o período de estágio suprarreferido, mas também enquanto bolsreira de doutoramento FCT/LNEC (2004-2009), deu origem a uma tese de doutoramento em Engenharia Civil (IST), intitulada *Sistemas passivos para a protecção sísmica de estruturas: Uma abordagem baseada no desempenho de amortecedores de líquido sintonizado*, orientada pelo Engenheiro Alfredo Peres de Noronha Campos Costa e pelo Professor Luís Manuel Coelho Guerreiro (IST).



## MODELOS DE COMPORTAMENTO DINÂMICO PARA FLUIDOS NO INTERIOR DE RESERVATÓRIOS

No presente relatório pretendem-se apresentar e definir alguns das linhas orientadoras para a simulação do comportamento dinâmico de fluidos no interior de reservatórios, de acordo com o proposto na literatura.

O problema da modelação do comportamento de fluidos no interior de reservatórios é complexo, sendo apresentados os principais modelos matemáticos e mecânicos utilizados na actualidade.

Procuram-se descrever os fundamentos teóricos que poderão posteriormente ser adaptados e adoptados no caso particular dos dispositivos passivos amortecedores de líquido sintonizado ou a sistemas de um ou vários graus de liberdade com amortecedores de líquido sintonizado incluídos.

O presente relatório servirá, à semelhança dos relatórios *Sistemas passivos, activos, híbridos e semi-activos: Estado dos conhecimentos e Actividade experimental na área dos sistemas passivos para a protecção sísmica de estruturas: Experiência do NESDE*, como uma das linhas orientadoras para o desenvolvimento dos trabalhos propostos no âmbito do PIP 2009-2012 do NESDE-DE Protecção Sísmica de Estruturas: Reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.



## DYNAMIC BEHAVIOR MODELS FOR FLUIDS INSIDE STORAGE TANKS

This report aims to present and define some of the guidelines for the simulation of the dynamic behavior of fluids inside storage tanks, according to the proposed in the literature.

The problem of modeling the behavior of fluids inside storage tanks is complex, being presented the main mechanical and mathematical models used nowadays.

It is intended to describe the theoretical basis that can be adapted and adopted in the particular case of the tuned liquid dampers or in compound systems of one or multi degree of freedom structure with tuned Liquid Dampers attached.

This document also serves, similarly to reports *Passive, active, hybrid and semi-active systems for seismic protection of structures: State of the art and Experimental activities in the area of passive devices for seismic protection of structures: NESDE experience*, as guideline for the development of the work proposed under the 2009-2012 PIP NESDE DE Protecção Sísmica de Estruturas: reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.



## LES MODÈLES DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES FLUIDES DANS RÉSERVOIRS

Ce rapport vise à présenter et à définir des lignes directrices pour la simulation du comportement dynamique des fluides dans les réservoirs, conformément à la proposition de la littérature

Le problème de la modélisation du comportement des fluides dans les réservoirs est complexe et montre les principales modèles mathématiques et utilisés actuellement

Les tentatives visant à décrire les fondements théoriques qui peuvent être adaptées et adoptées dans le cas particulier des Amortisseurs de Liquide Régles ou dans le cas des systèmes à un ou plus degrés de liberté avec amortisseurs de liquide réglés.

Ce rapport sera une des lignes directrices, comme rapports *Systèmes passifs, actifs, hybrides et semi-actifs pour la protection sismique des structures : État des connaissances et Activité expérimentel dans les systemes passifs pour la protection sismique des structures: Expérience du NESDE*, pour le développement des activités proposées dans le cadre du PIP 2009-2012 DE NESDE Proteção Sísmica de Estruturas : reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.



# ÍNDICE

1. Introdução	1
2. Modelação Matemática em reservatórios	1
2.1. Sloshing linear	1
2.1.1. Generalidades	1
2.1.2. Equações de campo para escoamento do fluido	4
2.1.2.1. Tanques Cilíndricos	10
2.1.2.2. Tanques Rectangulares	10
2.1.3. Formulação variacional	12
2.1.4. Amortecimento	18
2.1.4.1. Generalidades	18
2.1.4.2. Amortecimento em fluidos viscosos	21
2.1.4.3. Análise modal de fluidos viscosos	30
2.1.4.4. Excitação lateral em fluidos viscosos	37
2.1.5. Vibração em regime livre	43
2.1.5.1. Reservatórios rectangulares	43
2.1.5.2. Reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas	46
2.1.6. Vibração em regime forçado	49
2.1.6.1. Tanques rectangulares	50
2.1.6.2. Reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas	58
2.2. Sloshing Não-Linear	69
2.2.1. Generalidades	69
2.2.2. Sloshing Rotativo (Rotary sloshing)	72
2.2.2.1. Reservatórios de águas rasas (shallow water tanks)	72
2.2.2.2. Reservatórios de águas profundas (deep water tanks)	74
2.2.2.3. Análise do sloshing rotativo	77
2.2.2.4. Fenómenos caóticos	83
2.2.2.5. Excitação sinusoidal (sine sweep)	88
2.2.2.6. Excitação aleatória	91
2.2.3. Quebra de Onda (Breaking Waves)	99
3. Modelação Mecânica em reservatórios	102
3.1. Estudos preliminares	102
3.2. Generalidades	103
3.3. Modelo massa-mola-amortecedor	106

3.3.1.	Características gerais	106
3.3.2.	Excitação lateral	109
3.3.3.	Excitação de pitching	110
3.3.4.	Parâmetros mecânicos para reservatórios circulares cilíndricos	111
3.3.5.	Parâmetros mecânicos para reservatórios rectangulares	114
3.4.	Modelo pêndulo simples	116
3.4.1.	Características gerais	116
3.4.2.	Excitação lateral	118
3.4.3.	Excitação de pitching	119
3.4.4.	Parâmetros mecânicos para reservatórios circulares cilíndricos	120
3.4.5.	Parâmetros mecânicos para reservatórios rectangulares	121
3.5.	Modelo de pêndulo esférico	122
3.5.1.	Características gerais	122
3.5.2.	Modelação do sloshing não-planar	124
3.5.3.	Dinâmica do pêndulo esférico	130
3.6.	Modelo de pêndulo linear associado a pêndulo esférico	132
4.	Considerações finais	135
5.	Agradecimentos	137
6.	Bibliografia	139

# ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 - IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS E LOCAIS REFERENTE A COM LÍQUIDO EM MOVIMENTO NO INTERIOR DE RESERVATÓRIO, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005] .....	5
FIGURA 2 – TANQUE COM GEOMETRIA RECTANGULAR .....	43
FIGURA 3 - TANQUE CIRCULAR SIMPLES.....	46
FIGURA 4 - TANQUE CIRCULAR CILÍNDRICO: A) COM SEPTO ANELAR, B) TUBULAR E C) COM SEPTOS INTERIORES, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005] .....	47
FIGURA 5 - TANQUE CIRCULAR CILÍNDRICO SUJEITO A SOLICITAÇÃO LATERAL SEGUNDO EIXO X, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005].....	59
FIGURA 6 - MODELO MECÂNICO LINEAR, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005].....	105
FIGURA 7 - MODELO MECÂNICO LIGEIRAMENTE NÃO-LINEAR, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005].....	105
FIGURA 8 - MODELO MECÂNICO ALTAMENTE NÃO-LINEAR (IMPACTO DE SLOSHING), ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005] .....	106
FIGURA 9 - MODELO MECÂNICO EQUIVALENTE: A) MASSA-MOLA-AMORTECEDOR E B)MASSA-MOLA-AMORTECEDOR COM AMORTECIMENTO DO MOMENTO DE INÉRCIA,, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005] .....	107
FIGURA 10 - MODELO DO PÊNDULO SIMPLES EQUIVALENTE, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005].....	117
FIGURA 11 - MODELO NÃO-LINEAR DE PÊNDULO ESFÉRICO EQUIVALENTE: A) ESQUEMATIZAÇÃO E B) SISTEMA DE EIXOS COORDENADOS, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005].....	125
FIGURA 12 - ESQUEMATIZAÇÃO DO MODELO COMPOSTO POR PÊNDULO LINEAR E PÊNDULO ESFÉRICO, ADAPTADO DE [IBRAHIM, 2005].....	133



## ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1– TIPOS E CLASSES DE CONDIÇÕES DE FRONTEIRA.....	2
TABELA 2– VALORES ESTABELECIDOS PARA AS CONSTANTES $C_1$ E $N_1$ .....	30



## 1. Introdução

Para contextualizar o problema dos fenómenos que ocorrem no interior de dispositivos dissipadores de energia do tipo amortecedores de líquido sintonizado é importante apresentar um pouco da teoria associada ao *sloshing* dinâmico do líquido em reservatórios parcialmente cheios.

Esta teoria baseia-se em equações que descrevem o escoamento do fluido, permitindo uma estimativa adequada do movimento da superfície livre do fluido e os respectivos momentos e forças hidrodinâmicas resultantes, a partir dos campos de velocidade e pressão.

Trata-se de uma teoria que possibilita a obtenção de soluções explícitas apenas em alguns casos especiais como sejam os reservatórios cilíndricos e os reservatórios rectangulares.

Após a apresentação das características essenciais dos modelos que podem ser usados para prever o comportamento dinâmico de fluidos no interior de reservatórios será possível numa fase posterior, concretizar os modelos mais adequados para o caso particular dos dispositivos dissipadores de energia do tipo amortecedores de líquido sintonizado, cujo comportamento dinâmico se encontra a ser objecto de estudo no âmbito do PIP Protecção Sísmica de Estruturas: Reabilitação, reforço e sistemas inteligentes.

## 2. Modelação Matemática em reservatórios

### 2.1. Sloshing linear

#### 2.1.1. Generalidades

A teoria do *sloshing* dinâmico de líquido no interior de reservatórios parcialmente cheios baseia-se no desenvolvimento das equações de campo associadas ao escoamento do fluido e que permite obter um valor aproximado da elevação da superfície do fluido, bem como dos momentos e forças hidrodinâmicas

resultantes. Tendo por base este tipo de equações, é possível obter soluções com elevado grau de fiabilidade para diversas geometrias [Ibrahim, 2005].

O problema dos valores de fronteira é geralmente resolvido por meio de análises modais ou por meio das características da resposta dinâmica do sistema face a determinadas excitações externas. A análise modal do movimento da superfície livre do fluido num reservatório parcialmente cheio permite a obtenção de uma estimativa das frequências naturais e das correspondentes formas dos modos.

A estimativa das frequências naturais é essencial no processo de dimensionamento de reservatórios. As frequências naturais da superfície livre do fluido surgem preferencialmente das condições de fronteira combinada (cinemática e dinâmica) em vez de na equação de continuidade do líquido expressa por meio da equação de Laplace [Ibrahim, 2005]

Considerando uma superfície livre, as condições de fronteira definem o valor do campo de equações em cada ponto da superfície de fronteira ou o gradiente normal relativamente à superfície do reservatório ou ambos.

As condições de fronteira podem, então, ser classificadas de acordo com o indicado na Tabela 1 [Morse e Feshbach, 1953].

*Tabela 1– Tipos e classes de condições de fronteira*

1	Dirichelet	Definem as equações do escoamento do fluido na superfície
2	Neumann	Definem o valor do gradiente normal à superfície
3	Cauchy	Definem ambos os valores anteriores

A formulação variacional baseada no princípio de Hamilton é vista como a ferramenta muito poderosa no desenvolvimento das equações de campo para o escoamento de um fluido, conforme pode ser comprovado por investigações anteriores na área [Lawrence et al., 1958], [Troesch, 1960], [Bogoryad, 1962], [Borisova, 1962], [Petrov, 1962a] [Petrov, 1962b] [Petrov, 1962c] [Moisev, 1964] [Moisev e Petrov, 1966] [Luke, 1967] [Whitman, 1967] [Lukovskii, 1967] [Lukovskii, 1975] [Moiseev e Rumyantsev, 1968] [Limarchenko, 1978a] [Limarchenko, 1980] [Limarchenko, 1983b] [Lukovskii e Timokha, 1992] [Lubovskii e Timokha, 1995] [Rocca et al., 1997].

O método das equações integrais foi adoptado em recipientes cujas paredes que se encontravam em contacto com o fluido não eram perfeitamente verticais mas curvas como, por exemplo, em tanques esféricos e horizontais cilíndricos [Budiansky,

1960] [McIver, 1989]. Outros autores [Housner, 1963a] [Evans, 1990] [Evans e Linton, 1993] desenvolveram aproximações analíticas que permitiram estimar a frequência de *sloshing* de fluidos no interior de reservatórios.

A análise modal em reservatórios circulares cilíndricos foi estudada pela primeira vez em meados do século XIX [Poisson, 1828-1829], embora os resultados não tenham sido interpretados e publicados desde logo, uma vez que a teoria subjacente à função de Bessel ainda não apresentava um nível de desenvolvimento que o permitisse [Ibrahim, 2005].

As equações do movimento fluido no interior de reservatórios rígidos rectangulares e circulares com altura de água uniforme e com condições de fronteira linearizadas foram também estudadas e apresentadas [Rayleigh, 1887] [Steklov, 1902] [Lamb, 1945].

No entanto, em situações em que a altura de fluido em repouso é variável, por exemplo em reservatórios de fundo inclinado, a solução correspondente da equação de Laplace usando o método da separação das variáveis é menos potente, sendo preferível, nestas situações, a utilização de outros métodos como o de Ritz.

As oscilações no que refere a massas de fluido no interior de reservatório foram igualmente documentadas e estudadas [Bratu, 1970].

As frequências de *sloshing* de fluidos no interior de reservatórios apresentando geometrias diversas tem vindo a ser investigadas e avaliadas [Miles, 1964] [Kuttler e Sigillito, 1969] [Fox e Kuttler, 1981] [Fox e Kuttler, 1983] [Meserole e Fortini, 1987] [McIver e McIver, 1993].

Assim, tendo por base uma análise bidimensional do movimento do fluido no interior de tanques rectangulares e circulares, a frequência natural surge como dependente essencialmente da razão entre a altura do fluido e a largura do recipiente ou entre a altura do fluido e o raio do reservatório, respectivamente.

O efeito da altura do fluido vai sendo progressivamente atenuado com o aumento da ordem do modo de vibração. Foi ainda desenvolvido trabalho no sentido de determinar uma relação de dependência não-linear entre frequências naturais de vibração e a amplitude da onda [Ghali, 1965].

No início da década de 50 alguns autores [Graham e Rodriguez, 1952] debruçaram os seus estudos sobre a problemática subjacente à determinação da

velocidade potencial do fluido, tendo obtido uma excelente aproximação do valor correspondente num espaço tridimensional. Nesta situação obteve-se uma dependência estreita entre a frequência fundamental de vibração e as três dimensões principais do fluido.

A influência do amortecimento na frequência natural do fluido foi estudada a partir de meados da década de 60, principalmente por via experimental, uma vez que, atendendo às não-linearidades observadas e associadas ao comportamento dinâmico de fluidos no interior de reservatórios se tornava bastante difícil fazer essa aproximação por vi analítica [Ghali, 1965] [Scarsi e Brizzoalara, 1970] [Scarsi, 1971] [Schilling e Siekmann, 1980]. Os resultados obtidos permitiram comprovar que, para fluidos que apresentassem viscosidades elevadas, a frequência ressonante surgiria ligeiramente superior ao valor previsto para a situação de um fluido ideal.

A aproximação variacional tem demonstrado ser uma excelente ferramenta para resolver de uma forma analítica e directa os problemas associados aos valores de fronteira para fluidos em movimento no interior de reservatórios. A análise modal do movimento da superfície livre do fluido é formulada para diferentes geometrias de reservatórios. As análises envolvidas neste tipo de aproximação incluem a estimativa da função do potencial da velocidade, das frequências naturais da superfície livre do fluido e das formas dos modos de vibração.

É importante não deixar de referir que, as soluções analíticas mais realistas são obtidas apenas para geometrias regulares (reservatórios rectangulares e circulares) que apresentem paredes planas e perfeitamente verticais. Para quaisquer outras geometrias, incluindo as circunstâncias em que os reservatórios apresentem profundidade variável, a determinação das frequências naturais de vibração dos fluidos no interior dos reservatórios bem como das formas dos modos de vibração pode ser efectuada de uma forma directa por via experimental ou aproximada por via numerica [Ibrahim, 2005].

### **2.1.2. Equações de campo para escoamento do fluido**

A descrição analítica do campo de equações que permite definir o escoamento de diferentes fluidos no interior de reservatórios encontra-se bem documentada para diferentes geometrias de tanques, como pode ser comprovado pelo trabalho

desenvolvido [Ewart, 1956] [Bauer, 1962b] [Bauer, 1966a] [Bauer, 1969] [Lomen, 1965] [Abramson, 1966] [Ibrahim, 1969] [Khandelwal, 1980] [Kornecki, 1983] [Bauer, 1999].

As equações gerais do movimento para fluidos no interior de recipientes fechados podem ser simplificadas assumindo que o recipiente é rígido e impermeável. Para além disso assume-se ainda que o fluido é invíscido, incompressível e irrotacional no início do movimento.

Outros fenómenos como a capilaridade e os efeitos da tensão superficial serão ignorados num campo gravitacional. No entanto os efeitos da tensão superficial poderão ser introduzidos em alguns casos simples [Ibrahim, 2005].

As oscilações da superfície livre do fluido podem ser geradas através da imposição de um determinado impulso inicial ou de uma simples perturbação da própria superfície livre. A formulação variacional mencionada, mais adiante na secção 2.1.3., é aplicável tanto a oscilações em regime livre como a oscilações forçadas da superfície livre do fluido.

É conveniente definir o movimento do fluido no interior de um reservatório relativamente a um sistema de eixos coordenados locais (coordenadas móveis) uma vez que as variáveis em questão são medidas relativamente a um “sistema de coordenadas móveis.

Considera-se que ao reservatório é permitido movimentar-se segundo um movimento planar curvilíneo sem qualquer tipo de rotação. As equações do movimento do fluido em movimento podem ser escritas segundo um sistemas de coordenadas globais e locais (Figura 1).

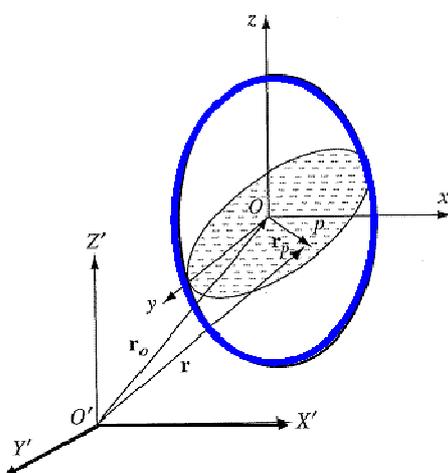


Figura 1 - Identificação de sistema de coordenadas globais e locais referente a com líquido em movimento no interior de reservatório, adaptado de [Ibrahim, 2005]

Considerando O'X'Y'Z' o sistema de coordenadas cartesianas globais, obtêm-se que as equações de Euler associadas ao movimento do fluido podem ser escritas na forma vectorial:

$$\frac{\partial}{\partial t} q + (q \cdot \nabla) q = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla(gZ') \quad (1)$$

em que  $q$  corresponde à velocidade do fluido,  $\frac{\partial q}{\partial t}$  é a aceleração local do escoamento no ponto em que as coordenadas são invariáveis (esta aceleração é medida por um observador fixo),  $(q \cdot \nabla) q$  corresponde à aceleração convectiva para uma partícula do fluido animada por uma velocidade  $q$  na direcção do escoamento (esta aceleração é medida por um observador que se move com a partícula  $p$ ),  $P$  é a pressão do fluido,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $gZ'$  corresponde ao potencial gravítico e  $\nabla$  é um operador para diferentes sistemas de eixos coordenados.

A aceleração convectiva  $(q \cdot \nabla) q$  pode ser escrita [Thomson, 1965]:

$$(q \cdot \nabla) q = \frac{1}{2} \nabla q^2 - q \times (\nabla \times q) = \frac{1}{2} \nabla q^2 \quad (2)$$

Em escoamentos irrotacionais de fluidos admite-se que existe uma função de potencial de velocidade,  $\Phi$ , cujo gradiente traduz a velocidade do fluido.

$$q = -\nabla \Phi \quad (3)$$

Introduzindo as equações (2) e (3) em (1) obtém-se:

$$\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + gZ' - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (4)$$

A equação anterior após integração toma a forma:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + gZ' - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) \quad (5)$$

com  $C(t)$  correspondente a uma função variável no tempo.

A equação (5) traduz a forma geral da equação de Kelvin para o escoamento não estacionário do fluido. Nesta equação a função de potencial da velocidade  $\Phi$  é

uma função do espaço e do tempo sendo diferenciável no que refere aos registos temporais do escoamento não estacionário. No entanto,  $\frac{\partial q}{\partial t}$  é definido como se tratando do trabalho efectuado por uma unidade de massa do fluido cujas coordenadas são (X,Y,Z).

Para além disso a equação (5) é apenas válida em escoamentos incompressíveis nos quais a equação de continuidade  $\nabla \cdot q = 0$  conduz à equação de Laplace, que após introdução da equação (2) toma a forma:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (6)$$

Considerando Oxyz um outro sistema de eixos coordenados, neste caso fixo ao reservatório de tal forma que o plano Oxy coincida com a superfície livre não perturbada do fluido. Considerando  $V_0$  como a velocidade da origem O relativamente à origem fixa O'. Neste caso a taxa de variação temporal do potencial da velocidade,  $\Phi$ , num dado ponto fixo no sistema de eixos inercial O'X'Y'Z' medido por um observador colocado no sistema de eixos móveis Oxyz é de  $\left(\frac{\partial}{\partial t} - V_0 \cdot \nabla\right)\Phi$ , dado que este ponto parecerá ter uma velocidade de  $-V_0$  relativamente ao observador.

De acordo com o referido no parágrafo anterior, a equação da pressão (5) toma a forma:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + gZ' - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_0 \cdot \nabla \Phi = C(t) \quad (7)$$

A velocidade relativa da partícula do fluido,  $q_{rel}$ , considerando o sistema de coordenadas locais é dada por:

$$q_{rel} = q - V_0 = -\nabla \Phi - V_0 \quad (8)$$

Expressando q em termos de  $q_{rel}$  e  $V_0$ , usando a equação (8), obtêm-se:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q_{rel}^2 + gZ' - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}V_0^2 = C(t) \quad (9)$$

A equação (7) é escrita em termos da velocidade total do fluido medida relativamente ao sistema de coordenadas globais enquanto que a equação (9) é

escrita em termos de velocidade relativa do fluido medida relativamente ao sistema de coordenadas locais.

Na superfície livre do fluido a pressão é equivalente à pressão atmosférica ou pode ser ajustado a zero na equação (7), o que fornece a seguinte condição de fronteira dinâmica:

$$\frac{1}{2}(\nabla\Phi.\nabla\Phi) + g\eta - \frac{\partial\Phi}{\partial t} + V_0.\nabla\Phi = 0 \quad (10)$$

A velocidade vertical de uma partícula de fluido localizada na superfície livre  $z=\eta(r,\theta,t)=\eta(x,y,t)$  deve ser equivalente à velocidade vertical na superfície livre em si mesma [Ibrahim, 2005]. Esta condição é conhecida como a condição de fronteira cinemática e dada pela expressão:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + q_{red}.\nabla\eta \quad (11)$$

Nas paredes rígidas e no fundo do reservatório, a componente da velocidade normal à fronteira deve ter o mesmo valor da componente de velocidade correspondente da fronteira sólida do fluido no ponto em questão.

Se for permitido que o reservatório se mova no plano vertical então o vector da velocidade pode ser escrito em termos de coordenadas cartesianas e cilíndricas da seguinte forma:

$$V_0 = \dot{X}_0 i + \dot{Z}_0 k \quad (12)$$

$$V_0 = (\dot{X}_0 \cos\theta) i_r + (\dot{X}_0 \sin\theta) i_\theta + \dot{Z}_0 k \quad (13)$$

As condições de fronteira nas paredes e no fundo em coordenadas cartesianas (equações (14) e (15)) e cilíndricas (equações (16) e (17)) podem ser definidas:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \dot{Z}_0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \Big|_{x=a} = \dot{X}_0 \quad (15)$$

$$-\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = \dot{Z}_0 \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{X}_0 \cos \theta \quad (17)$$

O movimento do fluido no interior de um reservatório pode ser definido a partir de uma função potencial de velocidade total,  $\Phi$ , equivalente à soma de uma função potencial perturbada,  $\tilde{\Phi}$ , e de uma função potencial de referência,  $\Phi_0$ :

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi_0 \quad (18)$$

Dependendo das coordenadas consideradas para o sistema em movimento, a função  $\Phi_0$  pode ser determinada por integração das equações (12) ou (13) :

$$\Phi_0 = -\dot{X}_0 r \cos \theta - \dot{Z}_0 z - \frac{1}{2} \int (\dot{X}_0^2 + \dot{Z}_0^2) dt \quad (19)$$

Introduzindo (18) e (19) nas condições de fronteira da superfície livre obtêm-se para reservatórios circulares (equações (20) e (21)) e rectangulares ((22) e (23)):

$$\frac{1}{2} (\nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\Phi}) + (g + \ddot{Z}_0) \eta - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \ddot{X}_0 r \cos \theta = 0 \quad (20)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} (\nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\Phi}) + (g + \ddot{Z}_0) \eta - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \ddot{X}_0 x = 0 \quad (22)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \quad (23)$$

A este nível pode-se então introduzir o efeito da tensão superficial,  $\sigma$ , considerando as alterações de pressão ao longo do deslocamento da superfície livre do fluido como descrito na equação de Laplace – Young [Ibrahim, 2005]:

$$p_s = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (24)$$

em que  $R_1$  e  $R_2$  correspondem a raios de curvatura principais.

A formulação completa do problema dos valores de fronteira em termos de função potencial perturbada,  $\tilde{\Phi}$ , pode ser resumida da seguinte forma para tanques cilíndricos (equações (25) a (31)) e rectangulares (equações (32) a (38)), respectivamente:

#### 2.1.2.1. Tanques Cilíndricos

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0 \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{1}{2} (\nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\Phi}) + (g + \ddot{Z}_0) \eta - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \ddot{X}_0 r \cos \theta = 0 \quad \text{com } z = \eta(r, \theta, t) \quad (28)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \quad \text{com } z = \eta(r, \theta, t) \quad (29)$$

A curvatura,  $k$ , em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$k = - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = - \frac{\eta_{rr} \left( 1 + \left( \eta_{\theta}^2 / r^2 \right) \right) + \left( 1 + \eta_r^2 \right) \left( \eta_r / r \right) + \left( \eta_{\theta\theta} / r^2 \right) - 2 \eta_r \left( \eta_{\theta} / r^2 \right) \left( \eta_{rr} + \left( \eta_r \right) \right)}{\left[ 1 + \eta_r^2 + \left( \eta_{\theta}^2 / r^2 \right) \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (30)$$

Linearizando a expressão (30) torna-se possível obter:

$$k = - \left[ \eta_{rr} + \frac{\eta_r}{r} + \frac{\eta_{\theta\theta}}{r^2} \right] \quad (31)$$

#### 2.1.2.2. Tanques Rectangulares

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0 \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right|_{x=\pm a/2} = 0 \quad (33)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right|_{y=\pm b/2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(\nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\Phi}) + (g + \ddot{Z}_0)\eta - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \ddot{X}_0 \cdot x = 0 \quad \text{com } z = \eta(x, y, t) \quad (35)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \quad \text{com } z = \eta(x, y, t) \quad (36)$$

A curvatura,  $k$ , em coordenadas cilíndricas é dada pela expressão:

$$k = - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = - \frac{\eta_{xx}(1 + \eta_y) + \eta_{yy}(1 + \eta_x^2) - 2\eta_x \eta_y \eta_{xy}}{[1 + \eta_x^2 + \eta_y^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (37)$$

Linearizando a equação (37) obtêm-se:

$$k = -[\eta_{xx} + \eta_{yy}] \quad (38)$$

Estas equações podem ser igualmente determinadas para reservatórios que apresentem geometrias diferentes (esféricas, elípticas,...), muito embora para estas situações seja necessário adaptar os valores de determinados parâmetros presentes nas equações de continuidade [Ibrahim, 2005].

No entanto é importante ter presente que a função do potencial de velocidade para o fluido em movimento no interior de reservatórios,  $\Phi$ , deve satisfazer a equação de Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ , que traduz uma equação linear parcialmente diferenciável. A não-linearidade identificada ao nível da fronteira apenas existe em condições de superfície livre na fronteira em  $z = \eta$ .

Se for relevante uma análise modal é então necessário desprezar os termos não-lineares e não-conservativos das condições de fronteira de superfície livre. Se a função de potencial for obtida analiticamente de uma forma aproximada, então as

frequências naturais da superfície livre do fluido são obtidas utilizando a condição dinâmica de superfície livre que se baseia no facto de  $\Phi$  ser harmónica no tempo.

Outra aproximação bastante ajustada corresponde à utilização da formulação variacional em conjunto com o Método de Rayleigh-Ritz [Ibrahim, 2005].

### 2.1.3. Formulação variacional

A aproximação por meio da formulação variacional baseia-se no estabelecimento de uma determinada função que descreva o comportamento do sistema. O Lagrangeano,  $L=T-V$ , deve ser minimizado (ou maximizado), correspondendo  $T$  e  $V$  às energias cinética e potencial do sistema, respectivamente [Ibrahim, 2005].

O princípio variacional, ou princípio de Hamilton [Hamilton, 1834] [Hamilton, 1835] corresponde ao definido da seguinte forma:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (39)$$

Em linhas gerais, o Princípio de Hamilton [Feynmann, 1948] define que a progressão no espaço das configurações mantêm o valor do integral estacionário apesar da variabilidade que pode surgir no percurso entre dois instantes temporais,  $t_1$  e  $t_2$ . Qualquer que seja o movimento, o sistema mover-se-á de forma a que a média temporal da diferença entre as energias cinética e potencial seja mínima.

Esta formulação é muito adequada na medida em que conjuga o campo de equações de escoamento do fluido e as condições de fronteira associadas em cada circunstância.

Assim obtêm-se, respectivamente, para as energia cinética e potencial os valores expressos pelas equações (40) e (41):

$$T = \int_v \left( \frac{\rho}{2} \right) |\nabla \Phi|^2 dv \quad (40)$$

$$V = \int_S \left( \frac{\eta}{2} \right) (\rho g \eta) dS \quad (41)$$

sendo  $v$  e  $S$  correspondentes ao volume e à superfície livre do fluido, respectivamente.

Fazendo as substituições necessárias torna-se possível reescrever a equação (39) da seguinte forma:

$$\delta \mathcal{I} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_v \frac{\rho}{2} |\nabla \Phi|^2 dv - \int_S \frac{\eta}{2} \rho g \eta dS \right\} dt = \rho \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_v \nabla \Phi \nabla \delta \Phi dv - g \int_S \eta \delta \eta dS \right\} = 0 \quad (42)$$

O integral de volume pode ser transformado num integral de superfície usando a primeira fórmula proposta por Green [Green, 1828] ou então a relação proposta por Thomson [Thomson, 1965], de acordo com o exposto pelas equações (43) e (44), respectivamente:

$$\int_v \nabla \Phi \nabla \delta \Phi dv = \int_S \Phi \frac{\partial \delta \Phi}{\partial n} dS \quad (43)$$

$$\nabla \Phi = n \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -n \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (44)$$

em que  $n$  corresponde ao vector normal reduzido relativamente à superfície equipotencial de  $\Phi$  no ponto em questão. Como tal o variacional definido pela equação (39) toma a seguinte forma:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_S \left\{ \Phi \frac{\partial \delta \Phi}{\partial n} - g \eta \delta \eta \right\} dS \right\} = -\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_S \left\{ \Phi \delta \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \eta \delta \eta \right\} dS \right\} = 0 \quad (45)$$

Fazendo a integração por partes da anterior, obtêm-se:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \eta \right\} \delta \eta dS dt = 0 \quad (46)$$

o que conduz à condição dinâmica linearizada da superfície livre do fluido:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (47)$$

Em finais da década de 60 [Moiseev e Rumyantsev, 1968] foi introduzido o operador integral de Neumann [von Neumann, 1929] [von Neumann, 1936],  $H$ , o que tornou o potencial de velocidades,  $\Phi$ , harmónico no domínio do volume do fluido,  $v$ . A propriedade harmónica baseia-se no facto de que o integral da velocidade da superfície livre se anula ao longo da própria superfície livre, de tal forma que se verifique  $\int_S \dot{\eta}(s) dS = 0$  [Ibrahim, 2005].

A função do potencial de velocidades do fluido,  $\Phi$ , deve satisfazer as seguintes condições na fronteira do fluido:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{nas paredes do tanque} \quad (48)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\dot{\eta} \quad \text{na superfície livre} \quad (49)$$

Admitindo que  $\Phi = H\dot{\eta}$ , então torna-se possível escrever a correspondência evidenciada na equação seguinte:

$$\Phi(v) = H \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -H \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (50)$$

Considerando a derivada no tempo para ambos os lados da equação (50) e usando a igualdade apresentada na equação seguinte:

$$g\eta + H \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (51)$$

Em termos energético refer-se a possibilidade definir o valor médio da função de energia do sistema com dependência directa do operador de Neumann [Von Neumann, 1929] [Von Neumann, 1936]:

$$I_1 = \frac{\rho}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left\{ H \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - g \eta^2 \right\} ds dt \quad (52)$$

Alternativamente, e usando a equação (47), pode-se definir o valor médio da função de energia em termos da função potencial escalar:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_v \frac{\rho}{2} |\nabla \Phi|^2 dv - \frac{1}{g} \int_S \Phi^2 dS \right\} \quad (53)$$

Qualquer das equações (52) e (53) podem ser usadas na estimativa das frequências naturais do movimento da superfície livre do fluido.

Na superfície livre, S, tanto a função potencial da velocidade como a altura da superfície livre da onda podem ser expressas em função do instante temporal e da posição espacial que ocupam:

$$\Phi(s, t) = F(s) \cos \omega t \quad (54)$$

$$\eta(s, t) = G(s) \sin \omega t \quad (55)$$

com  $\omega$  correspondente à frequência natural da superfície livre do líquido.

Substituindo as equações (54) e (55) nas funções de energia média dadas pelas equações (52) e (53) e integrando no domínio do tempo entre  $t_1=0$  e  $t_2=2\pi/\omega$  obtêm-se:

$$I_1 = \lambda \int_S H G G ds - \int_S G^2 ds \quad (56)$$

$$I_2 = \int_v \frac{\rho}{2} |\nabla F|^2 dv - \lambda \int_S F^2 ds \quad (57)$$

em que  $\lambda = \omega^2/g$ .

As frequências naturais da superfície livre do fluido são determinadas por meio do método de Rayleigh-Ritz. Este método baseia-se na introdução de uma

combinação linear de um várias funções cujos coeficientes formam um conjunto de parâmetros variacionais lineares (equação (58)):

$$F = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (58)$$

em que  $f_n$  corresponde às funções de teste e  $a_n$  correspondem aos coeficientes associados a cada uma das funções anteriores.

Por substituição da equação (58) na equação (57), e considerando o apresentado na equação (42), admite-se que os coeficientes  $a_n$  devem verificar um sistema de equações homogêneas algébricas:

$$\frac{\partial I}{\partial a_n} = 0 \quad \text{para } n=1,2, \dots, N \quad (59)$$

A verificação das condições expressa pela equação (59) permite que se obtenha o seguinte conjunto de equações:

$$\sum_{m=1} a_{mn} (A_{mn} - \lambda B_{mn}) = 0 \quad (60)$$

em que  $A_{mn}$  e  $B_{mn}$  se definem da acordo com o expresso pelas equações (61) e (62):

$$A_{mn} = \int_v \nabla f_n \cdot \nabla f_m dv \quad \text{considerando} \quad A_{mn} = A_{nm} \quad (61)$$

$$B_{mn} = \int_s f_n f_m dS \quad \text{considerando} \quad B_{mn} = B_{nm} \quad (62)$$

Como se encontra já amplamente difundido, a solução não trivial das equações (60) existe apenas se o determinante dos coeficientes  $a_n$  for eliminado, sendo desta forma obtida a equação das frequências naturais do sistema:

$$|A_{mn} - \lambda B_{mn}| = 0 \quad (63)$$

O primeiro termo da equação (63) pode ser determinado pelo princípio variacional consistente com o definido ao longo da presente secção. O procedimento para a determinação destes valores envolve um primeiro cálculo exacto e inclusão dos primeiros termos da série indicada na equação (58).

Posteriormente acrescenta-se um número de termos e volta-se a resolver o sistema de equações. O processo continua de uma forma iterativa até ao momento em que o/os valor/es da/das frequência/a naturais não apresentem alterações que se possam considerar significativas.

Em virtude de inexistirem métodos mais rigorosos de convergência e face às dificuldades na selecção de funções coordenadas o processo pode conduzir a alguns erros. Para colmatar as dificuldades observadas alguns autores [Morse e Feshbach, 1953] debruçaram-se sobre este problema tendo introduzido determinadas alterações que se verificou serem bastante adequadas.

Assim, foi introduzido um conjunto de técnicas alternativas com o objectivo explícito de permitir a determinação das frequências naturais em sistemas dinâmicos usando o método de Rayleigh-Ritz [Ibrahim, 2005]].

Posteriormente foi assumida apenas uma sensibilidade muito ligeira da variável  $\lambda_1$  à selecção das funções  $f_n$  [Moiseev, 1970] [Moiseev e Romyantsev, 1968], o que significa que se a função  $F_1$  (que traduz o mínimo valor associado ao funcional,  $\lambda$ ) for substituída por uma outra função  $F_1^*$  tal que:

$$\int \nabla F_1 \nabla F_1^* dv \neq 0 \tag{64}$$

sendo que o valor da variável  $\lambda_1$  não é alterado de uma forma significativa.

O sistema de funções coordenadas  $\{f_n\}$ , usado na equação (58), pode ser seleccionado de uma forma muito grosseira, sendo apenas necessário garantir que o referido sistema seja completo. Assim, é oportuno considerar estas funções como as funções próprias do *sloshing* do fluido num determinado volume que contenha o domínio (volume) especificado mas que apresente uma forma simples [Ibrahim, 2005].

#### 2.1.4. Amortecimento

O controlo do *sloshing* de fluidos no interior de reservatórios em movimento é considerado como uma das questões fundamentais associadas ao dimensionamento de sistemas de fluido móveis.

O amortecimento inerente associado à viscosidade do fluido é muito útil em reservatórios de dimensões reduzidas (como é o caso, na grande maioria das circunstâncias, dos amortecedores de líquido sintonizado incluídos em estruturas para a mitigação das acções dinâmicas, nomeadamente acções sísmicas).

O amortecimento em reservatórios de parede vertical plana tem a sua origem em três fontes distintas:

- i) Superfície livre;
- ii) Paredes laterais;
- iii) Fundo.

Para além disso, geralmente, o amortecimento depende também, de uma forma muito directa, das propriedades físicas do fluido e da geometria do reservatório em que este se encontra.

A inclusão de amortecimento viscoso devido à película de fronteira e à contaminação da superfície livre é também muito importante, uma vez que permite limitar a altura da onda de *sloshing* na ressonância [Ibrahim, 2005].

##### 2.1.4.1. Generalidades

Boussinesq [Boussinesq, 1878] introduziu a influência do amortecimento viscoso quando estudou ondas permanentes e progressivas em recipientes fechados.

Posteriormente [Keulegan, 1959] o trabalho de Boussinesq [Boussinesq, 1878] foi estendido com o objectivo de determinar a atenuação associada ao aparecimento de ondas isoladas [Ibrahim, 2005].

Os estudos para a determinação do amortecimento de fluidos no interior de reservatórios fechados e fintos tiveram a sua génese em estudos de amortecimento progressivo em canais de profundidade finita mas de largura infinita [Biesel, 1949].

Posteriormente outros autores [Hunt, 1952] [Ursell, 1952] [Hunt, 1964] também dedicaram os seus estudos à determinação do amortecimento associado à existência de paredes verticais de altura infinita, tendo obtido resultados diferentes por terem utilizado desde o início abordagens também diferentes. Por exemplo, Ursell [Ursell, 1952] baseou os seus estudos de identificação do amortecimento em conceitos associados à dissipação de energia e também no comportamento da pressão na zona limite da película de fronteira das paredes laterais.

A discrepância observada entre estimativas teóricas e medições experimentais induziram a consideração da influência da capilaridade histirética e de uma superfície de contaminação na determinação do amortecimento viscoso associado aos fenómenos que ocorrem no líquido [Benjamin e Ursell, 1954]. Alternativamente a discrepância observada foi resolvida através da observação da transferência de energia na vizinhança do menisco da superfície livre do fluido [Mei e Liu, 1973].

A determinação do amortecimento de ondas superficiais de pequena amplitude em reservatórios cilíndricos parcialmente cheios de fluido foi objecto de extensos trabalhos a partir da década de 50 [Case e Parkinson, 1957]. Nos estudos referidos a dissipação viscosa numa película de fronteira laminar foi considerada como causa primária do amortecimento viscoso associado ao movimento do fluido [Ibrahim, 2005].

Na sequência dos seus estudos, Miles [Miles, 1967] pode concluir que tanto a superfície de contaminação como a capilaridade histirética poderiam contribuir de uma forma significativa para o amortecimento observado nas ondas superficiais que se forma em recipientes fechados.

Mikishev e Rabinovich [Mikishev e Rabinovich 1968] determinaram um factor de amortecimento usando a teoria da película de fronteira para fluidos de baixa viscosidade em reservatórios rígidos [Ibrahim, 2005].

A influência da viscosidade do fluido nas frequências naturais dos modos de *sloshing* tem vindo a ser estudada tanto analiticamente como experimentalmente em reservatórios de diversas geometrias [Scarsi, 1971] [Su, 1981] [Sun, 1991] [Henderson e Miles, 1994] [Martel et. al., 1998] [Yalla, 2001].

Referem-se entre os estudos anteriores os mais relevantes como sejam o estudo da influência da viscosidade do fluido na frequência natural [Su, 1981], desde que se observem valores reduzidos de razão de altura de água ( $\epsilon=h/L$ ), e, ainda, o estudo que permitiu a determinação de frequências naturais e coeficientes de amortecimento para

ondas de superfície em reservatórios circulares cilíndricos baseada na consideração de uma linha de contacto fixa, películas de fronteira de Stokes e superfícies completamente límpidas ou contaminadas [Sun, 1991] [Henderson e Miles, 1994] [Martel et. al., 1998].

Os estudos desenvolvidos e convenientemente referenciados permitiram concluir que, na generalidade dos casos, o amortecimento resultante de ondas superficiais em reservatórios fechados excede as previsões teóricas [Ibrahim, 2005], pelo que se torna necessário que se desenvolvam programas de ensaios experimentais para a sua mais correcta caracterização e definição. Pode-se no entanto adiantar que o amortecimento resultante surge devido a:

- i) Dissipação viscosa na zona de fronteira rígida do reservatório;
- ii) Dissipação viscosa na superfície livre do fluido, que se pode dizer estar coberta por uma película de características viscoelásticas;
- iii) Amortecimento viscoso no interior do fluido. Esta parcela é, no entanto, negligenciável para fluido em reservatório cujas dimensões laterais sejam comparáveis com o comprimento de onda potencialmente formada;
- iv) Capilaridade histirética na zona (linha) de contacto.

À medida que o tamanho dos reservatórios aumenta, as forças hidrodinâmicas e os momentos resultantes do movimento do fluido no seu interior tornam-se muito elevados, particularmente na vizinhança da ressonância.

Numa tentativa de evitar eventuais colapsos estruturais ou comportamento dinâmico indesejável, podem ser introduzidos alguns dispositivos (baffles, grelhas, anéis, redes,...) que reduzam ou, até mesmo, suprimam por completo os efeitos indesejáveis do fenómeno de *sloshing* dinâmico. Pela razão indicada tem vindo a ser desenvolvida extensa actividade ao nível do dimensionamento óptimo de alguns dos referidos dispositivos [Langner, 1963] [Abramson, 1966] [Schwind, et. al., 1964] [Muto et. al., 1988] [Sharma et. al., 1992].

A título meramente informativo indica-se que Abramson [Abramson, 1969] foi o primeiro a definir os principais parâmetros com influência directa no dimensionamento de dispositivos de supressão de *sloshing* [Ibrahim, 2005]

A viscosidade inerente dos fluidos em reservatórios com paredes verticais planas e sem qualquer tipo de dispositivo tem efeitos muito limitados no que refere à redução da amplitude de *sloshing* [Ibrahim, 2005].

Estudos experimentais e analíticos foram desenvolvidos com o objectivo de determinar frequências naturais, amortecimento e forças no líquido em tanques de diferentes geometrias e apetrechados com variados tipos de dispositivos de redução de *sloshing* [Howell e Ebler, 1956] [Bauer, 1959b] [Bauer, 1960] [Cole e Gambucci, 1961a] [Cole e Gambucci, 1961b] [Silveira et. al., 1961] [Bauer, 1963a] [Bauer, 1963b] [Garza, 1964] [Stephens et. al, 1963] [Garza, 1966] [Garza e Dodge, 1967] [Stephens e Scholl, 1967] [Buchanan, 1968] [Shin e Buchanan, 1971] [Scholl et. al., 1972].

A dependência do amortecimento relativamente à altura de líquido no interior de tanques de geometria variável [Miles, 1956] [Bauer, 1957] [Bauer, 1958c] [Stephens et. al, 1962] [Cole, 1966] [Bauer e Eidel, 1998] bem como a dissipação de energia em recipientes fechados [Miles, 1967] [Mei e Liu, 1973] foram estudadas e documentadas.

A eficácia do amortecimento associado ao movimento de fluidos viscosos em reservatórios rígidos [Krein, 1964] [Krushinskaya, 1965] [Victorov, 1965] [Krein e Laptev, 1968] [Krein e Kan, 1969] assim como à oscilação de líquidos imiscíveis em tanques rectangulares [Bauer, 1984a] foram igualmente avaliadas.

#### 2.1.4.2. Amortecimento em fluidos viscosos

Com base nos trabalhos desenvolvidos, e indicados nos parágrafos anteriores, pode-se afirmar que a equação de fluxo para fluidos viscosos é dada pela equação de Navier-Stokes linearizada para fluidos incompressíveis [Ibrahim, 2005]:

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left( gz + \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 u \quad (65)$$

em que p corresponde à pressão.

Admitindo que movimento do fluido no interior do tanque se encontra sujeito à equação de continuidade (equação (66)) e à condição de fronteira (equação (67)):

$$\nabla u = 0 \quad (66)$$

$$u = 0 \quad \text{nas zonas de fronteira molhada} \quad (67)$$

e que a velocidade do fluido,  $u$ , pode ser descrita em termos do gradiente da função potencial escalar,  $\Phi$ , adicionada à variação de um vector potencial,  $A$ , na forma de Helmholtz [Arfken e Weber, 1995]:

$$u = -\nabla\Phi + \nabla \times A \quad (68)$$

Por substituição da equação (68) na equação de continuidade expressa em (66) e na condição de fronteira expressa em (67) obtêm-se, respectivamente:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (69)$$

$$-\nabla\Phi + \nabla \times A = 0 \quad \text{nas zonas de fronteira molhada} \quad (70)$$

A condição de fronteira dinâmica de superfície livre é obtida verificando a equação (65) na superfície livre:

$$z = \eta(r, \theta) \quad (71)$$

Substituindo a equação (68) na equação (65), e equiparando os gradientes e variações de ambos os lados, obtêm-se a condição dinâmica de fronteira de superfície livre do fluido em movimento (equação (72)) e a equação diferencial para o vector potencial (equação (73)):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = gz - \frac{p}{\rho} + const \quad (72)$$

$$v\nabla^2 A = \frac{\partial A}{\partial t} \quad (73)$$

A equação expressa em (73) é análoga à condição patente na equação de difusão [Ibrahim, 2005].

A condição de fronteira de superfície livre do fluido condiciona a velocidade vertical das partículas do fluido a ser igual à velocidade vertical da superfície livre em si própria [Ibrahim, 2005]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (74)$$

É útil estabelecer a influência da viscosidade do fluido no movimento na superfície livre do fluido.

As condições de fronteira em reservatórios de paredes rígidas (equação (70)) juntamente com a equação de continuidade (equação (69)), a equação de difusão (equação (73)) e a condição cinemática de superfície livre do fluido (equação (74)) tornam possível obter uma solução explícita para a função potencial escalar,  $\Phi$ , e o vector função potencial,  $A$ . Podem, no entanto, ainda ser introduzidas mais simplificações baseadas na natureza das condições fronteira [Ibrahim, 2005].

Com base na formulação apresentada espera-se que  $\Phi$  seja essencialmente o potencial de velocidades no escoamento invíscido,  $\Phi_c$ , que corresponde ao potencial para o qual se verifica  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  ao nível das paredes rígidas do reservatório em que se encontra o fluido.

O potencial pode ser simplificado e expresso em termos de duas componentes:

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_b \quad (75)$$

com  $\Phi_b$  coorespondente a um termo associado a uma contribuição adicional muito reduzida. Neste caso obtém-se novas condições fronteira ao nível das paredes rígidas do reservatório:

$$[n \times (\nabla \times A)] = (n \times \nabla \Phi_c) \quad \text{ao nível das paredes rígidas} \quad (76)$$

$$[n\nabla \times A] = \frac{\partial \Phi_b}{\partial n} \quad \text{ao nível das paredes rígidas} \quad (77)$$

Assumindo que a função potencial de velocidade,  $\Phi_c$ , é conhecida (pelo facto do fluido ser invíscido) e usando as equações (73) e (76), torna-se possível determinar o vector função potencial,  $A$ . Em posse de  $A$  é possível usar a equação de continuidade (69) e a condição de fronteira expressa por (77) para determinar a função potencial adicional,  $\Phi_b$ , usando aproximações sucessivas.

Em caso de harmónicas dependentes do tempo,  $A$  é proporcional a uma exponencial da forma  $e^{i\omega t}$ , e a equação (73) toma a forma:

$$\left( \nabla^2 + \frac{i}{l^2} \right) A = 0 \quad (78)$$

em que  $l = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$  corresponde à espessura da película de fronteira. Fora da película de fronteira o vector função potencial,  $A$ , apresenta um andamento claramente definido como exponencial.

Considerando oscilações em regime livre, para as quais o amortecimento é reduzido, a frequência  $\omega$  é grande quando comparada com o coeficiente de amortecimento  $\alpha$  no factor de decaimento exponencial  $e^{-\alpha t}$ .

No corpo do fluido, incluindo ao nível da superfície livre, em zonas suficientemente afastadas da película de fronteira, o vector função potencial,  $A$ , pode ser tomado como nulo [Ibrahim, 2005].

As condições de fronteira são satisfeitas na superfície livre, em termos de  $\Phi_c$ , que pode ser definido:

$$\Phi_c = \sum_m \sum_n N_{mn} \dot{q}_{mn} \cos n \theta J_n(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh \lambda_{mn} (z+h)}{\lambda_{mn} \sin \lambda_{mn} h} \quad (79)$$

em que:

$$N_{mn} = \sqrt{\frac{1}{2} \pi R^2 J_n^2(\lambda_{mn} R) \left(1 - \frac{n^2}{(\lambda_{mn} R)^2}\right)} \quad (80)$$

A dissipação de energia pode ser estimada usando o resultado das investigações de Lamb [Lamb, 1945]:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -2\bar{F} \quad (81)$$

em que  $\bar{E}$  corresponde à média da soma das energias cinética, T, e potencial, V, por ciclo e  $2\bar{F}$  é uma função de dissipação. As energias cinética (equação (82)) e potencial (equação (83)) são dadas, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_v (u.u) dv = \frac{1}{2} \rho q_{mn}^2 \frac{\coth \lambda_{mn} h}{\lambda_{mn}} \quad (82)$$

$$V = \frac{1}{2} \rho g q_{mn}^2 \quad (83)$$

em que  $q_{mn}$  é a coordenada de superfície correspondente às ondas simétricas superficiais ( $\cos n\theta$ ).

Para oscilações amortecidas a amplitude de onda pode se escrita de acordo com o proposto na equação (84):

$$q_{mn} = q_{mn}^* e^{-(i\omega_{mn} + \alpha)t} \quad \text{admitindo que} \quad \omega_{mn} \gg \alpha \quad (84)$$

A função de dissipação,  $2\bar{F}$ , é definida de acordo com:

$$2\bar{F} \approx \mu \int_v (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times A))^2 dv - \mu \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n} (\vec{\nabla} \Phi_c)^2 dS \quad (85)$$

Na equação (85)  $\mu$  traduz a viscosidade dinâmica do fluido. O primeiro integral da equação anterior corresponde a um integral de volume enquanto que o segundo corresponde a um integral de superfície sobre a superfície livre de equilíbrio. Nesta circunstância espera-se que o vector potencial  $A$  seja insignificante em zonas afastadas das paredes rígidas do reservatório. A equação diferencial do vector potencial  $A$  na vizinhança das paredes do reservatório pode ser integrada e o resultado ser substituído no primeiro integral da equação (85). O segundo integral traduz a dissipação na superfície livre,  $S_t$  [Ibrahim, 2005].

Por introdução da equação (84) nas equações correspondentes à energia cinética (82) e potencial (83) e derivando em ordem ao tempo obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\alpha \rho g q_{mn}^{*2} e^{-2\alpha} \quad (86)$$

Introduzindo  $\Phi_c$ , dado pela igualdade apresentada em (79), no segundo integral da equação (85):

$$2\bar{F} \approx -\mu \int_{S_t} \frac{\partial}{\partial n} (\bar{\nabla} \Phi_c)^2 dS = 2\mu \lambda_{mn}^2 g q_{mn}^{*2} e^{-2\alpha} \quad (87)$$

Da relação entre as equações (86) e (87) obtém-se:

$$\alpha_t = 2\nu \lambda_{mn}^2 \quad (88)$$

com  $\nu$  correspondente à viscosidade cinemática. A relação definida pela equação (88) traduz uma medida do coeficiente de amortecimento da superfície livre do corpo do fluido.

A equação diferencial do vector função potencial descrita na equação (80) pode ser resolvida assumindo que a espessura da película de fronteira,  $l$ , é muito pequena quando comparada com as dimensões do reservatório.

As componentes do vector função potencial junto das paredes laterais e no fundo do tanque podem ser obtidas [Ibrahim, 2005] e substituídas na equação (87). Desta forma obtém-se os parâmetros de amortecimento associado às paredes laterais e ao fundo do tanque, respectivamente:

$$\alpha_s = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\nu \omega_{mn}}{2}} \left\{ \frac{1 + \left( \frac{n}{\lambda_{mn}} R \right)^2}{1 - \left( \frac{n}{\lambda_{mn}} R \right)^2} - \frac{2\lambda_{mn} h}{\sinh 2\lambda_{mn} h} \right\} \quad (89)$$

$$\alpha_b = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\nu \omega_{mn}}{2}} \left\{ \frac{2\lambda_{mn} h}{\sinh 2\lambda_{mn} h} \right\} \quad (90)$$

Os decrementos logarítmicos associados à superfície livre (equação (88)), às paredes laterais (equação (89)) e ao fundo do tanque (equação (90)) são obtidos tendo por base a definição:

$$\delta_i = 2\pi \frac{\alpha_i}{\omega_{mn}} \quad (91)$$

Assim, obtêm-se as seguintes expressões para a superfície livre do fluido, para as paredes laterais e para a parede de fundo do reservatório, respectivamente:

$$\delta_t = 4\pi\nu \frac{\lambda_{mn}^2}{\omega_{mn}} \rightarrow O\left(\frac{l^2}{R^2}\right) \quad (92)$$

$$\delta_s = \frac{\pi}{R} \sqrt{\frac{\nu}{2\omega_{mn}}} \left\{ \frac{1 + \left( \frac{n}{\lambda_{mn}} R \right)^2}{1 - \left( \frac{n}{\lambda_{mn}} R \right)^2} - \frac{2\lambda_{mn} h}{\sinh 2\lambda_{mn} h} \right\} \rightarrow O\left(\frac{l}{R}\right) \quad (93)$$

$$\delta_b = \frac{\pi}{R} \sqrt{\frac{\nu}{2\omega_{mn}}} \left\{ \frac{2\lambda_{mn} h}{\sinh 2\lambda_{mn} h} \right\} \rightarrow O\left(\frac{l}{R}\right) \quad (94)$$

com:

$$\omega_{mn}^2 = g\lambda_{mn} \tanh(\lambda_{mn} h) \left\{ 1 + \frac{\sigma \lambda_{mn}^2}{\rho g} \right\} \quad (95)$$

correspondente à mn-ésima frequência natural de *sloshing* do fluido, e  $\sigma$  é a tensão superficial.

Refere-se ainda que o amortecimento devido à superfície livre é muito pequeno quando comparado com o amortecimento associado às paredes, especialmente para reservatórios de grandes dimensões.

Em jeito de resumo pode-se então definir uma expressão adequada para o amortecimento do modo fundamental [Ibrahim, 2005]:

$$\delta = 3.52 \frac{\sqrt{\nu} \left\{ 1 + 2 \left( 1 - \frac{h}{R} \right) \sinh^{-1} \left( 3.68 \frac{h}{R} \right) \right\}}{R^{3/4} g^{1/4} \tanh^{1/4} \left( \frac{1.84h}{R} \right)} \quad (96)$$

Em reservatórios de águas profundas (*deep water*),  $h/R \gg 1$  ou  $h/L \gg 1$ , o factor de amortecimento é invariante com a razão entre a altura de fluido e a dimensão característica do reservatório, sendo dado pela equação (97) para reservatórios com geometria circular cilíndrica de paredes verticais:

$$\delta_0 = 3.52 \frac{\sqrt{\nu}}{R^{3/4} g^{1/4}} \Big|_{h/r > 1} \quad (97)$$

A equação anterior foi verificada por meio de análise dimensional [Berlot et. al, 1957]. Para além disso os autores concluíram também que se dois tanques cilíndricos apresentam a mesma relação de altura de água e se encontram sujeitos à mesma excitação dinâmica, exibem um comportamento de *sloshing* muito semelhante desde que o número de Reynolds seja preservado [Ibrahim, 2005].

O decremento logarítmico do 1.º modo de *sloshing* não é difícil de medir, de facto o coeficiente de amortecimento depende muito simplesmente da altura do fluido em repouso, da viscosidade cinemática do fluido e das dimensões do reservatório (raio tratando-se de reservatórios circulares ou comprimento tratando-se de reservatórios rectangulares).

A análise dimensional [Berlot et. al, 1957] e as correlações empíricas mostraram que o coeficiente de amortecimento do primeiro modo não simétrico em tanques circulares cilíndricos de paredes verticais planas é dado pela relação empíricas proposta em meados da década de 60 por Abramson [Abramson, 1966]:

$$\zeta = \frac{2.89}{\pi} \sqrt{\frac{\nu}{R^{3/2} g^{1/2}}} \left[ 1 + \frac{0.318}{\sinh\left(1.84 \frac{h}{R}\right)} \left( \frac{1 - \left(\frac{h}{R}\right)}{\cosh\left(1.84 \frac{h}{R}\right)} + 1 \right) \right] \quad (98)$$

em que  $\nu$  corresponde à viscosidade cinemática,  $R$  é o raio do tanque,  $g$  a aceleração da gravidade.

Quando em presença de reservatórios de águas profundas,  $h/R > 1$ , a relação dada pela equação (98) toma a forma:

$$\zeta = \frac{2.89}{\pi} \sqrt{\frac{\nu}{R^{3/2} g^{1/2}}} = \frac{C}{\sqrt{G_A}} \quad (99)$$

com  $G_A$  denominado número de Galileu e  $C$  traduz um coeficiente numérico cujos valores dependem da geometria do reservatório e da altura de fluido em repouso:

$$G_A = \frac{R^{3/2} g^{1/2}}{\nu} \quad (100)$$

Esta relação pode ser generalizada para diferentes geometrias, obtendo-se:

$$\zeta = C_1 \left( \frac{\nu}{d^{3/2} g^{1/2}} \right)^{n_1} \quad (101)$$

com  $d$  correspondente à dimensão característica do reservatório, isto é, o comprimento em reservatórios rectangulares ou o raio em reservatórios cilíndricos ou esféricos. As constantes  $C_1$  e  $n_1$ , presentes na equação apresentada, podem tomar os valores que se indicam Tabela 2.

Com o objectivo de minimizar eventuais forças de *sloshing* hidrodinâmico que possam criar instabilidade ao nível do reservatório, torna-se desejável suprimir em certas circunstâncias amplitudes excessivas de *sloshing* do fluido.

Para este efeito alguns autores têm vindo a desenvolver estudos numéricos sobre as características dinâmicas do *sloshing* de fluidos viscosos em reservatórios de geometria arbitrária [Shemer e Kit, 1988] [Popov et. al., 1993] [Mieda et. al, 1993] [Tang et. al, 1993] [Jitu et. al, 1994].

Tabela 2– Valores estabelecidos para as constantes  $C_1$  e  $n_1$

Geometria	Características	$C_1$	$n_1$
Circular cilíndrico	$h/R \geq 1.0$	0.79	0.5
	0.5	1.11	0.5
	0.1	3.36	0.5
Rectangular	$h/w \geq 1.0$	$\approx 1.0$	0.5
Esférico	$\frac{3}{4}$ cheio	0.66	0.359
	$\frac{1}{2}$ cheio	0.39	0.359
	$\frac{1}{4}$ cheio	0.32	0.359
Cónico vertical		0.81	0.5

#### 2.1.4.3. Análise modal de fluidos viscosos

Considera-se que uma quantidade considerável do amortecimento do fluido é desenvolvida junto das paredes laterais do reservatório, uma vez que a grande maioria do movimento de *sloshing* ocorre na parte superior do recipiente junto da superfície livre do fluido.

Para pequenas alturas de fluido,  $h/R < 1$ , é expectável que a contribuição da adesão ao nível do fundo seja muito maior do que a contribuição ao nível das paredes laterais. À medida que as alturas de fluido aumentam, no sentido de  $h/R > 1$ , a contribuição do fundo diminui sendo o amortecimento condicionado pelas paredes laterais do tanque e pelo amortecimento interno do escoamento viscoso que se desenvolve no fluido em movimento [Bauer e Eidel, 1999a] [Bauer e Eidel, 1999b] [Bauer e Eidel, 2002].

Admitindo um escoamento viscoso incompressível num recipiente circular cilíndrico de paredes verticais planas. Nesta situação o escoamento do fluido é governado pelas equações de Navier-Stokes, que podem ser definidas em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , ao nível da superfície livre:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (102)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (103)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] - g \quad (104)$$

em que  $u$ ,  $v$  e  $w$  correspondem às componentes da velocidade do fluido segundo os eixos  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ , respectivamente.

Em fluidos incompressíveis, o escoamento deverá satisfazer a equação de continuidade expressa na seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (105)$$

As soluções da equação anterior podem ser escritas de uma forma muito geral:

$$u(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(r, z) e^{\lambda t + \text{Im } \theta} \quad (106)$$

$$v(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(r, z) e^{\lambda t + \text{Im } \theta} \quad (107)$$

$$w(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m(r, z) e^{\lambda t + \text{Im } \theta} \quad (108)$$

$$p(r, \theta, z, t) = p_0 + \sum_{m=0}^{\infty} P_m(r, z) e^{\lambda t + \text{Im } \theta} - \rho g z \quad (109)$$

em que  $\lambda = \zeta + i\omega$  corresponde à frequência natural complexa, onde a parte real corresponde ao amortecimento e a parte imaginária representa a frequência natural amortecida [Ibrahim, 2005].

Substituindo as equações (106) a (109) nas equações (102) a (104) obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_m}{\partial r} - \frac{(m^2 + 1)}{r^2} U_m - \frac{\lambda}{\nu} U_m + \frac{\partial^2 U_m}{\partial z^2} - im \frac{2}{r^2} V_m = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial r} \quad (110)$$

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial r} - \frac{(m^2 + 1)}{r^2} V_m - \frac{\lambda}{\nu} V_m + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} - im \frac{2}{r^2} U_m = -\frac{im}{\mu r} P_m \quad (111)$$

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} W_m - \frac{\lambda}{\nu} W_m + \frac{\partial^2 W_m}{\partial z^2} - im \frac{2}{r^2} U_m = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P_m}{\partial z} \quad (112)$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial r} + \frac{U_m}{r} + \frac{im}{r} V_m + \frac{\partial W_m}{\partial z} = 0 \quad (113)$$

A solução das equações (110) a (113) deve satisfazer as condições de fronteira nas paredes laterais e no fundo dos tanques (equação (114)), as condições de fronteira cinemática na superfície livre (equação (115)), as condições de fronteira dinâmica na superfície livre (equação (116)) e as tensões de corte na superfície livre (equação (117)):

$$u(r, \theta, z, t) = v(r, \theta, z, t) = w(r, \theta, z, t) = 0 \quad \text{em } r=R \text{ e } z=h \quad (114)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w|_{z=0} \quad (115)$$

$$\bar{p}(r, \theta, t) = -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} - \frac{\rho g}{\sigma} \eta \right] = const|_{z=0} \quad (116)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]_{z=0} = 0 \quad (117)$$

Nas equações anteriores assume-se que  $\nu = \mu / \rho$ ,  $\rho$  correspondente à densidade do fluido,  $\eta = \eta(r, \theta, t)$  a elevação da superfície livre do fluido acima da cota  $z=0$ ,  $\sigma$  a tensão superficial e  $\bar{p}(r, \theta, t)$  corresponde à diferença entre a pressão fora da superfície livre do fluido e a pressão dentro da referida superfície livre [Ibrahim, 2005]

As funções  $U_m(r,z)$ ,  $V_m(r,z)$ ,  $W_m(r,z)$  e  $P_m(r,z)$ , indicadas de (106) a (109), satisfazem a condição de fronteira no fundo do tanque desde que consideradas na seguinte forma geral:

$$\{U_m(r,z), V_m(r,z), W_m(r,z), P_m(r,z)\}^T = \{U(r), V(r), W(r), P(r)\}^T \cosh[k(z+h)] \quad (118)$$

Aplicando o operador divergência em ambos os lados da equação de Stokes (equação (110) a (112)), obtêm-se a equação de Laplace para a distribuição de pressão [Ibrahim, 2005]:

$$\frac{\partial^2 P_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P_m + \frac{\partial^2 P_m}{\partial z^2} = 0 \quad (119)$$

Admitindo uma transformação complexa [Ibrahim, 2005] para as componentes radial e circunferencial da velocidade:

$$U = \frac{1}{2}(F + G) \quad (120)$$

$$V = \frac{1}{2i}(F - G) \quad (121)$$

de tal forma que:

$$F = U + iV \quad (122)$$

$$G = U - iV \quad (123)$$

Obtêm-se, por substituição nas equações (110) a (113), a equação de continuidade modificada:

$$\frac{dF}{dr} + \frac{m+1}{r} F + \frac{dG}{dr} - \frac{m-1}{r} G = -2kW \quad (124)$$

A solução para  $U(r)$ ,  $V(r)$  e  $W(r)$  pode ser escrita na seguinte forma:

$$U(r) = \frac{1}{2} A J_{m+1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \frac{1}{2} D \left( \frac{\xi_{mn}}{\lambda} \right) J_{m+1} \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) + \frac{1}{2} B J_{m-1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) - \frac{1}{2} D \left( \frac{\xi_{mn}}{\lambda} \right) J_{m-1} \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) \quad (125)$$

$$V(r) = \frac{1}{2i} A J_{m+1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \frac{1}{2i} D \left( \frac{\xi_{mn}}{\lambda} \right) J_{m+1} \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) - \frac{1}{2i} B J_{m-1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \frac{1}{2i} D \left( \frac{\xi_{mn}}{\lambda} \right) J_{m-1} \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) \quad (126)$$

$$W(r) = C J_m \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) - D \left( \frac{\xi_{mn}}{\lambda} \right) J_m \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) \quad (127)$$

Com base na equação (119) é possível ainda obter uma solução para  $P(r)$  na forma:

$$P(r) = \frac{\mu}{R} D J_m \left( \frac{\xi_{mn}}{R} r \right) \quad (128)$$

Nas equações (125) a (127)  $A$ ,  $B$  e  $D$  são constantes,  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda R^2}{\nu}$  traduz o parâmetro adimensional equivalente ao número de Reynolds e  $\mu$  foi uma variável introduzida de forma a simplificar algumas das verificações que serão apresentadas posteriormente. A determinação dos valores  $\xi_{mn}$  serão apresentadas mais adiante.

As componentes originais da velocidade,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , e a pressão,  $p$ , podem ser escritas como função de  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  e  $t$ , de acordo com:

$$P(r) = \frac{\mu}{R} D J_m \left( \frac{\xi_{mn}}{R} r \right) \quad (129)$$

$$u(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} J_{m+1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + B_{mn} J_{m-1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) - \left( \frac{2\xi_{mn}}{\lambda} \right) D_{mn} J_m \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) \right\} \cosh \left[ \xi_{mn} \frac{(z+h)}{R} \right] e^{\text{Im} \theta} e^{\lambda t} \quad (130)$$

$$v(r, \theta, z, t) = -\frac{i}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} J_{m+1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) - B_{mn} J_{m-1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \right. \quad (131)$$

$$\left. + \left( \frac{2mR}{r\bar{\lambda}} \right) D_{mn} J_m \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) \right\} \cosh \left[ \xi_{mn} \frac{(z+h)}{R} \right] e^{\text{Im } \theta} e^{\lambda t}$$

$$w(r, \theta, z, t) = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}}}{\xi_{mn}} \{ (A_{mn} - B_{mn}) J_m \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \right. \quad (132)$$

$$\left. + \left( \frac{2\xi_{mn}}{\bar{\lambda}} \right) D_{mn} J_m \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) \right\} \sinh \left[ \xi_{mn} \frac{(z+h)}{R} \right] e^{\text{Im } \theta} e^{\lambda t}$$

$$p(r, \theta, z, t) = p_0 - \rho g z + \left( \frac{\mu}{R} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} J_m \left( \frac{\xi_{mn} r}{R} \right) \cosh \left[ \xi_{mn} \frac{(z+h)}{R} \right] e^{\text{Im } \theta} e^{\lambda t} \quad (133)$$

Os coeficientes  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  e  $D_{mn}$  presentes nas equações (129) a (131) podem ser definidos de acordo com as equações (133) a (134):

$$B_{mn} = -\beta_{mn} A_{mn} \quad (134)$$

$$D_{mn} = -\bar{\lambda} \gamma_{mn} A_{mn} \quad (135)$$

em que os parâmetros  $\beta_{mn}$  e  $\gamma_{mn}$  são obtidos após a utilização das mesmas propriedades do que usado para as funções de Bessel:

$$\beta_{mn} = \frac{J_{m+1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \right) J_{m-1}(\xi_{mn})}{J_{m-1} \left( \sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \right) J_{m+1}(\xi_{mn})} \quad (136)$$

Na determinação de  $\xi_{mn}$  deve ser verificada a condição de fronteira expressa pela equação (114), em  $r=R$  para reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas.

Assim, aplicando a equação (114) às equações (129) a (131) obtém-se a equação transcendente (137) cujas raízes correspondem directamente aos valores de  $\xi_{mn}$ .

$$\begin{vmatrix} J_{m+1}\left(\sqrt{\xi^2 - \bar{\lambda}}\right) & J_{m-1}\left(\sqrt{\xi^2 - \bar{\lambda}}\right) & -\xi J_m(\xi) \\ J_{m+1}\left(\sqrt{\xi^2 - \bar{\lambda}}\right) & -J_{m-1}\left(\sqrt{\xi^2 - \bar{\lambda}}\right) & mJ_m(\xi) \\ \sqrt{\xi^2 - \bar{\lambda}} J_m\left(\sqrt{\xi^2 - \bar{\lambda}}\right) & -\sqrt{\xi^2 - \bar{\lambda}} J_m\left(\sqrt{\xi^2 - \bar{\lambda}}\right) & \xi^2 J_{m+1}(\xi) \end{vmatrix} = 0 \quad (137)$$

Por outro lado na determinação das frequências naturais da superfície livre, as condições de superfície livre devem ser satisfeitas.

Assim, as condições (119) permitem obter as condições que a seguir se apresentam:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{mn} A_{mn} \sinh\left(\xi_{mn} \frac{h}{R}\right) \left\{ \frac{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}}{\xi_{mn}^2} (1 + \beta_{mn}) J_m\left(\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left(\frac{r}{R}\right)\right) - \right. \quad (138)$$

$$\left. - J_{m+1}\left(\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left(\frac{r}{R}\right)\right) + \beta_{mn} J_{m-1}\left(\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left(\frac{r}{R}\right)\right) - 4\xi_{mn} \gamma_{mn} J_m\left(\xi_{mn} \frac{r}{R}\right) \right\} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{mn} A_{mn} \sinh\left(\xi_{mn} \frac{h}{R}\right) \left\{ J_{m+1}\left(\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left(\frac{r}{R}\right)\right) + \beta_{mn} J_{m-1}\left(\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left(\frac{r}{R}\right)\right) + \right. \quad (139)$$

$$\left. + \frac{m\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}}}{\xi_{mn}^2 \left(\frac{r}{R}\right)} (1 + \beta_{mn}) J_m\left(\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left(\frac{r}{R}\right)\right) - \frac{4\xi_{mn} \gamma_{mn}}{\left(\frac{r}{R}\right)} J_m\left(\xi_{mn} \frac{r}{R}\right) \right\} = 0$$

Considerando a derivada em ordem ao tempo da condição de superfície dinâmica (equação (116)) e usando a condição cinemática (equação (115)), obtém-se:

$$\lambda \bar{p} - 2\mu\lambda \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\rho g}{\sigma} w \right] = 0 \quad (140)$$

No entanto, por uma questão de simplificação, pode-se efectuar a substituição dos três primeiros termos dentro do parentesis pelo gradiente de pressão usando a igualdade apresentada na equação (102):

$$\lambda \bar{p} - 2\mu\lambda \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\lambda}{v} w - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\rho g}{\sigma} w \right] = 0 \quad (141)$$

Substituindo na equação anterior  $\bar{p}$  pela equação (132) e  $w$  pela equação (131), obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cosh\left(\xi_{mn} \frac{h}{R}\right) \left\{ \frac{\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}}}{\xi_{mn}^2} (1 + \beta_{mn}) \times \left[ \bar{\lambda} \xi_{mn} + \frac{1}{2(Oh)} (\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda} + Bo) \tanh\left(\xi_{mn} \frac{r}{R}\right) \right] \right\} \times \quad (142)$$

$$\times J_m\left(\sqrt{\xi_{mn}^2 - \bar{\lambda}} \left(\frac{r}{R}\right)\right) - \left[ \bar{\lambda} (\bar{\lambda} + 2\xi_{mn}^2) + \frac{\xi_{mn}}{(Oh)} (\xi_{mn}^2 + Bo) \tanh\left(\xi_{mn} \frac{r}{R}\right) \gamma_{mn} J_m\left(\xi_{mn} \frac{r}{R}\right) \right] = 0$$

em que  $Oh = \frac{\mu v}{\sigma R}$  é o número de capilaridade que fornece uma medida para a deformação da superfície em resposta às tensões induzidas pela capilaridade,  $Bo = \frac{\rho g R^2}{\sigma}$  é o número de Bond que traduz a medida da razão entre as forças gravíticas e de tensão superficial.

As equações (138), (139) e (142) constituem um conjunto infinito de séries para cada modo m e dependem das coordenadas radiais r/R. Para além disso cada modo tem um conjunto de infinito de coeficientes  $A_{mn}$  desconhecidos. Truncando estas equações a um número finito de  $n=3N-1$  obtém-se um conjunto de equações algébricas para os coeficientes  $A_{mn}$  correspondentes.

O sistema truncado das equações algébricas homogéneas representa o problema de valores próprios da oscilação em regime livre da superfície do fluido e dos correspondentes vectores próprios [Ibrahim, 2005]. A equação (143) permite obter uma estimativa das frequências amortecidas:

$$\bar{\lambda}_{mn} = (\zeta_{mn} + i\omega_{mn}) \frac{R^2}{v} \quad (143)$$

#### 2.1.4.4. Excitação lateral em fluidos viscosos

Admitindo uma excitação lateral ao longo do eixo X, tal que  $x(t) = X_0 e^{i\Omega t}$ , as equações de Stokes e de pressão indicadas na secção 2.1.4.3. ((102) a (104)) tomam a seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - X_0 \Omega^2 e^{i\Omega t} \cos \theta \quad (144)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + X_0 \Omega^2 e^{i\alpha t} \sin \theta \quad (145)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] - g \quad (146)$$

$$p(r, \theta, z, t) = p_0 + \bar{p}(r, \theta, z, t) - \rho g z - \rho \Omega^2 X_0 r e^{i\Omega t} \cos \theta \quad (147)$$

As soluções das equações (144) a (147) podem ser escritas de acordo com o apresentado nas equações (148) a (151):

$$u(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(r, z) e^{i\Omega t + \text{Im } \theta} \quad (148)$$

$$v(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(r, z) e^{i\Omega t + \text{Im } \theta} \quad (149)$$

$$w(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m(r, z) e^{i\Omega t + \text{Im } \theta} \quad (150)$$

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(r, z) e^{i\Omega t + \text{Im } \theta} \quad (151)$$

Seguindo o mesmo procedimento que o indicado em 2.1.4.3. (equações (120) a (123)), obtém-se que as equações de Stokes (equações (144) a (147)) podem ser reescritas em termos de funções reais F e G [Ibrahim, 2005], e que para m=1 (modo fundamental de vibração) a equação de continuidade toma a seguinte forma:

$$\frac{dF}{dr} + \frac{2}{r} F + \frac{dG}{dr} = -2kW \quad (152)$$

A condição de fronteira dinâmica de superfície livre toma a forma:

$$i\Omega\bar{p} - 2i\mu\Omega \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\rho g}{\sigma} w \right] = i\Omega^3 \rho r X_0 \cos \theta \quad (153)$$

Admitindo uma sollicitação do tipo  $x(t)=X_0e^{i\Omega t}$ , então a solução para  $U(r)$ ,  $V(r)$  e  $W(r)$ , pode ser escrita de acordo com o indicado nas expressões seguintes:

$$U(r) = \frac{1}{2} A J_2 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \frac{1}{2} D \left( \frac{\xi}{i\Omega^*} \right) J_2 \left( \frac{\xi r}{R} \right) + \frac{1}{2} B J_0 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega} \left( \frac{r}{R} \right) \right) - \frac{1}{2} D \left( \frac{\xi}{i\Omega^*} \right) J_0 \left( \frac{\xi r}{R} \right) \quad (154)$$

$$V(r) = \frac{1}{2} A J_2 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \frac{1}{2} D \left( \frac{\xi}{i\Omega^*} \right) J_2 \left( \frac{\xi r}{R} \right) - \frac{1}{2} B J_0 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \frac{1}{2} D \left( \frac{\xi}{i\Omega^*} \right) J_0 \left( \frac{\xi r}{R} \right) \quad (155)$$

$$W(r) = C J_1 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \left( \frac{r}{R} \right) \right) - D \left( \frac{\xi}{i\Omega^*} \right) J_1 \left( \frac{\xi r}{R} \right) \quad (156)$$

em que:

$$C = -\frac{\sqrt{\xi^2 - i\Omega^*}}{2\xi} (A - B) \quad (157)$$

Seguindo os mesmos passos que na secção anterior, os valores de  $\xi$  ( $\Omega^*$ ) obtém-se a partir das raízes da seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} J_2 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \right) & J_0 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \right) & -\xi J_1(\xi) \\ J_2 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \right) & -J_0 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \right) & J_1(\xi) \\ \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} J_1 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \right) & -\sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} J_1 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \right) & \xi^2 J_1(\xi) \end{vmatrix} = 0 \quad (158)$$

À semelhança do apresentado em 2.1.4.3., as componentes originais da velocidade,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , e a pressão,  $p$ , podem ser escritas como função de  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  e  $t$ , de acordo com:

$$u(r, \theta, z, t) = \frac{e^{i\Omega t}}{2} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n J_2 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + B_n J_0 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \left( \frac{r}{R} \right) \right) - \right. \quad (159)$$

$$\left. - \left( \frac{2\xi_n}{i\Omega^*} \right) D_n J_1 \left( \frac{\xi_n r}{R} \right) \right\} \cosh \left( \xi_n \frac{(z+h)}{R} \right)$$

$$v(r, \theta, z, t) = \frac{e^{i\Omega t}}{2} \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n J_2 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \left( \frac{r}{R} \right) \right) - B_n J_0 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \right. \quad (160)$$

$$\left. + \left( \frac{2R}{ir\Omega^*} \right) D_n J_1 \left( \frac{\xi_n r}{R} \right) \right\} \cosh \left( \xi_n \frac{(z+h)}{R} \right)$$

$$w(r, \theta, z, t) = -\frac{e^{i\Omega t}}{2} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*}}{\xi_n} (A_n - B_n) J_1 \left( \sqrt{\xi^2 - i\Omega^*} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \right. \quad (161)$$

$$\left. + \left( \frac{2\xi_n}{i\Omega^*} \right) D_n J_1 \left( \frac{\xi_n r}{R} \right) \right\} \sinh \left( \xi_n \frac{(z+h)}{R} \right)$$

$$p(r, \theta, z, t) = p_0 - \rho g z + \left( \frac{\mu}{R} \right) \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_1 \left( \frac{\xi_n r}{R} \right) \cosh \left[ \xi_{mn} \frac{(z+h)}{R} \right] e^{i\Omega t} - \quad (162)$$

$$- \rho \Omega^2 X_0 r e^{i\Omega t} \cos \theta$$

em que:

$$B_{mn} = -\beta_n A_n \quad (163)$$

$$D_{mn} = -i\Omega^* \gamma_n A_n \quad (164)$$

em que os parâmetros  $\beta_{mn}$  e  $\gamma_{mn}$  são obtidos para uma particularização ( $m=1$ ) das equações (135) e (136):

$$\beta_n = \frac{J_2 \left( \sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \right) J_0(\xi_n)}{J_0 \left( \sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \right) J_2(\xi_n)} \quad (165)$$

$$\gamma_n = \frac{J_{21} \left( \sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \right)}{\xi_n J_2(\xi_n)} \quad (166)$$

Por substituição das componentes da velocidade (equações (159) a (161)) nas condições definidas por (117) para a superfície livre do fluido, obtêm-se as expressões equivalentes às equações (138) e (139):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n A_n \sinh\left(\xi_n \frac{h}{R}\right) \left\{ \frac{\xi_n^2 - i\Omega^*}{\xi_n^2} (1 + \beta_n) J_1\left(\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \left(\frac{r}{R}\right)\right) - J_2\left(\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \left(\frac{r}{R}\right)\right) + \beta_n J_0\left(\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \left(\frac{r}{R}\right)\right) - 4\xi_n \gamma_n J_1\left(\xi_n \frac{r}{R}\right) \right\} = 0 \quad (167)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n A_n \sinh\left(\xi_n \frac{h}{R}\right) \left\{ J_{21}\left(\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \left(\frac{r}{R}\right)\right) + \beta_n J_0\left(\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \left(\frac{r}{R}\right)\right) + \frac{\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*}}{\xi_n^2} (1 + \beta_n) J_1\left(\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \left(\frac{r}{R}\right)\right) - \frac{4\xi_n \gamma_n}{\left(\frac{r}{R}\right)} J_1\left(\xi_n \frac{r}{R}\right) \right\} = 0 \quad (168)$$

Substituindo também as componentes da velocidade (equações (159) a (161)) e a expressão que traduz as pressões no líquido (equação (162)) na condição de fronteira dinâmica de superfície livre (equação (153)), obtêm-se a seguinte equação algébrica não homogénea (equivalente ao apresentado na equação (142)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh\left(\xi_n \frac{h}{R}\right) \left\{ \frac{\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*}}{\xi_n^2} (1 + \beta_n) \times \left[ i\Omega^* \xi_n + \frac{1}{2(Oh)} (\xi_n^2 - i\Omega^* + Bo) \tanh\left(\xi_n \frac{r}{R}\right) \right] \times J_1\left(\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \left(\frac{r}{R}\right)\right) - \left[ i\Omega^* (i\Omega^* + 2\xi_n^2) + \frac{\xi_n}{(Oh)} (\xi_n^2 + Bo) \tanh\left(\xi_n \frac{r}{R}\right) \gamma_n J_1\left(\xi_n \frac{r}{R}\right) \right] \right\} = i\Omega^{*3} \frac{X_0}{R} \frac{r}{R} \quad (169)$$

As equações (167) a (169) constituem um conjunto de três equações algébricas não homogéneas que podem ser resolvidas após truncatura. A solução numérica obtida fornece valores para os coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$  e  $D_n$ . As distribuições de velocidade e pressão dadas pelas equações (159) a (162) [Ibrahim, 2005].

Integrando a condição cinemática de superfície livre, dada pela equação (117), é possível determinar-se a elevação da superfície livre do fluido.

$$\eta(r, \theta, t) = -\frac{e^{i\Omega t}}{2\Omega} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*}}{\xi_n} (A_n - B_n) J_1 \left( \sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \left( \frac{r}{R} \right) \right) + \right. \quad (170)$$

$$\left. + \left( \frac{2\xi_n}{i\Omega^*} \right) D_n J_1 \left( \xi_n \frac{r}{R} \right) \right\} \sinh \left[ \xi_n \frac{(z+h)}{R} \right]$$

A componente da força hidrodinâmica ao longo do eixo x é obtida pela integração da distribuição de pressão e das tensões viscosas sobre a projecção da área nas paredes do reservatório:

$$F_x = \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left[ p \cos \theta - 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \sin \theta \right]_{r=R} R d\theta dz + \quad (171)$$

$$+ \int_0^R \int_0^{2\pi} \mu \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \sin \theta - \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \cos \theta \right]_{z=-h} r dr d\theta$$

Quando resolvidos os integrais a expressão (171) toma a seguinte forma simplificada:

$$F_x = -e^{i\Omega t} \left[ m_0 \Omega^2 X_0 - \pi \mu R \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \left( \xi_n \frac{h}{R} \right) \right] \left\{ (1 + 3\beta_n) \frac{\sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*}}{2\xi_n} \times \right. \quad (172)$$

$$\left. \times J_1 \left( \sqrt{\xi_n^2 - i\Omega^*} \right) - (2\xi_n^2 - i\Omega^*) \gamma_n \frac{J_1(\xi_n)}{\xi_n} \right\}$$

em que  $m_0$  corresponde à massa total de fluido no interior do reservatório.

A dependência de  $\eta$  e  $F_x$  do parâmetro frequência de excitação,  $F_0/(m_0 \nu 2X_0/R^4)$ , foi investigada [Bauer e Eidel, 1999b], tendo-se verificado que a frequência de ressonância aumenta com a diminuição da altura de fluido no interior do tanque.

A elevação da superfície livre aumenta com a relação  $r/R$  para uma dada frequência de ressonância. No entanto, a força lateral decresce com a altura de fluido na ressonância. Em ambos os casos, a viscosidade do fluido e a tensão superficial induzem a que a resposta dinâmica do fluido seja limitada na ressonância [Ibrahim, 2005].

## 2.1.5. Vibração em regime livre

### 2.1.5.1. Reservatórios rectangulares

Dependendo das dimensões dos reservatórios rectangulares (Figura 2), o comportamento e escoamento de fluidos no seu interior, pode ser tratado como um escoamento bidimensional ou tridimensional:

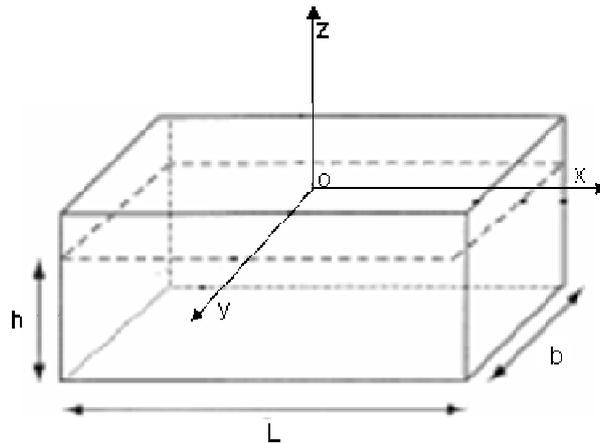


Figura 2 – Tanque com geometria rectangular

Assim em presença de comprimentos bastante elevados ( $L \rightarrow \infty$ ), pode-se assumir como muito adequada e com soluções bastante aproximadas uma situação de escoamento bidimensional. Neste caso a função de potencial de velocidades deve satisfazer a equação de Laplace definida pela expressão (173) [Ibrahim, 2005]:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} \quad (173)$$

A solução da equação (173), admitindo as condições de fronteira definidas por (174) e (175):

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = 0 \quad (174)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad (175)$$

é dada por:

$$\tilde{\Phi}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m(t) \cos k_m x + \beta_m(t) \sin k_m x] \cosh[k_m(z+h)] \quad (176)$$

em que:

$$k_m = \frac{(2m-1)\pi}{L} \quad \text{para modos assimétricos} \quad (177)$$

$$k_m = \frac{2m\pi}{L} \quad \text{para modos simétricos} \quad (178)$$

Para reservatórios de água profundas, em que se observe  $h/L > 2$ ,  $\tanh(k_m h) \approx 1$ , as frequências naturais da superfície livre do fluido são obtidas da equação (179):

$$\omega_m^2 = g k_m \tanh(k_m h) \quad (179)$$

Se for considerada a tensão superficial, então numa zona de contacto de deslizamento, a frequência natural toma a forma:

$$\omega_m^2 = \left[ g k_m + \frac{\sigma}{\rho} k_m^3 \right] \tanh(k_m h) \quad (180)$$

A elevação da superfície do fluido é descrita por:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{\alpha}_m \cos k_m x + \bar{\beta}_m \sin k_m x] \varrho_m \cos \omega_n t \cosh(k_m h) \quad (181)$$

A equação anterior combina ondas simétricas e assimétricas. Os modos simétricos são dados pela primeira parte da equação (181):

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{\alpha}_m \cos k_m x] \varrho_m \cos \omega_n t \cosh(k_m h) \quad (182)$$

Para determinados valores de  $x$  a superfície do líquido movimenta-se para cima e para baixo, e para determinado valor de  $t$  a forma da superfície é análoga à de uma

curva coseno, sendo que as ondas deste tipo não apresentam qualquer tipo de propagação no espaço [Ibrahim, 2005].

Por outro lado a forma dos modos assimétricos é dada pela segunda parte da equação (181):

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{\beta}_m \sin k_m x] \omega_m \cos \omega_n t \cosh(k_m h) \quad (183)$$

De uma forma mais geral, e referindo-se a reservatórios análogos ao indicado na Figura 2, alguns autores [Graham e Rodriguez, 1952] definiram a velocidade potencial em três dimensões:

$$\tilde{\Phi}(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{mn}(t) \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2n\pi y}{l}\right) \cosh[k_{mn}(z+h)] \quad (184)$$

em que  $l$  e  $b$  são, respectivamente, o comprimento e a largura do tanque,  $k_{mn} = \pi\sqrt{(2m)^2/L^2 + (2n)^2/l^2}$  e  $m$  e  $n$  correspondem a valores inteiros positivos.

A frequência da superfície livre da situação referida anteriormente é dada por:

$$\omega_{mn}^2 = gk_{mn} \tanh(k_{mn}h) \quad (185)$$

Se for considerada a tensão superficial então a expressão anterior toma uma forma semelhante à expressão (180), definida para o espaço bidimensional:

$$\omega_{mn}^2 = \left[ gk_{mn} + \frac{\sigma}{\rho} k_{mn}^3 \right] \tanh(k_{mn}h) \quad (186)$$

Com base na expressão anterior a elevação da superfície da onda que se forma durante o movimento pode ser escrita:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{mn} \omega_{mn} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2n\pi y}{l}\right) \cosh(k_m h) \quad (187)$$

É importante não esquecer que a dependência temporal da elevação da superfície do fluido resulta da variação da posição do centro de massa do reservatório [Lorell, 1952].

Muitas têm sido as técnicas desenvolvidas com o objectivo de medir a variação da altura da superfície livre dos fluidos durante a ocorrência do fenómeno de *sloshing* no interior de reservatórios [Whittenburry et. al, 1959] [Wilner et. al, 1960] [Crews e Earth, 1963] [Muenz e Marcello, 1964] [Sturtevant, 1966] [Lindstrom et. al, 1969].

As frequências fundamentais de *sloshing* em reservatórios rectangulares têm sido amplamente investigadas por via experimental e analítica, com provas de uma excelente adequação entre resultados [Ibrahim, 2005].

#### 2.1.5.2. Reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas

Os reservatórios cilíndricos podem ter paredes verticais planas não apresentando qualquer tipo de divisórias internas (Figura 3) ou podem apresentar divisórias ou septos interiores (Figura 4).

Neste último caso as alterações introduzidas traduzem um aumento significativo da frequência natural de vibração do fluido no interior do reservatório [Ibrahim, 2005].

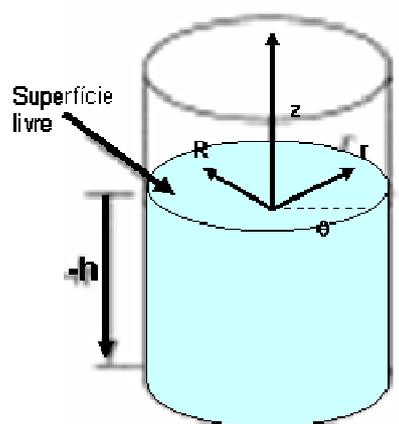


Figura 3 - Tanque circular simples

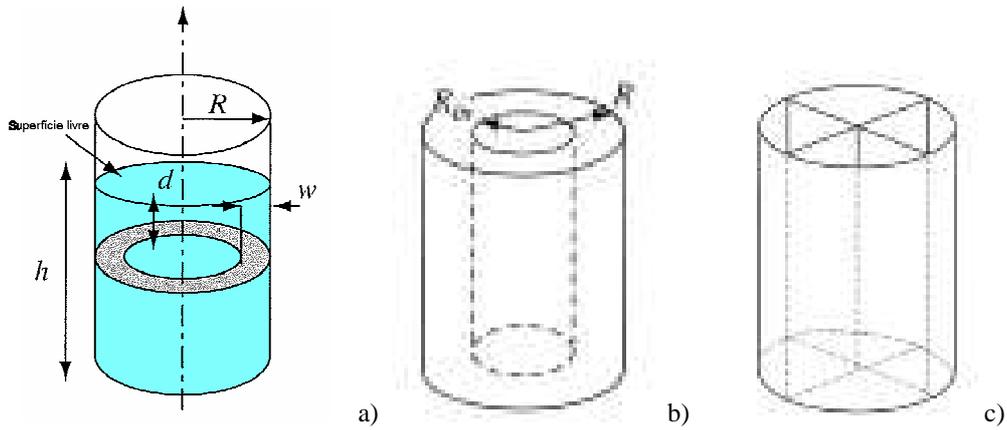


Figura 4 - Tanque circular cilíndrico: a) com septo anelar, b) tubular e c) com septos interiores, adaptado de [Ibrahim, 2005]

Relativamente à situação mais simples (Figura 3) uma solução possível da equação de Laplace, que verifique as condições de fronteira nas paredes e no fundo do reservatório apresentadas nas equações (26) e (27), corresponde a:

$$\tilde{\Phi}(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{mn}(t) \cos m\theta + \beta_{mn}(t) \sin m\theta] J_m(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh \lambda_{mn} h} \quad (188)$$

em que  $\alpha_{mn}$  e  $\beta_{mn}$  são funções dependentes do tempo determinadas a partir das condições iniciais da superfície livre do fluido,  $J_m(\lambda_{mn} r)$  é a função de Bessel de primeira ordem e  $\lambda_{mn} = \xi_{mn}/R$  corresponde às raízes de [Ibrahim, 2005]:

$$\left. \frac{\partial J_m(\lambda_{mn} r)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (189)$$

As análises propostas para reservatórios circulares de paredes verticais planas podem ser simplificadas de uma forma muito significativa, em circunstâncias em que o campo de equações para o escoamento do fluido surge como linearizado para deslocamentos de amplitude reduzida.

As frequências modais são determinadas a partir da condição de fronteira de superfície livre [Ibrahim, 2005]:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - g\eta = 0 \quad (190)$$

Fazendo a primeira derivada da equação anterior em ordem ao tempo e introduzindo o indicado na equação (3), obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = 0 \quad (191)$$

Se as funções  $\alpha_{mn}$  e  $b_{mn}$  forem expressas como harmônicas, do tipo  $\sin \omega_{mn} t$ , podem-se obter as frequências naturais da superfície livre do líquido por substituição da equação (188) na equação (191):

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g \xi_{mn}}{R} \tanh\left(\frac{\xi_{mn} h}{R}\right) \quad (192)$$

A expressão acima indicada aproxima um valor constante para  $h/R > 2$ , dado pela relação que a seguir se apresenta:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g \xi_{mn}}{R} \quad \text{para} \quad \frac{\xi_{mn} h}{R} \geq 2.65 \quad (193)$$

Usando a equação de Laplace e se for considerada a tensão superficial, a condição de fronteira de superfície livre combinada com a condição cinemática patente na equação (191) permite obter, [Ibrahim, 2005]:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \hat{\Phi}}{\partial z^3} = 0 \quad (194)$$

Neste caso em particular a frequência natural é dada por:

$$\omega_{mn}^2 = \left[ \frac{g \xi_{mn}}{R} + \frac{\sigma \xi_{mn}^2}{\rho R^3} \right] \tanh\left(\frac{\xi_{mn} h}{R}\right) \quad (195)$$

Este resultado é válido para a linha de contacto de deslissamento, revelando que a tensão superficial causa um aumento significativo ao nível das frequências modais do sistema [Ibrahim, 2005].

A elevação da superfície do fluido, medida relativamente à superfície em repouso, é obtida por substituição dos valores definidos pela equação (188) na equação (190):

$$\eta = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\alpha}_{mn} \cos m\theta + \bar{\beta}_{mn} \sin m\theta] J_m(\lambda_{mn} r) \cosh(\lambda_{mn} h) (\omega_{mn} \cos \omega_{mn} t) \quad (196)$$

em que  $\bar{\alpha}_{mn}$  e  $\bar{\beta}_{mn}$  correspondem a coeficientes constantes que são determinados a partir das condições iniciais.

Os modos simétricos e assimétricos de *sloshing* tomam as seguintes formas, respectivamente:

$$\eta(r, \theta, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{mn} \cos m\theta J_m(\lambda_{mn} r) \cosh(\lambda_{mn} h) (\omega_{mn} \cos \omega_{mn} t) \quad (197)$$

$$\eta(r, \theta, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\beta}_{mn} \sin m\theta] J_m(\lambda_{mn} r) \cosh(\lambda_{mn} h) (\omega_{mn} \cos \omega_{mn} t) \quad (198)$$

Estas fórmulas permitiram encontrar, para tanques circulares de paredes verticais planas, uma excelente concordância entre resultados analíticos e experimentais no que refere aos três primeiros modos de vibração [Eulitz, 1958] [McCarty e Stephens, 1960] [Werner e Coldwell, 1961] [Kuttler e Sigillito, 1984].

### 2.1.6. Vibração em regime forçado

A excitação forçada de fluidos no interior de reservatórios apresentando diferentes geometrias é tratada com base na teoria linear das pequenas oscilações quer na direcção principal (definida por, horizontal ou lateral), quer para rotações *pitch*, *yaw* e *roll*.

Refere-se que, por uma questão de simplificação, para tanques circulares de paredes verticais planas e fundo plano assume-se que a superfície livre do fluido oscila de uma forma plana sem qualquer tipo de rotação derivada da geometria das suas paredes laterais [Ibrahim, 2005].

### 2.1.6.1. Tanques rectangulares

A problemática subjacente à excitação em regime forçado de reservatórios rectangulares tem vindo a ser estudada desde a segunda metade do século XX no âmbito de variados projectos de investigação, que tem vindo a contemplar não apenas as simples solicitações laterais de translação mas também as excitações *pitching*, *yawing* e *roll* [Graham, 1951] [Graham e Rodriguez, 1952] [Eide, 1964] [Ghali, 1965] [Momoi, 1965] [Bauer, 1966a] [Bauer, 1966b] [Bauer e Villeneuve, 1967a] [Bauer e Villeneuve, 1967b] [Scarsi e Brizzolara, 1970] [Kimura et. al., 1996b]

As diferentes formulações obtidas baseiam-se na adopção de diferentes tipos de estimativas para a aproximação dos valores das pressões hidrodinâmicas, forças e momentos nas paredes laterais e de fundo dos reservatórios [Ibrahim, 2005].

#### 2.1.6.1.1. Solicitações laterais

Admitindo um reservatório rectangular rígido sujeito a solicitações laterais sinusoidais  $x(t)$  de pequena amplitude e assumindo também que não se identifica grande nível de amplificação do movimento, pelo que a resposta do fluido apresenta amplitude igualmente reduzida, o campo de equações que define o escoamento para um movimento bidimensional toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad (199)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = 0 \quad (200)$$

$$g\eta - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \ddot{X}(t)x = 0 \quad \text{para } z=\eta(x,t) \quad (201)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{para } z=\eta(x,t) \quad (202)$$

As condições de fronteira dinâmica e cinemática ao nível da superfície livre (202) e (203) podem ser combinadas permitindo obter apenas uma equação equivalente, dada por:

$$g \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} = \ddot{X}x \quad (203)$$

A função potencial total corresponde à soma da função de fluido perturbado,  $\tilde{\Phi}$  (solução da equação de Laplace apresentada em (199) e que satisfaz as condições de fronteira explicitadas de (200) a (202)) com a função potencial do próprio reservatório,  $\Phi_0$  [Ibrahim, 2005].

O processo de avaliação da função potencial de velocidades total,  $\Phi$ , para fluido em reservatórios rectangulares sujeitos a solicitações laterais permite obter o seguinte resultado:

$$\Phi = -X_0 \Omega \cos \Omega t \times \left\{ x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n \sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left((2n+1)\frac{\pi(z+h)}{L}\right)}{\pi^2 (2n+1)^2 \cosh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)} \frac{4L\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right\} \quad (204)$$

em que:

$$\omega_n^2 = (2n+1)\pi \left(\frac{g}{L}\right) \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right) \quad (205)$$

corresponde ao quadrado da frequência natural da superfície livre do fluido.

A elevação da superfície livre do fluido determina-se por substituição na equação (204) dos valores dados pela equação (201):

$$\eta = \Omega^2 \frac{X_0}{g} \sin \Omega t \left\{ x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4L}{\pi^2 (2n-1)^2} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \sin\left((2n-1)\frac{\pi x}{L}\right) \right\} \quad (206)$$

As ondas de superfície compreendem uma onda simples expressa pelo primeiro termo na equação (206) e um grupo de ondas sinusoidais simétricas.

A pressão em qualquer ponto dentro do domínio do fluido é dada por:

$$\begin{aligned}
p &= \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \\
&= \rho X_0 \Omega \sin \Omega t \times \left\{ x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n \sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left((2n+1)\frac{\pi(z+h)}{L}\right)}{\pi^2 (2n+1)^2 \cosh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)} \frac{4L\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{207}$$

A pressão hidrodinâmica em qualquer ponto da parede lateral,  $x=L/2$ , e em qualquer ponto do fundo do reservatório é dada, respectivamente, por:

$$p_w = \rho X_0 \Omega \sin \Omega t \times \left\{ \frac{L}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\cosh\left((2n+1)\frac{\pi(z+h)}{L}\right)}{\pi^2 (2n+1)^2 \cosh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)} \frac{4L\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right\} \tag{208}$$

$$p_b = \rho X_0 \Omega \sin \Omega t \times \left\{ x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi^2 (2n+1)^2 \cosh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)} \frac{4L\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right\} \tag{209}$$

A localização do centro de pressão, na parede lateral do reservatório, medida a partir da superfície livre do fluido é dada por:

$$z_{cp} = - \frac{h}{\left(\frac{h}{L}\right)} \frac{\tanh\left[(2n+1)\left(\frac{\pi h}{2L}\right)\right]}{\pi(2n+1)} \tag{210}$$

A força hidrodinâmica total imposta pelo fluido nas paredes do reservatório é determinado pela integração da pressão ao longo de toda a área das paredes laterais,  $y \in \pm b/2$  e  $z \in [-h, 0]$ :

$$\begin{aligned}
F_{xw} &= 2 \int_{-h}^0 dz \int_{-b/2}^{b/2} p_w dy = \\
&= m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{8 \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)}{\left(\frac{h}{L}\right) \pi^3 (2n+1)^3} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{211}$$

em que  $m_f = \rho L b h$  corresponde à massa total de fluido no interior do reservatório.

O momento em torno do eixo  $y$  e devido às forças na parede do reservatório determina-se com base na equação (212):

$$M_{yw} = 2 \int_{-h}^0 p_w b z dz \quad (212)$$

$$= m_f X_0 h \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{8 \Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2) \left(\frac{h}{L}\right)^2 \pi^4 (2n+1)^4} \times \left( 1 - \frac{1}{\cosh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)} \right) \right] \right\}$$

O momento em torno do eixo  $y$  e devido à pressão hidrodinâmica actuante no fundo do reservatório é dado pela expressão seguinte:

$$M_{yb} = \int_{-L/2}^{L/2} p_w b x dx \quad (213)$$

$$= m_f \frac{X_0 h \Omega^2}{\left(\frac{h}{L}\right)^2} \sin \Omega t \left\{ \frac{1}{12} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{8 \Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2) \pi^4 (2n+1)^4 \cosh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)} \right] \right\}$$

Como seria de esperar, o momento total em torno do eixo  $y$  corresponde à soma do obtido das equações (212) e (213), de acordo com o que se indica em seguida:

$$M_{yt} = m_f X_0 h \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{12 \left(\frac{h}{L}\right)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{8 \Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2) \left(\frac{h}{L}\right)^2 \pi^4 (2n+1)^4} \right] \right\} \quad (214)$$

#### 2.1.6.1.2. Solicitações *pitching*

Quando sujeitos a excitações *pitching* do tipo  $\Psi(t) = \Psi_0 \sin \Omega t$ , em torno de  $y$  e passando pelo centro de massa impulsiva do fluido, as condições de fronteira são definidas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\Psi_0 \Omega z \cos \Omega t \quad \text{em } x=\pm L/2 \quad (215)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\Psi_0 \Omega x \cos \Omega t \quad \text{em } z=-h/2 \quad (216)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z=h/2 \quad (217)$$

A solução da equação de Laplace que satisfaz as condições de fronteira (215) a (217), e cujo primeiro termo descreve o potencial de velocidade de um sistema rígido, definido pela própria estrutura do reservatório e a massa de fluido que se move solidária (também denominada de impulsiva) com ele, é definida de acordo com o patente na equação (218):

$$\begin{aligned} \Phi = \Omega \Psi_0 \cos \Omega t & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times 4}{\pi^3 (2n+1)^3} \left[ \frac{h^2 \sin\left((2n+1)\frac{\pi z}{h}\right) \sinh\left((2n+1)\frac{\pi x}{h}\right)}{\cosh\left((2n+1)\frac{\pi L}{2h}\right)} \right] + \right. \\ & + \frac{L^2 \sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{h}\right) \cosh\left((2n+1)\left(z - \left(\frac{h}{2}\right)\right)\frac{\pi}{h}\right)}{\sinh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times 4L \left(\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}\right)}{\pi^2 (2n+1)^2} \times \\ & \times \left[ \frac{h}{2} - \frac{2L \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{2L}\right)}{\pi(2n+1)} + \frac{g}{\omega_n^2} \right] \times \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left((2n+1)\left(z + \left(\frac{h}{2}\right)\right)\frac{\pi}{L}\right)}{\cosh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)} \end{aligned} \quad (218)$$

A força horizontal que se desenvolve ao longo do eixo coordenado X, é dada por:

$$F_x = \rho g h L b \times \frac{\Omega^2 h}{g} \Psi_0 \sin \Omega t \times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)}{\pi^3 (2n+1)^3 \frac{h}{L}} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \times \left[ \frac{1}{2} - \frac{2L \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{2L}\right)}{\pi(2n+1)h} + \frac{g}{h\omega_n^2} \right] \right\} \quad (219)$$

em que  $\omega_n^2$  corresponde ao quadrado da frequência natural da superfície livre do fluido dada pela expressão (205).

O momento total a actuar no reservatório, em torno do eixo coordenado Y, é definido de acordo com o proposto na equação (220):

$$M_y = \frac{\rho g h^2 L b \Omega^2 h}{2 g} \sin \Omega t \left\{ \frac{I_{fy}}{m_f h^2} + \frac{gL^2}{12h^3 \Omega^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8L \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)}{\pi^3 (2n+1)^3 h} \times \left[ \frac{1}{2} - \frac{2L \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{2L}\right)}{\pi(2n+1)h} + \frac{g}{2h\omega_n^2} \right] \frac{g}{h\omega_n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8L \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{L}\right)}{\pi^3 (2n+1)^3 h} \times \left[ \frac{1}{2} - \frac{2L \tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{2L}\right)}{\pi(2n+1)h} + \frac{g}{2h\omega_n^2} \right] \frac{g}{h\omega_n^2} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right\} \quad (220)$$

em que  $m_f$  e  $I_{fy}$  correspondem à massa total do líquido e ao momento de inércia da massa efectiva do fluido em torno do eixo coordenado y. O momento de inércia da massa efectiva desenvolvido em torno do eixo y é dado por:

$$I_{fy} = I_{sy} \left( 1 - \frac{4}{1 + \left(\frac{h}{L}\right)^2} + \frac{768}{\pi^3 h \left(\frac{L^2 + h^2}{L^3}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{2L}\right)}{(2n+1)^5} \right) \quad (221)$$

com  $I_{sy}$  corresponde ao momento de inércia da massa do líquido inerte (ou impulsivo) em torno do eixo y.

### 2.1.6.1.3. Solicitações *roll*

Quando um reservatório rectangular regular se encontra sujeito a solicitações dinâmicas segundo o eixo Z e com um andamento definido por  $\varphi(t)=\varphi_0\sin\omega t$ , as condições de fronteira podem ser expressas por:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \varphi_0\Omega y \cos\Omega t \quad \text{em } x=L/2 \quad (222)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\varphi_0\Omega x \cos\Omega t \quad \text{em } y=\pm b/2 \quad (223)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \text{em } z=-h/2 \quad (224)$$

A solução da equação de Laplace que satisfaz as condições de fronteira expressas pela sequações (222) a (224) é definida com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Phi = \Omega\varphi_0 \cos\Omega t & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times 4}{\pi^3(2n+1)^3} \left[ \frac{b^2 \sin\left((2n+1)\frac{\pi y}{b}\right) \sinh\left((2n+1)\frac{\pi x}{b}\right)}{\cosh\left((2n+1)\frac{\pi L}{2h}\right)} \right] - \right. \\ & - \frac{L^2 \sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) \sinh\left((2n+1)\frac{\pi y}{L}\right)}{\cosh\left((2n+1)\frac{\pi b}{L}\right)} + \sum_{m=n=0}^{\infty} \sum_{m=n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_{nm}^2 - \Omega^2} \right) \times \\ & \times \frac{16Lb[b^2(2n+1)^2 - b^2(2m+1)^2] \operatorname{sech}\left(\frac{\pi h}{Lb} \sqrt{b^2(2n+1)^2 + L^2(2m+1)^2}\right)}{\pi^4(2m+1)^2(2n+1)^2 [b^2(2n+1)^2 + L^2(2m+1)^2]} \times \\ & \left. \times \sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left((2m+1)\frac{\pi y}{b}\right) \times \cosh\left[\frac{\pi}{Lb} \sqrt{b^2(2n+1)^2 + L^2(2m+2)^2} \left(z + \frac{h}{2}\right)\right] \right\} \end{aligned} \quad (225)$$

A parcela bidimensional da função do potencial de velocidades, expressa pela equação (225), satisfaz as condições de fronteira ao nível das paredes laterais do reservatório, enquanto que é necessário que a parcela tridimensional satisfaça a condição de superfície livre do fluido.

O momento em torno do eixo z apresenta-se de acordo com o expresso na equação (226):

$$\begin{aligned}
 M_z = \Omega^2 \varphi_0 \sin \Omega t & \left\{ \frac{32 \rho h}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \left[ L^4 \tanh \left( (2n+1) \frac{\pi b}{2L} \right) \right] + \right. \\
 & + b^4 \tanh \left( (2n+1) \frac{\pi L}{2b} \right) - \frac{1}{12} \rho L b h (L^2 + b^2) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_{mn}^2}{g} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_{mn}^2 - \Omega^2} \right) \times \\
 & \left. \times \frac{64 \rho L^3 b^3 \left[ b^2 (2n+1)^2 - L^2 (2m+1)^2 \right]^2}{\pi^8 \left[ b^2 (2n+1)^2 + L^2 (2m+1)^2 \right]^2 (2m+1)^4 (2n+1)^4} \right\} \quad (226)
 \end{aligned}$$

A equação indicada pode ser rescrita em termos do momento de inércia do fluido na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 M_z = I_{sz} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \Omega^2 \varphi_0 \sin \Omega & \left\{ \frac{I_{fz}}{I_{sz}} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_{mn}^2 - \Omega^2} \right) \times \frac{768 \left[ b^2 (2n+1)^2 - L^2 (2m+1)^2 \right]^2}{\pi^7 b^2 \left( \frac{h}{L} \right) (L^2 + b^2) (2m+1)^4 (2n+1)^4} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{\tanh \left( \left( \frac{\pi h}{Lb} \right) \sqrt{b^2 (2n+1)^2 + L^2 (2m+1)^2} \right)}{\left[ (2n+1)^2 + \left( \frac{L}{b} \right)^2 (2m+1)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (227)
 \end{aligned}$$

em que as frequências ressonantes são expressas de acordo com (228):

$$\omega_{mn}^2 = g \frac{\pi}{Lb} \sqrt{b^2 (2n+1)^2 + L^2 (2m+1)^2} \tanh \left( \frac{\pi h}{Lb} \sqrt{b^2 (2n+1)^2 + L^2 (2m+1)^2} \right) \quad (228)$$

e  $I_{fz}$  corresponde ao momento de inércia da massa de líquido efectiva também denominada de massa convectiva:

$$I_{fz} = I_{sz} \left( 1 - \frac{4}{1 + \left( \frac{L}{b} \right)^2} + \frac{768}{\pi^5 L \left( \frac{L^2 + h^2}{b^3} \right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh \left( (2n+1) \frac{\pi h}{2L} \right)}{(2n+1)^5} \right) \quad (229)$$

### 2.1.6.2. Reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas

O problema das vibrações forçadas em reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas e de altura constante quando sujeitos a movimentos horizontais (laterais) e de *pitching* tem vindo a ser estudado analiticamente e experimentalmente [Wedemeyer e Reese, 1953] [Brown, 1954] [Reese e Sewal, 1955] [Schmitt, 1956] [Schmitt, 1957] [Chobotov e Fowler, 1957] [Sewal, 1957] [Bauer, 1958a] [Bauer, 1958b] [Bauer, 1959] [Bauer e Reinfurth, 1959] [Eide, 1964] [Huleux, 1964] [Takahara et. al., 1995].

Uma vez que se assume o fluido como invíscido, então quando se encontra sujeito à excitação *roll*, acaba por não participar no movimento do reservatório em que se encontra incluído.

Se a viscosidade for considerada então torna-se necessário resolver as equações de Navier-Stokes, o que permitirá estimar a espessura de fluido que participa de uma forma directa e activa no movimento do reservatório [Ibrahim, 2005].

Embora ao longo dos tempos tenham sido adoptadas diferentes abordagens, os estudos desenvolvidos vocacionaram-se fundamentalmente para a determinação da massa efectiva do fluido, das forças e momentos actuantes nos reservatórios e da elevação da superfície livre do fluido relativamente à posição de repouso.

Assim, indicam-se os trabalhos de Kachigan [Kachigan, 1955], Schmitt [Schmitt, 1956], Armstrong e Kachigan [Armstrong e Kachigan, 1961] em que foi usada a transformada de Laplace com o objectivo de determinar a resposta da superfície livre do fluido quando sujeita a excitações arbitrárias de translação e de *pitching*.

Outros autores como Miles incluíram a viscosidade do fluido nos seus estudos [Miles, 1967]. Com cariz experimental referem-se os trabalhos de Abramson [Abramson, 1961] [Abramson, 1963] [Abramson e Ransleben, 1961a] [Abramson e Ransleben, 1961b] [Abramson e Ransleben, 1961c] [Abramson e Garza, 1965] ao nível da medição da distribuição de pressões, da força horizontal e do momento nas paredes de reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas quando sujeitos a excitações horizontais e de *pitching*.

Para além destes indicam-se ainda trabalhos desenvolvidos com o objectivo de quantificar as forças hidrodinâmicas actuantes nas paredes de reservatórios circulares cilíndricos sujeitos a excitações harmónicas [Kana, 1964] [Guyett, 1967].

#### 2.1.6.2.1. Solicitações laterais

Considerando um reservatório circular cilíndrico de paredes verticais e fundo plano sujeito a uma solicitação sinusoidal segundo o eixo X (Figura 5), dada pela expressão:

$$X(t) = X_0 \sin \Omega t \quad (230)$$

em que  $X_0$  e  $\Omega$  correspondem, respectivamente e de acordo com o indicado na Figura 5, à amplitude e à frequência de excitação

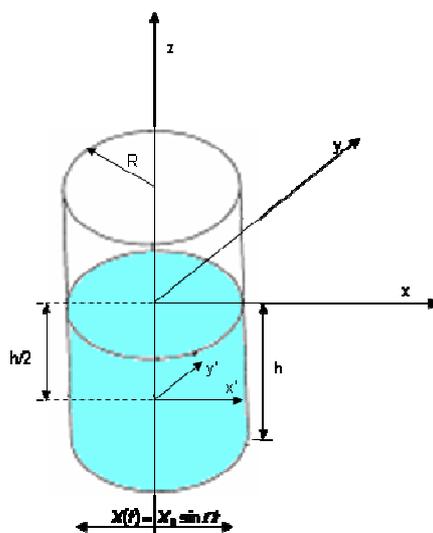


Figura 5 - Tanque circular cilíndrico sujeito a solicitação lateral segundo eixo x, adaptado de [Ibrahim, 2005]

Assumindo que, tanto a amplitude de excitação como a resposta do fluido são reduzidas, o campo de equações linearizado que define o escoamento do fluido no interior do reservatório toma a forma:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{no interior do domínio do fluido} \quad (231)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (232)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \right|_{z=-h} \quad (233)$$

$$g\eta - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \ddot{X}r \cos \theta = 0 \quad \text{em} \quad z = \eta(r, \theta, t) \quad (234)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{em} \quad z = \eta(r, \theta, t) \quad (235)$$

As condições de superfície livre dinâmica e cinemática (equações (234) e (235)) podem ser combinadas:

$$g \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} = \ddot{X}r \cos \theta \quad (236)$$

Uma solução típica da equação (231) sujeita às condições explicitadas em (232) e (233) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n}(t) \cos \theta + B_{1n}(t) \sin \theta] J_1(k_n r) \frac{\cosh[k_{1n}(z+h)]}{\cosh k_{1n} h} \quad (237)$$

Admitindo-se  $A_{1n}$  e  $B_{1n}$  coordenadas generalizadas variáveis no tempo. Estas funções são determinadas com base nas condições de superfície livre indicadas em (235). Supondo também que, para verificação do atrás mencionado, a coordenada  $r$  deve ser expressa na forma de uma série de Fourier-Bessel [Smythe, 1968] [Ibrahim, 2005]:

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} F_n J_1(k_{1n} r) \quad (238)$$

em que:

$$F_n = \frac{2R}{(k_{1n}^2 R^2 - 1) J_1(k_{1n} R)} \quad (239)$$

Introduzindo as equações (237) e (238) na condição de superfície livre explicitada na equação (231), obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ddot{A}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 A_{1n}(t) - \frac{\ddot{X}F_n}{\cosh k_{1n}h} \right] J_1(k_n r) \cos \theta + \left[ \ddot{B}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 B_{1n}(t) \right] J_1(k_n r) \sin \theta \quad (240)$$

com:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{g\xi_{1mn}}{R} \tanh\left(\frac{\xi_{1mn}}{R}\right) \quad (241)$$

A equação anterior é verificada se as coordenadas generalizadas,  $A_{1n}$  e  $B_{1n}$ , satisfizerem um conjunto linear de equações diferenciais (equações (242) e (243)):

$$\ddot{A}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 A_{1n}(t) = \frac{\ddot{X}F_n}{\cosh k_{1n}h} \quad (242)$$

$$\ddot{B}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 B_{1n}(t) = 0 \quad (243)$$

Considerando um estado estacionário obtém-se as seguintes soluções para as equações (242) e (243):

$$A_{1n}(t) = -\frac{X_0 \Omega^3 F_n}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2) \cosh k_{1n}h} \cos \Omega t \quad (244)$$

$$B_{1n}(t) = 0 \quad (245)$$

Substituindo as soluções dadas pelas equações (244) e (245) na equação (237) obtém-se o seguinte potencial para o fluido perturbado:

$$\tilde{\Phi} = -X_0 \Omega \cos \theta \cos \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1\left(\frac{\xi_{1n}r}{R}\right) \cosh\left[\frac{\xi_{1n}(z+h)}{R}\right]}{J_1(\xi_{1n}) \cosh\left(\frac{\xi_{1n}h}{R}\right)} \right] \quad (246)$$

A função potencial total,  $\Phi$ :

$$\Phi = -X_0 \Omega \cos \theta \cos \Omega t x \left\{ r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1\left(\frac{\xi_{1n} r}{R}\right) \cosh\left[\frac{\xi_{1n}(z+h)}{R}\right]}{J_1(\xi_{1n}) \cosh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)} \right] \right\} \quad (247)$$

corresponde a uma soma do potencial do fluido perturbado,  $\tilde{\Phi}$ , e o potencial associado ao reservatório  $\Phi_0$ , dado por:

$$\Phi_0 = -X_0 r \Omega \cos \theta \cos \Omega t \quad (248)$$

Substituindo a equação (247) em (231), obtém-se a definição da elevação da superfície do fluido durante o movimento, também denominada de altura de onda:

$$\eta = \frac{X_0 \Omega^2}{g} \cos \theta \cos \Omega t \left[ r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^3}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1\left(\frac{\xi_{1n} r}{R}\right)}{J_1(\xi_{1n})} \right] \quad (249)$$

A máxima altura de onda ocorre na parede lateral para  $r=R$ ,  $\theta=0$  e  $\Omega t=\pi/2$ :

$$\eta_{\max} = \frac{X_0 \Omega^2}{g} \left[ R + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^3}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \right] \quad (250)$$

A pressão hidrodinâmica em qualquer ponto, associada ao fenómeno de *sloshing*, pode ser determinada a partir da equação definida para as pressões:

$$p = \rho \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \quad (251)$$

que, após concretização corresponde a:

$$p = \rho X_0 \Omega^2 \cos \theta \cos \Omega t x \left\{ r + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1\left(\frac{\xi_{1n} r}{R}\right) \cosh\left[\frac{\xi_{1n}(z+h)}{R}\right]}{J_1(\xi_{1n}) \frac{\cosh \xi_{1n} r}{R}} \right] \right\} \quad (252)$$

Analogamente ao verificado para a altura de onda, a pressão máxima ocorre também ao nível da parede lateral e para  $r=R$ ,  $\theta=0$  e  $\Omega t=\pi/2$ :

$$\frac{p_w}{\rho g R \left( \frac{X_0}{R} \right)} = \frac{\Omega^2 R}{g} \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\left( \xi_{1n}^2 - 1 \right)} \left[ \frac{\frac{\Omega^2 R}{\xi_{1n} g \tanh \left( \frac{\xi_{1n}^2 h}{R} \right)}}{1 - \frac{\Omega^2 R}{\xi_{1n} g \tanh \left( \frac{\xi_{1n}^2 h}{R} \right)}} \right] \left[ \frac{\cosh \left[ \frac{\xi_{1n} (z+h)}{R} \right]}{\cosh \frac{\xi_{1n} h}{R}} \right] \right\} \quad (253)$$

Relativamente à distribuição de pressão no fundo do reservatório, pode-se afirmar com ceretza que esta ocorre para  $z=-h$ ,  $\theta=0$  e  $\Omega t=\pi/2$ :

$$\frac{p_b}{\rho g R \left( \frac{X_0}{R} \right)} = \frac{\Omega^2 R}{g} \times \left\{ \frac{r}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\left( \xi_{1n}^2 - 1 \right) \cosh \left( \frac{\xi_{1n}^2 h}{R} \right)} \left[ \frac{\frac{\Omega^2 R}{\xi_{1n} g \tanh \left( \frac{\xi_{1n}^2 h}{R} \right)}}{1 - \frac{\Omega^2 R}{\xi_{1n} g \tanh \left( \frac{\xi_{1n}^2 h}{R} \right)}} \right] \left[ \frac{J_1 \left[ \frac{\xi_{1n} r}{R} \right]}{J_1 \xi_{1n}} \right] \right\} \quad (254)$$

Com base na distribuição de pressões em altura e para diferentes níveis do parâmetro da frequência de excitação  $\frac{\Omega^2 R}{g}$ , também conhecido como número de Froude, é possível concluir que aparentemente o primeiro terço de fluido, medido a partir do fundo do reservatório, se comporta essencialmente como uma massa inerte ou impulsiva, enquanto que a maioria do *sloshing* ocorre junto da zona superficial do fluido [Ibrahim, 2005]. Esta observação fundamenta o desenvolvimento de modelos mecânicos equivalentes, apresentados mais adiante no presente relatório.

As forças actuates nas paredes e no fundo do reservatório obtém-se por integração da pressão na correspondente área da zona de fronteira. Por consideração de  $\theta=0$ , é possível definir a força actuate segundo o eixo X [Ibrahim, 2005]:

$$F_x = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p \cos \theta R d\theta dz \quad (255)$$

que simplificando corresponde a:

$$F_x = m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_{1n} h)} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right) \right] \quad (256)$$

em que  $m_f$  traduz a massa total do fluido existente no interior do reservatório e dada por:

$$m_f = \rho \pi h R^2 \quad (257)$$

As forças actuantes ao longo do eixo Y e no fundo do reservatório surgem definidas de acordo com o proposto pelas equações (258) e (259), respectivamente:

$$F_y = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 \rho \sin \theta R d\theta dz = 0 \quad (258)$$

$$F_b = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \rho r dr dz = 0 \quad (259)$$

Os momentos hidrodinâmicos associados às forças de fluido actuantes na parede lateral do reservatório em torno do eixo y (equação (260)), com origem na superfície livre não perturbada (em repouso), e no fundo do tanque (equação (261)) são, respectivamente:

$$M_{yw} = m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h} \left( \frac{R}{\xi_{1n}} \right)^2 \frac{2}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{1 - \cosh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)}{\cosh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)} \right] \quad (260)$$

$$M_{yb} = m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{R^2}{4h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h \xi_{1n}^2} \frac{2R^2}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)} \right] \quad (261)$$

O momento total segundo o eixo y corresponde à soma dos momentos dados pelas expressões definidas pelas equações (260) e (261):

$$M_y = m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{h}{2} + \frac{R^2}{4h} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{\xi_{1n}} \right)^2 x \frac{2\Omega^2}{(\xi_{1n}^2 - 1)(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{\left[ 2 - \cosh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right) \right]}{h \cosh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)} \right] \quad (262)$$

#### 2.1.6.2.2. Solicitações pitching

Considerando um tanque sujeito a movimentos de pitching segundo o eixo y (Figura 3) passando pelo centro de massa do fluído em repouso:

$$\Psi(t) = \Psi_0 \sin \Omega t \quad (263)$$

em que  $\psi_0$  e  $\Omega$  correspondem à amplitude e frequência de excitação, respectivamente.

As condições de fronteira em termos de potencial de velocidades total exprimem-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\Psi_0 z \Omega \cos \Omega t \cos \theta \quad \text{em } r=R \quad (264)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\Psi_0 r \Omega \cos \Omega t \cos \theta \quad \text{em } z=-h/2 \quad (265)$$

$$\frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z=h/2 \quad (266)$$

A solução da equação de Laplace pode ser decomposta em três parcelas:

$$\Phi = \Phi_1 + \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_3 \quad (267)$$

em que  $\Phi_1$  satisfaz a equação (264) e  $(\Phi_1 + \tilde{\Phi}_2)$  satisfaz a equação (265). Esta última expressão traduz uma velocidade nula ao nível da superfície livre do fluido enquanto que  $\tilde{\Phi}_3$  fornece uma velocidade também nula, mas para  $z=-h/2$ .

Obtêm-se desta forma os seguintes potenciais que satisfazem as condições indicadas atrás:

$$\tilde{\Phi}_1 = -\Omega\Psi_0 r z \cos \Omega t \cos \theta \quad (268)$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \Omega\Psi_0 \cos \Omega t \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n R)} \{A_n \cosh k_n z + B_n \sinh k_n z\} \quad (269)$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \Omega\Psi_0 \cos \Omega t \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n R)} \cosh k_n \left( z + \frac{h}{2} \right) \quad (270)$$

em que  $k_n$  corresponde às raízes de  $\left. \frac{\partial J_1(k_n r)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$ . As constantes  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_n$  correspondem a:

$$A_n = -\frac{R^2}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)} \frac{1}{\sinh \xi_n} \frac{h}{2R} \quad (271)$$

$$B_n = \frac{3R^2}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)} \frac{1}{\cosh \xi_n} \frac{h}{2R} \quad (272)$$

$$C_n = -\frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{R^2}{(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \frac{\left( \frac{\xi_n h}{R} \right) + \coth \left( \frac{\xi_n h}{R} \right) - 3 \tanh \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right)}{\xi_n \cosh \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right)} \right\} \quad (273)$$

Concretizando os valores de dados pelas equações (271), (272) e (273) nas expressões (268) a (270) obtém-se o valor total do potencial de velocidades,  $\Phi$ , para um reservatório circular cilíndrico de paredes verticais planas sujeito a excitações de *pitching*:

$$\Phi = -\Omega\Psi_0 \cos \Omega t \cos \theta \left\{ rz + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R}\right)}{J_1(\xi_n)} \left\{ \frac{\cosh \xi_n \frac{z}{R}}{\sinh \xi_n \frac{h}{2R}} - 3 \frac{\sinh \xi_n \frac{z}{R}}{\cosh \xi_n \frac{h}{2R}} \right\} + \right. \quad (274)$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \frac{R^2}{(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \frac{\left(\frac{\xi_n h}{R}\right) + \coth\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right) - 3 \tanh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right)}{\xi_n \cosh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right)} \right\} \times \frac{J_1\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)}{J_1(\xi_n)} \cosh \frac{\xi_n}{R} \left(z + \frac{h}{2}\right) \right\}$$

A elevação da superfície livre do fluido  $\left(\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$  acima do nível correspondente a  $z=+h/2$  é:

$$\eta = \frac{\Omega^2 \Psi_0}{g} R^2 \sin \Omega t \cos \theta \left\{ \frac{h}{2R} \frac{r}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R}\right)}{J_1(\xi_n)} \times \left\{ \coth \xi_n \frac{h}{2R} - 3 \tanh \xi_n \frac{h}{2R} \right\} + \right. \quad (275)$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \times \left\{ \frac{\left(\frac{\xi_n h}{R}\right) + \coth\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right) - 3 \tanh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right)}{\xi_n \cosh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right)} \right\} \times \frac{J_1\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)}{J_1(\xi_n)} \times \cosh \frac{\xi_n h}{R} \right\}$$

A parcela oscilante ou convectiva da pressão hidrodinâmica  $p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  é dada pela expressão (276):

$$p = \rho \Omega^2 \Psi_0 R^2 \sin \Omega t \cos \theta \left\{ \frac{rz}{R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R}\right)}{J_1(\xi_n)} \times \left\{ \frac{\cosh \xi_n \left(\frac{z}{R}\right)}{\sinh \xi_n \left(\frac{h}{2R}\right)} - \frac{3 \sinh \xi_n \left(\frac{z}{R}\right)}{\cosh \xi_n \left(\frac{h}{2R}\right)} \right\} + \right. \quad (276)$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \frac{\left(\frac{\xi_n h}{R}\right) + \coth\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right) - 3 \tanh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right)}{\xi_n \cosh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right)} \right\} \times \frac{J_1\left(\xi_n \frac{r}{R}\right)}{J_1(\xi_n)} \cosh \frac{\xi_n}{R} \left(z + \frac{h}{2}\right) \right\}$$

Sendo que a pressão hidrodinâmica na parede lateral, considerando  $r=R$ , e no fundo do reservatório, para  $z=-h/2$ , são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\rho_w = \rho \Omega^2 \Psi_0 R^2 \sin \Omega t \cos \theta \left\{ \frac{z}{R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \right\} & \times \left\{ \frac{\cosh \xi_n \left( \frac{z}{R} \right) - 3 \sinh \xi_n \left( \frac{z}{R} \right)}{\sinh \xi_n \left( \frac{h}{2R} \right)} \right. \\
& \left. \frac{1}{\cosh \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right)} \right\} + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} & \left\{ \frac{\left( \frac{\xi_n h}{R} \right) + \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right) - 3 \tanh \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right)}{\xi_n \cosh \left( \frac{\xi_n h}{R} \right)} \right\} \times \cosh \frac{\xi_n}{R} \left( z + \frac{h}{2} \right) \}
\end{aligned} \tag{277}$$

$$\begin{aligned}
\rho_b = \rho \Omega^2 \Psi_0 R^2 \sin \Omega t \cos \theta \left\{ -\frac{rh}{2R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \left[ \coth \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right) + 3 \tanh \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right) \right] \right\} & + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{\xi_n h}{R} \right) + \coth \left( \frac{\xi_n h}{R} \right) - 3 \tanh \left( \frac{\xi_n h}{R} \right)}{\xi_n \cosh \left( \frac{\xi_n h}{R} \right)} & \times \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{J_1 \left( \frac{\xi_n h}{R} \right)}{J_1(\xi_n)}
\end{aligned} \tag{278}$$

A força de *sloshing* hidrodinâmico segundo o eixo coordenado x, admitindo  $\theta=0$ , é dada pela equação (279):

$$F_x = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_w R \cos \theta d\theta dz = -\pi \Psi_0 \Omega^2 \rho R^2 \sin \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} (2A_n + C_n) \sinh \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right) \tag{279}$$

em que  $A_n$  e  $C_n$  são parâmetros definidos, respectivamente, pelas equações (271) e (273). Analogamente ao observado para tanques circulares cilíndricos de paredes verticais planas sujeitos a solicitações laterais, força resultante da excitação de pitching depende de uma forma muito objectiva da frequência de excitação. [Ibrahim, 2005]

Os momentos das resultantes das forças hidrodinâmicas actuantes na parede lateral e de fundo do reservatório são definidos de acordo com as equações (280) e (281), respectivamente:

$$M_{yw} = \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_w R^2 dz \cos \theta d\theta = \quad (280)$$

$$= \pi \rho \Omega^2 \psi_0 R^3 h^2 \sin \Omega t \left\{ \frac{h}{12R} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_n}{\xi_n h^2} \left[ \frac{h}{2R} \cosh\left(\xi_n \frac{h}{2R}\right) - \frac{1}{\xi_n} \sinh\left(\xi_n \frac{h}{2R}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_n}{\xi_n h^2} \left[ \frac{h}{2R} \sinh\left(\xi_n \frac{h}{R}\right) \right] - \frac{1}{\xi_n} \left[ \cosh\left(\frac{\xi_n h}{R}\right) - 1 \right] \right] \right\}$$

$$M_{yb} = \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_b r^2 dr \cos \theta d\theta = \quad (281)$$

$$= -\pi \rho \Omega^2 \psi_0 R^3 h^2 \sin \Omega t \left\{ \frac{R}{8h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n h^2} \left[ A_n \cosh\left(\xi_n \frac{h}{2R}\right) - B_n \sinh\left(\xi_n \frac{h}{2R}\right) + C_n \right] \right\}$$

Efectuando a adição algébrica das duas componentes do momento patentes nas equações (280) e (281) pode-se escrever o momento total, em torno do eixo y, na sua forma normalizada:

$$\frac{M_{y,total}}{m_f \Omega^2 \Psi_0 R h \sinh \Omega t} = \frac{h}{12R} - \frac{R}{8h} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \left( \frac{1}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} \right) x \quad (282) \\ \times \left[ \coth\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right) + 9 \tanh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right) \right] + \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \left( \frac{1}{\xi_n^2 (\xi_n^2 - 1)} \right) \times \\ \times \left[ \xi_n \frac{h}{R} + \coth\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right) - 3 \tanh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right) \right] x \left[ \tanh\left(\frac{\xi_n h}{2R}\right) - \frac{2R}{h \xi_n} + \frac{4 \frac{R}{h}}{\xi_n \cosh\left(\frac{\xi_n h}{R}\right)} \right]$$

## 2.2. Sloshing Não-Linear

### 2.2.1. Generalidades

A teoria linear do *sloshing* de fluidos é adequada para a determinação das frequências naturais e alturas de onda ao nível da superfície livre.

Em presença de excitações de translação (laterais) a teoria linear é igualmente útil na previsão das pressões hidrodinâmicas, forças e momentos do fluido, desde que a superfície livre mantenha uma forma plana com diâmetro nodal que permaneça perpendicular à linha que define a direcção da excitação. No entanto, esta abordagem não entra em linha de conta com os deslocamentos verticais do centro de gravidade do fluido para grandes amplitudes de movimento da superfície livre.

Para além disso falha também ao nível da previsão dos fenómenos complexos que se identificam na vizinhança da ressonância ao nível da superfície do fluido. Estes fenómenos incluem movimentos não planares instáveis da superfície livre associados à rotação do diâmetro nodal (*sloshing rotativo*) e fenómenos caóticos (*sloshing caótico*), podendo ser compreendidos e interpretados usando a teoria das oscilações fracamente não-lineares (análises quantitativas) ou a moderna teoria da dinâmica não-linear (análises de estabilidade).

Indica-se que as principais fontes de não-linearidade no campo de equações que definem o escoamento de fluidos surgem precisamente ao nível das condições de fronteira de superfície livre [Ibrahim, 2005].

Os trabalhos percussores na área do *sloshing* lateral não-linear baseiam-se em técnicas de expansão assintótica [Penney e Price, 1952] [Skalal e Yarymovich, 1962] [Dodge et. al, 1965].

Posteriormente [Moiseev, 1958] foram construídas funções modais normalizadas em termos de funções de Green de segunda ordem (função de Neumann).

O método proposto por Moiseev [Moiseev, 1958] foi generalizado [Chu, 1968], empregando uma técnica de perturbação usando funções características para determinar a resposta subharmónica face a uma excitação oscilatória axial. A teoria proposta por Moiseev [Moiseev, 1958] permitiu também que se obtivessem soluções para o estado estacionário de *sloshing* não-linear em tanques rectangulares [Faltinsen, 1974] [Faltinsen, 1978] [Solaas, 1995] [Solaas e Faltinsen, 1997]. As condições dinâmicas e cinemáticas de superfície livre foram expandidas em série de Taylor sobre uma posição estacionária na superfície [Hutton, 1962]. Este método foi posteriormente modificado e usado em muitos problemas envolvendo o fenómeno de *sloshing* [Rogge e Weiss, 1965] [Weiss e Rogge, 1965] [Abramson et. al, 1966] [Woodward, 1966] [Woodward e Bauer, 1970] [Ibrahim e Barr, 1975].

Analogamente ao observado para o *sloshing* linear verifica-se uma grande dependência entre as frequências naturais da superfície livre do fluido registadas e a amplitude de excitação. As amplitudes das forças hidrodinâmicas que surgem ao nível do fluido em movimento apresentam o conhecido fenómeno de salto (*jump phenomenon*) em cada pico de frequência ressonante.

Nestas condições, a forma da superfície livre deixa de ser plana, apresentando maior deslocamento vertical ascendente, ou na denominada *crista da onda*, do que deslocamento vertical descendente, ou na denominada *cava da onda*. Desta forma é importante que, em presença de excitações próximas da ressonância se desenvolvam análises não-lineares, permitindo o cálculo mais fidedigno das forças hidrodinâmicas que se originam ao nível do reservatório [Ibrahim, 2005].

A partir de finais da década de 70 foram sendo desenvolvidos estudos de investigação adicionais ao nível dos fenómenos não-lineares em fluidos no interior de reservatórios rectangulares, circulares e axi-simétricos arbitrários sujeitos a excitações laterais e de pitching [Kimura e Ohashi, 1978] [Komatsu, 1987] [Kimura et. al, 1996a] [Kimura et. al, 1996b] [Liu e Huang, 1994].

Adicionalmente observou-se que, os movimentos não-lineares da superfície livre dos fluidos provocam forças hidrodinâmicas que actuam directamente nas paredes dos recipientes que os contém [Ibrahim, 2005]. As pressões hidrodinâmicas decorrentes das excitações impostas por acções sísmicas têm vindo a ser estudadas de uma forma continuada [Wang e Hung, 1986] [Hung e Chen, 1990] [Chen, 1994] [Chen, 1997] permitindo a obtenção de boas aproximações dos resultados.

Mais recentemente, outros autores [Yin et. al, 1999] têm-se debruçado sobre estudos mais antigos [Luke, 1967] e usado também o princípio variacional com o objectivo de estimar a função potencial bem como a elevação da superfície do fluido em reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas sujeitos a movimento de pitching [Ibrahim, 2005].

Foram também desenvolvidos mais recentemente esforços consideráveis no sentido de proceder à determinação da amplitude não-linear de *sloshing* por meio de um método modal [Shankar e Kidambi, 2002].

A resposta em regime não-linear tem vindo a ser analisada usando uma adaptação da teoria linear de onda de águas rasas (*shallow water wave theory*) [Shimizu e Hayama, 1987] [Ishibashi e Hayama, 1989] [Sun, 1991] [Gardarsson, 1997].

As ondas caóticas superficiais que surgem associadas às oscilações horizontais na ressonância tem vindo a ser igualmente estudadas e investigadas [Funakoshi e Inoue, 1987] [Funakoshi e Inoue, 1988] [Aston, 2003].

O fenómeno da histírese associado ao movimento não-linear da superfície livre junto da ressonância tem também sido amplamente estudado e divulgado [Shemer e Chamesse, 1990] [Gardarsson, 1997] [Gardarsson, 2004].

Em seguida descrevem-se e apresentam-se de uma forma muito sumária os fenómenos não-lineares que ocorrem com mais incidência no interior de fluídos sujeitos a excitações dinâmicas: *sloshing* rotativo (*c/* ou *s/* movimento caótico) e quebra de onda (*breaking waves*).

Refere-se que o fenómeno denominado “quebra de onda” (*breaking waves*) deve ser considerado com cautela uma vez que envolve mecanismos altamente não-lineares e instáveis e, pelo facto de os estudos existentes e disponíveis se basearem fundamentalmente em trabalhos efectuados ao nível da engenharia costeira, o que de certa forma limita a aplicabilidade à situações de maior confinamento e de dimensões mais reduzidas, como por exemplo os dispositivos de protecção do tipo amortecedores de líquido sintonizado.

### **2.2.2. *Sloshing* Rotativo (*Rotary sloshing*)**

Este tipo de *sloshing* é observado tanto em reservatórios com água rasas (*shallow water tanks*) como em reservatórios de água profundas (*deep water tanks*) sujeitos a solicitações laterais. Enquanto que em reservatórios de águas rasas se observa um fenómeno de aumento das características não-lineares, também denominado de “endurecimento” das características do fluído, para os reservatórios denominados de águas profundas se observa o fenómeno contrário, isto é observa-se uma “suavização” das características não-lineares essenciais [Ibrahim, 2005].

#### **2.2.2.1. Reservatórios de águas rasas (*shallow water tanks*)**

Neste tipo de reservatórios, com pouca altura de fluido, quase a totalidade do fluido toma parte na resposta dinâmica a excitações laterais.

No entanto, identifica-se uma altura de fluido crítica para a qual a superfície livre do fluido apresenta características de mola “endurecida-suave”. A referida altura crítica foi estimada para tanques circulares, variando entre 0.492 [Narimanov et. al, 1977] e 0.51 [DiMaggio e Rehm, 1965].

Alguns autores [Hutton, 1964] [Kana, 1987] [Ueda et. al, 2007] tem vindo a desenvolver trabalho experimental na área da identificação deste fenómeno para diferentes alturas de fluido, tendo concluído, por exemplo, que o fenómeno de *sloshing* puro nunca ocorre.

De facto, o que acontece é que a resposta se assemelha com um *sloshing* perfeito mas evidenciando-se claramente uma sobreposição de movimentos ondulatórios no sentido horário.

Para além disso é evidente que o deslocamento da onda que surge associada ao fenómeno de *sloshing* puro se encontra quase em fase com a solicitação dinâmica imposta, desde que a frequência de excitação se situe bem definida e abaixo da ressonância, enquanto que em presença de *sloshing* rotativo se identifica um desfasamento de cerca de  $180^\circ$  ( $\pi$ ).

No entanto, à medida que a frequência da excitação vai aumentando, na direcção da ressonância, os fenómenos de *sloshing* puro e *sloshing* rotativo combinam-se e formam um fenómeno complexo no qual a fase se torna altamente dependente da frequência. Neste intervalo a componente de rotação pode tornar-se dominante.

Finalmente, a partir de um determinado valor de frequência, qualquer aumento, mesmo que ligeiro, resulta novamente num fenómeno de *sloshing* puro associado com o desaparecimento da(s) onda(s) de rotação [Ibrahim, 2005].

As evidências observadas permitiram o desenvolvimento de um modelo mecânico composto [Kana, 1989] que integrasse os dois regimes identificados ao longo das experiências efectuadas. Este modelo, integrando características de um pêndulo esférico associado com um pêndulo simples, será concretizado mais adiante no presente relatório.

### 2.2.2.2. Reservatórios de águas profundas (*deep water tanks*)

Quando sujeita a excitações harmónicas, a superfície livre dos fluidos no interior deste tipo de reservatórios apresenta dois tipos de não-linearidades.

Assim, o primeiro tipo corresponde a uma resposta de grande amplitude enquanto que o segundo envolve diferentes formas de comportamento do fluido produzidas por instabilidades diversas ou acoplamento de vários modos de vibração.

O mais importante dos fenómenos não-lineares referidos corresponde ao *sloshing* rotativo, que traduz a formação de um movimento de remoinho/turbilhão no interior do fluido em movimento. Este tipo de movimento ocorre usualmente junto da frequência mais baixa ou fundamental de movimento do fluido, conforme provam vários estudos desenvolvidos desde meados da década de 50 [Eulitz, 1957] [Berlot, 1959] [Graham, 1960] [Ransleben e Abramson, 1960] [Eulitz e Glaser, 1961] [Abramson et al., 1962b] [Abramson et. al., 1966], podendo surgir não só em reservatórios de secção circular mas também em reservatórios rectangulares, o que permite concluir que, de facto, a geometria dos recipientes não condiciona o surgimento de remoinhos ou turbilhões [Ibrahim, 2005].

Relativamente ao tipo de análises desenvolvidas com o objectivo de compreender os fenómenos que ocorrem em reservatórios de águas profundas refere-se a expansão do potencial de velocidades e da elevação da superfície da água em séries de potências em que cada termo das séries representa uma função potencial que é substituída na condição não-linear de superfície livre. Assim é possível obter-se um conjunto de equações diferenciais que deverão ser resolvidas sucessivamente [Ibrahim, 2005].

Foi também observado que o *sloshing* rotativo que surge em reservatórios de águas profundas ocorre invariavelmente tanto se o fluido apresentar algum movimento inicial de rotação como se tal não suceder. No entanto, este fenómeno pode também surgir se para além de uma excitação lateral for introduzido inicialmente ou em qualquer instante um ligeiro movimento de rotação adicional [Abramson, 1961b]. Citando Abramson [Abramson, 1961b] “*é possível verificar-se que no início do movimento o primeiro modo de sloshing começa a sofrer alterações passando de um movimento puramente de translação para um movimento de rotação, sendo a velocidade angular numa direcção progressivamente aumentada até ser atingido um valor máximo que posteriormente decresce praticamente até se anular originando uma*

*inversão de direcção do movimento. Na nova direcção processa-se tudo da mesma forma que indicado anteriormente e de uma forma cíclica até ao movimento cessar“.*

O *sloshing rotativo* em reservatórios de águas profundas é análogo não só ao comportamento do pêndulo esférico ou cónico forçado [Berlot e Freed, 1956] [Howell, 1957] [Troesch, 1957] [Berlot, 1959] [Miles, 1962] [Miles, 1984a] [Tritton, 1986], mas também ao comportamento não planar ressonante de uma mola esticada [Miles, 1984b].

Relativamente ao pêndulo esférico é possível concluir [Miles, 1962] que a sua resposta num estado estacionário se pode afastar claramente das oscilações puramente planas na vizinhança da ressonância. Em particular se a frequência em questão se encontrar num determinado intervalo, torna-se bastante difícil, se não quase impossível, prever de que forma se irá processar o movimento do pêndulo.

É possível obterem-se equações diferenciais linearizadas desacopladas para os movimentos transversais de um pêndulo esférico, muito embora o sistema original corresponda a um sistema de equações não-lineares acopladas. Por resolução das equações diferenciais não-lineares para um estado estacionário, obtêm-se soluções harmónicas na vizinhança da ressonância, sendo identificados de uma forma muito objectiva três tipos de movimento do fluido [Hutton, 1962] [Hutton, 1964] [Gillard, 1963] [Weiss e Rogge, 1965] [Rogge e Weiss, 1965]:

- i) Movimento planar harmónico estável:
- ii) Movimento não-planar harmónico estável;
- iii) Movimento harmónico instável.

O movimento planar estável corresponde a um movimento estacionário do fluido com um pico de altura de onda constante e um diâmetro nodal estacionário perpendicular à direcção da excitação.

O movimento não-planar estável traduz um movimento estacionário do fluido com um pico de altura de onda constante associado a um diâmetro nodal simples que roda a uma taxa constante em torno do eixo vertical do tanque. Este movimento ocorre em primeiro lugar acima de frequência natural da superfície livre do fluido.

O movimento instável, por seu lado, corresponde a um tipo de movimento que nunca atinge um estado estacionário. O movimento do fluido exhibe características de

restituição suaves associadas ao movimento planar estável e um efeito de endurecimento quando surgem regimes não-planares [Ibrahim, 2005].

O tipo de movimentos que surgem em reservatórios de águas profundas continuou a ser amplamente investigado [Verhagen e WijnGaarden, 1985] [Schilling e Siekmann, 1982] tendo sido possível concluir, por exemplo, que o pico da altura de onda, a taxa de rotação do diâmetro nodal e a sua direcção sofrem modificações contínuas ao longo do tempo dependentes da amplitude da solicitação imposta.

Alguns autores [Verhagen e WijnGaarden, 1965] observaram a formação do fenómeno de salto hidráulico preferencialmente em reservatórios de geometria rectangular sujeitos a solicitações laterais. O salto hidráulico corresponde a um fenómeno não-linear no qual se observa um movimento periódico do fluido de um lado para o outro entre as paredes do reservatório que o contém [Ibrahim, 2005].

Posteriormente foram introduzidos parâmetros de controlo adicionais [Miles, 1984c], como por exemplo o amortecimento, o ajuste entre frequências e relação entre altura de fluido em repouso e o comprimento do reservatório na direcção preferencial do movimento.

Foi avaliada a estabilidade de soluções fixas com a variação dos parâmetros de controlo indicados, tendo sido então [Miles, 1984c] identificados quatro tipos de regimes de movimento:

- i) Movimento harmónico planar;
- ii) Movimento harmónico não-planar;
- iii) Sinusoidal periódico;
- iv) Sinusoidal caótico.

Para qualquer tipo dos movimento identificados tanto pelos estudos mais antigos [Hutton, 1962] [Hutton, 1964] [Gillard, 1963] [Weiss e Rogge, 1965] [Rogge e Weiss, 1965] como pelos estudos mais recentes [Miles, 1984c] as aproximações dos resultados baseadas em análises de baixa ordem (por exemplo: terceira ordem) [Waterhouse, 1994] falham para amplitudes elevadas sendo necessário proceder-se a análises assintóticas da resposta da superfície livre do fluido junto da altura crítica. Estas aproximações deverão, no entanto, ter por base uma teoria fundamentada em análises de ordem superior (por exemplo: quinta ordem) [Moiseev, 1958].

Para alturas de fluido identificadas como críticas a resposta modifica-se de uma situação em que se estabelece uma analogia com uma mola de características suaves (menor rigidez) para uma situação em que se identifica claramente um paralelo com uma mola de características endurecidas (maior rigidez) [Ibrahim, 2005].

### 2.2.2.3. Análise do *sloshing* rotativo

Este fenómeno tem sido, como já foi referido, objecto de diversos estudos analíticos. Os principais resultados apresentados em seguida baseam-se nos estudos desenvolvidos por Hutton na década de 60 [Hutton, 1962] por serem de todos os efectuados aqueles que melhor aproximam os fenómenos que surgem na sequência de uma solicitação dinâmica.

Admitindo reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas parcialmente cheios com fluidos incompressíveis, considera-se que as equações de campo que definem o escoamento são as apresentadas na secção 2.1.2. No entanto as principais fontes de não-linearidade correspondem às condições de fronteira de superfície livre.

Assim, quando sujeitas a excitações laterais,  $x(t)$ , as condições de fronteira de superfície livre cinemática e dinâmica, em  $z=\eta$ , podem ser escritas da forma indicada nas equações (283) e (284):

$$-\frac{1}{2}\left(\tilde{\Phi}_r^2 + \frac{1}{r^2}\tilde{\Phi}_\theta^2 + \tilde{\Phi}_z^2\right) - g\eta + \tilde{\Phi}_t - \ddot{x}(t)r\cos\theta = 0|_{z=\eta} \quad (283)$$

$$\eta_t - \eta_r\tilde{\Phi}_r - \frac{1}{r^2}\eta_\theta\tilde{\Phi}_\theta + \tilde{\Phi}_z = 0|_{z=\eta} \quad (284)$$

em que o índice presente em cada caso corresponde à diferenciação em relação à variável indicada e o(s) ponto(s) traduz(em) derivadas temporais.

Expandindo em séries de Taylor as duas equações anteriores, para  $z=\eta=0$ , obtém-se [Ibrahim, 2005]:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\left(\tilde{\Phi}_r^2 + \frac{1}{r^2}\tilde{\Phi}_\theta^2 + \tilde{\Phi}_z^2\right) + \tilde{\Phi}_t - \ddot{x}(t)r \cos \theta = 0|_{z=\eta} + \\
& + \left\{ \tilde{\Phi}_{tz} - \tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_{rz} - \frac{1}{r^2} \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{r\theta z} - \tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_{zz} - g \right\}_{\eta=0} \eta + \left\{ \tilde{\Phi}_{tzz} - \tilde{\Phi}_{rz}^2 - \tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_{rzz} - \frac{1}{r^2} \tilde{\Phi}_\theta^2 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r^2} \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{r\theta z} - \tilde{\Phi}_{zz}^2 - \tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_{zzz} \right\}_{\eta=0} \times \frac{\eta^2}{2} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{285}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \eta_t - \eta_r \tilde{\Phi}_r - \frac{1}{r^2} \eta_\theta \tilde{\Phi}_\theta + \tilde{\Phi}_z \right\}_{\eta=0} + \left\{ -\eta_r \tilde{\Phi}_{rz} - \frac{1}{r^2} \eta_\theta \tilde{\Phi}_{\theta z} + \tilde{\Phi}_{zz} \right\}_{\eta=0} \eta + \\
& + \left\{ -\eta_r \tilde{\Phi}_{rzz} - \frac{1}{r^2} \eta_\theta \tilde{\Phi}_{\theta zz} + \tilde{\Phi}_{zzz} \right\}_{\eta=0} \frac{\eta^2}{2} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{286}$$

Pode-se exprimir a função do potencial de velocidade (equação (287)) e a altura de onda (equação (288)) em termos de séries de Fourier no espaço, em que os coeficientes indicados são variáveis com o instante temporal:

$$\hat{\Phi}(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn}(t) J_m(\lambda_{mn} r) \cos m \theta \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh \lambda_{mn} h} \tag{287}$$

$$\eta(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t) J_m(\lambda_{mn} r) \cos m \theta \tag{288}$$

em que  $\alpha_{mn}(t)$  e  $a_{mn}(t)$  são coordenadas generalizadas dependentes do tempo.

O acoplamento dos modos de vibração para o fenómeno considerado surge se forem considerados termos não-lineares para  $\alpha_{mn}(t)$  e  $a_{mn}(t)$ . Para além disso torna-se também importante conhecer a ordem de magnitude de  $\alpha_{mn}(t)$  e  $a_{mn}(t)$  para se decidir quanto ao número de modos significativos para a análise, o que permite limitar o problema a um número finito de equações correspondentes precisamente ao número de modos identificados como apresentando significância para o fenómeno [Ibrahim, 2005].

Continuando a seguir o preconizado por Hutton [Hutton, 1962] é possível, por uma questão de simplificação, combinar as duas equações indicadas ((283) e (284)) em apenas uma. Em primeiro lugar, a equação (283) pode ser reescrita na forma:

$$g\eta = \Gamma(r, \theta, \eta, t) - \frac{1}{2} \left( \tilde{\Phi}_r^2 + \frac{1}{r^2} \tilde{\Phi}_\theta^2 + \tilde{\Phi}_z^2 \right) + \tilde{\Phi}_t - \ddot{x}(t)r \cos \theta \quad (289)$$

Considerando as derivadas parciais da altura de onda no que refere ao tempo e às coordenadas polares  $(r, \theta)$  é possível obter-se:

$$g\eta_t = \Gamma_t + \Gamma_\eta \eta_t \rightarrow \eta_t (g - \Gamma_\eta) = \Gamma_t \quad (290)$$

$$\Gamma_t = -\tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_{rt} - \frac{1}{r^2} \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{\theta t} - \tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_{zt} + \tilde{\Phi}_{tt} - \dot{x}r \cos \theta$$

$$g\eta_r = \Gamma_r + \Gamma_\eta \eta_r \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial r} (g - \Gamma_\eta) = \Gamma_r \quad (291)$$

$$\Gamma_r = -\tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_{rr} + \frac{1}{r^3} \tilde{\Phi}_\theta^2 - \frac{1}{r^2} \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{\theta r} - \tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_{zr} + \tilde{\Phi}_{zt} - \dot{x} \cos \theta$$

$$g\eta_\theta = \Gamma_\theta + \Gamma_\eta \eta_\theta \rightarrow \eta_\theta (g - \Gamma_\eta) = \Gamma_\theta \quad (292)$$

$$\Gamma_\theta = -\tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_{r\theta} - \frac{1}{r^2} \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{\theta\theta} - \tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_{z\theta} + \tilde{\Phi}_{\theta t} - \dot{x}r \sin \theta$$

$$\text{em que } \Gamma_\eta = \tilde{\Phi}_{zt} - \tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_{rz} - \left( \frac{1}{r^2} \right) \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{\theta z} - \tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_{zz}$$

Após multiplicação de ambos os lados da equação (284) por  $(g - \Gamma_\eta)$  e substituindo os termos resultantes das equações (290) a (292), a equação (284) toma a forma que a seguir se identifica:

$$\begin{aligned} & \tilde{\Phi}_{tt} + g\tilde{\Phi}_z - 2\tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_{rt} - \frac{2}{r^2} \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{\theta t} - 2\tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_{zt} + \tilde{\Phi}_r^2 \tilde{\Phi}_{rr} + \tilde{\Phi}_z^2 \tilde{\Phi}_{zz} + \\ & + \frac{1}{r^4} \tilde{\Phi}_\theta^2 \tilde{\Phi}_{\theta\theta} - \frac{1}{r^3} \tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_\theta^2 + \frac{2}{r^2} \tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{r\theta} + \frac{2}{r^2} \tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_\theta \tilde{\Phi}_{z\theta} + 2\tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_z \tilde{\Phi}_{rz} - \\ & - \dot{x}r \cos \theta + \dot{x} \left( \tilde{\Phi}_r \cos \theta - \frac{1}{r} \tilde{\Phi}_\theta \sin \theta \right) = F(r, \theta, z = 0, t) = 0 \end{aligned} \quad (293)$$

A definição completa do problema dos valores de fronteira compreende as equações (285) e (286),  $\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0$  e as condições de fronteira nas paredes e no fundo

do tanque,  $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} = 0$ , em que  $n$  corresponde à normal positiva à fronteira sólida. Uma solução possível para o potencial de velocidades deverá satisfazer necessariamente as condições de fronteira definidas [Ibrahim, 2005].

Face à natureza não-linear das condições de fronteira da superfície livre definidas pelas equações (285) e (286) foi possível definir-se [Hutton, 1962] uma solução que traduzisse o acoplamento não-linear verificado entre os diferentes modos de *sloshing* rotativo.

Assim, admitindo uma excitação sinusoidal, de acordo com cálculos simplificativos propostos, obtêm-se o seguinte potencial de velocidades correspondente a uma solução planar estável [Ibrahim, 2005]:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = & \gamma \varepsilon^{\frac{1}{3}} \cos \theta J_1(\lambda_{11} r) \cos \Omega t \frac{\cosh(\lambda_{11}(z+h))}{\cosh(\lambda_{11} h)} - \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{2}{3}} \gamma^2 \sin 2\Omega t \times \\ & \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{0n} J_0(\lambda_{0n} r) \right\} \frac{\cosh(\lambda_{0n}(z+h))}{\cosh(\lambda_{0n} h)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n} J_2(\lambda_{2n} r) \cos 2\theta \frac{\cosh(\lambda_{2n}(z+h))}{\cosh(\lambda_{2n} h)} \end{aligned} \quad (294)$$

com os coeficientes definidos:

$$\Omega_{0n} = \frac{2K_0(I_{01}^n + I_{02}^n + I_{03}^n) \sqrt{g\lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h)}}{R^2 \{4g\lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h) - g\lambda_{0n} \tanh(\lambda_{0n} h)\} J_0^2(\lambda_{0n} R)} \quad (295)$$

$$\Omega_{2n} = \frac{2\lambda_{2n}^2 K_0 (I_{21}^n + I_{22}^n + I_{23}^n) \sqrt{g\lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h)}}{(R^2 \lambda_{2n}^2 - 4) \{4g\lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h) - g\lambda_{2n} \tanh(\lambda_{2n} h)\} J_2^2(\lambda_{2n} R)} \quad (296)$$

$$K_0 = \frac{1}{2\lambda_{11}^2} (3 \tanh^3(\lambda_{11}) - 1) \quad (297)$$

$$I_{ii1}^n = \frac{1}{\lambda_{11}} \int_0^{\lambda_{11}} u J_i \left( \lambda_{in} \frac{u}{\lambda_{11}} \right) \left[ \frac{d}{du} J_i(u) \right]^2 du \quad i=0,2 \quad (298)$$

$$I_{ii2}^n = \frac{1}{\lambda_{11}} \int_0^{\lambda_{11}} \frac{1}{u} J_i \left( \lambda_{in} \frac{u}{\lambda_{11}} \right) J_i^2(u) du \quad (299)$$

$$I_{ii3}^n = \frac{1}{\lambda_{11}} \int_0^{\lambda_{11}} u J_i \left( \lambda_{11} \frac{u}{\lambda_{11}} \right) J_i^2(u) du \quad (300)$$

em que  $\gamma$  corresponde à amplitude da resposta,  $\varepsilon$  define a amplitude de excitação e  $\lambda_{mn}$  traduzem os valores próprios que determinam a estabilidade da solução fixa

A elevação da superfície livre da onda que corresponde à primeira harmónica é dada por [Ibrahim, 2005]:

$$\begin{aligned} \eta_{r=R} \Big|_{\theta=0} = & \left\{ \frac{\Omega \varepsilon}{g} \left[ \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \mathcal{Y}_1(\lambda_{11} R) + R + \frac{\lambda_{11}^3}{8g} \tanh(\lambda_{11} h) \times \left( 1 + 5 \tanh^2(\lambda_{11} h) (\mathcal{Y}_1(\lambda_{11} R)^3) \right) \right] - \right. \\ & - \frac{\lambda_{11}}{4g} \gamma^3 \tanh(\lambda_{11} h) J_1(\lambda_{11} R) \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 \tanh(\lambda_{0n} h) + 2\lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h)) \Omega_{0n} J_0(\lambda_{0n} R) + \right. \\ & \left. \left. \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_2 \tanh(\lambda_{2n} h) + 2\lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h)) \Omega_{2n} J_2(\lambda_{2n} R) \right] \right] \right\} \sin \Omega t \end{aligned} \quad (301)$$

A distribuição da pressão hidrodinâmica é obtida usando a equação não-linear de Bernoulli [Ibrahim, 2005], definida por:

$$p = -\rho \left[ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + gz + \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\Phi} \nabla \tilde{\Phi}) + \dot{x} r \cos \theta \right] + p_0 \quad (302)$$

A partir da equação (302) torna-se possível definir a força hidrodinâmica actuante ao nível das paredes do reservatório segundo o eixo x [Abramson et. al., 1966]:

$$F_x = \int_{-h}^{\eta} \int_0^{2\pi} p R \cos \theta d\theta dx \Big|_{r=R} \cong F_1 + F_2 \quad (303)$$

com  $F_1$  e  $F_2$  definidos de acordo com as equações (304) e (305):

$$\begin{aligned}
F_1 = \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} pR \cos \theta d\theta dx \Big|_{r=R} = -\rho R \left\{ -\varepsilon^{\frac{1}{3}} \frac{\pi \Omega A}{\lambda_{11}} \sin(\Omega t) \sinh(\lambda_{11} h) + \frac{\varepsilon}{2R^2} [\sin(\Omega t) + \right. \\
\left. + \sin(3\Omega t)] \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi A_{\theta} N_{\theta}}{2(\lambda_{11}^2 - \lambda_{2n}^2)} [\lambda_{11} \sinh(\lambda_{11} h) \cosh(\lambda_{2n} h) - \lambda_{2n} \cosh(\lambda_{11} h) \sinh(\lambda_{2n} h)] + \right. \\
\left. + \frac{\varepsilon}{2} [\sin(\Omega t) + \sin(3\Omega t)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi A_z}{2} \left[ \frac{2M_z}{2(\lambda_{11}^2 - \lambda_{0n}^2)} [\lambda_{11} \cosh(\lambda_{11} h) \sinh h(\lambda_{0n} h) - \right. \right. \\
\left. \left. - \lambda_{0n} \sinh(\lambda_{11} h) \cosh(\lambda_{2n} h)] - \frac{N_z}{2(\lambda_{11}^2 - \lambda_{2n}^2)} [\lambda_{11} \cosh h(\lambda_{11} h) \sinh h(\lambda_{2n} h) - \right. \right. \\
\left. \left. - \lambda_{2n} \sinh(\lambda_{11} h) \cosh(\lambda_{2n} h)] \right] - \varepsilon \Omega R \pi h \sin(\Omega t) \right\} \quad (304)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = \int_0^{\eta} \int_0^{2\pi} pR \cos \theta d\theta dx \Big|_{r=R} = \frac{1}{2} \frac{\rho R}{g} \pi \varepsilon \left\{ \frac{3}{4} \frac{\Omega^2}{g} \sin^3(\Omega t) [\mathcal{J}_1(\lambda_{11} R)]^3 \lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h) - \right. \\
\left. - 2\Omega^2 \sin(\Omega t) \cos(2\Omega t) \mathcal{J}_1(\lambda_{11} R) \times \left[ -\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2 \Omega_{0n} J_0(\lambda_{0n} R) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2 \Omega_{2n} J_2(\lambda_{2n} R) \right] - \right. \\
\left. - \frac{\Omega}{8R^2} \sin(\Omega t) (1 + \cos(2\Omega t)) [\mathcal{J}_1(\lambda_{11} R)]^3 - \frac{3\Omega}{8} \sin(\Omega t) (1 + \cos(2\Omega t)) [\mathcal{J}_1(\lambda_{11} R)]^3 \times \right. \\
\left. \times [\lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h)]^2 \right\} \quad (305)
\end{aligned}$$

em que:

$$M_z = -\frac{1}{2} \gamma^2 \Omega_{0n} \frac{\lambda_{0n} J_0(\lambda_{0n} R)}{\cosh(\lambda_{0n} h)} \quad (306)$$

$$N_{\theta} = \gamma^2 \Omega_{2n} \frac{J_2(\lambda_{2n} R)}{\cosh(\lambda_{2n} h)} \quad (307)$$

$$N_z = -\frac{1}{2} \gamma^2 \Omega_{2n} \frac{\lambda_{2n} J_2(\lambda_{2n} R)}{\cosh(\lambda_{2n} h)} \quad (308)$$

$$A = \gamma \frac{J_1(\lambda_{11} R)}{\cosh(\lambda_{11} h)} \quad (309)$$

$$A_{\theta} = -A \quad (310)$$

$$A_z = \lambda_1 A \quad (311)$$

Os valores dos parâmetros indicados nas equações (306) a (311) foram confirmados por meio de estudos experimentais e numéricos [Hutton, 1962] [Abramson et. al., 1966].

#### 2.2.2.4. Fenómenos caóticos

O *sloshing* caótico traduz um movimento instável da superfície livre do fluido, devendo a sua origem a não-linearidades presentes inicialmente ou a alguma sensibilidade face a determinadas condições inicialmente ou durante a ocorrência da excitação.

Alguns dos percursores nesta área empregaram a formulação Lagrangeana e Hamiltoniana, para estudar o movimento da superfície livre de um fluido, em termos de coordenadas generalizadas para ondas graviticas não-lineares em recipientes circulares cilíndricos sujeitos a excitações harmônicas horizontais simples [Miles, 1976] [Miles, 1984c].

A elevação da superfície livre da onda pode ser expressa em termos de uma expansão modal, como se indica [Ibrahim, 2005]:

$$\eta = \eta_n(t) \Psi_n(r, \theta) \quad (312)$$

em que  $r$  e  $\theta$  correspondem a coordenadas polares, os índices  $n$  indicados correspondem aos modos participantes,  $\eta_n$  são as coordenadas generalizadas e  $\Psi_n$  a forma das funções modais que correspondem ao conjunto completo de funções próprias ortogonais determinadas a partir das equações (313) a (315):

$$(\nabla^2 + k_n^2) \Psi_n = 0 \quad (313)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (314)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \Psi_m \Psi_n r dr d\theta = \delta_{mn} \pi R^2 \quad (315)$$

em que  $\delta_{mn}$  corresponde ao delta de Kronecker e  $k_n$  o valor próprio (ANEXO).

A energia cinética correspondente à equação (312) é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint (\nabla \Phi)^2 ds dz = \frac{1}{2} \rho S a_{mn} \dot{\eta}_m \dot{\eta}_n \quad (316)$$

com S correspondente à secção transversal do reservatório circular cilíndrico de paredes verticais planas, os coeficientes inerciais  $a_{mn}$  tem dimensões de comprimento e podem ser aproximados por uma truncatura quadrática [Ibrahim, 2005]:

$$a_{mn} = \delta_{mn} a_m + a_{lmn} \eta_l + \frac{1}{2} a_{jlmn} \eta_j \eta_l \quad (317)$$

em que  $a_n = \frac{1}{k_n} \coth k_n h \equiv \frac{g}{\omega_n^2}$  representa o comprimento de um pêndulo equivalente e

$\omega_n$  corresponde à n-ésima frequência natural de vibração da superfície livre do fluido

$$a_{lmn} = C_{lmn} - D_{lmn} a_m a_n \quad (318)$$

$$a_{jlmn} = -D_{jlmn} (a_m + a_n) + 2D_{jmi} D_{lni} a_i a_m a_n \quad (319)$$

As constantes presentes nas equações (318) e (319) são descritas e avaliadas nos estudos preconizados por Miles [Miles, 1984d].

Para esta situação a energia potencial é definida como:

$$V = \rho \iint dS \int_0^{\eta} [\dot{u}x + gz] dz = \rho S \left( -Q_n \eta_n + \frac{1}{2} g \eta_n \eta_n \right) \quad (320)$$

com  $\dot{u} = -\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t)$  correspondente à aceleração horizontal do tanque e:

$$Q_n = -\dot{u}x_n \quad (321)$$

$$x_n = \frac{1}{S} \iint x \Psi_n ds \quad (322)$$

$$x_1 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} x \Psi_1 r dr d\theta \quad (323)$$

Após ser dividido por  $\rho S$ , o Lagrangeano toma a forma apresentada na equação (324):

$$L \equiv T - V = Q_1 \eta_1 + \frac{1}{2} a_n (\dot{\eta}_n^2 - \omega_n^2 \eta_n^2) + \frac{1}{2} a_{lmn} \eta_l \dot{\eta}_m \dot{\eta}_n + \frac{1}{4} a_{jlmn} \eta_j \eta_l \dot{\eta}_m \dot{\eta}_n \quad (324)$$

A partir da equação (324) pode ser gerado um conjunto extenso de equações diferenciais para qualquer número de modos de vibração do fluido no interior de um recipiente.

Em presença das não-linearidades de quarta ordem presentes no Lagrangeano, a equação do movimento terá termos de primeira e terceira ordens ao nível dos modos dominantes,  $\eta_{1,2}$ .

Considerando os modos dominantes, os termos inerciais e gravitacionais lineares chegam a ser cancelados na vizinhança da ressonância estabelecendo-se um balanço entre os termos não-lineares e a força de solicitação externa.

Os modos secundários são induzidos por termos quadráticos em  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Os modos dominantes podem ser definidos como sinusoides variando de uma forma lenta e progressiva com a frequência,  $\Omega$  [Ibrahim, 2005].

Na sequência do que foi descrito no parágrafo anterior pode-se definir as seguintes soluções para modos dominantes e modos secundários, respectivamente:

$$\eta_n = \varepsilon \lambda \{ p_n(\tau) \cos \Omega t + q_n(\tau) \sin \Omega t \} \quad (n=1,2) \quad (325)$$

$$\eta_n = \varepsilon^2 \lambda \{A_n(\tau) \cos 2\Omega t + B_n(\tau) \sin 2\Omega t + C_n(\tau)\} \quad (n \neq 1, 2) \quad (326)$$

em que  $\lambda = \left(\frac{1}{k}\right) \tanh(kh)$  traduz um comprimento de referência,  $\tau = \varepsilon^2 \Omega t / 2$  um parâmetro adimensional dependente do tempo e  $p_n$ ,  $q_n$ ,  $A_n$  e  $C_n$  são amplitudes adimensionais com uma taxa de variação muito lenta e reduzida [Ibrahim, 2005].

As equações (325) e (326) são substituídas na expressão do Lagrangeano indicada em (324). Fazendo as devidas substituições indicadas por Ibrahim [Ibrahim, 2005] obtêm-se uma forma mais simplificada e compacta para a média do Lagrangeano, L:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon^4 g \lambda^2 \left\{ \frac{1}{2} (\dot{p}_n q_n - p_n \dot{q}_n) + H(p_1, q_1, p_2, q_2) \right\} \quad (327)$$

em que n pressupõe um somatório apenas para os í-termos referentes aos índices 1 e 2, e os termos desconhecidos na equação (325) são definidos de acordo com:

$$H = p_1 + \beta E + \frac{1}{2} A E^2 + \frac{1}{2} B M^2 \quad (328)$$

$$\beta = \varepsilon^{-2} \left( \left( \frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 - 1 \right) \quad (329)$$

$$A = -P_0 - P_2 + Q_0 + Q_2 + R_0 + R_2 - 0.567 \tanh^2(kh) \quad (330)$$

$$B = P_0 - P_2 - Q_0 - R_0 + R_2 - 1.468 \tanh^2(kh) \quad (331)$$

$$P_i = \frac{(3 \tanh^2(kh) + 1 - 0.5 k_{ij}^2 v_{ij}^2)^2 I_{ij}^2}{4(4v_{ij}^2 - 1)} \quad (332)$$

$$R_i = \frac{1}{4} k_{ij}^2 V_{ij}^2 I_{ij}^2 \quad (333)$$

$$Q_i = \frac{1}{2} (\tanh^2(kh) - 1 + 0.5k_{ij}^2)^2 I_{ij}^2 \quad (334)$$

$$V_{ij} = \frac{\Omega}{\sqrt{k_{ij} \tanh(k_{ij}h)}} \quad (335)$$

$$I_{ij} = \frac{(1 + \delta_{0i})}{2k^2 R^2 N^2 N_{ij}} \int_0^{kR} J_1^2(x) J_i\left(\frac{k_{ij}x}{k}\right) x dx \quad (336)$$

k=k1=k2      N=N11

É importante referir que as variáveis A e B apresentam polos simples (h/R=0.1523) devido à possível ocorrência de ressonância interna entre os modos primários (k<sub>11</sub>R=1.8412) e os modos dominantes axi-simétricos (k<sub>01</sub>R=3.8317).

Existem no entanto outras condições de ressonância interna, se bem que consideravelmente mais reduzidas, entre os modos 02 e 22. Para além disso, p<sub>n</sub> e q<sub>n</sub> são definidas usando as equações que se explicitam em seguida [Ibrahim, 2005]:

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \quad (337)$$

$$\dot{q}_n = -\frac{\partial H}{\partial p_n} \quad (338)$$

com H correspondente ao Hamiltoniano. A este nível pode ser introduzido, ao lado direito de cada uma das equações (337) e (338), o amortecimento na forma:

$$\alpha = 2\zeta\epsilon^{-2} \quad (339)$$

em que ζ indicado na equação (339) corresponde ao coeficiente de amortecimento.

A concretização das equações (337) e (338) incorporando o amortecimento permitem a obtenção de determinados parâmetros de controlo que possibilitam a definição do tipo de movimento (movimento harmónico planar estável, movimento

harmónico não-planar estável e movimento harmónico instável) observado durante a solicitação dinâmica a que o fluído esteve sujeito.

Os estudos de Miles [Miles, 1984c] foram posteriormente aprofundados com o objectivo de estudar o tipo de mecanismo de *sloshing* dinâmico formado no fluido em movimento, nomeadamente ao nível da superfície livre [Bryant, 1989] [Krasnopolskaya e Shvets, 1990] [Krasnopolskaya e Shvets, 1992] [Bryant e Stiassnie, 1994] [Hsieh et. al., 1995] [Sun et. al., 1995] [Puchka e Kholopova, 1996].

Nos estudos efectuados foi reportado o desenvolvimento progressivo de ondas não-lineares e o conseqüente aparecimento do movimento de *sloshing* caótico em certas zonas da superfície livre do fluido [Ibrahim, 2005].

#### 2.2.2.5. Excitação sinusoidal (*sine sweep*)

As primeiras investigações desenvolvidas com o objectivo de estudar o movimento rotacional de fluidos junto da ressonância [Ibrahim, 2005] serviram de base para outros estudos que incidiram sobre diversos aspectos relacionados com o fenómeno de *sloshing* dinâmico não-linear [Narimanov et. al., 1977] [Koval'chuk et. al, 1989] [Lukovskii, 1990] [Koval'chuk e Kubenko, 1991] [Kubenko et. al, 1992] [Limarchenko et. al., 1992] [Koval'chuk e Podchasov, 1996].

Assim, numa primeira aproximação foi possível obter-se um conjunto de equações diferenciais que permitiram descrever a amplitude da superfície livre e a fase [Narimanov et. al., 1977] [Lukovskii, 1990] [Kubenko et. al, 1992], bem como um andamento regular dos modos das ondas quando o líquido no interior do reservatório se encontrava sujeito a vibrações quase-estacionárias [Koval'chuk et. al, 1989] [Koval'chuk e Kubenko, 1991] [Koval'chuk e Podchasov, 1996].

Em qualquer um dos estudos referidos foi assumido que a frequência de excitação aumenta lentamente com o tempo, passando pela ressonância [Ibrahim, 2005].

A elevação da superfície livre da onda pode ser expressa em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , na forma:

$$\eta(r, \theta, t) = a(t) \sin[\theta + \alpha(t)] R_1(r) \quad \text{com} \quad \dot{\alpha}(t) \neq 0 \quad (340)$$

em que  $a(t)$  e  $\alpha(t)$  correspondem à amplitude e à fase, ambas desconhecidas e dependentes do instante temporal, e  $R_1(r)$  é função própria do problema homogêneo de valores de fronteira que verifica:

$$\frac{d^2 R_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1(r)}{dr} + \left( \lambda_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) R_1(r) = 0 \quad (341)$$

$$\left. \frac{dR_1(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad R_1(r) \Big|_{r=0} = \infty \quad (342)$$

em que  $R$  corresponde ao raio do tanque e  $\lambda_1$  traduz o primeiro valor próprio do modo de *sloshing* anti-simétrico [Ibrahim, 2005].

O estudo do movimento da superfície livre de um fluido, quando sujeito a solicitações dinâmicas harmônicas de translação do tipo  $X_0 = \cos \Omega t$ , permitiu, por meio de uma expansão assintótica a partir das condições da superfície livre, obter equações diferenciais acopladas com termos até terceira ordem para a amplitude e a fase do movimento do fluido [Koval'chuk e Kubenko, 1991] [Kubenko et. al, 1992]. Estas equações bem como todos os parâmetros que permitem a sua adequada definição encontram-se explicitados em [Ibrahim, 2005].

Utilizando um método baseado na determinação de valores médios foi possível obterem-se as seguintes equações diferenciais de primeira ordem [Ibrahim, 2005]:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\Omega \gamma X_0}{2\sqrt{u}} \left[ \sqrt{u^2 - v^2} \cos \beta \sin \vartheta + (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \sin \beta \right] \quad (343)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Omega \gamma X_0}{2\sqrt{u}} \left[ \sqrt{u^2 - v^2} \cos \beta \cos \vartheta + (u \sin \vartheta - v \cos \vartheta) \sin \beta \right] \quad (344)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2\Omega} \left[ \left( \omega_1^2 - \Omega^2 \right) + \frac{3}{2} u b_1 \left( \omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{3} \right) \right] + \frac{\Omega \gamma X_0}{2\sqrt{u}} \left[ \sqrt{u^2 - v^2} \cos \beta \sin \vartheta - (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \sin \beta \right] \quad (345)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{\Omega \gamma X_0}{4uv\sqrt{u}} \left[ \left\{ (u^2 - v^2) \sin \vartheta - 2uv \cos \vartheta \right\} \cos \beta - (u \cos \vartheta + v \sin \vartheta) \sqrt{u^2 - v^2} \sin \beta \right] \quad (346)$$

As soluções em estado estacionário são obtidas igualando o lado esquerdo das expressões anteriores a zero.

Desta forma podem-se obter as seguintes soluções possíveis para ondas que se propaguem na direcção radial [Ibrahim, 2005]:

$$u = \mp v + \frac{\lambda^2 X_0^2 \Omega^4}{b_1^2 v^2 (\omega_1^2 - \Omega^2)^2} \quad (347)$$

$$(\omega_1^2 - \Omega^2) = -\frac{3}{2} u b_1 \left( \omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{3} \right) + \frac{\gamma^2 X_0^2 \Omega^4}{b_1^2 v^2 (\omega_1^2 - \Omega^2)^2} \quad (348)$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{v \mp u} \quad \cos 2\vartheta = 0 \quad (349)$$

em que o sinal  $-$  corresponde a  $\tan \vartheta = 1$  e o sinal  $+$  corresponde a  $\tan \vartheta = -1$ . As soluções anteriores revelam-se estáveis numa determinada gama de frequências de excitação [Ibrahim, 2005]:

$$(\omega_1^2 - \Omega^2) < \frac{b_1}{2(4)^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{-\Omega^2 \gamma X_0}{b_1 (\omega_1^2 - \Omega^2)} \right)^{\frac{2}{3}} \left( (\omega_1^2 - \Omega^2) - 9 \left( \omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{3} \right) \right) \quad (350)$$

Se por acaso o termo  $(\omega_1^2 - \Omega^2)$  exceder um determinado valor fronteira indicado na equação (350), a superfície livre do fluido fica animada, numa determinada gama de frequências, de um movimento caótico:

$$\frac{b_1}{2(4)^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{-\Omega^2 \gamma X_0}{b_1 (\omega_1^2 - \Omega^2)} \right)^{\frac{2}{3}} \left( (\omega_1^2 - \Omega^2) - 9 \left( \omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{3} \right) \right) < \frac{9}{2} \left( \Omega^4 \gamma^2 X_0^2 \frac{b_1}{18} \left( \omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{3} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \quad (351)$$

A superfície livre pode no entanto apresentar uma onda permanente (movimento estável) se se verificar:

$$\frac{b_1}{2(4)^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{-\Omega^2 \gamma X_0}{b_1(\omega_1^2 - \Omega^2)} \right)^{\frac{2}{3}} \left( (\omega_1^2 - \Omega^2) - 9 \left( \omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{3} \right) \right) > \frac{9}{2} \left( \Omega^4 \gamma^2 X_0^2 \frac{b_1}{18} \left( \omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{3} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \quad (352)$$

Em presença de uma solicitação do tipo *sine sweep* é possível concluir que, tanto a amplitude como a fase exibem comportamentos periódicos e trocas de energia [Ibrahim, 2005].

O deslocamento observado segundo a direcção radial,  $\theta$ , ao nível da crista da onda, corresponde a um modo condicionado durante curtos intervalos de tempo quando as ondas apresentam amplitudes reduzidas.

A posição correspondente da crista da onda ao longo da coordenada radial,  $\theta$ , muda abruptamente e o movimento da onda é retardado. Estas características também podem surgir no caso do movimento quase periódico do recipiente contendo o fluido [Koval'chuk e Podchasov, 1996] [Ibrahim, 2005].

#### 2.2.2.6. Excitação aleatória

Na natureza as excitações dinâmicas são não periódicas, apresentando um carácter aleatório, o que torna necessário a sua modelação como um processo perfeitamente aleatório. A análise de processos aleatórios inclui a teoria da probabilidade e a teoria das equações diferenciais estocásticas [Ibrahim, 2005].

Um processo aleatório é especificado em termos de funções estatísticas como por exemplo:

- i) Médias quadráticas;
- ii) Funções densidade de probabilidade;
- iii) Funções de autocorrelação;
- iv) Funções densidade espectral de potência.

A previsão destas variáveis estatísticas para o fenómeno de *sloshing* não-linear não é uma tarefa muito simples.

No entanto, é possível efectuarem-se simulações experimentais que permitam estimar as referidas funções. Para além disso, existem métodos analíticos [Lin, 1967] [Ibrahim, 1985] [Roberts e Spanos, 1990] que permitem prever de uma forma muito aproximada os diferentes tipos de não-linearidades presentes no interior do fluido em movimento, quando este se encontra sujeito a uma solicitação dinâmica de carácter aleatório [Ibrahim, 2005].

As primeiras tentativas para estudar o comportamento da superfície livre de um fluido no interior de um reservatório quando sujeito a uma determinada excitação estocástica incluíram investigação experimental [Dalzell, 1967] [Brocchini et. al, 1997] e investigação analítica [Mathiessen, 1976] [Aslam et. al., 1979] [Sakata et. al, 1983] [Sakata et. al, 1984] [Utsumi et. al, 1984] [Utsumi et. al, 1986].

As investigações experimentais sobre sistemas apresentando comportamento fundamentalmente não-linear quando sujeitos a excitações aleatórias são bastante reduzidas, muito embora sejam muito reveladoras do complexo mecanismo dinâmico que se forma no fluido em movimento. As solicitações aleatórias de amplitude considerável impõem grande maioria das vezes rotações violentas tanto em reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas como em tanques rectangulares [Ibrahim, 2005].

Considerando um reservatório circular cilíndrico de paredes verticais planas sujeito a uma excitação aleatória,  $f(t)$ , diferente de uma excitação de ruído branco, com amplitude modulada, e apresentando uma frequência dominante na direcção do eixo  $x$ , foi possível usar o princípio variacional exposto anteriormente conjuntamente com o método de Galerkin para derivar as equações dinâmicas discretas que definem as coordenadas generalizadas da função do potencial de velocidades e da altura de onda.

Assim, as funções do potencial de velocidades e da altura de onda podem ser definidas por meio das equações (353) e (354) [Ibrahim, 2005]:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn}(t) \cos m\theta J_m(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh\{\lambda_{mn}(z+h)\}}{\cosh(\lambda_{mn} h)} \quad (353)$$

$$\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t) \cos m\theta J_m(\lambda_{mn} r) \quad (354)$$

em que  $m$  e  $n$  correspondem ao número dos modos circunferencial e radial, respectivamente.

No entanto, é possível, através da introdução de parâmetros normalizados [Ibrahim, 2005] e aplicando o referido método de Galerkin às condições de fronteira cinemática e dinâmica, obter um conjunto de equações diferenciais para coordenadas generalizadas e para os diferentes modos que surgem ( $m=0,1,2$ ) [Ibrahim, 2005].

Para além disso, a introdução de termos de amortecimento linear, com determinados factores de amortecimento  $\zeta_i$  associados, permite contabilizar a dissipação de energia associada ao movimento que se desenvolve no fluido que se encontra no interior do reservatório em movimento.

É também de referir que, considerando excitações aleatórias, o primeiro modo é directamente excitado pela própria excitação externa, enquanto que os outros modos ( $m=0,2$ ) são indirectamente excitados por meio do acoplamento não-linear com o primeiro modo.

A aceleração de base pode ser modelada por intermédio de um processo aleatório [Ibrahim, 2005]:

$$f''(\tau) = e(\tau)n(\tau) \quad (355)$$

$$E[n(\tau)] = 0 \quad (356)$$

$$R_n(\Delta\tau) = E[n(\tau)n(\tau + \Delta\tau)] \quad (357)$$

em que  $E$  corresponde ao valor esperado da variável,  $e(t)$  é a função envolvente determinística e  $n(t)$  é o ruído Gaussiano estacionário com média nula e função de autocorrelação  $R_n(\Delta\tau)$ .

Alguns autores [Sakata et. al, 1984] consideraram no processo aleatório,  $n(\tau)$ , uma função de correlação harmónica com um decaimento exponencial, de acordo com o indicado pela expressão (358).

$$R_n(\Delta\tau) = R_0 e^{-\gamma|\Delta\tau|} \cos(v\Delta\tau) \quad (358)$$

A densidade espectral de potência do processo aleatório é dada por:

$$S_n(\omega) = R_0 \frac{\gamma(\omega^2 + v^2 + \gamma^2)}{\pi\{(\omega^2 - v^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\}} \quad (359)$$

Em que  $\gamma$  corresponde ao decaimento constante da função exponencial e  $v$  é a frequência dominante do processo.

A média e a variância do deslocamento da superfície livre do fluido, no processo aleatório, são determinadas tendo por base a equação (354), de acordo com o que se indica nas equações (360) e (361):

$$\mu = E[\eta] = E[a_0]J_0(\lambda_0 r) + E[a_2]J_2(\lambda_2 r)\cos 2\theta \quad (360)$$

$$\sigma^2 = (E[\eta^2] - E[\eta])^2 = E[a_1^2]J_1^2(\lambda_1 r)\cos^2 \theta + E[a_0^2]J_0^2(\lambda_0 r) + E[a_2^2]J_2^2(\lambda_2 r)\cos^2 2\theta + 2E[a_0 a_2]J_0(\lambda_0 r)J_2(\lambda_2 r)\cos 2\theta - \mu^2 \quad (361)$$

É importante não esquecer que uma análise não-linear prevê uma média não nula para a elevação da superfície livre da onda, muito embora a excitação apresente média nula.

É ainda de referir que a teoria linear de onda traduz, para a elevação da superfície livre do fluido, uma média nula e uma variância dada por:

$$\sigma^2 = E[a_1^2]J_1^2(\lambda_1 r)\cos^2 \theta \quad (362)$$

Relativamente aos reservatórios rectangulares pode-se referir que vários tem vindo a ser os autores a desenvolver estudos e a preconizar teorias que justifiquem o comportamento não-linear que ocorre no seu interior [Bauer, 1965] [Verhagen e WijnGaarden, 1965] [Faltinsen, 1974] [Khosropour et. al, 1995] [Lukovskii e Timokha, 1999] [Lukovskii e Timokha, 2000] [Faltinsen e Timokha, 2001].

Os estudos efectuados permitiram concluir, por exemplo, que, perante uma excitação lateral aleatória, os efeitos observados no fluido presente no interior de um reservatório apresentam características análogas a uma mola flexível.

Dependendo do comprimento e da largura do reservatório e da frequência de excitação podem surgir duas classes de ondas permanentes na ressonância:

- i) Ondas longitudinais sincronizadas cujas cristas são paralelas à direcção da solictação;
- ii) Ondas transversais cruzadas subharmónicas cujas cristas são perpendiculares à direcção da excitação.

Geralmente o segundo tipo de ondas apresenta uma frequência correspondente a cerca de metade da frequência da excitação dinâmica a que o tanque está sujeito [Ibrahim, 2005].

As ondas cruzadas podem ser geradas por meio da aplicação de uma excitação paramétrica com frequência subharmónica [Miles, 1985]. Para determinadas alturas de fluido foi observada a ocorrência de um movimento acoplado entre modos superiores para uma frequência igual a um integral múltiplo da frequência fundamental [Mack, 1962].

A teoria linear das ondas de *sloshing* falha na descrição correcta da resposta da onda na vizinhança das frequências de ressonância [Shemer et. al., 1987].

Com o objectivo de contabilizar a amplitude finita de onda observada experimentalmente ao nível da frequência de ressonância torna-se necessário contabilizar também os efeitos não-lineares para que a dissipação possa ser determinante sob as mesmas circunstâncias [Kit et. al, 1987].

Garrett [Garrett, 1970] demonstrou que o mecanismo responsável pela excitação das ondas transversais cruzadas é, de facto, uma ressonância paramétrica.

Considerando a média sobre as ondas longitudinais foi possível determinar a equação governativa de Mathieu para a amplitude das ondas cruzadas.

Posteriormente [Miles, 1988] foi usada uma formulação Lagrangeana, sendo obtido o sistema Hamiltoniano governativo da variação da amplitude das ondas cruzadas.

No início da década de 90 alguns estudos efectuados [Shemer, 1990] [Ttsai et. al., 1990] permitiram a obtenção de equações médias para as ondas ressonantes permanentes na forma de osciladores de Duffing. As soluções numéricas obtidas para a equação de Schrodinger [Shemer, 1990] revelaram, para diversos valores de coeficientes de amortecimento ao longo do reservatório, a ocorrência da bifurcação de um estado estacionário simples para múltiplas soluções estacionárias. Em algumas circunstâncias foi observada a ocorrência de movimento caótico junto da ressonância.

As análises anteriores foram extendidas com o objectivo de incluir o fenómeno de ressonância simultânea das ondas longitudinais e harmónicas cruzadas sincronizadas e as suas interacções internas, o que resulta num sistema dinâmico bastante complicado [Ibrahim et. al., 2005].

O escoamento irrotacional bidimensional em tanques rectangulares que apresentem uma razão entre a altura do fluido em repouso no seu interior e o comprimento na direcção da solicitação que verifique  $h/L \leq 0.6$  pode apresentar diferentes características na ressonância.

Assim foram identificados três domínios de comportamento: finito  $h/L \geq 0.24$ , intermédio  $0.1 \leq h/L \leq 0.24$  e de águas rasas (*shallow*)  $h/L \leq 0.1$ , sendo cada um deles caracterizado por um diferente comportamento na ressonância.

A alteração do comportamento de *sloshing* associado com a diminuição da razão entre altura de água e o comprimento do reservatório  $h/L$ , e o aumento da amplitude de excitação foram também avaliados com recurso a métodos de análise modal envolvendo representações em séries de Fourier da altura da superfície da onda formada durante o movimento do fluido e o potencial de velocidade com coeficientes dependentes do instante temporal. [Faltinsen e Timokha, 2002] [Ibrahim, 2005].

Considerando diversos estudos de cariz teórico, analítico e experimental foi possível definir, para ondas longitudinais permanentes, o perfil do movimento da superfície livre do fluido, a função potencial de velocidade, a pressão, a força e a respectiva frequência de vibração [Penney e Price, 1952] [Sir G. Taylor, 1954] [Tadjbakhsh e Keller. 1960].

Foi também possível concluir que a dependência da frequência da amplitude da onda apresenta uma modificação de características associada, isto é identifica-se uma alteração do comportamento mais rígido para um comportamento mais flexível. A

alteração é de tal ordem que a frequência aumenta com a amplitude de excitação para alturas de fluido inferiores a um determinado múltiplo do comprimento de onda e diminui com o aumento da amplitude para alturas de fluido mais elevadas [Ibrahim, 2005].

Posteriormente foram ainda desenvolvidas investigações experimentais [Lin e Howard, 1960] [Fultz, 1962] [Hayama et. al., 1985] [Yeh, 1986] com o objectivo de verificar e validar os resultados de Tadjbakhsh e Keller.

Outros estudos [Ockendon e Ockendon, 1973] permitiram obter diagramas da resposta amplitude-frequência em regiões junto da altura crítica onde a resposta se altera de uma situação com características rígidas para uma situação com características muito fléxiveis.

Assim, em termos de parâmetros adimensionais [Ibrahim, 2005]:

$$\bar{h} = \frac{\pi h}{\ell} \quad (363)$$

$$\tau = \Omega t \quad (364)$$

$$\varepsilon = \pi \frac{X_0}{\ell} \quad (365)$$

em que o comprimento do reservatório é tomado como  $\ell = \pi l$  e a altura de fluido como  $\bar{h} l$ , e o campo de equações de escoamento de fluidos em reservatórios rectangulares tomam a forma:

$$\nabla^2 \bar{\Phi} = 0 \quad (366)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = \sin \tau \quad \text{em} \quad x = -\varepsilon \cos \tau \quad x = \pi - \varepsilon \cos \tau \quad (367)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = -\bar{h} \quad (368)$$

$$\nabla\bar{\Phi}(x, z, \tau) = \nabla\bar{\Phi}(x, z, \tau + 2\pi) \quad (369)$$

$$\int_0^\pi \bar{\eta} dx = 0 \quad (370)$$

em  $z = \varepsilon\bar{\eta}$ , as condições cinemática e dinâmica da superfície livre são, respectivamente:

$$\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\tau} + \varepsilon \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} \quad (371)$$

$$\bar{\eta} + \frac{l\Omega^2}{g} \left[ \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] = 0 \quad (372)$$

em que a função do potencial de velocidade dimensional é  $\Phi = \varepsilon l^2 \Omega \bar{\Phi}$  e a altura de onda é  $\eta = \varepsilon l \bar{\eta}$ . A frequência fundamental é dada pela expressão definida pela equação (373) [Ibrahim, 2005]:

$$\omega^2 = \left( \frac{g}{l} \right) \tanh \bar{h} = \left( \frac{\pi g}{\ell} \right) \tanh \left( \frac{\pi h}{\ell} \right) \quad (373)$$

Admitindo um parâmetro de ajuste da frequência,  $\nu$ :

$$l\Omega^2 = (1 + \nu)g \tanh \bar{h} \quad (374)$$

A condição dinâmica da superfície do fluido, expressa pela equação (372), pode ser reescrita na forma [Ibrahim, 2005]:

$$\bar{\eta} + (1 + \nu) \tanh \bar{h} \left[ \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] = 0 \quad (375)$$

Para frequências afastadas da ressonância, a superfície livre do fluido é governada pela solução linear da equação de Laplace [Ibrahim, 2005]:

$$\bar{\Phi} \approx \frac{4}{\pi v \cosh h} \cos x \cosh(z + \bar{h}) \sin \tau \quad (376)$$

Mais recentemente [Waterhouse, 1994] foi também possível obter uma resposta uniforme válida para qualquer valor de altura de fluido e de parâmetro de ajuste ou sintonização, desde que sejam consideradas expressões dimensionais para o potencial de velocidade e elevação da superfície do fluido [Ibrahim, 2005]:

$$\Phi = \Omega^2 l \left[ A_\varepsilon \cos x \cosh(z + \bar{h}) \sin \tau + O\left(\varepsilon^{\frac{2}{n}}\right) \right] \quad (377)$$

$$\eta = l \left[ -A_\varepsilon \cos x \sinh(\bar{h}) \cos \tau + O\left(\varepsilon^{\frac{2}{n}}\right) \right] \quad (378)$$

em que  $A_\varepsilon = \varepsilon^{1/n} A$ ,  $n$  toma o valor 0,1 ou 2, dependendo da gama do parâmetro de sintonização. A resposta final pode ser reescrita independentemente de  $n$ , na forma [Ibrahim, 2005]:

$$v A_\varepsilon \sinh \bar{h} + A_\varepsilon^2 H'(h) + 1.80 A_\varepsilon^5 + O(v^2 A_\varepsilon) = \frac{4\varepsilon}{\ell} \tanh h_0 \quad (379)$$

com as variáveis presentes na expressão anterior definidas de acordo com o exposto em [Ibrahim, 2005].

### 2.2.3. Quebra de Onda (*Breaking Waves*)

O fenómeno de quebra de onda é um fenómeno altamente não-linear que ocorre sempre que instantaneamente uma crista de onda se eleve muito e atinja uma condição de instabilidade.

A quebra de onda ocorre de uma forma rápida e intermitente, daí que a especificação da frequência de ocorrência seja de grande interesse para a compreensão do próprio fenómeno [Ochi, 1998].

Trata-se de um fenómeno pouco conhecido em termos do conteúdo energético da própria onda.

A falta de informação e de procedimentos bem estabelecidos, mesmo da frequência da superfície livre, torna-se impeditiva para que se estabeleçam previsões adequadas [Thorpe, 1995].

A severidade da acção imposta é importante, embora não seja o factor que mais condiciona a ocorrência da quebra de onda, uma vez que a forma das próprias ondas que se formam controla em grande medida a frequência do movimento que se desenvolve durante a solicitação dinâmica.

A determinação de estimativas para a frequência de ocorrência do fenómeno de quebra de onda tem as suas bases na oceanografia, muito embora os critérios subjacentes à definição do fenómeno devam ser convenientemente esclarecidos uma vez que na situação em estudo se tratam de situações em que o fluido em movimento apresenta altura finita e bem conhecida, contrariamente ao que muitas vezes sucede no mar.

Este fenómeno tem vindo a ser objecto de diversos estudos e publicações [Michel, 1893] [Longuet-Higgins, 1963] [Dean, 1968] [Longuet-Higgins, 1969] [Banner e Philips, 1975] [Van Dorn e Pazan, 1975] [Nath e Ramsey, 1976] [Longuet-Higgins e Fox, 1977] [Cokelet, 1977] [Longuet-Higgins e Cokelet, 1978] [Kjeldsen e Myrhaug, 1978] [Ochi e Tsai, 1983] [Snyder e Kennedy, 1983] [Weissman et. al., 1984] [Holthuijsen e Herbers, 1986] [Xu et. al., 1986] [Ramberg e Griffin, 1987] [Ochi, 1998].

O critério mais difundido na comunidade científica corresponde à limitação da inclinação da onda de Stokes formada [Michel, 1893].

Assim, define-se que ocorre o fenómeno de quebra de onda (*breaking waves*) quando a altura da onda formada excede 14.2% do comprimento limite de onda, que é cerca de 20% superior ao observado para ondas sinusoidais ordinárias com a mesma frequência [Ochi, 1998]:

$$H \geq 0.027 gT^2 \tag{380}$$

com H correspondente à altura e T ao período da onda, respectivamente.

A expressão analítica proposta (380) foi validada experimentalmente por meio de uma série de ensaios sobre reservatórios sujeitos a excitações aleatórias.

No entanto, verificou-se a partir dos resultados obtidos dos testes em que ocorreu quebra de ondas irregulares que, o número de ondas aleatórias quebradas que surge é muito superior ao obtido teoricamente com base na equação (380).

Assim foi possível definir-se uma expressão que melhor aproxime o fenómeno que de facto surge no interior de reservatórios e que traduza um critério mais adequado para a quebra de ondas irregulares que se formam no interior de tanques [Ochi e Tsai, 1993]

$$H \geq 0.020gT^2 \quad (381)$$

Tem vindo a surgir também outros critérios que permitem a identificação da ocorrência de quebra de onda, nomeadamente a definição de valores de aceleração descendente ao nível da crista da onda a partir dos quais ocorria o fenómeno referido.

Por exemplo, e com base em extensos trabalhos analíticos e experimentais, Longuet-Higgins e Fox [Longuet-Higgins e Fox, 1977] definiram este valor como aproximadamente 0.39g, enquanto que Srokosz [Srokosz, 1983] aumentou este valor para 0.4g.

Mais recentemente a ocorrência deste fenómeno altamente não-linear foi definida, com base em procedimentos experimentais, sempre que a aceleração descendente da crista ultrapassasse  $g/3$  [Dawson et. al., 1993].

Não há dúvida que o fenómeno da quebra de onda se encontra fortemente associado com as características de instabilidade das ondas, daí que os estudos que tem vindo a ser desenvolvidos nesta área [Longuet-Higgins e Cokelet, 1976] [Longuet-Higgins, 1978a] [Longuet-Higgins, 1978b] [Longuet-Higgins e Cokelet, 1978] [Melville, 1982] [Sue et. al., 1982], nomeadamente ao nível da estabilidade de ondas gravíticas em águas profundas, sejam extremamente importantes para a compreensão do fenómeno não só para alturas de água infinitas (mar) mas também para alturas de água finitas (tanques – amortecedores de líquido sintonizado)

Quando o fenómeno da quebra de onda tem lugar, a energia da onda é perdida sob a forma de turbulência e isto resulta na redução da magnitude da densidade espectral em determinadas frequências [Longuet-Higgins, 1969] [Tung e Huang, 1987a] [Tung e Huang, 1987b].

A perda média de energia em cada ciclo pode ser avaliada assumindo que a altura da onda,  $H$ , durante a ocorrência do fenómeno é reduzida para uma altura limite de quebra,  $H^*$  [Longuett-Higgins, 1969]:

$$E_{perdida} = \frac{1}{2} \rho g \left\{ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - \left( \frac{H^*}{2} \right)^2 \right\} \quad (382)$$

### 3. Modelação Mecânica em reservatórios

#### 3.1. Estudos preliminares

No início da década de 50 foi desenvolvido um dos primeiros modelos de pêndulo equivalente com o objectivo de representar as oscilações da superfície livre de fluidos no interior de reservatórios [Grahm, 1951].

Posteriormente foi desenvolvido um outro modelo que consistia numa massa fixa rígida e uma massa pontual de *sloshing* ligada às paredes do reservatório, a uma determinada altura específica, por meio de molas [Graham e Rodriguez, 1952].

Estes modelos foram sendo progressivamente melhorados e otimizados, passando-se a usar sistemas do tipo massa-mola-amortecedor ou então conjuntos de pêndulos simples [Ewart, 1956] [Bauer, 1960b] [Bauer, 1961] [Bauer, 1962] [Armstrong e Kachigan, 1961] [Abramson e Ransleben, 1961d] [Mooney et. al., 1964].

No final da década de 60, foi desenvolvido um modelo mecânico simplificado para simular o comportamento dinâmico do líquido no interior de reservatórios rectangulares [Bauer e Villanueva, 1967b].

Os modelos mecânicos de *sloshing* têm vindo a ser estendidos a reservatórios apresentando diferentes geometrias [Mixon e Catherine, 1964a] [Mixon e Catherine, 1964b] [Huther et. al., 1973] [Dodge, 1996] tanto por meio de estimativas numéricas [Patrom, 1985] como por meio estudos experimentais [Werner e Coldwell, 1961] [Sumner, 1966].

Já durante a década de 80 há registos do desenvolvimento de ferramentas analíticas que permitissem a simulação do comportamento de fluidos sujeitos a grandes amplitudes de excitação [Berry et. al., 1981].

Mais recentemente [Ebert, 1989] [Enright, e Wong, 1994] [Rumold, 1998] [Rumold, 2001] também foram usados modelos mecânicos com o intuito de simular os efeitos do *sloshing* fluidos em sistemas de vários graus de liberdade [Ibrahim, 2005].

### 3.2. Generalidades

Geralmente a pressão hidrodinâmica de fluidos em recipientes rígidos apresenta duas componentes distintas:

- i) Uma primeira parcela directamente proporcional à aceleração do reservatório que é causada pela parte do fluido que se move em conjunto com o próprio reservatório denominada de pressão impulsiva;
- ii) Uma outra que resulta do fenómeno de *sloshing* que ocorre ao nível da superfície livre do fluido denominada de pressão convectiva.

Com base nas componentes identificadas pode-se definir uma representação realista dos fenómenos dinâmicos que ocorrem no interior de recipientes fechados por meio de sistemas mecânicos equivalentes. A equivalência é estabelecida por meio de um equilíbrio entre forças e momentos actuantes nas paredes do reservatório.

Contabilizando de uma forma adequada o modelo mecânico equivalente que representa o fenómeno de *sloshing*, o comportamento do sistema dinâmico global pode ser formulado de uma forma mais simplista.

Assim, na ocorrência de movimento simples planar linear podem ser desenvolvidos modelos mecânicos equivalentes na forma de séries massa-mola-amortecedor ou ainda na forma de um conjunto de pêndulos simples.

Se por acaso ocorrer um fenómeno não-linear, como o *sloshing* rotativo ou o *sloshing* caótico, este pode ser conceptualizado por meio de um pêndulo esférico ou de pêndulos compostos [Ibrahim, 2005].

Os princípios que permitem construir um modelo mecânico adequado aos fenômenos que ocorrem no interior de um reservatório sujeito a uma determinada excitação dinâmica baseiam-se no seguinte [Ibrahim, 2005]:

- i) As massas equivalentes e momentos de inércia devem ser mantidos;
- ii) Para oscilações de amplitude reduzida o centro de gravidade do conjunto deve permanecer o mesmo;
- iii) O sistema equivalente deve possuir os mesmos modos de vibração e produzir as mesmas forças de amortecimento;
- iv) Sob determinadas excitações, nomeadamente de pequena amplitude, as componentes de força e momento devem ser equivalentes aos valores correspondentes produzidos pelo sistema real.

É indiscutível que determinados modelos mecânicos equivalentes fornecem uma boa representação do comportamento dinâmico da superfície livre do fluido no interior de reservatórios, desde que a excitação não se encontre na vizinhança da ressonância.

No entanto, sobre a ressonância, os modelos mecânicos lineares deixam de ser completamente válidos tornando-se necessária a utilização de modelos mecânicos mais pormenorizados que incluam as correspondentes características não-lineares.

A título de exemplo refere-se, por exemplo, que para representar um primeiro modo de *sloshing* de um fluido é possível usar-se um pêndulo equivalente, sendo identificados três regimes de comportamento dinâmico [Ibrahim, 2005]:

- i) Comportamento linear, que corresponde à situação em que ocorrem pequenas oscilações nas quais a superfície livre do fluido permanece plana sem qualquer tipo de rotação do seu diâmetro nodal (Figura 6). Corresponde a um regime que pode ser descrito por um pêndulo simples equivalente descrevendo pequenas oscilações com  $\sin\theta \approx \theta$ ;

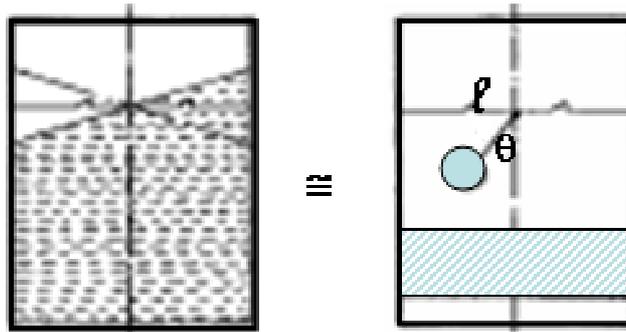


Figura 6 - Modelo mecânico linear, adaptado de [Ibrahim, 2005]

- ii) Comportamento ligeiramente não-linear, que corresponde a oscilações de amplitude moderada durante as quais a superfície livre do líquido experimenta movimento não plano (Figura 7). Este regime é descrito por uma equação diferencial que contabiliza a não-linearidade que surge durante o movimento. O modelo mecânico equivalente corresponde a um pêndulo esférico que descreve um movimento com amplitude moderada a elevada de tal forma que se verifique  $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/3$ ;

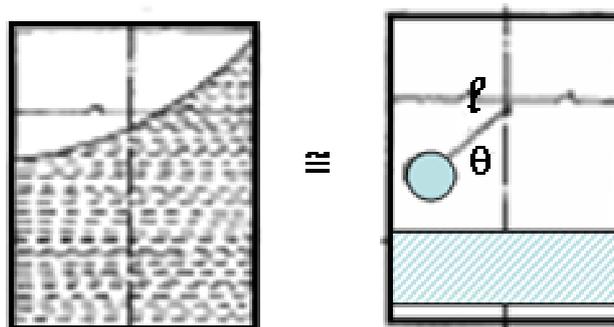


Figura 7 - Modelo mecânico ligeiramente não-linear, adaptado de [Ibrahim, 2005]

- iii) Comportamento fortemente não-linear (Figura 8), no qual as não-linearidades que surgem resultam fundamentalmente de rápidas mudanças operadas ao nível da velocidade, associadas também com violentos impactos do movimento do fluido na superfície livre. As alterações da velocidade da superfície livre são geralmente tratadas como instantâneas, observando-se um salto ao nível do valor da velocidade (velocity jumps), o que fornece importantes características do comportamento do sistema não-linear. O modelo mecânico equivalente deste regime é um pêndulo que descreve impactos contra as paredes do reservatório;

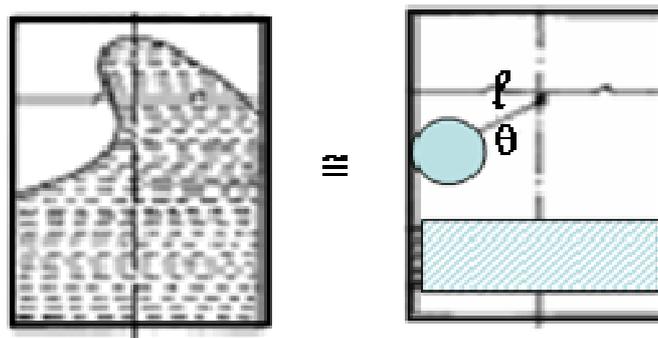


Figura 8 - Modelo mecânico altamente não-linear (impacto de sloshing), adaptado de [Ibrahim, 2005]

Apresenta-se em seguida, de uma forma resumida, a teoria subjacente à definição de modelos mecânicos lineares e não-lineares equivalentes para reservatórios rectangulares e circulares.

Refere-se ainda que, para determinadas geometrias mais complexas (como por exemplo em tanques esféricos), se torna por vezes necessário efectuar uma validação dos modelos propostos por meio de ensaios experimentais [Ibrahim, 2005]

### 3.3. Modelo massa-mola-amortecedor

#### 3.3.1. Características gerais

A comportamento linear de um fluido no interior de um tanque pode ser representado por meio de um modelo mecânico equivalente (Figura 9) que compreende uma massa rígida  $m_0$ , que se movimenta solidária com o tanque e uma série de massas  $m_n$  representando a massa equivalente de cada um dos modos de *sloshing* identificados.

Cada massa modal,  $m_n$ , encontra-se restringida por uma mola de rigidez  $K_n$  e um amortecedor  $C_n$

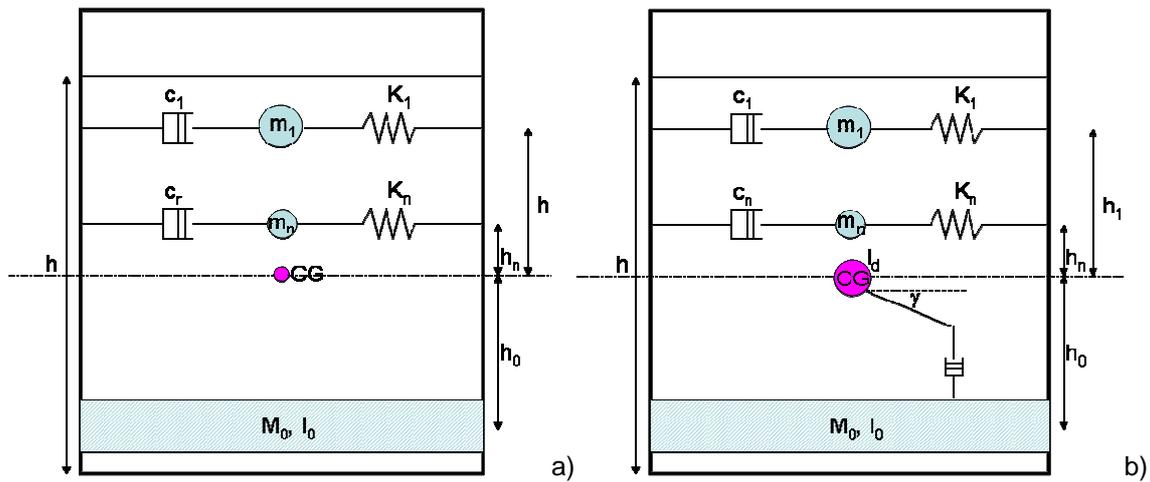


Figura 9 - Modelo mecânico equivalente: a) massa-mola-amortecedor e b) massa-mola-amortecedor com amortecimento do momento de inércia,, adaptado de [Ibrahim, 2005]

Para o modelo mecânico equivalente apresentado devem ser garantidas as seguintes condições para a massa total do fluido (equação (383)) e momento de inércia da massa (equação (384)), respectivamente

$$m_F = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \quad (383)$$

$$I_f = I_0 + m_0 h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n^2 \quad (384)$$

Para além do indicado deve-se preservar a posição do centro de massa e determinar as constantes de rigidez das molas associadas a cada uma das massas dinâmicas a partir da definição das frequências naturais [Ibrahim, 2005].

No caso muito particular de reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas é possível definir a relação entre frequências e rigidez por meio da equação (386).

$$m_0 h_0 - \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n = 0 \quad (385)$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{m_n} = \left( \frac{g \xi_{1n}}{R} \right) \tanh \left( \frac{\xi_{1n} h}{R} \right) \quad (386)$$

Assumindo que  $x_n$  corresponde ao deslocamento equivalente da massa relativamente à parede do tanque,  $x$  o deslocamento do tanque,  $\psi$  o movimento

rotacional do tanque segundo o eixo y e passando pelo centro de gravidade. O modelo proposto inicialmente (Figura 9a) foi estendido [Bauer, 1962a] [Bauer, 1962b] tendo sido introduzido um elemento leve ligado ao centro de gravidade com determinado momento de inércia e um amortecedor com coeficiente de amortecimento  $C_d$  (Figura 9b).

As equações do movimento do modelo equivalente podem ser obtidas usando a equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} + Q_i \quad (387)$$

em que o Lagrangeano corresponde a  $L=T-V$ ,  $q_i$  são as coordenadas generalizadas (equação (388)) e  $Q_i$  as forças generalizadas (equação (389)),  $T$  e  $V$  são as energias cinética (equação (390)) e potencial (equação (391)) e  $\mathfrak{S}$  a função de dissipação de energia de Rayleigh (equação (392)), respectivamente [Ibrahim, 2005].

$$\{q_i\} = \{x \quad x_n \quad \psi \quad \gamma\}^T \quad (388)$$

$$\{Q_i\} = \{-F_x \quad 0 \quad M_y \quad 0\} \quad (389)$$

$$T = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x} - h_0 \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_n (\dot{x}_n + \dot{x} + h_n \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} I_d (\dot{\psi} + \dot{\gamma})^2 \quad (390)$$

$$V = \frac{1}{2} g \psi^2 m_0 h_0 - \frac{1}{2} g \psi^2 \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n - g \psi \sum_{n=1}^{\infty} m_n x_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} k_n x_n^2 \quad (391)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} C_d \dot{\gamma}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \omega_n \zeta_n \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} C_d \dot{\gamma}^2 \quad (392)$$

com  $C_n = 2m_n \omega_n \zeta_n$  e  $\zeta_n$  o coeficiente de amortecimento do amortecedor equivalente introduzido no modelo simplificado

Aplicando a equação de Lagrange indicada na equação (387), e usando as expressões (390) e (391) para energia cinética e potencial, respectivamente, obtêm-se

as equações para o movimento de *sloshing* do n-ésimo modo (equação (393)), para a força resultante (equação (394)) e para o momento (equação (395)):

$$m_n(\ddot{x} + \ddot{x}_n + h_n\ddot{\psi}) + K_n x_n + 2m_n\omega_n\zeta_n\dot{x}_n - m_n g \psi = 0 \quad (393)$$

$$F_x = -m_0(\ddot{x} - h_0\ddot{\psi}) - \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\ddot{x}_n + \ddot{x} + h_n\ddot{\psi}) \quad (394)$$

$$M_y = I_0\ddot{\psi} + m_0h_0(\ddot{x} - h_0\ddot{\psi}) - g \sum_{n=1}^{\infty} m_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n(\ddot{x}_n + \ddot{x} + h_n\ddot{\psi}) + I_d(\ddot{\psi} + \dot{\gamma}) \quad (395)$$

A partir da equação anterior pode ser escrito o momento de inércia da massa do fluido definido com corpo rígido de igual massa:

$$I_{rigido} = I_0 + m_0h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n^2 + I_d \quad (396)$$

As equações (393) a (395) descrevem completamente o comportamento dinâmico do modelo mecânico equivalente tanto para movimentos de translacção como para movimentos de *pitching* [Ibrahim, 2005].

### 3.3.2. Excitação lateral

Admitindo uma excitação lateral pura de translacção do tipo  $x(t) = X_0 \sin \Omega t$ ,  $\Psi = \gamma = 0$  e amortecimento nulo, a equação de *sloshing* toma a seguinte forma [Ibrahim, 2005]:

$$m_n \ddot{x}_n + K_n x_n = m_n X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \quad (397)$$

A solução desta equação para um estado estacionário é dada por:

$$x_n = \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} X_0 \sin \Omega t \quad (398)$$

A equação de força traduz-se de acordo com a equação (399):

$$\begin{aligned}
 F_x &= -m_0\ddot{x} - \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\ddot{x}_n + \ddot{x}) = X_0\Omega^2 \sin \Omega t \left\{ m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left[ \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} + 1 \right] \right\} = \\
 &= m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{m_f} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{399}$$

Finalmente, a equação do momento devido à translacção pura, definida relativamente ao centro de massa do líquido considerado como apresentando movimento solidário com o reservatório em que se encontra incluído, é definida de acordo com a equação (400):

$$\begin{aligned}
 M_y &= m_0 h_0 \ddot{x} - g \sum_{n=1}^{\infty} m_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n (\ddot{x}_n + \ddot{x}) = \\
 &= -X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ m_0 h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left( x_n + \frac{g}{\omega_n^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left( x_n + \frac{g}{\omega_n^2} \right) \left( \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{400}$$

### 3.3.3. Excitação de pitching

Admitindo uma excitação de *pitching* segundo o eixo  $y$  do tipo  $\psi(t) = \Psi_0 \sin \Omega t$ , a equação do movimento é definida de acordo com [Ibrahim, 2005]:

$$m_n \ddot{x}_n + K_n x_n = m_n (g + h_n \Omega^2) \Psi_0 \sin \Omega t \tag{401}$$

A solução da equação (401) para um estado estacionário é dada pela expressão:

$$x_n = \frac{(h_n \Omega^2 + g)}{\omega_n^2 - \Omega^2} \Psi_0 \sin \Omega t \tag{402}$$

A força resultante traduz-se na seguinte equação:

$$\begin{aligned}
F_x &= - \left[ m_0 h_0 \ddot{\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n (\ddot{x}_n + h_n \ddot{\psi}) \right] = \\
&= \Psi_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ m_0 h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n (h_n \Omega^2 + g) \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right\}
\end{aligned} \tag{403}$$

O momento em torno do eixo y é dado pela equação (404):

$$\begin{aligned}
M_y &= I_0 \ddot{\psi} + m_0 h_0^2 \ddot{\psi} - g \sum_{n=1}^{\infty} m_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n (\ddot{x}_n + h_n \ddot{\psi}) = \\
&= \Psi_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ I_0 + m_0 h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left( x_n + \frac{g}{\omega_n^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n (h_n \Omega^2 + g)^2 \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{404}$$

Os valores dos parâmetros equivalentes do modelo podem ser determinados por comparação entre os valores correspondentes para o modelo não amortecido e os resultados obtidos para um fluido ideal [Ibrahim, 2005], de acordo com o apresentado numa secção anterior.

### 3.3.4. Parâmetros mecânicos para reservatórios circulares cilíndricos

Considerando excitações combinadas de translacção e de *pitching*, a força resultante é dada de acordo com o apresentado pela equação (405):

$$\begin{aligned}
F_x &= m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \Omega^2 \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1) (\omega_n^2 - \Omega^2)} \right\} + m_f \Psi_0 \Omega^2 \sin \Omega t \times \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right) \Omega^2 \left[ \left(\frac{h}{2}\right) \Omega^2 \left( 1 - \left(\frac{4R}{\xi_{1n}} h\right) \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right) \right) + g \right]}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1) (\omega_n^2 - \Omega^2)}
\end{aligned} \tag{405}$$

Comparando a primeira parte da expressão (405) com a equação (399) e a segunda parte com a equação (403), obtêm-se os seguintes parâmetros equivalentes:

$$\frac{m_n}{m_F} = \frac{2R}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right) \quad (406)$$

$$\frac{h_n}{h} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{4R \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)}{\xi_{1n} h} \right] \quad (407)$$

$$\frac{m_0}{m_F} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{m_F} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right) \quad (408)$$

Estudos desenvolvidos permitiram concluir que a dimensão da massa de *sloshing* decresce muito rapidamente para todos os modos exceptuando o primeiro com o aumento da relação entre a altura do fluido em repouso e a dimensão característica do reservatório [Ibrahim, 2005].

A partir da definição do centro de massa e usando as relações expressas pelas equações (406) a (408) pode-se escrever:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2R}{\xi_{1n}} h (\xi_{1n}^2 - 1) \right) \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)} \times \left[ \begin{aligned} & \xi_{1n} \tanh\left(\frac{\xi_{1n}}{R}\right) + 4 \left( \frac{R}{h \cosh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)} \right) \\ & \times \left[ \frac{1}{2 \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{1n}^2 (\xi_{1n}^2 - 1) \frac{h}{R}} \right] \end{aligned} \right] \quad (409)$$

O momento causado pelas forças de *sloshing* hidrodinâmico é uma combinação do momento associado à translação horizontal e à solicitação *pitching*, caso coexistam em simultâneo, que deverá ser equivalente à soma das equações (400) e (404):

$$\begin{aligned}
M_y = \Psi_0 \Omega^2 \sin \Omega t & \left\{ I_F + m_F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Rh^2 \Omega^2 \tanh\left(\frac{\xi_{1n}}{R} h\right) \left[1 - \left(\frac{4R}{\xi_{1n}} h\right) \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)\right]^2}{\xi_{1n}^2 h (\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{1}{4(\omega_n^2 - \Omega^2)} + \right. \\
& \left. + m_F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \tanh\left(\frac{\xi_{1n}}{R} h\right) \left[ \left(\frac{g}{\Omega}\right)^2 + gh \left[1 - \left(\frac{4R}{\xi_{1n}} h\right) \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)\right] \right]}{\xi_{1n}^2 h (\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{1}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right\} + m_F X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \tanh\left(\frac{\xi_{1n}}{R} h\right) \left[ g + \left(\frac{h\Omega^2}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{4R}{\xi_{1n}} h\right) \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)\right] \right]}{\xi_{1n}^2 h (\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{1}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \quad (410)
\end{aligned}$$

Efectuando uma comparação entre a equação anterior e a soma das equações (400) e (404), obtêm-se:

$$I_F = I_0 + m_0 h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n^2 = m_F \left\{ \frac{h^2}{12} + \frac{R^2}{4} - 8R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{2R}{\xi_{1n}} h\right) \tanh\left(\frac{\xi_{1n} h}{2R}\right)}{\xi_{1n} (\xi_{1n}^2 - 1)} \right\} \quad (411)$$

em que

$$I_{\text{solido}} = m_F \left( \frac{h^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right) \quad (412)$$

Corresponde ao momento de inércia da massa do fluido considerada como solidária com o reservatório durante o movimento oscilatório.

O momento  $I_f$  corresponde ao momento de inércia de massa de fluido em movimento em torno do eixo  $y$  e medido relativamente ao seu centro de massa.

Considerando, por exemplo, o primeiro modo de *sloshing* do fluido é possível utilizarem-se os parâmetros obtidos por concretização de equações apresentadas nas secções anteriores (equações (413) a (417)):

$$K_1 = m_F \left( \frac{g}{1.19h} \right) \left( \tanh 1.84 \frac{h}{R} \right)^2 \quad (413)$$

$$m_1 = m_F \left( \frac{R}{2.2h} \right) \left( \tanh 1.84 \frac{h}{R} \right) \quad (414)$$

$$m_0 = m_F - m_1 \quad (415)$$

$$h_1 = \frac{h}{2} - \frac{R}{1.84} \tanh 1.84 \frac{h}{R} \quad (416)$$

$$h_0 = \frac{m_F}{m_0} \left[ \frac{h}{2} - \frac{R^2}{2h} \right] - h_1 \frac{m_1}{m_0} \quad (417)$$

Em muitas aplicações, é possível obterem-se resultados muito satisfatórios com recurso ao modelo apresentado e se for considerado apenas o modo fundamental de vibração. Esta simplificação será apresentada em trabalhos posteriores orientados de uma forma mais explícita para os dispositivos de dissipação de energia do tipo amortecedores de líquido sintonizado.

### 3.3.5. Parâmetros mecânicos para reservatórios rectangulares

Seguindo os mesmos passos definidos para os reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas, obtêm-se os seguintes parâmetros:

$$\frac{m_n}{m_F} = \frac{8}{\pi^3} \frac{\tanh \left( (2n+1) \frac{\pi h}{\ell} \right)}{(2n+1)^3 \frac{h}{\ell}} \quad (418)$$

$$\frac{h_n}{h} = \frac{1}{2} - \frac{\tanh \left( (2n+1) \frac{\pi h}{2\ell} \right)}{(2n+1) \frac{\pi h}{2\ell}} \quad (419)$$

$$\frac{m_0}{m_F} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3} \frac{\tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{\ell}\right)}{(2n+1)^3 \frac{h}{\ell}} \quad (420)$$

$$\frac{h_0}{h} = -\frac{m_F}{m_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{m_F} \frac{h_n}{h} \quad (421)$$

$$k_n = \frac{m_F g 8 \tanh^2\left((2n+1)\frac{\pi h}{\ell}\right)}{(2n+1)^2} \quad (422)$$

$$I_{0Y} = I_{solidY} \left\{ 1 - \frac{4}{1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2} + \frac{768}{\pi^5 \left(\frac{h}{\ell}\right) \left(1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{2\ell}\right)}{(2n+1)^5} \right\} - \quad (423)$$

$$- m_0 h^2 \left(\frac{h_0}{h}\right)^2 - m_F h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{m_F} \left(\frac{h_n}{h}\right)^2$$

em que  $I_{solidY}$  é o movimento de inércia do líquido segundo y considerado como uma massa sólida solidária com o reservatório,  $I_{0Y}$  é o momento de inércia da massa fixa.

O momento de inércia do fluido segundo o eixo Y,  $I_{FY}$ , é dado por:

$$\frac{I_{FY}}{I_{solidY}} = 1 - \frac{4}{1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2} + \frac{768}{\pi^5 \left(\frac{h}{\ell}\right) \left(1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh\left((2n+1)\frac{\pi h}{2\ell}\right)}{(2n+1)^5} \quad (424)$$

Verifica-se que para pequenas alturas de fluido (*shallow water tanks*), as relações entre as massas modais de *sloshing* e a massa total do fluido são dependentes da frequência natural de cada modo (ANEXO), observando-se uma clara redução com a razão de altura,  $h/l$ .

Se por acaso o reservatório em causa for solicitado segundo a direcção Z, o sistema mecânico definido pode ser composto também por uma massa fixa com o respectivo momento de inércia nessa direcção,  $I_{0z}$ , e um conjunto infinito de massas

móveis obrigadas a rodar em torno do eixo Z. As massas móveis apresentam um momento de inércia,  $I_{mnZ}$ , definido da seguinte forma:

$$\frac{I_{mnZ}}{I_{solidZ}} = \frac{768 \left[ \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 (2m+1)^2 - (2n+1)^2 \right]^2}{\pi^6 \left( 1 + \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 \right) (2m+1)^4 (2n+1)^4 \left[ \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \right]} \times \frac{\tanh \left( \left( \frac{\pi h}{\ell} \right) \sqrt{\left[ \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \right]} \right)}{\left( \frac{\pi h}{\ell} \right) \sqrt{\left[ \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \right]}} \quad (425)$$

Sendo o momento de inércia da massa fixa dado por:

$$\frac{I_Z}{I_{solidZ}} = \frac{I_{FZ}}{I_{solidZ}} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{mnZ}}{I_{solidZ}} \quad (426)$$

em que:

$$\frac{I_{FZ}}{I_{solidZ}} = 1 - \frac{4}{1 + \left( \frac{\ell}{L} \right)^2} + \frac{768}{\pi^5 \left( \frac{\ell}{L} \right) \left( 1 + \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 \right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh \left( (2n+1) \frac{\pi \ell}{2L} \right)}{(2n+1)^5} \quad (427)$$

### 3.4. Modelo pêndulo simples

#### 3.4.1. Características gerais

O modelo compreende numa séries de pêndulos, cada um deles de massa,  $m_n$ , e comprimento,  $l_n$ , mais uma massa rígida  $m_0$  (Figura 10)

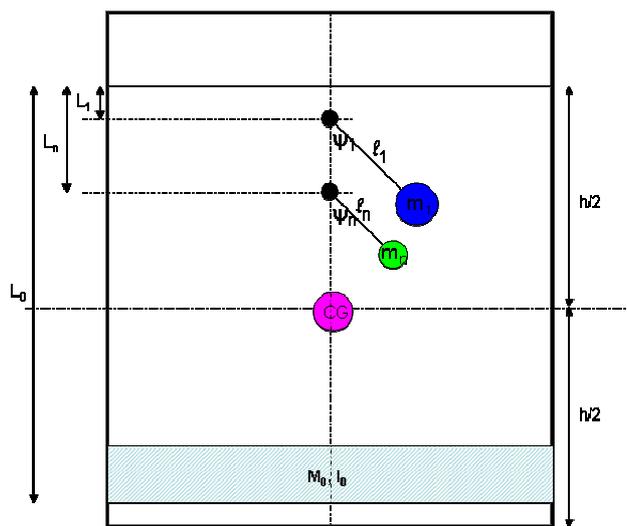


Figura 10 - Modelo do pêndulo simples equivalente, adaptado de [Ibrahim, 2005]

O ponto de suporte do n-ésimo pêndulo está localizado a uma distância de  $L_n$  abaixo da superfície livre não-perturbada e a massa rígida a uma distância  $L_0$ ,  $m_n$  corresponde à massa do n-ésimo pêndulo,  $l_n$  é o comprimento do n-ésimo pêndulo,  $L$  o comprimento do reservatório e  $l$  a largura do reservatório.

Admitindo, por exemplo, uma análise que não inclua dissipação de energia, deve-se verificar o princípio da conservação da massa:

$$m_F = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \quad (428)$$

Equiparando a frequência natural de um pêndulo simples, definida como  $\omega_n = \sqrt{g/l_n}$ , à frequência natural do n-ésimo modo de *sloshing* em reservatórios retangulares e cilíndricos, obtêm-se as seguintes expressões para o comprimento do n-ésimo pêndulo no modelo mecânico equivalente:

$$l_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{L^2}}} \tanh\left(\pi h \sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{L^2}}\right) \quad (429)$$

em que  $l$  e  $L$  correspondem à largura e ao comprimento do reservatório, respectivamente,  $m$  e  $n$  são inteiros e referem-se ao modo  $mn$ .

Em situações em que se identifique uma excitação horizontal,  $x$ , e de *pitching*,  $\psi$ , combinadas é possível desenvolverem-se as equações do movimento do modelo,

tendo por base uma formulação Lagrangeana. Desta forma as energias cinética e potencial definem-se de acordo com o exposto nas equações (430) e (431), as coordenadas generalizadas e forças generalizadas de acordo com as equações (432) e as equações da força resultante e momento em torno do eixo y pelas equações (433) e (434), respectivamente:

$$T \approx \frac{1}{2} m_0 \left[ \dot{x} + \left( \frac{h}{2} - L_0 \right) \dot{\psi} \right]^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left[ \left( \frac{h}{2} - L_n - \ell_n \right) \dot{\psi} + \ell_n \dot{\psi}_n + \dot{x}_n \right]^2 \quad (430)$$

$$V = -m_0 g L_0 \cos \psi - \sum_{n=1}^{\infty} m_n g [L_n \cos \psi + \ell_n \cos(\psi + \psi_n)] \quad (431)$$

$$\{q_i\} = \{x \quad \psi \quad \psi_n\}^T \quad \{Q_i\} = \{-F_z \quad M_y \quad 0\}^T \quad (432)$$

$$F_x = -m_0 \left[ \ddot{x} + \left( \frac{h}{2} - L_0 \right) \ddot{\psi} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left[ \left( \frac{h}{2} - L_n - \ell_n \right) \ddot{\psi} + \ell_n \ddot{\psi}_n + \ddot{x} \right] \quad (433)$$

$$M_y = m_0 \left[ \ddot{x} + \left( \frac{h}{2} - L_0 \right) \ddot{\psi} \right] \left( \frac{h}{2} - L_0 \right) + I_0 \ddot{\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left[ \left( \frac{h}{2} - L_n - \ell_n \right) \ddot{\psi} + \ell_n \ddot{\psi}_n + \ddot{x} \right] \ell_n + \sum_{n=1}^{\infty} m_n g [L_n \psi + \ell_n (\psi + \psi_n)] \quad (434)$$

A equação do movimento de *sloshing* é definida pela equação (435), para diferentes casos de solicitação dinâmica.

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \left[ \left( \frac{h}{2} - L_n - \ell_n \right) \ddot{\psi} + \ell_n \ddot{\psi}_n + \ddot{x} \right] \ell_n + \sum_{n=1}^{\infty} m_n g \ell_n (\psi + \psi_n) = 0 \quad (435)$$

### 3.4.2. Excitação lateral

Para uma excitação do tipo  $x = X_0 \sin \Omega t$ , com  $\psi=0$ , a equação (435) toma a forma:

$$m_n \ell_n (\ell_n \ddot{\psi}_n + \ddot{x}) + m_n g \ell_n \psi_n = 0 \quad (436)$$

em que a resposta do pêndulo se traduz pela expressão definida pela equação (437):

$$\psi_n = \left[ \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \frac{X_0}{\ell_n} \sin \Omega t \quad (437)$$

A força de *sloshing* resultante (equação (438)) e o respectivo momento em torno do eixo y (equação (439)) podem-se obter da seguinte forma:

$$F_x = m_F X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{m_F} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right\} \quad (438)$$

$$M_y = -X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ m_0 \left( \frac{h}{2} - L_0 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ell_n + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left( \ell_n - \frac{g}{\Omega^2} \right) \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right\} \quad (439)$$

### 3.4.3. Excitação de *pitching*

Para uma excitação do tipo  $\psi = \Psi_0 \sin \Omega t$ , com  $x=0$ , a equação (435) toma a forma:

$$m_n \left[ \left( \frac{h}{2} - L_n - \ell_n \right) \ddot{\psi} + \ell_n \ddot{\psi}_n \right] \ell_n + m_n g \ell_n (\psi + \psi_n) = 0 \quad (440)$$

em que a resposta do pêndulo se traduz da seguinte forma:

$$\psi_n = \frac{\Psi_0 \sin \Omega t}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \left[ \frac{\left( \left( \frac{h}{2} \right) - L_n - \ell_n \right)}{\ell_n} \Omega^2 - \omega_n^2 \right] \quad (441)$$

A força de *sloshing* resultante e o respectivo momento em torno do eixo y são dadas respectivamente pelas equações (442) e (443):

$$F_x = -\Omega^2 \Psi_0 \sin \Omega \left[ m_0 L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left( \left( \frac{h}{2} \right) - L_n - \ell_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ell_n \left\{ \frac{\left( \left( \frac{h}{2} \right) - L_n - \ell_n \right)}{\ell_n} - \frac{\omega_n^2}{\Omega^2} \right\} \right] \times \left[ \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right] \quad (442)$$

$$M_y = -\Omega^2 \Psi_0 \sin \Omega \left[ m_0 \left( \frac{h}{2} - L_0 \right)^2 + I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ell_n \left( \left( \frac{h}{2} \right) - L_n - \ell_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ell_n^2 \left\{ \frac{\left( \left( \frac{h}{2} \right) - L_n - \ell_n \right)}{\ell_n} - \frac{\omega_n^2}{\Omega^2} \right\} \left( \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} - m_0 g \frac{L_0}{\Omega^2} - \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ell_n (L_n + \ell_n) \frac{\omega_n^2}{\Omega^2} \right) \right] \quad (443)$$

As equações (436) a (443) permitem obter os parâmetros do modelo mecânico equivalente por comparação com os modelos matemáticos que reproduzem na perfeição o comportamento de fluido ideal proposto e apresentado em secções anteriores do presente capítulo [Ibrahim, 2005].

#### 3.4.4. Parâmetros mecânicos para reservatórios circulares cilíndricos

A comparação modo a modo entre as equações de força e momento do modelo de pêndulo e as equações correspondentes para fluidos ideais fornece os mesmos valores de  $m_n/m_F$  e  $m_0/m_F$  obtidos no caso do modelo massa-mola-amortecedor apresentado anteriormente. Os restantes parâmetros para reservatórios circulares cilíndricos de paredes verticais planas são dados por:

$$L_n = - \frac{2R}{\xi_{1n} \sinh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)} \quad (444)$$

$$L_0 = - \left[ \frac{h}{2} + \frac{1}{m_0} \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left( \frac{h}{2} - L_n - \ell_n \right) \right] \quad (445)$$

$$I_0 = m_F h^2 \left[ \frac{1}{12} + \frac{R^2}{4h^2} - \frac{m_0}{m_F} \left( \frac{h}{2} - L_0 \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{m_F} \left( \frac{h}{2} - L_n \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{R^2}{h^2} \left[ \frac{2R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 + 5 \cosh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)}{\xi_{1n}^3 (\xi_{1n}^3 - 1) \sinh\left(\frac{\xi_{1n} h}{R}\right)} - \frac{3}{4} \right] \right] \quad (446)$$

### 3.4.5. Parâmetros mecânicos para reservatórios retangulares

Comparando a expressão para a força hidrodinâmica devido à excitação lateral do reservatório com a expressão para a força total devido ao sistema de pêndulos e massas rígidas é possível obterem-se os seguintes parâmetros para o modelo mecânico simplificado:

$$m_n = \frac{8\rho\ell L^2}{(2n-1)^3 \pi^3} \tanh(2n-1) \frac{\pi h}{L} \quad (447)$$

$$m_0 = \rho\ell Lh - \sum_{n=1}^{\infty} m_n \quad (448)$$

$$\ell_n = \frac{L}{(2n-1)\pi} \coth(2n-1) \frac{\pi h}{L} \quad (449)$$

$$L_n = - \left( \ell_n + \frac{h}{2} - \frac{2L}{(2n-1)\pi} \tanh(2n-1) \frac{\pi h}{L} \right) \quad (450)$$

O momento de inércia da massa rígida é dado por:

$$I_0 = I_F - m_0 \left( L_0 - \frac{h}{2} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left( \frac{h}{2} - L_n - \ell_n \right)^2 \quad (451)$$

em que  $I_F$  corresponde ao momento de inércia da massa do fluido medido relativamente ao centro de massa:

$$I_F = \rho abh \left\{ \frac{h^2}{12} + \frac{a^2}{16} - 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(2n-1)^4 \pi^4} \left[ 1 - \frac{2a}{(2n-1)\pi h} \tanh(2n-1) \frac{\pi h}{2a} \right] \right\} \quad (452)$$

Tendo em conta os resultados obtidos para os modelos mecânicos equivalentes massa-mola-amortecedor e pêndulo simples torna-se possível estabelecer um paralelo entre os dois sistemas simplificados. De facto, as massas modais dos dois modelos são as mesmas e a rigidez da mola é equivalente ao peso da mola dividido pelo seu comprimento.

Pode-se também estabelecer uma correlação muito estreita entre a posição do conjunto mass-mola e a posição da massa do pêndulo simples. A equivalência entre o momento de inércia da massa nos dois casos pode ser obtida através de algumas manipulações algébricas [Ibrahim, 2005].

Para alturas de fluido elevadas,  $h/R \gg 2.5$ , as massas equivalentes e as suas posições tornam-se quase independentes do enchimento do reservatório dependendo apenas da geometria do mesmo.

No entanto, aumentando a frequência natural por mudança da geometria do reservatório ou por qualquer outro factor, as perturbações penetram menos no fluido em movimento e consequentemente as massas associadas aos modos de ordem superior aproximam-se mais da superfície livre.

Por outro lado, para alturas de fluido reduzidas, a porção de massa de *sloshing* tende para a posição do centro de massa [Ibrahim, 2005].

### 3.5. Modelo de pêndulo esférico

#### 3.5.1. Características gerais

Os modelos lineares equivalentes são de extrema utilidade no estudo do fenómeno dinâmico de *sloshing*, desde que a frequência de excitação não se encontre muito próxima das frequências modais de *sloshing* e a amplitude de excitação seja reduzida.

À medida que a frequência de excitação se aproxima da ressonância a superfície livre do fluido fica animada de movimentos complexos, como já foi indicado

em secções anteriores. Nestes casos, os modelos lineares equivalentes falham na simulação dos fenómenos não-lineares que ocorrem, devendo para o efeito serem desenvolvidos e propostos modelos equivalentes que contabilizem as não-linearidades que surgem durante o movimento [Ibrahim, 2005].

O movimento não-linear rotacional da superfície livre do líquido pode ser entendido e conceptualizado por meio de um sistema não-linear de pêndulo esférico sujeito a uma determinada excitação forçada [Berlot e Freed, 1956] [Miles, 1962] Miles [1984a] [Miles, 1989] [Bauer et. al., 1965] [Bauer, 1965] [Bauer, 1966c] [Tritton, 1986a] [Tritton, 1986b] [Kana, 1987] [Kana, 1989] [Irons, 1990] [Bryant, 1993] [Kana e Fox, 1995].

Muitos destes estudos foram iniciados como forma de introduzir novas permissas para o estudo do problema do *sloshing*, nomeadamente do *sloshing* rotativo e do movimento caótico muitas vezes a ele associado.

De facto, não há dúvida que a moderna teoria da dinâmica não-linear, com génese nos trabalhos de Poincaré e dos seus sucessores, tem vindo a promover a compreensão dos fenómenos complexos associados ao movimento da superfície livre de fluidos e à sua formulação por meio de um modelo de pêndulo esférico [Ibrahim, 2005]

O pêndulo esférico, também denominado de cónico, é um excelente modelo que exhibe o fenómeno de ressonância interna dado que as suas frequências naturais em dois planos ortogonais são idênticas. As suas características dinâmicas assemelham-se bastante às características dinâmicas do *sloshing* de um fluido no interior de um reservatório circular cilíndrico de paredes verticais planas [Ibrahim, 2005].

Nos modelos de pêndulo esférico deve-se garantir que não há duplicação da resposta não-linear do movimento fluido, a não ser para uma determinada altura bem definida de acordo com as características geométricas do reservatório em estudo e do fluido que o preenche.

Para além disso foi possível concluir que as previsões matemáticas com base em modelos de pêndulos esféricos incluindo não-linearidades concordam de uma forma muito favorável com os resultados de simulações experimentais [Sayar e Baumgarten, 1981].

O movimento não-linear caótico da superfície do fluido pode também ser explicado de uma forma análoga por meio de um modelo mecânico do tipo pêndulo esférico oscilante [Tritton, 1986a] [Tritton, 1986b].

Conhecem-se diferentes abordagens para a descrição das equações do movimento num pêndulo esférico em termos de diferentes sistemas de eixos coordenados, embora todas elas definam o pêndulo como se tratando de um sistema de dois graus de liberdade [Miles, 1962] [Miles, 1984a] [Kana, 1987] [Kana, 1989] [Kana e Fox, 1995].

Em finais da década de 80 foram desenvolvidos modelos analíticos combinando pêndulos esféricos com pêndulos simples para simular o comportamento da superfície livre de tanques de águas rasas (*shallow liquid tanks*) [Kana, 1987] [Kana, 1989], permitindo a consideração em simultâneo de movimentos de *sloshing* rotativo e de *sloshing* normal.

Os referidos modelos surgiram em virtude de trabalhos anteriores [Kana et. al., 1985] [Unruh et. al., 1986] terem permitido concluir que os modelos mais simples se tornavam incapazes de reproduzir a resposta de fluidos no interior de recipientes, por se identificar em certas circunstâncias, mesmo para reduzidas amplitudes de excitação, um movimento composto por ondas de rotação e ondas características de modos anti-simétricos planos.

De facto, uma porção do fluido comporta-se como um pêndulo esférico, apresentando um movimento rotativo em toda uma gama de frequências abaixo, acima e sobre o primeiro modo de ressonância. O fluido remanescente surge animado de um movimento que pode ser reproduzido muito simplesmente por um pêndulo simples [Ibrahim, 2005].

### **3.5.2. Modelação do *sloshing* não-planar**

O modelo não-linear mecânico equivalente que contabiliza o primeiro modo de *sloshing* exhibe as mesmas zonas de resposta suavizada, movimento instável e movimento rotativo com características de elevada rigidez (endurecimento) junto da frequência fundamental.

Para além disso permite também a contabilização da influência do deslocamento vertical do centro de gravidade do fluido [Ibrahim, 2005].

O modelo consiste numa massa pontual deslizando sobre superfície parabólica com uma mola não-linear adicional ligada à massa de acordo com o esquematizado na Figura 11.

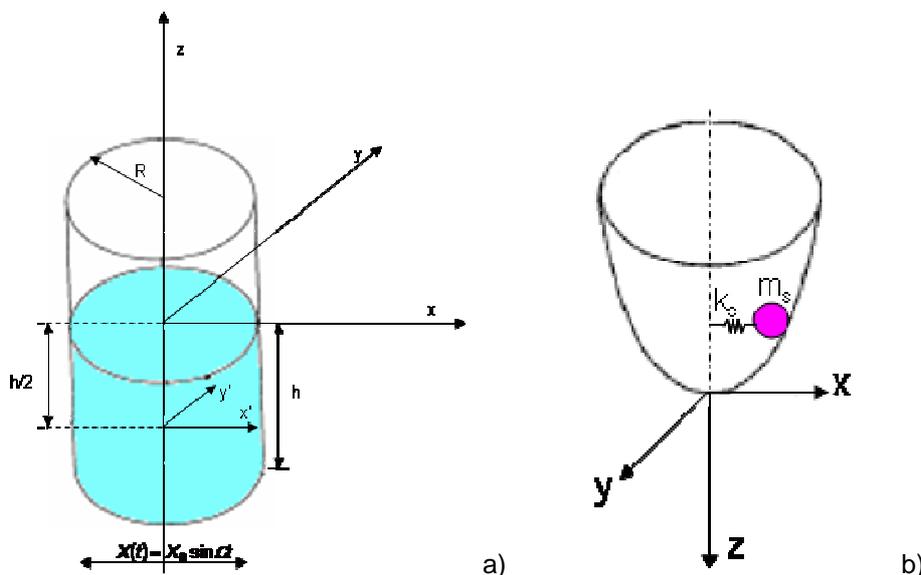


Figura 11 - Modelo não-linear de pêndulo esférico equivalente: a) esquematização e b) sistema de eixos coordenados, adaptado de [Ibrahim, 2005]

Considerando um reservatório circular cilíndrico de paredes verticais planas sujeito a uma excitação harmónica segundo o eixo  $x$ ,  $x(t) = X_0 \sin \Omega t$ , então a elevação da superfície livre da onda pode ser expressa por:

$$\eta(r, \theta, t) = \frac{2\Omega^2 R}{g} X_0 \sin \Omega t \cos \theta \sum \frac{\omega_n^2 J_1\left(\frac{\xi_{1n} r}{R}\right)}{(\xi_{1n}^2 - 1) J_1(\xi_{1n}) (\omega_n^2 - \Omega^2)} \quad (453)$$

Restringindo a análise da equação anterior apenas ao primeiro modo de vibração:

$$\eta(r, \theta, t) = \eta_w \cos \theta \frac{J_1\left(\frac{\xi_{1n} r}{R}\right)}{J_1(\xi_{1n})} \quad (454)$$

em que  $\eta_w$  corresponde à elevação da superfície livre da onda junto da parede lateral, traduzida da seguinte forma:

$$\eta_w(r, \theta, t) = \frac{2\Omega^2 R}{g} \frac{\omega_n^2 X_0 \sin \Omega t}{(\xi_{1n}^2 - 1)(\omega_n^2 - \Omega^2)} \quad (455)$$

Torna-se possível, a partir da definição elementar, obter expressões para os deslocamentos radial ( $r_{cg}$ ) e vertical ( $z_{cg}$ ) do centro de gravidade do fluido. Estes valores caracterizam-se por serem medidos a partir do centro de gravidade do fluido em repouso:

$$r_{cg} = \frac{1}{\pi R^2 h} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-(h/2)-\eta}^{h/2} r^2 \cos \theta dr d\theta dz = \frac{R}{h \xi_{11}^2} \eta_w \quad (456)$$

$$z_{cg} = -\frac{1}{\pi R^2 h} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-(h/2)-\eta}^{h/2} r z \cos \theta dr d\theta dz = -\frac{(\xi_{11}^2 - 1)}{4h \xi_{11}^2} \eta_w^2 \quad (457)$$

Eliminando  $\eta_w$  das equações anteriores é possível obter-se uma relação parabólica entre os deslocamentos radial ( $r_{cg}$ ) e vertical ( $z_{cg}$ ) do centro de gravidade do fluido:

$$z_{cg} = -\frac{C r_{cg}^2}{2R} \quad (458)$$

com:

$$C = (\xi_{11}^2 - 1) \xi_{11}^2 \left( \frac{h}{2R} \right) \quad (459)$$

A base fundamental do modelo mecânico de pêndulo esférico é precisamente a relação estabelecida pela equação (458). Desta forma, o modelo é construído de maneira que a parte inferior do fluido corresponda a uma massa rígida que se move conjuntamente com o tanque, enquanto que a massa de *sloshing* é representada por uma massa pontual cujo movimento se encontra confinado ao longo de uma superfície parabólica (Figura 11).

Neste modelo assume-se como possível que a massa de *sloshing* exiba um movimento rotativo a uma frequência definida. Para além disso é introduzida no modelo uma mola não-linear que fornece uma força de restituição proporcional a uma

potência do deslocamento radial, o que fornece a rigidez necessária para o movimento rotativo acima mencionado [Ibrahim, 2005].

O princípio subjacente à consideração de molas de elevada rigidez no modelo já tinha sido estudado anteriormente para o caso de movimentos com impacto [Hunt e Crossley, 1975] [Pilipchuk e Ibrahim, 2005].

A massa de *sloshing* do fluido pode ser representada por um volume de altura,  $h_s$ , correspondente à massa modal,  $m_s$ ,

A relação entre a massa de *sloshing* do primeiro modo,  $m_s$ , e a massa total de fluido,  $m_F$ , é equivalente à relação entre alturas,  $h_s/h$ :

$$\frac{h_s}{h} = \frac{m_s}{m_F} = \frac{2 \tanh\left(\frac{\xi_{11} h}{R}\right)}{\xi_{11} (\xi_{11}^2 - 1) \frac{h}{R}} \quad (460)$$

Os deslocamentos do centro de gravidade da parcela de *sloshing*,  $r_s$  e  $z_s$ , podem ser obtidos, respectivamente, por meio das equações (461) e (462):

$$r_s^2 = x_s^2 + y_s^2 \quad (461)$$

$$z_s = -\frac{(\xi_{11}^2 - 1)}{4h\xi_{11}^2} \eta_w^2 = -\frac{(\xi_{11}^2 - 1)^2 \eta_w^2}{8R\xi_{11} \tanh\left(\frac{\xi_{11} h}{R}\right)} \cong C_s \frac{r_s^2}{2R} \quad (462)$$

em que:

$$C_s = \xi_{11} \tanh\left(\frac{\xi_{11} h}{R}\right) \quad (463)$$

Em posse dos parâmetros definidos anteriormente torna-se possível avançar para a determinação das equações do movimento do sistema equivalente com base na equação de Lagrange (equação (387)).

Assim a energias cinética e potencial (incluindo uma mola de orden  $n$ ) são concretizadas pelas expressões que a seguir se definem:

$$T = \frac{1}{2} m_s \left[ (\dot{x}_s - \Omega X_0 \cos \Omega t)^2 + \dot{y}_s^2 + \frac{C_s^2}{R^2} (x_s \dot{x}_s + y_s \dot{y}_s)^2 \right] \quad (464)$$

$$V = -m_s g z_s + \int_0^{r_s} k_s r_s^{2n-1} dr_s = \frac{m_s g C_s}{2R} (x_s^2 + y_s^2) + \frac{k_s}{2n} (x_s^2 + y_s^2)^n \quad (465)$$

Para a contabilização da dissipação de energia é necessário introduzir um elemento amortecedor, o que leva à determinação da parcela seguidamente apresentada:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} c_s (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + \dot{z}_s^2) = m_s \omega_s \zeta_s \left[ \dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + \frac{C_s^2}{R^2} (x_s \dot{x}_s + y_s \dot{y}_s)^2 \right] \quad (466)$$

com  $c_s = 2m_s \omega_s \zeta_s$  correspondente à constante de amortecimento e  $\zeta_s$  o coeficiente de amortecimento associado à massa de *sloshing*.

Adimensionalizando os deslocamentos,  $x_s$  e  $y_s$ , e a rigidez,  $k_s$  por meio das igualdades expressas pelas equações (467), (468) e (469), substituindo nas equações (464), (465) e (466) e aplicando a equação de Lagrange (equação (387)) torna-se possível obter um sistema de duas equações diferenciais não-lineares para o movimento (equações (470) e (471)). Estas equações incluem termos inerciais não-lineares associados aos deslocamentos verificados ao nível do centro de gravidade da parcela de *sloshing* representada de uma forma simplificada pela massa  $m_s$  e rigidez não-linear derivada da introdução de uma mola não-linear ao sistema [Ibrahim, 2005].

$$X_s = \frac{x_s}{R} \quad (467)$$

$$Y_s = \frac{y_s}{R} \quad (468)$$

$$\alpha_s = \frac{k_s R^{2n-2}}{m_s \omega_s^2} \quad (469)$$

$$\ddot{X}_s + 2\omega_s \zeta_s [\dot{X}_s + C_s^2 (X_s^2 \dot{X}_s + X_s Y_s \dot{Y}_s)] + C_s^2 (X_s^2 \ddot{X}_s + X_s \dot{X}_s^2 + X_s Y_s \ddot{Y}_s + X_s \dot{Y}_s^2) + \omega_s^2 [1 + \alpha_s (X_s^2 + Y_s^2)^{n-1}] X_s - \Omega^2 \frac{X_0}{R} \cos \Omega t = 0 \quad (470)$$

$$\ddot{Y}_s + 2\omega_s \zeta_s [\dot{Y}_s + C_s^2 (Y_s^2 \dot{Y}_s + X_s \dot{X}_s Y_s)] + C_s^2 (Y_s^2 \ddot{Y}_s + Y_s \dot{Y}_s^2 + X_s \ddot{X}_s Y_s + Y_s \dot{X}_s^2) + \omega_s^2 [1 + \alpha_s (X_s^2 + Y_s^2)^{n-1}] Y_s = 0 \quad (471)$$

O modelo, para o movimento planar não-linear, pode ser derivado a partir das equações (470) e (471), está última assumindo-se como igual a zero. Para o efeito define-se como solução para a equação (470) a seguinte expressão:

$$X_s = A \cos(\Omega t + \psi) \quad (472)$$

em que A e  $\psi$  correspondem respectivamente à amplitude e ao ângulo de fase da resposta.

Relativamente ao movimento não planar não-linear é necessário considerar o movimento para fora do plano,  $Y_s$ , e resolver o sistema de equações acopladas (equações (470) e (471)). De forma a simplificar a análise é possível considerar-se a situação não-amortecida [Ibrahim, 2005]. A solução para esta situação define-se como:

$$X_s = A \cos(\Omega t + \psi) \quad (473)$$

$$Y_s = D \sin(\Omega t + \psi) \quad (474)$$

As equações (470) e (471) são resolvidas para ambos os casos de movimento indicado com recurso a um método de médias de Ritz, sendo obtidas equações que definem as respostas em termos de relações amplitude-frequência [Ibrahim, 2005].

### 3.5.3. Dinâmica do pêndulo esférico

Admitindo um sistema de eixos coordenados cartesianos  $(x, y, z)$ , as equações do movimento de um pêndulo esférico excitado segundo o eixo  $x$  por uma excitação harmónica,  $x(t) = X_0 \cos \Omega t$ , são obtidas usando o princípio de Hamilton para o valor médio do Lagrangeano [Miles, 1984]:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mg(\ell - z) \quad (475)$$

em que  $m$  e  $\ell$  correspondem à massa e ao comprimento do pêndulo, respectivamente. O Lagrangeano deve verificar a equação de continuidade, o que permite que o movimento do pêndulo seja perfeitamente definido em termos de coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ .

A solução pretendida deverá apresentar a seguinte forma:

$$x = \varepsilon^{1/3} \ell [p_1(\tau) \cos \theta + q_1(\tau) \sin \theta] \quad (476)$$

$$y = \varepsilon^{1/3} \ell [p_2(\tau) \cos \theta + q_2(\tau) \sin \theta] \quad (477)$$

A trajectória do pêndulo no plano  $xy$  é geralmente uma elipse com eixos que variam lentamente.

Num ponto de equilíbrio a trajectória corresponde a uma elipse fixa e bem definida:

$$\ell^2 = (x - x(t))^2 + y^2 + z^2 \quad (478)$$

A relação entre os sistemas de eixos móveis e os correspondentes eixos fixos é dada pelas equações (479) e (480):

$$\hat{x} = x \cos \varphi + y \sin \varphi \equiv \varepsilon^{1/3} \ell A \cos(\theta - \psi) \quad (479)$$

$$\hat{y} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \equiv \varepsilon^{\frac{1}{3}} \ell B \sin(\theta - \psi) \quad (480)$$

com  $\varphi$  um ângulo entre o eixo maior da elipse ( $\hat{x}$ ) e o eixo original  $x$ ,  $\varepsilon^{\frac{1}{3}} \ell(A, B)$  semi-eixos maior e menor e  $\psi$  o ângulo de fase. Todos estes parâmetros apresentam uma variação lenta.

Por substituição das equações (476) e (477) em (479) e (480) obtêm-se as equações (481) a (484).

$$p_1 = A \cos \varphi \cos \psi + B \sin \varphi \sin \psi \quad (481)$$

$$q_1 = A \cos \varphi \sin \psi - B \sin \varphi \cos \psi \quad (482)$$

$$p_2 = A \sin \varphi \cos \psi - B \cos \varphi \sin \psi \quad (483)$$

$$q_2 = A \sin \varphi \sin \psi + B \cos \varphi \cos \psi \quad (484)$$

Neste instante torna-se possível a determinação da média do lagrangeano dada pela equação (475). Assim, garantindo os termos dominantes no limite,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e usando o princípio de Hamilton, já mencionado em secções anteriores, obtêm-se as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dp_1}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \quad (485)$$

$$\frac{dq_1}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_1} \quad (486)$$

$$\frac{dp_2}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \quad (487)$$

$$\frac{dq_2}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_2} \quad (488)$$

em que H corresponde ao Hamiltoniano, E é a energia do pêndulo medida e M o momento angular medido segundo o eixo vertical para  $x=y=0$  e gerado pela componente segundo y da força de reacção no ponto de suporte do pêndulo e  $\mathfrak{R}$  um hiper raio no espaço definido por  $(p_i, q_i)$ .

A concretização de valores para E e M, com base em equações obtidas em trabalhos anteriores [Ibrahim, 2005] permite definir os diferentes movimentos observados no pêndulo (movimentos planar e não-planar).

O parâmetro  $\mathfrak{R}$  é também uma medida do deslocamento RMS dada por:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\pi} \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) d\theta} \quad (489)$$

O amortecimento linear viscoso pode também ser introduzido permitindo contabilizar a dissipação de energia, sendo definido por meio de um coeficiente de amortecimento,  $\zeta$ , dependente de um parâmetro de controlo de amortecimento,  $\alpha$ :

$$\zeta = \frac{\varepsilon^{2/3}}{2} \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \alpha \quad (490)$$

### 3.6. Modelo de pêndulo linear associado a pêndulo esférico

Para níveis reduzidos de fluido no interior de reservatórios sujeitos a excitações harmónicas, a superfície livre pode apresentar, como já foi mencionado em secções anteriores, um movimento de onda rotativa associado com o fenómeno de *sloshing* assimétrico usual no plano da excitação.

Para este efeito foi desenvolvido um modelo composto por um pêndulo linear simples e um pêndulo esférico [Kana, 1987] [Kana, 1989], de acordo com o exposto na Figura 12:

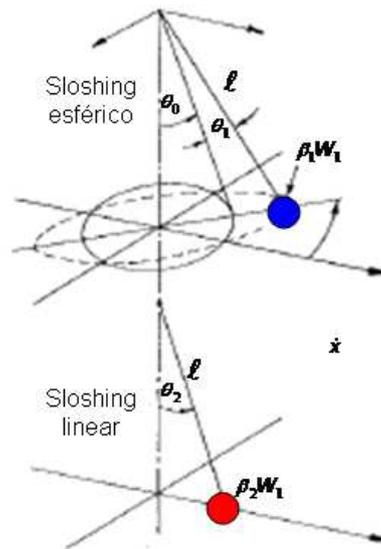


Figura 12 - Esquemática do modelo composto por pêndulo linear e pêndulo esférico, adaptado de [Ibrahim, 2005]

Se o peso total do fluido corresponde a  $W_1$ , então uma fracção desse peso,  $\beta_1 W_1$ , corresponde à resposta de *sloshing* esférico, enquanto que outra porção,  $\beta_2 W_1$ , corresponde à resposta de *sloshing* normal. Ambos os pêndulos apresentam o mesmo comprimento,  $\ell$ .

O movimento associado ao pêndulo esférico é descrito por um ângulo que corresponde a um estado estacionário,  $\theta_0$ , mais uma componente oscilatória,  $\theta_1(t)$ , na direcção da excitação, o que corresponde a  $\theta = \theta_0 + \theta_1(t)$ .

Para além destas componentes de deslocamento o movimento apresenta ainda a contribuição de um ângulo de precisão,  $\varphi$ , segundo o eixo vertical. Admitindo uma excitação dinâmica,  $x(t) = X_0 \cos \Omega t$ , as equações do movimento para o pêndulo esférico são obtidas tendo por base a equação de Lagrange (equação (387)).

Esta formulação permite que se obtenham para as energias cinética (equação (491)) e potencial (492), respectivamente:

$$T = \frac{1}{2} m \left[ (\ell \dot{\varphi} \sin \theta - \dot{x} \sin \varphi)^2 + (\ell \dot{\theta} + \dot{x} \cos \varphi \cos \theta)^2 \right] \quad (491)$$

$$V = mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (492)$$

em que  $m$  corresponde à massa total do pêndulo esférico dada por:

$$m = \beta_1 \frac{W_1}{g} \quad (493)$$

Após aplicação da equação de Lagrange (equação (387)) e introduzindo o amortecimento obtêm-se as equações do movimento para o pêndulo esférico:

$$\ddot{\theta} + (\omega_n^2 - \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) \sin \theta + 2\zeta_\theta \omega_n \dot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{\ell} \cos \varphi \cos \theta = 0 \quad (494)$$

$$\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\zeta_\varphi \omega_n \dot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta - \frac{\ddot{x}}{\ell} \sin \varphi = 0 \quad (495)$$

A componente oscilatória  $\theta_1$  pode ser determinada fazendo a substituição  $\theta = \theta_0 + \theta_1(t)$  na equação (495) e usando expansões de Taylor obtêm-se a seguinte equação diferencial linear:

$$\ddot{\theta}_1 + 2\zeta_{\theta 1} \omega_n \dot{\theta}_1 + \omega_n^2 \theta_1 = \frac{X_0}{2\ell} \Omega^2 e^{j(2\Omega t - \phi_0)} \cos \theta_0 \quad (496)$$

em que  $\omega_n = 2\omega_n$  e  $\zeta_{\theta 1} = \zeta_0/2$ .

A equação (497) apresenta uma solução estacionária e um ângulo de fase,  $\alpha_0$ , para um oscilador do tipo pêndulo esférico:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{X_0}{8\ell} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2 \zeta_{\theta 1}^2}} \cos \theta_0 e^{j(2\Omega t - \phi_0 - \alpha_0)} \quad (497)$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta_{\theta 1} \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \quad (498)$$

O movimento associado ao pêndulo linear é descrito em termos de um ângulo  $\theta_2$  e um desfaseamento de  $\gamma_0 - \varepsilon$  relativamente à direcção da excitação. O valor de  $\varepsilon$  corresponde a uma diferença de fase espacial observada com base em estudos

experimentais [Ibrahim, 2005] que permite postular um acoplamento de fase entre os dois pêndulos que compreendem o modelo composto.

A equação do movimento para o pêndulo simples inferior é dada por:

$$\ddot{\theta}_2 + 2\zeta_\theta \omega_n \dot{\theta}_2 + \omega_n^2 \theta_2 = -\frac{\ddot{x}}{\ell} \quad (499)$$

Os coeficiente  $\zeta_\theta$  e  $\zeta_\varphi$  indicados nas equações (495), (496) a (500) correspondem, respectivamente, a coeficientes de amortecimento associados às coordenadas  $\theta$  e  $\varphi$ , e  $\omega_n^2 = \frac{g}{\ell}$ .

A equação (500) apresenta uma solução estacionária e um ângulo de fase,  $\alpha_0$ , para um oscilador linear do tipo pêndulo simples, dados pelas equações, respectivamente:

$$\theta_2 = \frac{X_0}{\ell} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2 \zeta_\theta^2}} \quad (500)$$

$$\gamma_0 = \tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta_\theta \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \quad (501)$$

Os parâmetros determinados tanto para o modelo de pêndulo esférico como para o modelo de pêndulo simples podem ser validados com base em resultados obtidos experimentalmente [Ibrahim, 2005]

#### 4. Considerações finais

Em posse da informação descrita ao longo do presente relatório será possível apresentar numa publicação futura os modelos matemáticos e mecânicos que melhor se adaptam para simular o comportamento de dispositivos dissipadores de energia do

tipo amortecedores de líquido sintonizado para diferentes situações e amplitudes de solicitação.

Estes modelos permitirão desenvolver uma série de simulações numéricas de um programa experimental extenso para posterior comparação e validação de resultados e de características essenciais.

Para além disso os resultados obtidos das simulações numéricas efectuadas com base nos modelos apresentados permitirão ainda afinar alguns modelos propostos para simular diferentes edifícios construídos pertencentes ao parque edificado português com amortecedores de líquido sintonizado incluídos.

No que refere à modelação matemática de reservatórios pode-se afirmar que, com base nas teorias e nos trabalhos desenvolvidos ao nível da engenharia costeira, é possível definir-se expressões (campo de equações diferenciais) que contabilizem os fenómenos, lineares ou não-lineares, que ocorrem na superfície livre de reservatórios parcialmente cheios de fluido.

De facto, é o comportamento dessa superfície livre que vai ser condicionante na determinação de uma aproximação dos fenómenos que surgem no interior de reservatórios sujeitos a solicitações dinâmicas.

A vantagem dos modelos matemáticos é que permitem simular com maior realismo os fenómenos não-lineares que de facto ocorrem no interior dos reservatórios, muito embora na resolução seja necessário recorrer a abordagens numéricas mais ou menos complexas e por vezes limitativas.

Contudo, até aos esquemas numéricos em que baseia a resolução da maioria dos modelos matemáticos disponíveis na literatura se encontrarem mais desenvolvidos, torna-se mais adequado, em determinadas circunstâncias, recorrer-se a simulações mais simples baseadas, por exemplo, em modelos mecânicos, uma vez que estes reduzem claramente o esforço computacional associado, fornecendo elementos igualmente fiáveis para as situação de dimensionamento e avaliação do comportamento dinâmico de amortecedores de líquido sintonizado.

De facto, os modelos mecânicos equivalente surgem como uma ferramenta muito adequada para aproximar o comportamento dinâmico da superfície livre do fluido quando sujeita a solicitações externas.

A vantagem das técnicas de modelação mecânica equivalente é fornecer uma interpretação física do movimento da superfície livre do fluido por consideração de uma determinada porção de líquido actuando, por exemplo, como massa rígida, enquanto, a outra porção de fluido associado ao fenómeno de *sloshing* é substituída ou por um sistema massa-mola ou por um pêndulo simples.

Os modelos lineares são válidos desde que a frequência de excitação esteja afastada da frequência natural do fenómeno de *sloshing* que surge. Na vizinhança de ressonância estes modelos falham na representação de fenómenos mais complexos como seja o caso do *sloshing* rotativo ou do movimento caótico.

Os modelos não-lineares equivalentes, tais como pêndulos esféricos e compostos, permitem simular com bastante aproximação os fenómenos exibidos pela superfície livre do fluido junto da ressonância. As não-linearidades traduzidas por estes modelos são fracas, não servindo para a simulação das não-linearidades fortes resultantes do impacto violento da superfície livre do fluido contra as paredes laterais dos reservatórios.

A modelação identificada para reservatórios pode ser facilmente particularizada para o caso dos amortecedores de líquido sintonizado permitindo aproximar os fenómenos que ocorrem no seu interior durante qualquer tipo de excitação dinâmica.

Estes modelos podem ser posteriormente incorporados em sistemas estruturais de um ou vários graus de liberdade para assim estudar a influência que os fenómenos de *sloshing* de fluidos no interior de amortecedores de líquido sintonizado podem ter na dinâmica global do sistema em que se encontram incluídos.

## 5. Agradecimentos

A investigação incluída neste documento foi financiada pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) no âmbito da Bolsa Individual de Doutoramento SFRH/BD/14340/2003 e pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC).

Os autores agradecem reconhecidamente os esclarecimentos prestados pelo Professor Raouf Ibrahim da Faculdade de Engenharia da Wayne State University.

Para além disso os autores não querem deixar de agradecer também as sugestões do Professor Luís Guerreiro do Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.

## BIBLIOGRAFIA

ABRAMSON, H.N., (1961), Theoretical and experimental studies of liquid sloshing in rigid cylindrical tanks, Technical Report (Final report), SwRI, Maio

ABRAMSON, H.N., (1966), The dynamic behaviour of liquid in moving containers, NASA SP 106.

ABRAMSON, H.N., (1969), SLOSH suppression, NASA SP-8031.

ABRAMSON, H.N., CHU, W.N., GARZA, L.R., RANSLEBEN Jr., G.E., (1962), Some studies of liquid rotation and vortexing in rocket propellant tanks, NASA TN D-1212, Junho.

ABRAMSON, H.N., GARZA, L.R., (1965), Some measurements of liquid frequencies and damping in compartmented cylindrical tanks, Journal of Spacecraft Rocket, Volume 2, Issues 5/6, pp. 453-455.

ABRAMSON, H.N., RANSLEBEN, G.E. Jr., (1961a), Some comparisons of sloshing behaviour in cylindrical tanks having flat and conical bottoms, American Rocket Society Journal, Volume 31, pp. 542-544.

ABRAMSON, H.N., RANSLEBEN, G.E. Jr., (1961b), A note on wall pressure distribution during sloshing in rigid tanks, American Rocket Society Journal, Volume 31, pp. 545-547.

ABRAMSON, H.N., RANSLEBEN, G.E. Jr., (1961c), Representation of fuel sloshing in cylindrical tanks by an equivalent mechanical model, American Rocket Society Journal, Volume 31, Issue 12, pp. 1697-1705.

ARFKEN, G.B., WEBER, H.J., (1995), Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 4ª Edição, San Diego, pp. 92-93

ARMSTRONG, G.L., KACHIGAN, K., (1961), Propellant sloshing, in Handbook of Astronautical Engineering, H.H. Koelle editors, Chapter 14, sections 14-27.

ASLAM, M., GODDEN, W.G., SCANLINE, D.T., (1979), Earthquake sloshing in annular and cylindrical tanks, American Society of Civil Engineering – ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, Volume 105, pp. 371-389.

ASTON, P., (2003), Modelling chaotic motion of sloshing in a horizontally forced axisymmetric container with a forced spherical pendulum, World Congress on Computational Mechanics, Viena, Áustria, Volume 40, pp. 121-142

BANNER, M.L., PHILIPS, O.M., (1974), On the incipient breaking of small scale waves, Journal of Fluid Mechanics, Volume 65, Issue 4, pp. 647-656

BAUER, H.F., (1957), Approximate effect of a ring stiffener on the pressure distribution in a oscillating cylindrical tank partially filled with a liquid, American Boiler Manufactures Association - ABMA, DA, Memo N.º 264, DA-M-114, 12 Setembro.

BAUER, H.F., (1958a), Fluid oscillation in a circular cylindrical tank, American Boiler Manufactures Association – ABMA, Report N.º DA-TR-1-58, Abril.

BAUER, H.F., (1958b), The moment of inertia of a liquid in a circular cylindrical tank, , American Boiler Manufactures Association - ABMA, Report N.º DA-TR-5-58, Abril.

BAUER, H.F., (1958c), Fluid oscillations in a cylindrical tank with damping, American Boiler Manufactures Association – ABMA, Report N.º DA-TR-4-58, Abril.

BAUER, H.F., (1959a), Force and moment of a liquid on a fixed rigid lid on the free fluid surface due to translational and rotational oscillations of a tank, American Boiler Manufactures Association - ABMA, Report N.º DA-TN-25-29, Março.

BAUER, H.F., (1959b), Damped oscillations in a connected fluid system, American Boiler Manufactures Association - ABMA, DA-TN-57-59. 1 de Maio

BAUER, H.F., (1960a), Theory of fluid oscillations in a circular cylindrical ring tank partially filled with liquid, NASA TN-D-557.

BAUER, H.F., (1960b), Mechanical model for the description of the liquid motion in a rectangular container, Lockheed Company, RN ER-8559, Junho.

BAUER, H.F., (1961), Mechanical analogy of fluid oscillations in cylindrical tanks with circular and annular cross-section, MSFC, NASA, MTP-AERO61-4.

BAUER, H.F., (1962a), Mechanical model of fluid oscillations in cylindrical containers and introduction of damping, MTP-AERO-62-16.

BAUER, H.F., (1962b), Theory of fluid oscillations in partially filled cylindrical containers, MSFC, NASA, MTP-AERO-62-1, January

BAUER, H.F., (1963a), Theory of liquid sloshing in compartmented cylindrical tanks due to bending excitation, AIAA Journal, Volume 1, Issue 7, pp.1590-1596.

BAUER, H.F., (1963b), Liquid sloshing in cylindrical quarter tank, AIAA Journal, Volume 1, Issue 11, pp. 2601-2606.

BAUER, H.F., (1965), Nonlinear propellant sloshing in a rectangular container of infinite length, North Amer. Avia. Inc., S&ID Report, SID 64-1593

BAUER, H.F., CLARK, C.D., WOODWARD, J.H., (1965), Analytical mechanical model for the description of the rotary propellant sloshing motion, Final Report, Contract NAS8-11159, Engineering Experiment Station, Georgia Technology, Atlanta.

BAUER, H.F., (1966), Theory of liquid sloshing in a rectangular container, Report N.º ER-8390, Lockheed-Georgia Company, Junho.

BAUER, H.F., (1966), Response of liquid in a rectangular container, American Society of Civil Engineers – ASCE, Volume 92, pp. 1-23.

BAUER, H.F., (1966), Nonlinear mechanical model for the description of propellant sloshing, AIAA Journal, Volume 4, Issue 9, pp. 1662-1668..

BAUER, H.F., (1969), Fuel sloshing in accelerating rectangular container, Report N.º SMN-282, Lockheed, Georgia Company

BAUER, H.F., (1984a), Oscillations of immiscible liquids in a rectangular container: A new damper for excited structures, Journal of Sound and Vibration, 93(1), pp. 117-133.

BAUER, H.F., (1984b), New proposed dynamic absorbers for excited structures, Vibration Damping Workshop Proceedings, Lynn Rogers (ed.), DD1-DD27.

BAUER, H.F., (1999), Oscillations of non-viscous liquid in various container geometries, Forschungbericht, LRT-WE-9-FB-1.

BAUER, H.F., EIDEL, W., (1998), Transient motion of a viscous liquid with free surface in a cylindrical container, Zeit. Angew. Math. Mechanics, Volume 79, pp. 97-106.

BAUER, H.F., EIDEL, W., (1999a), Free oscillations and response of a viscous liquid in a cylindrical container, Aerospace Science Technology, Volume 3, Issue 5, pp. 301-311.

BAUER, H.F., EIDEL, W., (1999b), Axisymmetric natural damped frequencies of a viscous liquid in a circular cylindrical container: an alternative semi-analytical solution, Forschung im Ingenieurwesen – Engineering Research, Volume 65, pp. 191-199.

BAUER, H.F., EIDEL, W., (2002), Linear response of a viscous liquid to translational oscillations, Forsch. Ing. Wes., Volume 67, pp. 72-83.

BAUER, H.F., REINFURTH, M.H., (1959), Oscillations in a connected fluid system, American Boiler Manufacturers Association - ABMA, Report N.º DA-TN-52-59, 9 April.

BAUER, H.F., VILLENUEVA, J., (1967a), Theory of liquid sloshing in a rectangular container with numerical examples for C-45A wing, Lockheed-Georgia Co., Marietta, G. Report N.º ER-8790.

BAUER, H.F., VILLENUEVA, J., (1967b), Mechanical model for the description of the liquid motion in a rectangular container with numerical examples for C-45A wing, Lockheed-Georgia Co., Marietta, G. Report N.º ER-8559.

BENJAMIN, T.B., URSELL, F., (1954), The stability of a plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, Proceeding of Royal Society (London), A225, pp. 505-515.

BERLOT, R.R., (1959), Production of rotation in a confined liquid through translational motion of the boundaries, American Society of Mechanical Engineering –ASME, Journal of Applied Mechanics, pp. 513-516

BERLOT, R.R., birkhoff, G., MILES, J., (1957), Slosh damping in a rigid cylindrical tank, RWC, Electronics Laboratory, Report N.º GM-TR-263, Outubro.

BERLOT, R.R., FREED, L.F., (1956), Comparison of experimental sloshing results with spherical pendulum theorem, Space Technology Laboratories, Memo. GM42-6-54, Janeiro

BERRY, R.I., DEMCHAK, L.J., TEGART, J.R., (1981), Analytical tool for simulating large amplitude propellant slosh, AIAA Paper 81-0500 CP

BOGORYAD, I.B., (1962), On the solution by a variational method of a problem on oscillations of a fluid partially filled cavity, Prikl. Math. Mekh. (PMM), Volume 26, pp. 1122-1127.

BORISOVA, (1962), Free oscillations of a fluid in an inclined cylinder, variational Methods in Problems of Oscillations of a fluid and of a body with a fluid, Vychislit. Tsentr. Akad. Nauk., SSSR, pp. 203-210

- BOUSSINESQ, J., (1878), Journal of Mathematic Pures. Application, Volume 4, pp. 335
- BRATU, M.C., (1971), Oscillations of liquid masses in reservoirs, Bulletin de l'Association Technologique Maritime et Aeronautique, Volume 71, pp. 221-241.
- BROCCHINI, M., BEREGRINE, D.H., THAIS, L., (1997), Violent free-surface motion: Some wave-tank experiments, Technical Report, AM-97-01, School of Mathematics, University of Bristol.
- BROWN, K.M., (1954), Laboratory test of fuel sloshing, Douglas Aircraft, Report Dev. 782, 18, California, Março.
- BRYANT, P.J., (1989), Nonlinear progressive waves in a circular basin, Journal of Fluid Mechanics, Volume 205, pp. 453-467.
- BRYANT, P.J., (1993), Breakdown to chaotic motion of a forced, damped, spherical pendulum, Physica, D 64, 324-339.
- BRYANT, P.J., STIASSNIE, M., (1994), Different forms for nonlinear standing waves in deep water, Journal of Fluid Mechanics, Volume 272, pp135-156
- BUCHANAN, H.J., (1968), Drag on flat plates oscillating in incompressible fluid at low Reynolds numbers, M.S. thesis, University of Alabama, Also NASA TM-X-53759, 22 de Julho.
- BUDIANSKY, B., (1960), Sloshing of liquids in circular canals and spherical tanks, Journal of Aerospace Sciences, Volume 27, issue 3 , pp. 161-172.
- CASE, K., PARKINSON, W., (1957), Damping of surface waves in a incompressible liquid, Journal of Fluid Mechanics, Volume 2, Issue 2, pp. 172-184.
- CHEN, B.F., (1994), Nonlinear hydrodynamic pressures by earthquakes on dam faces with arbitrary reservoir shapes, Journal of Hydraulic Research, Volume 32, Issue 3, pp. 401-413.
- CHEN, B.F., (1997), 3-D nonlinear hydrodynamic analysis of vertical cylinder during earthquakes, I: Rigid motion, Journal of Engineering Mechanics, Volume 123, Issue 5, pp. 458-465.
- CHOBOTOV, V., FOWLER, J., (1957), Experimental investigation of the moment of inertia in a cylindrical tank, Space Technology Laboratories, Memory GM61-2-3, 18 de Fevereiro
- CHU, W.H., (1968), Subharmonic oscillations in arbitrary axi-symmetric tank resulting from axial excitation, Journal of Applied Mechanics, Volume 35, Issue 1, pp. 148-154.
- COKELET, E.D., (1977), Breaking waves, Nature, Volume 267, Issue 5614, pp. 769-774
- COLE, H.A. Jr., (1966), On a fundamental damping law for fuel sloshing, NASA TN-D-3240, Março.
- COLE, H.A. Jr., GAMBUCCI, B.J., (1961a), Measured two dimensional damping effectiveness of fluid sloshing baffles applied to ring baffles in cylindrical tanks, NASA TN-D-694.

COLE, H.A. Jr., GAMBUCCI, B.J., (1961b), Tests of an asymmetrical baffle for fuel sloshing suppression, NASA TN-D-1036.

DALZELL, J.F., (1967) Exploratory studies of liquid behaviour in randomly excited tanks: lateral excitation, SwRI, Technical Report 2, Contract NAS8-20319

DEAN, R.G., (1968), Breaking wave criteria: A study employing a numerical wave theory, proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering, Volume 1, pp. 108-123.

DIMAGGIO, O.D., REHM, A.S., (1965), Nonlinear free oscillations of a perfect fluid in a cylindrical container, AIAA Symposium on Structural Dynamics Aeroelasticity, Volume 30, pp. 156-161.

DODGE, F.T., (1996), Liquid motion analytical models and pre-flight simulations for the liquid motion in a rotating tank experiment (LME), SwRI Project 04-6322

DODGE, F.T., KANA, D.D., ABRAMSON, H.N., (1965), Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers, AIAA Journal, Volume 3, Issue 4, pp. 685-695 (também em relatório SwRI Technical Report N.º 2, 30 de Abril 1964)

EBERT, E., (1989), Modeling of liquid sloshing effects in multi-body systems, Proceedings of International Conference on Spacecraft Structures and Mechanical Testing, Noordwijk, NL, pp. 12-21, SP-289, pp. 269-275, Outubro

EIDE, D.G., (1964), Preliminary analysis of variation of pitch motion of a vehicle in a space environment due to fuel sloshing in a rectangular tank, NASA TN-D-2336.

ENRIGHT, P.J., WONG, E.C., (1971), Propellant slosh models for the Cassini spacecraft, AIAA Paper 94-3730.

EULITZ, W.R., (1958), A Can Type anti-slosh device derived from basis slosh studies, Army Ballistic Missile Agency, Report .Nº DSD-TR-4-58.

EVANS, D.V., (1990), The wide-spacing approximation applied to multiple scattering and sloshing problems, Journal of Fluid Mechanics, Volume 210, pp. 647-658.

EVANS, D.V., LINTON, C.M., (1993), Sloshing frequencies, Quart. Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Volume 46, pp. 71-87.

EWART, D.G., (1956), Fuel oscillations in cylindrical tanks and the forces produced thereby, De Havilland Propellers Ltd, G. W. Dynamics Dept. Tech. Note N.º 2050, 8 de Novembro.

FALTINSEN, O. M., (1974), A Nonlinear Theory of Sloshing in Rectangular Tank, Journal of Ship Research, v. 18, n. 4, pp. 224-241, December 1974.

FALTINSEN, O.M., (1978), A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two dimensional flow, Journal of Ship Research, Vol. 22, No. 3, Sept., pp. 193-202.

FALTINSEN, O.M., TIMOKHA, A.N., (2001), An adaptive multidimensional approach to nonlinear sloshing in rectangular tank, Journal of Fluid Mechanics, Volume 432, pp. 167-200

FALTINSEN, O.M., TIMOKHA, A.N., (2002), Asymptotic modal approximation of nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank with small fluid depth, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 470, pp. 319-357.

FEYNMANN, R.P., (1948), *Review of modern Physics*, Volume 20, p. 367.

FOX, D.W., KUTTLER, J.R., (1981), Upper and lower bounds for sloshing frequencies by intermediate problems, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, Volume 32, pp. 667-682.

FOX, D.W., KUTTLER, J.R., (1983), Sloshing frequencies, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, Volume 34, pp. 668-696.

FULTZ, D., (1962), An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 13, pp. 193-212.

FUNAKOSHI, M., INOUE, S., (1987), Chaotic behaviour of resonantly forced surface waves, *Phys.Lett, A* 121, pp. 229-232.

FUNAKOSHI, M., INOUE, S., (1988), Surface waves due to resonant horizontal oscillation, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 192, pp. 219-247.

GARDARSSON, S., (1997), *Shallow-water sloshing*, Tese de Doutorado, Universidade de Washington (em inglês), USA, 160pp.

GARDARSSON, S., (2004), Case study of hysteresis in shallow water sloshing, *Árbók Verkfræðingafélagsins*, pp. 210-216

GARRETT, C. (1970), On cross-waves, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 41, Issue 4, pp. 837-849.

GARZA, L.R., (1964), Measurements of liquid natural frequencies and damping in compartmented cylindrical tanks, *SwRI Technical Report* 8.

GARZA, L.R., (1966), Theoretical and Experimental pressures and forces on a ring baffle under sloshing conditions, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Volume 3, Issue 2, pp. 276-278.

GARZA, L.R., DODGE, F.T., (1967), Comparison of flexible and rigid ring baffles for slosh suppression, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Volume 4, Issue 6, pp. 805-806.

GHALI, S.A., (1965), The dynamics of liquids in rectangular moving containers, PhD Thesis, University of Leeds, Department of Civil Engineering

GILLARD, P., (1963), Theoretical and experimental research of nonlinear oscillations of liquids in containers and channels of constant depth, *Publ.Sci. Tech Minist. L'Air, N.º* 412, França (em francês)

GRAHAM, E.W., (1951), The forces produced by fuel oscillations in a rectangular tank, *Douglas Aircraft Co*, SM-13748

GRAHAM, E.W., RODRIGUEZ, A.M., (1952), The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics, *American Society of Mechanical Engineers – ASME, Journal of Applied Mechanics*, Volume 19, Issue 3, pp. 381-388.

GREEN, G., (1828), An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, 72pp (impresso para o autor por T. Wheelhouse)

GUYETT, P.R., (1967), Measurements of the unsteady forces acting on a circular cylindrical tank containing liquid during harmonic motion, ARE TR 67098, Abril.

HAMILTON, W.R., (1834), On a general method in dynamics, Philosophical Transaction of the Royal Society, Part I, pp. 247-308 (da colecção Sir William Rowan Hamilton (1805-1865): Mathematical Papers editado por David R. Wilkins, Scholl of Mathematics, Trinity College, Dublin 2, Ireland, 2000)

HAMILTON, W.R., (1834), On a general method in dynamics, Philosophical Transaction of the Royal Society, Part II, pp. 95-144 (da colecção Sir William Rowan Hamilton (1805-1865): Mathematical Papers editado por David R. Wilkins, Scholl of Mathematics, Trinity College, Dublin 2, Ireland, 2000)

HENDERSON, D.M., MILES, J.W., (1994), Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact-line, Journal of Fluid Mechanics, Volume 275, pp. 285-299.

HOLTHUIJSEN, L.H., HERBERS, T.H.C., (1986), Statistics of breaking waves observed as whitecaps in the open sea, Journal of Physical Oceanography, Volume 16, pp. 290-297.

HOUSNER, G.W. (1963), The dynamic behavior of water tanks, Bulletin of the Seismological American Society, Volume 53, Issue 2, pp. 381-387.

HOWELL, E., (1957), Motion of a conical pendulum, Space Technology Laboratory, Memo. GM 42.4-4.

HOWELL, E., EBLER, F.G., (1956), Experimental investigation of the influence of mechanical baffles on fundamental sloshing mode of water in a cylindrical tank, Space Technology Laboratory, Report GM-TR-69, 6 de Julho.

HSIEH, D.Y., SUN, S.M., SHEN, M.C., (1995), Nonlinear theory of forced surface waves in a circular basin, Wave motion, Volume 21, Issue 4, pp. 331-341.

HULEUX, A., (1964), Water oscillations in a container in uniformly accelerated translation, Bulletin of Academic Royal Science, Volume 50, Issue 11, pp. 1315-1330 (em francês)

HUNG, T.K., CHEN, B.F., (1990), Nonlinear hydrodynamic pressure on dams, Journal of Engineering Mechanics – ASCE, Volume 116, Issue 6, pp. 1372-1391, Junho

HUNT, K.M., (1952), Viscous damping waves over an inclined bed in a channel of finite width, La Houille Blanche, Volume 6, pp.836-841

HUNT, K.M., (1964), The viscous damping of gravity waves in shallow water, La Houille Blanche, Volume 18, pp.685-692

HUNT, K.M., CROSSLEY, F.R.E., (1975), Coefficient of restitution interpreted as Damping in Vibro-impact, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (ASME), Journal of Applied Mechanics, pp. 440-444.

HUTHER, M., DUBOIS, M., PLANEIX, J.M., (1973), Model studies on the movement of liquid in tanks, Marine Engineering Review, pp. 5-16, Janeiro.

HUTTON, R.E., (1962), An investigation of resonance, nonlinear and nonplanar free surface oscillations of fluid, PhD dissertation, UCLA (NASA TN-D-1870, 1963)

HUTTON, R.E., (1964), Fluid-particle motion during rotary sloshing, Journal of Applied Mechanics, Volume 31, N.º 1, pp. 123-130, Março

IBRAHIM, R.A., (1969), Unsteady motion of liquid propellants in moving containers, Master Thesis, Department of Aeronautic Engineering, Cairo University.

IBRAHIM, R., (1985), Parametric Random Vibration, New York, Wiley.

IBRAHIM, R., (2005), Liquid Sloshing dynamics: Theory and Application, Cambridge University Press

IBRAHIM, R., BARR, A.D.S., (1975), Autoparametric resonance in a structure containing a liquid, part I: Two mode interaction, Journal of Sound and Vibration, Volume 42, Issue 2, pp 159-179.

IRONS, F.E., (1990), Concerning the nonlinear behaviour of the forced spherical pendulum including the dowsing pendulum, European Journal of Physics, Volume 11, pp. 107-115

ISHIBASHI, H., HAYAMA, S., (1989), Nonlinear response of sloshing based on the shallow water wave theory (2<sup>nd</sup> report, nonlinear response in rectangular tanks and cylindrical tanks), Trans. Japanese Society of Mechanical Engineering – JSME, C 55, Issue 511, pp. 663-670

JITU, K., CHIBA, T., MIEDA, T., (1994), An experimental study of the effect of liquid viscosity on dynamic response of the fluid-filled co-axial cylinder, Sloshing, Fluid-Structure Interaction and Structural response Due to Shock and Impact Loads, American society of Mechanical Engineers – ASME, Pressure Vessel Piping Conference, PVP- 272, pp. 101-110.

KACHIGAN, K., (1955), Forced oscillation of a fluid in a cylindrical tank, Report N.º ZU-7-046, Convair San Diego, California.

KANA, D.D., (1964), Experiments on liquid dynamics in Titan I.I. propellant tanks, SwRI Final Report.

KANA, D.D., (1987), A model for nonlinear rotary sloshing in propellant tanks, Journal of Spacecraft and Rockets, Volume 24, Issues ¾, pp. 169-177.

KANA, D.D., (1989), Validated spherical pendulum model for rotary liquid slosh, Journal of Spacecraft and Rockets, Volume 26, Issue 3, pp. 188-195.

KANA, D.D., FOX, D.J., (1995), Distinguishing the transition to chaos in a spherical pendulum, Chaos, volume 5, Issue 1, pp. 298-310.

KANA, D.D., UNRUH, J.F., FEY, T.A., DODGE, F.T., (1985), Development of simple models for Centaur g-prime/g model tank propellant slosh, Report 06-8190-001, SwRI, 14 de Junho.

KEULEGAN, G.H., (1959), Energy dissipation in standing waves in rectangular basins, Journal of Fluid Mechanics, Volume 6, Issue 1, pp. 33-50.

KHOSROPOUR, R., COLE, S.L., STRAYER, T.D., (1995), Resonant free surface waves in a rectangular basin, *Wave motion*, Volume 22, Issue 2, pp. 187-199.

KIMURA, N., OHASHI, H., (1978), Nonlinear sloshing in containers with arbitrary axisymmetric geometries, 1<sup>st</sup> Report, derivation of governing equations and the behaviour of their solutions, *Trans. Japanese Society of Mechanical Engineers – JSME*, Volume 44, pp. 3024-3033 (em japonês).

KIMURA, K., TAKAHARA, H., SAKATA H., (1996a), Sloshing in circular cylindrical tank subjected to pitching excitation (condition of excitation for liquid surface remain planar), *Proceedings of the Japanese Society of Mechanical Engineers – JSME – Spring Annual Meeting*, 96-1(VI), pp. 87-90.

KIMURA, K., TAKAHARA, H., OGURA H., (1996), Three-dimensional sloshing analysis in a rectangular tank subjected to pitching excitation, *Trans. Japanese Society of Mechanical Engineers – JSME*, Volume 62, Issue 596, pp. 1285-1294 (em japonês).

KIT, E., SHEMER, L., MILOH, T., (1987), Experimental and theoretical investigation of nonlinear sloshing waves in a rectangular channel, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 191, pp. 265-291.

KJELDSEN, S.P., MYRHAUG, D., (1978), Kinematics and dynamics of breaking waves, Report STT 60A78100, *Ships in rough Seas*, part 4, Norwegian Hydro. Laboratory.

KOMATSU, K., (1987), Nonlinear slosh analysis of liquid in tanks with arbitrary geometries, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Volume 22, Issue 3, pp. 193-207.

KOVAL'CHUK, P.S., KUBENKO, V.D., (1991), Interaction of vibrating cylindrical shells with its liquid content, *Dynamics of Bodies Interacting with a Medium*, A.N. Guz, Ed., Kiev, Naukova Dumka, pp. 168-214.

KOVAL'CHUK, P.S., PODCHASOV, N.P., (1996), Nonstationary wave motions of a liquid in a vibrating cylindrical vessel when passing through a zone of resonance, *International Applied Mechanics (Prikladnaya Mekhanika)*, Volume 32, Issue 1, pp. 30-34.

KOVAL'CHUK, P.S., PUCHKA, G.N., KHOLOPOVA, V.V., (1989), Nonlinear wave motions in axisymmetric cavities subjected to vibrations, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Mekh. Zhidk.*, Gaza 3, pp. 120-125

KRASNOPOLSKAYA, T.S., SHVETS, A.Y., (1990), Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank, *Int. Applied Mechanics, Priklad. Mekh*, Volume 26, Issue 8, pp. 787-794.

KRASNOPOLSKAYA, T.S., SHVETS, A.Y., (1992), Properties of chaotic oscillations of a liquid in a cylindrical tank, *Int. Applied Mechanics, Priklad. Mekh*, Volume 28, Issue 6, pp. 52-58.

KREIN, S.G., (1964), On the oscillations of a viscous fluid in a vessel, *Soviet Math. Doklady*, Volume 5, Issue 6, pp. 1467-1471.

KREIN, S.G., KAN, N.Z., (1969), The problem of small motions of a body with a cavity partially filled with a viscous fluid, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 30, Issue 1, pp. 110-117.

KREIN, S.G., LAPTEV, G.I., (1968), On the problem of motion of a viscous fluid in an open vessel, *Funkts Analiz*, Volume 2, Issue 1, pp. 38-47.

KRUSHINSKAYA, S.I., (1965), Vibrations of a heavy viscous fluid in moving vessel, *Zh. Vychisl. Matem i Matem. Fiz* 3.

KUBENKO, V.D., KOVAL'CHUK, P.S., BOYARSHINA, L.G., (1992), Nonlinear dynamics of Axisymmetric bodies carrying a liquid, KIEV, Naukova Dumka (em Russo)

KUTTLER, J.R., SIGILLITO, V.G., (1969), Lower bounds for sloshing frequencies, *Quarterly of Applied Mathematics*, Volume 27, Issue 3, pp. 405-408

KUTTLER, J.R., SIGILLITO, V.G., (1984), Sloshing of liquids in cylindrical, *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics – AIAA*, Volume 22, Issue 2, pp. 309-311

LAMB H., (1945), *Hydrodynamics*, Cambridge, Cambridge University Press

LANGNER, C.G., (1963), A preliminary analysis for optimum design of ring and vertical wall antislosh baffles, *SwRI, TR 7, Abril*.

LAWRENCE, H.R., WANG, C.J., REDDY, R.B., (1958), Variational solution of fuel sloshing modes, *Jet. Propulsion, Publication of the American Rocket Society*, Volume 28, Issue 11, pp. 728-736

LIMARCHENKO, O.S., (1978), Variational formulation of the problem on the motion of a tank with fluid, *Dopovidi Akademii Nauk. Ukrain'skoi RSR, A 11*, pp. 999-1002, (em Ucrainiano)

LIMARCHENKO, O.S., (1980), Variational method investigation of problems of nonlinear dynamics of a reservoir with a liquid, *Soviet Applied Mechanics*, Volume 16, Issue 1, pp. 74-79.

LIMARCHENKO, O.S., (1983), Application of a variational method to the solution of nonlinear problems of the dynamics of combined motions of a tank with fluid, *Soviet Applied Mechanics*, Volume 19, Issue 11, pp. 1021-1025.

LIMARCHENKO, O.S., LUKOVSKII, I.A., TIMOKHA, A.N., (1992), Nonlinear models in applied dynamics problems of bodies with a free surface liquid, *Prikladnaya Mekhanika*, Volume 28, Issue 11, pp. 757-763.

LIN, Y.K, (1967), *Probabilistic theory of Structural Dynamics*, New York, McGraw-Hill.

LIN, J.D., HOWARD, L.N., (1960), Nonlinear standing waves in a rectangular tank due to forced oscillations, *MIT Hydrodynamics Lab., TR 44*.

LIU, Z.P, HUANG, Y., (1994), A new method for large amplitude sloshing problems, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 175, Issue 2, pp. 185-195.

LOMEN, D.O., (1965), Liquid propellant sloshing in mobile tanks of arbitrary shape, *NASA CR-222, Abril*.

LONGUET-HIGGINS, M.S., (1963), The effect of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 17, Part 3, pp. 459-480.

LONGUET-HIGGINS, M.S., (1969), On wave breaking and the equilibrium spectrum of wind generated waves , proceedings of the Royal Society of London, Series A 310, pp. 151-159.

LONGUET-HIGGINS, M.S., (1978), The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water: I Superharmonics, Proceedings of the Royal Society of London, Series A 360, pp. 471-488.

LONGUET-HIGGINS, M.S., (1978), The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water: II Subharmonics, Proceedings of the Royal Society of London, Series A 360, pp. 489-505.

LONGUET-HIGGINS, M.S., COKELET, E.D., (1976), The deformation of steep surface waves on water: I.A. numerical method and computation, Proceedings of the Royal Society of London, Series A. 350, pp. 1-26.

LONGUET-HIGGINS, M.S., COKELET, E.D., (1978), The deformation of steep surface waves on water: II Growth of normal mode instabilities, Proceedings of the Royal Society of London, Series A. 364, pp. 1-28

LONGUET-HIGGINS, M.S., FOX, M.J.H., (1977), Theory of the almost-highest wave: The inner solution, Journal of Fluid Mechanics, Volume 80, pp. 721-741.

LUKE, (1967), A variational principle for a fluid with a free surface, Journal of Fluid Mechanics, Volume 27, pp. 395-397.

LUBOVSKII, I.A., (1975), Nonlinear fluid oscillations in Vessels of Complex Geometrical shapes, Kiev, Naukova Dumka (Em Russo).

LUBOVSKII, I.A., (1990), Introduction to the nonlinear dynamics of aircraft with liquid, Kiev, Nauk Dumka (Em Russo).

LUKOVSKII, I.A., TIMOKHA, A.N., (1992), Variational formulations of the problem of the interaction of a "liquid-gas" interface with acoustic fields in the gas, Mathematical Methods of Investigating Applied Problems of the Dynamic of Bodies Carrying a Liquid, Kiev, Institute of Mathematics of NASU, pp. 3-10.

LUKOVSKII, I.A., TIMOKHA, A.N., (1995), Variational Methods in Nonlinear Dynamics of a Limited Liquid Volume, Kiev, Institute of Mathematics of NASE (em russo)

LUKOVSKII, I.A., TIMOKHA, A.N., (1999), Nonlinear theory of sloshing in mobile tanks: Classical and non-classical problems (survey), Problems of Analytical Mechanics and its Applications, Kiev, Institute of Mathematics of NASU, pp. 169-200.

LUKOVSKII, I.A., TIMOKHA, A.N., (2000), Steady state nonlinear sloshing in a rectangular

LUKE, J.C., (1967), A variational principle for a fluid with a free surface, Journal of fluid mechanics, Volume 27, pp. 395-397.

MACK, L.R., (1962), Periodic finite-amplitude, axi-symmetric gravity waves, Journal Geophys. Research, Volume 67, Issues 2, pp. 829-843

MARTEL, C., NICOLAS, J.A., VEGA, J.M., (1998), Surface-wave damping in a brimful circular cylinder, Journal of fluid Mechanics, Volume 360, pp. 213-228.

- MATHIESSEN, L., (1976), Sloshing loads due to random pitch motion, Norwegian, Maritime Research, Volume 4, Issue 3, Det. Norske Veritas.
- MCCARTY, J.L., STEPHENS, D.G., (1960), Investigation on the natural frequencies of fluid in spherical and cylindrical tanks, NASA TN D-252.
- MCIVER, P., (1989), Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth, Journal of Fluid Mechanics, Volume 201, pp. 243-257.
- MCIVER, P., MCIVER, M., (1993), Sloshing frequencies of longitudinal modes for a liquid contained in a trough, Journal of Fluid Mechanics, Volume 252, pp. 525-541.
- MEI, C.C., LIU, L.F., (1973), The damping of surface gravity waves in a bounded liquid, Journal of Fluid Mechanics, Volume 59, Issue 2, pp. 239-256.
- MEIROVITCH L., (1990), Dynamics and Control of Structures. John Wiley & Sons, Inc.
- MELVILLE, W.K., (1982), The instability and breaking of deep-water waves, Journal of fluid Mechanics, Volume 115, pp. 165-185.
- MESEROLE, J.S., FORTINI, A. (1987), SLOSH dynamics in a toroidal tank, Journal of Space craft, Volume 24, Issue 6, pp. 523-531.
- MICHEL, J.H., (1893), The highest waves in the water, Philosophy Magazine, Volume 36, pp. 430-437
- MIEDA, T., ISHIDA, K., JITU, K., CHIBA, T., (1993), An experimental study of viscous damping in sloshing mode of cylindrical tanks, Structural Mechanics in Reactor Technologies, pp. 122-131
- MIKISHEV, G.N., RABINOVICH, B.I., (1968), Dynamics of thin-walled constructions with compartments containing a liquid, Moscow, Mashinostroyeniye.
- MILES, J.W., (1956), On the sloshing of liquid in a cylindrical tank, Ramo-Wooldridge Corp. Guided Missile Research Division, GM-TR-18.
- MILES, J.W., (1962), Stability of forced oscillations of a spherical pendulum, Quart. Applied Mathematics, Volume 20, pp. 21-32.
- MILES, J.W., (1964), Free surface oscillations in a rotating liquid, Journal of Fluid Mechanics, Volume 18, Issue 2, pp. 187-194.
- MILES, J.W., (1967), Nonlinear surface waves in closed basins, Journal of Fluids Mechanics, Vol. 75, pp. 419-448.
- MILES, J.W., (1976), Nonlinear surface waves in closed basin, Journal of Fluid Mechanics, Journal of Fluid Mechanics, Volume 75, pp. 419-448
- MILES, J.W., (1984), Resonant motion of a spherical pendulum, Physica, Volume 11, Issue D, pp. 309-323.
- MILES, J.W., (1984), Resonant non-planar motion of a stretched string, Journal Acoust. Soc. Amer, Volume 75, pp. 1505-1510
- MILES, J.W., (1984), Resonantly forced surface waves in a circular cylinder, Journal of Fluid Mechanics, Volume 149, pp. 15-31

MILES, J.W., (1984), Internally resonance surface waves in a circular cylinder, Journal of Fluid Mechanics, Volume 149, pp. 1-14.

MILES, J.W., (1985), Resonantly forced, nonlinear gravity waves in a shallow rectangular tank, Wave Motion, Volume 7, Issue 1985, pp. 291-297.

MILES, J.W., (1988), Resonance and symmetric breaking for the pendulum, Physica D 31, pp. 252-268.

MILES, J.W., (1989), The pendulum from Huygens' horologium to symmetric breaking and chaos, Proceedings of the XVII International Congress of Theoretical Applied Mechanics, Grenoble, France, P. Germain, M. Piau e D. Caillerie editors, North Holland, Elsevier Science, pp. 193-215.

MIXON, J.S., CATHERINE, J.J., (1964), Experimental lateral vibration characteristics of a 1/5 scale model of Saturn SA-I with an eight-cable suspensions system, NASA TN D-2214.

MIXON, J.S., CATHERINE, J.J., (1964B), Comparison of experimental vibration characteristics obtained from a 1/5 scale model and from a full-scale Saturn SA-I, NASA TN D-2215.

MOISEEV, N.N., (1958), On the theory of nonlinear vibration of liquid of finite volume, Prikl. Math. Mekh. (PMM), Volume 22, pp. 612-621.

MOISEEV, N.N., (1970), Some problems in the hydrodynamics of surface waves, Advances in Mechanics in USSR over 50 years, Volume 2, pp. 55-72, Moscovo, Nauka.

MOISEEV, N.N., PETROV, A.A., (1966), The calculation of free oscillations of a liquid in a motionless container, Advanced Applied Mechanics, Volume 9, pp. 91-154, New York, Academic Press.

MOISEEV, N.N., RUMNYANTSEV, V.V., (1968), Dynamic stability of bosesies containing Fluid, Applied Physics and Eng./An. Int. Series, Volume 6, H.N. Abramson, ed., Springer- Verlag.

MOMOI, T.A., (1965), A motion of water excited by earthquake, part 1:Rectangular basin (one dimensional), Bulletin of Earthquake Research Institute, Tokyo University, Volume 43, Issue 1, pp. 111-127.

MOONEY, J., RYAN, J., WALLS, J., (1964), Slosh handbook, NSL Technical Memo., 1, 21 de Fevereiro.

MORSE, P.M., FESHBACH, H., (1953), Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, Nova Iorque

[MUTO, K., KASAI, Y., NAKAHARA, M., (1988), Experimental tests for suppression effects of water restraint plates on sloshing of a water pool, American Society of Mechanical Engineers – ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, Volume 119, pp. 240-246.

NARIMANOV, G.S., DOKUCHAEV, L.V., LUKOVSKII, I.A., (1977), Nonlinear Dynamics of Aircraft with Liquid, Moscow, Mashinostroenie (em russo)

NATH, J.H., RAMSEY, F.L., (1976), Probability distributions of breaking wave height emphasizing the utilization of JONSWAP spectrum, *Journal of Physics Oceanography*, Volume 6, pp. 316-323

OCHI, M.K., (1998), *Ocean waves: The Stochastic Approach*, Ocean Technology, Series 6, Cambridge University Press, ISBN 0-521-56378-X, 319pp.

OCHI, M.K., TSAI, C.H., (1983), Prediction of the occurrence of breaking waves in deep water, *Journal of Physical Oceanography*, Volume 13, Issue 11, pp. 2008-2019.

OCKENDON, J.R., OCKENDON, H., (1973), Resonance surface waves, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 59, Issue 2, pp. 397-413.

PATROM, L.S., (1985), Numerical calculation of equivalent moment of inertia for a fluid in a cylindrical container, *J. Numer. Meth Fluids*, Volume 5, pp. 25-42

PENNEY, W.G., PRICE, A.T., (1952), Finite Periodic Stationary waves in a perfect liquid, part II, *Phil. Trans. Royal Society (London)*, Volume 244, pp. 254-284.

PETROV, (1962a), Oscillations of fluids in cylindrical basins with horizontal generators – Variational methods in problems of oscillations of a fluid and of a body with a fluid, *Vych. Tsenter. Akad. Nauk., SSSR, Moscovo*, pp. 179-202

PETROV, (1962b), Approximate solution of the problem of oscillations of a fluid in a cylindrical vessel with horizontal generators – Variational methods in problems of oscillations of a fluid and of a body with a fluid, *Vych. Tsenter. Akad. Nauk., SSSR, Moscovo*, pp. 213-230.

PETROV, (1962c), Equations of motion of an airplane carrying tanks with liquids – Variational methods in problems of oscillations of a fluid and of a body with a fluid, *Vych. Tsenter. Akad. Nauk., SSSR, Moscovo*, pp. 231-236.

PILIPCHUK, V.N., e IBRAHIM, R.A., (1997), The Dynamics of a nonlinear system simulating liquid sloshing impact in moving structures, *Journal of sound and Vibration*, Volume 205, Issue 5, pp. 593-615.

POISSON, S.D., (1828-1829), Sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre, *Annales des Mathématiques Pures et Appliquées*, XIX, 2225.

POPOV, G.V., VATISTAS, G.H., SANKAR, S., SANKAR, T.S., (1993), Numerical simulation of viscous liquid sloshing in arbitrary shaped reservoirs, *AIAA Journal*, Volume 31, Issue 1, pp. 10-11.

PUCHKA, G.N., KHOLOPOVA, V.V., (1996), Nonlinear surface waves in liquid within a cylindrical vesse, *Int. Applied Mechanics*, Volume 32, Issue 4, pp. 307-309.

RAMBERG, S.E., GRIFFIN, M., (1987), Laboratory study of steep and breaking deep water waves, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, American Society of Civil Engineering – ASCE, Volume 113, Issue 5, pp. 493-506.

RAYLEIGH, J.W.S. (Lord), (1887), On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, *Phil. Mag.*, Volume 24, pp. 145-159.

REESE, J.R., SEWALL, J.L., (1955), Effective moments of inertia of a fluid in offset and swept wing tanks undergoing pitching oscillations, *NACA TN-3353*.

ROBERTS, J.B., SPANOS, P.D., (1990), Random Vibration and Statistical Linearization, New York, Wiley.

ROCCA, M.L., MELE, P., ARMENIO, V., (1997), Variational approach to the problem of sloshing in a moving container, Journal of Theoretical Applied Fluid Mechanics, Volume 1, Issue 4, pp. 280-310.

ROGGE, T.R., WEISS, H.J., (1965), An approximate nonlinear analysis of the stability of sloshing modes under translational and rotational excitation, NASA CR-220.

RUMOLD, W., (1998), Modeling and simulation of sloshing liquids, Z. Angew. Math. Mech (ZAMM), Volume 78, pp. S691-S692

RUMOLD, W., (2001), Modeling and simulation of vehicles carrying liquid cargo, Multibody System Dynamics, Volume 5, pp. 375-386.

SAKATA, M., KIMURA, K., UTSUMI, M., (1983), Non-stationary random responses of nonlinear liquid motion in circular cylindrical tank, Trans Japanese Society of Mechanical Engineering – JSME, Volume 49, Issue 442, pp. 963-970 (em japonês)

SAKATA, M., KIMURA, K., UTSUMI, M., (1983), Non-stationary response of nonlinear liquid motion in cylindrical tank subjected to random base excitation, Journal of Sound Vibration, Volume 94, Issue 3, pp. 351-363.

SAYAR, B.A., BAUMGARTEN, J.R., (1981), Pendulum analogy for nonlinear fluid oscillations in spherical containers, Journal of Applied Mechanics, Volume 48, pp. 769-772.

SCARSI, G., (1971), Natural frequencies of viscous liquids in rectangular tanks, Meccanica, Volume 6, Issue 4, pp. 223-234.

SCARSI, G., BRIZZOLARA, E., (1970), On the behaviour of liquids in a rectangular tank motion, International Shipbuilding Progress, Volume 17, Issue 194, pp. 316-329.

SCHILLING, U., SIEKMANN, J., (1982), Numerical calculations of the translational forced oscillations of a sloshing liquid in axially symmetric tanks, Israel Journal Technology, Volume 20, pp. 201-205.

SCHMITT, A.F., (1956), Forced oscillations of a fluid in cylindrical tank undergoing both translation and rotation, report N.º ZU-7-079, Convair San Diego, California.

SCHMITT, A.F., (1957), Forced oscillations of a fluid in cylindrical tank oscillating in a carried acceleration field: a correction, Report N.º ZU-7-079, Convair San Diego, California, 4 Fevereiro.

SCHOLL, H.F., STEPHENS, D.G., DAVIS, P.K., (1972), Ring-baffle pressure distribution and slosh damping in large cylindrical tanks, NASA Technical Note TND-6870.

SCHWIND, R.G., SCOTTI, R.S., SKOGH, J., (1964), The effect of baffles on tank sloshing, Lockheed Missile Space Co., LMSCA642961

SEWAL, J.L., (1957), An experimental and theoretical study of the effects of fuel on pitching-translation flutter, NACA TN-4166.

SHANKAR, P.N., KIDAMBI, R., (2002), A modal method for finite amplitude nonlinear sloshing, *Pramana-Journal of Physics*, Volume 59, Issue 4, pp. 631-651.

SHARMA, R., SEMERCILL, S.E, TURAN, O.F., (1992), Floating and immersed plates to control sloshing in a cylindrical container at the fundamental mode, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 115, Issue 2, pp. 365-370.

SHEMER, L., (1990), On the directly generated resonant standing waves in a rectangular tank, *Journal of Fluids Mechanics*, Volume 217, pp. 143-165.

SHEMER, L., CHAMESSE, M., (1990), On the hysteresis phenomenon in the directly excited nonlinear resonance sloshing waves in a tank, *Acta Mech.*, 81(1/2), pp. 47-58.

SHEMER, L., KIT, E., (1988), Study of the role of dissipation in evolution of nonlinear sloshing waves in a rectangular channel, *Fluid Dynamics Research*, Volume 4, Issue 2, pp. 89-105.

SHEMER, L., KIT, E., MILOH, T., (1987), Measurements of two and three-dimensional waves in a channel including the vicinity of cut-off frequencies, *Exper. Fluids*, Volume 5, pp. 66-72.

SHIMIZU, T.; HAYAMA, S., (1987), Nonlinear Responses of Sloshing Based on the Shallow Water Theory, *JSME International Journal*, v. 30, n.263, pp. 806-813, Dezembro.

SHIH, C.C., BUCHANAN, H.J., (1971), The drag oscillating flat plate liquids at low Reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 2, Issue 2, pp. 229-239.

SILVEIRA, M.A., STEPHENS, D.C., LEONARD, H.W., (1961), An experimental investigation of damping of liquid oscillations in cylindrical tanks with various baffles, NASA TN D-715.

SKALAK, R., YARYMOVICH, M.I., (1962), Forced large amplitude surface waves, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> National Congress on Applied Mechanics*, pp. 1411-1418.

SMYTHE, W.R., (1968), *Static and Dynamic Electricity*, 3<sup>a</sup> Edição, Nova iorque, McGraw-Hill.

SNYDER, R.L., KENNEDY, R.M., (1983), On the formation of whitecaps by a threshold mechanism: Part 1 – Basic formalism, *Journal of Physical oceanography*, Volume 13, pp. 1482-1492.

SOLAAS, F., (1995), Analytical and numerical studies of sloshing in tanks, PhD, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim.

SOLAAS, F., FALTINSEN, O.M., (1997), Combined numerical and analytical solution for sloshing in two-dimensional tanks of general shape, *Journal of Ship Research*, Volume 41, pp. 118-129.

STEKLOV, M.W., (1902), Sur les problemes fondamentaux de la physique mathematique, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Volume 19, pp. 455-490.

STEPHENS, D.G., LEONARD, H.W., PERRY, T.W., (1962), Investigation of the damping of liquid in right circular tanks including the effects of a time-variant liquid depth, NASA TN D-1367.

STEPHENS, D.G., LEONARD, H.W., SILVEIRA, M.A., (1963), An experimental investigation of the damping of liquid oscillations in an oblate spheroidal tank with and without baffles, NASA TN D-808.

STEPHENS, D.G., SCHOLL, H.F., (1967), Effectiveness of flexible and rigid ring baffles for damping liquid oscillations in large-scale cylindrical tanks, NASA TN D-3878.

SROKOSZ, M.A., (1983), A simplified method for calculating the highest wave on deep water, IMA Journal of Applied Mathematics, Volume 30, Issue 2, pp. 151-159

SU, T.C., (1981), The effect of viscosity on free oscillations of fluid-filled spherical shells, Journal of Sound Vibration, Volume 74, Issue, pp. 205-220.

SUE, M.Y., BERGIN, M., MARLER, P., MYRICK, R., (1982), Experiments on non-linear instabilities and evolution of steep gravity wave-trains, Journal of fluid mechanics, Volume 124, pp. 45-72.

SUMNER, I.E., (1966), Experimental investigation of the stability boundaries for planar and nonplanar sloshing in spherical tanks, NASA TN D-3210

SUN, L.M., (1988), Simulation of nonlinear waves in rectangular tuned liquid dampers (TLDs), Tese de Mestrado, Universidade de Tokyo.

SUN, L.M., (1991), Semi-analytical modelling of Tuned Liquid Damper (TLD) with emphasis on damping of liquid sloshing, Tese de Doutorado, Universidade de Tokyo.

SUN, L.M., FUJINO, Y., CHAISERI, P., PACHECO, B.M., (1995), The properties of Tuned Liquid Dampers using a TMD analogy, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Volume 24, pp 967-976.

TADJBAKHSI, I., KELLER, J.B., (1960), Standing waves of finite amplitude, Journal of fluid mechanics, Volume 8, Issue 3, pp. 442-451.

TAKAHARA, H., KIMURA, K., SAKATA, M., (1995), Frequency response of sloshing in a circular cylindrical tank subjected to pitching excitation, proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference'95, Volume II, pp. 703-708.

TANG, Y., URAS, R.A., CHANG, Y.W., (1993), Effect of viscosity on dynamic response of a liquid storage tank, Proceedings of the American Society of Mechanical Engineering, Pressure Vessel Piping Conference, PVP-258, pp. 135-142.

TAYLOR, Sir. G.I., (1954), An experimental study of standing waves, proceedings of the Royal Society (London), A218, pp. 44-59.

THOMSON, M.M., (1965), Theoretical Hydrodynamics, Nova Iorque, MacMillan

THORPE, S.A., (1995), Dynamic processes of transfer at the sea surface, Prog. oceanog, Vol. 35, pp. 315-352.

TRITTON, D.J., (1986a), Chaos in the swing of a pendulum, New Scientist, Volume 24, pp. 37-40.

TRITTON, D.J., (1986b), Ordered and chaotic motion of a forced spherical pendulum, European Journal of Physics, Volume 7, pp. 162-169.

TROESCH, B.A., (1957), Pendulum analogy, Space Technology Laboratories, Memo. GM 42.4-4

TSAI, W.T., YUE D.K.P., YIP, K.M.K., (1990), Resonantly excited regular and chaotic motions in a rectangular wave tank, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 216, pp. 343-380

TUNG, C.C., HUANG, N.E., (1987a), The effect of wave breaking on the wave energy spectrum, *Journal of Physical Oceanography*, Volume 17, N.º 8, pp. 1156-1162.

TUNG, C.C., HUANG, N.E., (1987), The effect of wave breaking on wave spectrum in water of finite depth, *Journal of Geophysical Research*, Volume 92, pp. 5125-5120, 15 de Maio.

UEDA, Y., HAYASHIDA, Y., IGUCHI, M., ISHII, T., (2007), Self-induced sloshing caused by an upward round jet in a cylindrical container, *Journal of Visualization*, Volume 10, Number 3, pp. 317-324.

UNRUH, J.F., KANA, D.D., DODGE, F.T., FEY, T.A., (1986), Digital data analysis techniques for extraction of slosh model parameters, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Volume 23, Issues 3/4, pp. 171-177.

URSELL, F., (1952), Edge waves on a sloping beach, *Proceedings of Royal Society of London*, A 214, pp. 79-97.

UTSUMI, M., KIMURA, K., SAKATA, M., (1984), Stochastic response analysis of an elastic rectangular container with an internal liquid to simulated seismic excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 96, Issue 1, pp. 83-99.

UTSUMI, M., KIMURA, K., SAKATA, M., (1984), Non-stationary vibration of an elastic circular cylindrical liquid storage tank to a simulated earthquake excitation with two directional horizontal components, *Trans Japanese society of Mechanical Engineering – JSME*, C 52(473), pp. 279-287 (em japonês).

VANDORN, W.G., PAZAN, S.E., (1975), Laboratory investigation of wave breaking: Part 2 – Deep water waves, *Advanced Ocean Engineering Laboratory Report 71*, Scripps Institute Oceanogr.

VERHAGEN, J.H.G., WIJNGARDEN, L.V., (1965), Nonlinear oscillations of fluid in a container, *Journal of fluid mechanics*, Volume 22, Issue 4, pp. 737-751

VICTOROV, E.D., (1965), Computational of the damping factor of free oscillations of a viscous liquid in a cylindrical vessel, *Journal of Applied Mechanics Technology and Physics*, Volume 2, pp. 138-146.

VON NEUMANN, J., (1929), Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Ann*, Volume 102, pp. 370-427 (em alemão).

VON NEUMANN, J., (1936), On a certain Topology for Rings of Operators, *The Annals of Mathematics*, 2<sup>nd</sup> Series, Volume 37, issue 1, pp. 111-115.

WANG, M., HUNG, T.K., (1986), A nonlinear hydrodynamics analysis of Pine Flat dam, *American Society of Civil Engineering – ASCE Advan. Aerodynamics, Fluid Mechanics and Hydraulics*, pp. 629-636

WATERHOUSE, D.D., (1994), Resonant sloshing near a critical depth, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 281, pp. 313-318.

WEDEMEYER, E.H., REESE, J.R., (1953), Moment of inertia and damping of fluid in tanks undergoing pitching oscillations, NACA RM L 53E, Junho

WEISS, H.J., ROGGE, T.R., (1965), A nonlinear analysis for sloshing forces and moments on a cylindrical tank, NASA CR-221

WERNER, P.W., COLDWELL, J.T., (1961), Experimental evaluation of analytical models for the inertias and natural frequencies of fuel sloshing in a circular cylindrical tanks, NASA TN D-865

WEISSMAN, M.A., ATAKTURK, S.S., KATSAROS, K.B., (1984), Detection of breaking events in a wind-generated wave field, *Journal of*

WERNER e COLDWELL, (1961), Experimental evaluation of analytical models for the inertias and natural frequencies of fuel sloshing in a circular cylindrical tanks, NASA TN D-865.

WHITMAN, G.B., (1967), Variational methods and applications to water waves, *proceedings of the Royal Society*, A 299, N.º 1456, pp. 6-25.

WOODWARD, J.H., (1966), Fluid motion in a circular tank of sector-annular cross-section when subjected to longitudinal excitation, PhD Dissertation, Georgia Technology.

WOODWARD, J.H., BAUER, H.F., (1970), Fluid behaviour in a longitudinal excited cylindrical tank of arbitrary sector-annular cross section, *AIAA Journal*, Volume 8, Issue 4, pp. 713-719.

XU, D., HWANG, P.A., WU, J.,(1986), Breaking of wind-generated waves, *Journal of Physical Oceanography*, Volume 16, pp. 2172-2178.

YEH, H.H., (1986), Experimental study of standing edge waves, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 168, pp. 291-304.

YIN, L., WANG, B., MA, X., ZOU, J., (1999), The nonlinear sloshing of liquid in tank with pitching, *Journal of Applied Mechanics of the American Society of Mechanical Engineers*, Volme 66, pp. 1032-1034.



VISTOS

AUTORIA

p/O Chefe do Núcleo de Engenharia Sísmica e  
Dinâmica de Estruturas



Ema Coelho  
**A. Campos Costa**  
Investigador Principal  
O Director

do Departamento de Estruturas



João Almeida Fernandes



Maria João Falcão Silva

Bolseira de Pós-Doutoramento



Alfredo Campos Costa

Investigador Principal

