LABORATÓRIO NACIONAL
DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE BARRAGENS DE BETÃO
Núcleo de Modelação Matemática e Física

Proc. 402/11/17726

TÓPICOS SOBRE EQUAÇÕES DE DERIVADAS PARCIAIS

Lisboa • Agosto de 2011

I&D BARRAGENS DE BETÃO

RELATÓRIO 310/**2011 – NMMF**

TÓPICOS SOBRE EQUAÇÕES DE DERIVADAS PARCIAIS

Neste relatório inclui-se: i)um tópico sobre o uso de distribuições na solução por potenciais harmónicos de equações com operadores Laplacianos; ii)um tópico sobre o uso de simetrias na solução de equações tensoriais de derivadas parciais em particular com operadores Laplacianos; iii)a demonstração de um teorema sobre mudança de coordenadas em distribuições.

TOPICS ABOUT PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

This report includes: i)a topic about the use of distributions in the harmonic potential solution of partial differential equations with Laplacian operators; ii)a topic about the use of solution symmetries for partial differential equations in particular with Laplacian operators; iii)the proof of a theorem about distributions frame change.

TÓPICOS SOBRE EQUAÇÕES DE DERIVADAS PARCIAIS

INTRODUÇÃO

I)A solução do problema harmónico de Neumann, gradiente segundo a normal exterior fixado na superfície fronteira S, e do problema de Dirichlet, variável fixada na superfície fronteira S, pode ser encontrada recorrendo ao potencial harmónico de camada simples e de camada dupla respectivamente.

Os Problemas Interiores podem ser formulados em Coordenadas Modais, em que se anulam os integrais de superfície das equações obedecidas pelos Potenciais, os quais se expressam em função de f (conhecido) em S, pelo que a solução no interior se obtém pelo integral ponderado em S de f [LNEC,2005,ITB31].

Idêntica simplificação se obtém se se expressa $f \approx \delta(\vec{y}-\vec{x}) \quad ; \quad \vec{x},\vec{y} \in S$, em que se anulam os integrais de superfície das equações obedecidas pelos Potenciais, os quais se expressam em função de f (conhecido). Neste caso a formulação é análoga à obtida pelo Teorema da Representação, que se baseia rigorosamente nas mesmas hipóteses.

II)As matrizes Jacobianas da Transformação de Coordenadas Cartesianas para Coordenadas Cilíndricas ou Esféricas em que se toma para parâmetro o ângulo φ, ($J(\overline{y}^p;\varphi)$), constituem um grupo de Lie de 1 parâmetro, contínuo, infinitesimal (relaciona dx com dy), apresentando simetria módulo 2π em φ (ângulo de rotação), em relação à equação de onda 2D (Coordenadas Cilíndricas) e em relação ao Laplaciano 3D (Coordenadas Esféricas).

Para que as forças dadas por δ mantenham a forma na Transformação de Coordenadas é necessário que $\left|J(\overline{y}^p;0)\right|=1$ em que $J(\overline{y}^p;0)$ é o Elemento Neutro do Grupo ($J(\overline{y}^p;0)=I$). Por outro lado $J(\overline{y}^p;\varphi)*J(\overline{y}^p;-\varphi)=J(\overline{y}^p;0)$ (as rotações φ e $-\varphi$ cancelam-se).

As PDE com 3 variáveis independentes transformam-se em PDE com 2 variáveis independentes por consideração da simetria em relação ao ângulo de rotação φ:

1)Aplicando a Transformada de Laplace em relação a z (Coordenadas Cilíndricas) e desenvolvendo os termos em série de Taylor na Variável Transformada s, igualando os termos de iguais potências de s obtém-se sistemas de ODE na variável r que resolvidos permitem por Transformada Inversa de Laplace $(L^{-1}(s^{\alpha})=\delta^{(\alpha)}(z))$ determinar a solução.

2)No caso de (Coordenadas Esféricas), a simetria em relação ao ângulo de rotação θ permite reduzir a PDE em duas variáveis independentes a uma ODE em r que resolvida por técnica semelhante à usada em 1) permite determinar a solução.

SIMPLIFICAÇÃO DOS POTENCIAIS HARMÓNICOS
RECORRENDO ÀS DISTRIBUIÇÕES

TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{y})}\left(\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right)\phi(\vec{y})dS_{\vec{y}} + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\frac{\partial\phi(\vec{y})}{\partial n(\vec{y})}dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}\in V, \vec{y}\in S$$

POTÊNCIAIS DE CAMADA SIMPLES
(PROBLEMA DE NEUMANN)

a)Equação de Derivadas Parciais

$$\nabla^2_{\vec{x}}\phi + f(\vec{x}) = 0 \quad ; \quad f(\vec{x}) = \int_S \frac{\partial\phi(\vec{y})}{\partial n(\vec{y})}\dot{\delta}(\vec{y}-\vec{x})dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}\in V; \vec{y}\in S$$

No Problema Interior a condição necessária para o equilíbrio é $\int_S \dot{\delta}(\vec{y}-\vec{x})\phi(\vec{y})_{;\bar{i}}\, n^{\bar{i}}(\vec{y})\, dS_{\vec{y}} = 0$. A solução fica determinada a menos de uma constante.

No Problema Exterior não existe condição necessária para o equilíbrio. A solução é única se satisfazer a condição de radiação.

b)Potencial de Camada Simples

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\varphi(\vec{y})dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}\in V; \vec{y}\in S$$

em que:

$$\int_S \delta(\vec{y}-\vec{x})\varphi(\vec{y})dS_{\vec{y}} + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{x})}\left(\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right)\varphi(\vec{y})dS_{\vec{y}} = f(\vec{x}) \quad ; \quad \vec{x},\vec{y}\in S$$

Pelo Teorema da Representação [Eringen, A.C.; Suhubi, E.S.]:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\delta(\vec{y}-\vec{x})}{|\vec{y}-\vec{x}|}\frac{\partial\phi(\vec{y})}{\partial n(\vec{y})}dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}\in V, \vec{y}\in S$$

vem:

$$\varphi(\vec{y}) = \frac{\partial\phi(\vec{y})}{\partial n(\vec{y})}\delta(\vec{y}-\vec{x}) \quad ; \quad \vec{x}\in V, \vec{y}\in S$$

Por outro lado:

$$\nabla^2_{\vec{x}}\phi(\vec{x}) = -f(\vec{x})$$

$$= -\int_S \dot{\delta}(\vec{y}-\vec{x})\frac{\partial\phi(\vec{y})}{\partial n(\vec{y})}dS_{\vec{y}} \quad \Rightarrow \quad \int_S \delta(\vec{y}-\vec{x})\varphi(\vec{y})dS_{\vec{y}} = f(\vec{x}) \quad ; \quad \vec{x}\in V, \vec{y}\in S$$

Assim:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\varphi(\vec{y})dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}\in V; \vec{y}\in S$$

e o integral

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{x})}\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\varphi(\vec{y})dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}; \vec{y}\in S$$

anula-se.

POTÊNCIAIS DE CAMADA DUPLA
(PROBLEMA DE DIRICHLET)

a)Equação de Derivadas Parciais

$$\nabla^2_{\vec{x}}\phi + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial n(\vec{x})} = 0 \quad ; \quad f(\vec{x}) = \int_S \phi(\vec{y})\dot{\delta}(\vec{y}-\vec{x})dS_{\vec{y}} \quad ;$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial n(\vec{x})} = -\int_S \frac{\partial\phi(\vec{y})}{\partial n(\vec{y})}\dot{\delta}(\vec{y}-\vec{x})dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}\in V; \vec{y}\in S$$

b)Potencial de Camada Dupla

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{y})}\left(\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right)\psi(\vec{y})dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}\in V; \vec{y}\in S$$

em que:

$$-\int_S \delta(\vec{y}-\vec{x})\psi(\vec{y})dS_{\vec{y}} + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{y})}\left(\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right)\psi(\vec{y})dS_{\vec{y}} = f(\vec{x}) \quad ; \quad \vec{x}, \vec{y}\in S$$

Nota:

$$\frac{\delta(\vec{y}-\vec{x})}{|\vec{y}-\vec{x}|} \approx \frac{\delta(r)}{r} = -\dot{\delta}(r)$$ mudança para coordenadas esféricas.

Nota:

$$-\int_S \delta(\vec{y}-\vec{x}) \frac{\partial\psi(\vec{y})}{\partial n(\vec{x})} dS_{\vec{y}} + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial n(\vec{y})} \left(\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|} \right) \psi(\vec{y}) dS_{\vec{y}} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial n(\vec{x})} \quad ; \quad \vec{x}, \vec{y} \in S$$

Pelo Teorema da Representação [Eringen, A.C.; Suhubi, E.S.]:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{y})} \left(\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|} \right) \phi(\vec{y}) \delta(\vec{y}-\vec{x}) dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x} \in V, \vec{y} \in S$$

vem:

$$\psi(\vec{y}) = -\phi(\vec{y})\delta(\vec{y}-\vec{x}) \quad ; \quad \vec{x} \in V, \vec{y} \in S$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \nabla^2_{\vec{x}}\phi(\vec{x}) &= -\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial n(\vec{x})} \\ &= -\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{y})} \delta(\vec{y}-\vec{x}) \psi(\vec{y}) \, dS_{\vec{y}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int_S \delta(\vec{y}-\vec{x}) \frac{\partial\psi(\vec{y})}{\partial n(\vec{x})} dS_{\vec{y}} = -\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial n(\vec{x})} \quad ; \quad \vec{x} \in V, \vec{y} \in S$$

$$\Rightarrow \int_S \delta(\vec{y}-\vec{x}) \psi(\vec{y}) dS_{\vec{y}} = -f(\vec{x})$$

e o integral

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n(\vec{y})} \left(\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|} \right) \psi(\vec{y}) dS_{\vec{y}} \quad ; \quad \vec{x}; \vec{y} \in S$$

anula-se.

SIMETRIAS DE EQUAÇÕES TENSORIAIS ESCALARES DE DERIVADAS PARCIAIS

MUDANÇA DE COORDENADAS NO OPERADOR LAPLACIANO

Seja x^m um sistema de eixos Euclideano.

$$A^{;m}_{;m} = J^m_p J^q_m A^{;p}_{;q} = J^m_p J^m_q A^{;p;q} = J^p_m J^q_m A_{;p;q}$$

em que:

$$J^p_m = \frac{\partial y^p(x^m)}{\partial x^m} \quad ; \quad J^m_p = \frac{\partial x^m(y^p)}{\partial y^p} \quad ; \quad J^m_p J^m_q = g_{pq} \quad ; \quad J^p_m J^q_m = g^{pq}$$

Se g constante a derivada covariante coincide com a derivada parcial.

De acordo com o teorema abaixo demonstrado:

$$\delta(x^m - x^m(\overline{y}^p)) = \delta(J^m_p(y^p - \overline{y}^p)) = \frac{\delta(y^p - \overline{y}^p)}{\left|J^m_p\right|}$$

Teorema:

$$\vec{z} = J\vec{x} \Rightarrow \delta(\vec{z}) = \delta(J\vec{x}) = \frac{\delta(\vec{x})}{|J|} = \frac{\delta(\vec{x})}{|\lambda|} \qquad ; \qquad |J|>0$$

Demonstração - Como:

$$\delta\left(J\vec{x}\right) = \delta\left(\vec{x}^T J^T\right) = \delta\left(J^T\vec{x}\right) = \delta\left(\vec{x}^T J\right) \quad ; \quad J = \phi\lambda\overline{\phi}^T \quad ; \quad J^T = \overline{\phi}\lambda\phi^T = \phi\overline{\lambda\phi}^T \quad J - \mathrm{Real}$$

e $(\phi^{-1} = \overline{\phi}^T)$:

$$\phi^{-1}J\phi = \lambda \Rightarrow J = \phi\lambda\phi^{-1} \quad ; \quad \phi^T J^T \phi^{-T} = \lambda \Rightarrow J^T = \phi^{-T}\lambda\phi^T \quad ; \quad \phi^{-1}J^T\phi = \overline{\lambda} \Rightarrow J^T = \phi\overline{\lambda}\phi^{-1}$$

Vem:

$$\delta\left(\phi\lambda\phi^{-1}\vec{x}\right) \underset{\vec{w}=\phi^{-1}\vec{x}}{=} \delta\left(\vec{w}^T\lambda\phi^T\right) \underset{\vec{y}^T=\vec{w}^T\lambda}{=} \delta\left(\vec{y}^T\phi^T\right) = \delta\left(\vec{y}^T\phi\right) = \delta\left(\lambda\phi\vec{w}\right) = \delta\left(\lambda\vec{x}\right)$$

Os λ valores próprios de J aparecem aos pares de complexos conjugados coincidindo com os $\overline{\lambda}$ valores próprios de J^T. Como sugerido por Sérgio Oliveira a troca das linhas de J e das colunas de $J\vec{x}$ não altera $\delta(J\vec{x})$.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Sejam x=(x^1,x^2,x^3) eixos Euclideanos, y=(r,φ,z) coordenadas cilíndricas, com a transformação de coordenadas $(x^1,x^2,x^3)=(r\cos\varphi,\, r\,\text{sen}\varphi,\, z)$ cuja matriz Jacobiana $J^m_n=\dfrac{\partial x^m}{\partial y^n}$ vem explicitamente:

$$J=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -r\,\text{sen}\varphi & 0\\ \text{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad ; \quad |J|=r\,. \quad \text{A métrica vem:} \quad g_{ij}=J^TJ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Para $\bar{y}^p=(1,0,0)$ vem $\bar{x}^p=(1,0,0)$ e $|J|=1$

Com $dx^m=J^m_n dy^n$; $(x^m-\bar{x}^m(\bar{y}^p))=J^m_p(y^p-\bar{y}^p)$ vem:

$$\phi^{;m}_{;m}=\delta(x^m-\bar{x}^m) \quad \Rightarrow \quad \phi^{;p}_{;p}=\frac{\delta(y^p-\bar{y}^p)}{|J|} \quad ; \quad |J(\bar{y}^p)|=1$$

Assim:

$$\frac{\partial^2\phi}{(\partial r)^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{(\partial\varphi)^2}+\frac{\partial^2\phi}{(\partial z)^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}=\delta(r-1,\varphi,z)$$

Simetria em φ implica:

$$\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{(\partial r)^2}+\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{(\partial z)^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(r,z)}{\partial r}=\delta(r-1,z) \quad ; \quad \Phi(r,z)=\int_0^{2\pi}\phi(r,\varphi,z)\,d\varphi$$

Pelo que $\phi(r,\varphi,z)=\dfrac{\Phi(r,z)}{2\pi}$. Efectuando a transformada de Laplace em relação a z:

$$s^2\hat{\Phi}(r,s)+\frac{\partial^2\hat{\Phi}(r,s)}{(\partial r)^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\Phi}(r,s)}{\partial r}=\delta(r-1)$$

Resolvida em relação a $\hat{\Phi}(r,s)$ e aplicando a transformada inversa de Laplace obtém-se $\Phi(r,z)$ e portanto $\phi(r,\varphi,z)$. Substituindo z=iCt obtém-se a solução $\phi(r,\varphi,iCt)$ da eq.:

$$\frac{\partial^2\Phi(r,iCt)}{(\partial r)^2}-\frac{\partial^2\Phi(r,iCt)}{C^2(\partial t)^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(r,iCt)}{\partial r}=\delta(r-1,iCt) \quad ; \quad \Phi(r,iCt)=\int_0^{2\pi}\phi(r,\varphi,iCt)\,d\varphi$$

$$; \quad \frac{\delta(t)}{iC}=\delta(iCt)$$

Desenvolve-se em série de Taylor $\hat{\Phi}(r,s)=\hat{\Phi}(r,0)+\cdots+\frac{\partial^n\hat{\Phi}(r,0)}{(\partial s)^n}\frac{s^n}{n!}+\cdots$ e estabelece-se as ODE em r para cada potência de s: $\left(s^2+\frac{\partial^2}{(\partial r)^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\hat{\Phi}(r,s)=\delta(r-1)$. Assim:

$$\left(\frac{\partial^n\hat{\Phi}(r,0)}{(\partial s)^n n!}+\left(\frac{\partial^2}{(\partial r)^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial^{n+2}\hat{\Phi}(r,0)}{(\partial s)^{n+2}(n+2)!}\right)s^{n+2}=\delta^{(0)}(r)+\cdots+\frac{(-1)^m}{m!}\delta^{(m)}(r)+\cdots$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

Sejam x=(x^1,x^2,x^3) eixos Euclideanos, y=(r,θ,φ) coordenadas esféricas, com a transformação de coordenadas $(x^1,x^2,x^3)=(r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi,\, r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\, r\cos\theta)$ cuja matriz Jacobiana $J^m_n=\frac{\partial x^m}{\partial y^n}$ vem explicitamente:

$$J=\begin{bmatrix}\mathrm{sen}\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\\ \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi & r\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi & r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\theta & 0\end{bmatrix}\quad;\quad |J|=r^2\mathrm{sen}\theta.$$

A métrica vem: $g_{ij}=J^TJ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\mathrm{sen}^2\theta\end{bmatrix}$

Para $\bar{y}^p=(1,\frac{\pi}{2},0)$ vem $\bar{x}^p=(1,0,0)$ e $|J|=1$

Com $dx^m=J^m_n dy^n$; $(x^m-\bar{x}^m(\bar{y}^p))=J^m_p(y^p-\bar{y}^p)$ vem:

$\phi^{;m}_{;m}=\delta(x^m-\bar{x}^m)\ \Rightarrow\ \phi^{;p}_{;p}=\frac{\delta(y^p-\bar{y}^p)}{|J|}$; $|J(\bar{y}^p)|=1$

Assim:

$$\frac{\partial^2\phi}{(\partial r)^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{(\partial\theta)^2}+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{(\partial\varphi)^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\delta(r-1,\theta-\frac{\pi}{2},\varphi)$$

Simetria em φ implica:

$$\frac{\partial^2\Phi(r,\theta)}{(\partial r)^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi(r,\theta)}{(\partial\theta)^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial\theta}=\delta(r-1,\theta-\frac{\pi}{2})$$

; $\Phi(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\phi(r,\theta,\varphi)\,d\varphi$

Pelo que $\phi(r,\theta,\varphi)=\dfrac{\Phi(r,\theta)}{2\pi}$. Simetria em θ implica:

$$\frac{\partial^2\Psi(r)}{(\partial r)^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}=\delta(r-1) \quad ; \quad \Psi(r)=\int_0^{\pi}\Phi(r,\theta)\,d\theta$$

Assim $\phi(r,\theta,\varphi)=\dfrac{\Psi(r)}{2\pi^2}$. Efectuando a transformada de Laplace em relação a r:

$$\left(\frac{1!}{s^2}\right)*\left(s^2\hat{\Psi}(s)\right)+2s\hat{\Psi}(s)=e^{-s} \qquad ; \qquad L(r^n)=\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)$$

Visto: $L(\delta(r\text{-}1))=e^{-s}$; $e^{-s}=1\text{-}s+\ldots+(-1)^n s^n/n!+$; $L^{-1}(e^{-s})=\delta(r)\text{-}\delta^{(1)}(r)+\ldots+(-1)^n\delta^{(n)}(r)/n!$

resolve-se em relação a $\Psi(r)=\sum\limits_{n=0}\psi^n(r)$; $\psi^n(r)=-\dfrac{(-1)^n}{4\pi n!}\dfrac{d^n}{(dr)^n}\left(\dfrac{1}{r}\right)$ e portanto obtém-se $\phi(r,\theta,\varphi)$.

TRANSLAÇÕES

Seja:

$$\phi^{;i}_{;i}(x^m)=\delta(x^m-x^m(\overline{y}^p)) \quad ; \quad z^m=x^m-x^m(\overline{y}^p)$$

Então:

$$\phi^{;i}_{;i}(z^m)=\delta(z^m) \quad \Rightarrow \quad x^m=z^m+x^m(\overline{y}^p)$$

BIBLIOGRAFIA

Eringen, A.C.; Suhubi, E.S. – “Elastodynamics I,II”. Academic Press, 1974.

Hassani, S. – “Mathematical Physics. A Modern Introduction to its Foundations”. Springer Verlag, 1999.

Mijailov, V. – “Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales”. Mir, 1978.

Stormark, O. – “Lie’s Structural Approach to PDE Systems”. Cambridge University Press, 2000.

Anexo

Nota:

$$\delta(J\vec{x})=\delta(\phi\lambda\overline{\phi}^T\vec{x})=\overline{\delta}(\overline{\phi\lambda}\phi^T\vec{x})$$

$$\delta(J^T\vec{x})=\delta(\overline{\phi}\lambda\phi^T\vec{x})=\delta(\phi\overline{\lambda\phi}^T\vec{x})=\overline{\delta}(\overline{\phi}\lambda\phi^T\vec{x}) \quad ; \quad \vec{x}\in R^n$$

$$\begin{cases} J\to(\phi,\lambda)\to(\overline{\phi},\overline{\lambda}) \\ J^T\to(\phi,\overline{\lambda})\to(\overline{\phi},\lambda) \end{cases} \quad ; \quad \delta=\overline{\delta}$$

visto que:

$$\overline{\delta}((A+jB)\vec{x})=\delta((A-jB)\vec{x}) \quad ; \quad |A|>0 \quad ; \quad |B|>0$$

$$\delta((A+jB)\vec{x})=\overline{\delta}((A-jB)\vec{x})$$

Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Agosto de 2011

VISTOS

O Chefe do Núcleo de Modelação
Matemática e Física

José Vieira de Lemos

O Director do Departamento de
Barragens de Betão

José Vieira de Lemos

AUTORIA

Romano Jorge Calhau Câmara

Romano Jorge Calhau Câmara
Investigador Coordenador