

## **Análise estatística das características mecânicas de cordões de pré-esforço**



**Luciano  
Jacinto<sup>1</sup>**



**Luís Oliveira  
Santos<sup>2</sup>**



**Luís Canhoto  
Neves<sup>3</sup>**



**Manuel Pipa<sup>4</sup>**

### **RESUMO**

O estudo que se apresenta diz respeito ao tratamento estatístico de propriedades mecânicas de cordões de pré-esforço obtidas em ensaios de tracção realizados no Laboratório de Produtos Metálicos do LNEC no âmbito da certificação desses produtos. Os ensaios de tracção abrangem o período entre 2001 e 2009 e envolvem várias trefilarias de vários países. Julga-se por isso que a análise efectuada tem um grau razoável de abrangência quer temporal quer em termos de proveniência dos aços. Neste estudo analisa-se a variabilidade das principais propriedades mecânicas dos cordões, que se constata ser bastante baixa, e propõem-se modelos probabilísticos para essas propriedades.

### **PALAVRAS-CHAVE**

Cordões de pré-esforço; tensão de rotura; tensão limite convencional de proporcionalidade; extensão total na força máxima; módulo de elasticidade.

<sup>1</sup> Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Departamento de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal. [ljacinto@dec.isel.ipl.pt](mailto:ljacinto@dec.isel.ipl.pt).

<sup>2</sup> Laboratório Nacional de Engenharia Civil, DE-NOE, Lisboa, Portugal. [luis.osantos@lnec.pt](mailto:luis.osantos@lnec.pt).

<sup>3</sup> Faculdade de Ciência e Tecnologia da UNL, Departamento de Engenharia Civil, Almada, Portugal. [luis.neves@fct.unl.pt](mailto:luis.neves@fct.unl.pt)

<sup>4</sup> Laboratório Nacional de Engenharia Civil, DE-NCE, Lisboa, Portugal. [mpipa@lnec.pt](mailto:mpipa@lnec.pt).

## 1. INTRODUÇÃO

Um dos princípios da segurança estrutural assenta na constatação da variabilidade das diferentes grandezas intervenientes — acções, propriedades dos materiais e parâmetros geométricos. Para modelar a incerteza originada por esta variabilidade dispõe-se da Teoria das Probabilidades e da sua aliada, a Estatística. O estudo que se apresenta diz respeito à análise estatística de 3 amostras de ensaios de tracção de cordões de pré-esforço realizados no Laboratório de Produtos Metálicos (LPM) do LNEC e pertencentes às famílias Y1860 S7 13.0, Y1860 S7 15.2 e Y1860 S7 16.0. Os cordões estudados são portanto todos de 7 fios e têm todos uma tensão de rotura nominal de 1860 MPa. Os diâmetros nominais dos cordões são de, respectivamente, 13.0, 15.2 e 16.0 mm, a que correspondem áreas nominais de 100, 140 e 150 mm<sup>2</sup>. Estes têm sido de longe os cordões de pré-esforço mais utilizados no País.

As amostras referem-se a ensaios realizados no período entre 2001 e 2009 no âmbito da certificação destes produtos [1], incluindo-se também ensaios de tracção solicitados directamente por diversos empreiteiros no decurso de trabalhos de construção. Durante este período o LPM realizou mais de 500 ensaios de tracção para o conjunto das 3 famílias de cordões acima. Todavia, vários desses ensaios referem-se a cordões produzidos a partir do mesmo vazamento. Ora, como é sabido, a variabilidade num mesmo vazamento é inferior à variabilidade de vazamento para vazamento. Assim, para efeitos de tratamento estatístico, escolheu-se aleatoriamente apenas um ensaio por cada vazamento ensaiado, o que reduziu a amostra para 131 ensaios, distribuídos da seguinte forma: 19 ensaios de cordões de 13.0 mm, 59 ensaios de cordões de 15.2 mm e 53 ensaios de cordões de 16.0 mm.

Entre outras propriedades, estudou-se separadamente para cada diâmetro o módulo de elasticidade, a tensão máxima, a extensão total correspondente e ainda a tensão limite convencional de proporcionalidade. No entanto constatou-se que as diferenças nos valores médios dessas propriedades entre as famílias de cordões eram da mesma ordem de grandeza dos desvios-padrão, o que permitiu considerar as três famílias como pertencentes à mesma população. As três famílias foram pois reunidas numa única população.

Os cordões ensaiados têm origem em produtores de diferentes países, incluindo Portugal, Espanha, Tailândia e Itália. Contudo, como se verá, a variabilidade das propriedades mecânicas estudadas é relativamente pequena, não se justificando por isso uma análise separada por produtor. De referir também que a variabilidade das diferentes quantidades analisadas, medida pelos respectivos desvios-padrão, inclui não só a variabilidade inerente da grandeza estudada, mas também a variabilidade do próprio ensaio, que inclui, por exemplo, erros de medição de natureza aleatória. Por conseguinte, os desvios-padrão calculados tendem a ser superiores aos desvios-padrão reais. De qualquer forma, como se disse, a variabilidade das propriedades mecânicas é relativamente pequena, pelo que não se justifica qualquer esforço no sentido de reduzir a incerteza originada pela variabilidade inerente ao ensaio.

Na Figura 1 mostra-se um diagrama tensão-extensão típico dum cordão de pré-esforço, indicando-se também a notação empregue neste estudo referente às propriedades mecânicas estudadas, que coincide com a notação usada na EN 1992 [2]. A tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.1% será denotada por  $f_{p0.1}$ , a tensão máxima (ou tensão de rotura) por  $f_p$  e a extensão correspondente (extensão total na força máxima ou extensão última) por  $\epsilon_u$ . O módulo de elasticidade será denotado por  $E_p$ . Conforme mostra a Figura 1, os cordões não têm patamar de cedência, que aliás é característico de aços trefilados de alta resistência, observando-se sistematicamente, no entanto, uma ligeira inflexão correspondente ao endurecimento do aço, antes de se atingir a tensão máxima.

Como se disse, os cordões estudados pertencem todos à classe Y1860 que tem sido de longe a classe mais utilizada quer em aço em fio quer em aço em cordão. O valor 1860 (que identifica a classe) é designado *valor nominal da tensão de rotura*, expresso em MPa. O valor nominal da tensão de rotura, por vezes também designado *valor especificado* [3, 4], corresponde ao quantilho 0.05 da sua distribuição de probabilidade, geralmente designado *valor característico* (inferior) e denotado por  $f_{pk}$ . Portanto, no contexto do presente estudo, as designações “valor nominal da tensão de rotura” e “valor característico da tensão de rotura” têm o mesmo significado.

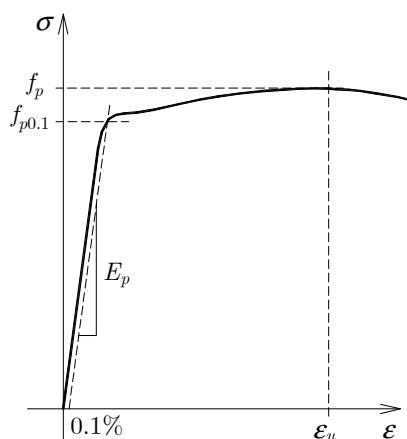


Figura 1. Diagrama tensão-extensão típico dum cordão de pré-esforço.

O objectivo deste estudo é analisar a variabilidade das propriedades mecânicas mais importantes dos cordões de pré-esforço e comparar os resultados obtidos com as correspondentes recomendações do *Probabilistic Model Code* (PMC) [5]. Na secção seguinte analisa-se brevemente em que consistem tais recomendações.

## 2. ANÁLISE DAS RECOMENDAÇÕES DO *PROBABILISTIC MODEL CODE*

No Quadro 1 mostram-se as recomendações do PMC [5] concernentes à tensão de rotura  $f_p$ , ao módulo de elasticidade  $E_p$  e à extensão total na força máxima  $\epsilon_u$ . O valor  $f_{pk}$  denota, recorde-se, o valor nominal da tensão de rotura, ou valor característico.

Quadro 1. Recomendações do *Probabilistic Model Code* [5].

Variável	Média	D. padrão	Coef. Variação	Distribuição
$f_p$	$1.04 f_{pk}$ ou $f_{pk} + 66$ [MPa]	- 40 Mpa	0.025 -	Normal
$E_p$	200 GPa, para fios 195 Gpa, para cordões 200 Gpa, para barras	-	0.02	Normal
$\epsilon_u$	0.05	0.0035	-	Normal

Como se observa, o documento em apreço apresenta duas expressões para o valor médio de  $f_p$ , uma que pressupõe coeficiente de variação constante e outra que pressupõe desvio padrão constante. O documento não dá indicações de qual a expressão a usar, ficando subentendido que se deva utilizar a que for mais desfavorável em termos de segurança para a estrutura.

Relativamente à tensão limite convencional de proporcionalidade  $f_{p0.1}$ , o PMC [5] recomenda o modelo:  $f_{p0.1} = 0.85 f_p$  — modelo que pressupõe uma correlação perfeita entre  $f_p$  e  $f_{p0.1}$ . Conforme veremos este modelo suscita algumas reservas.

### 3. ANÁLISE ESTATÍSTICA

Nesta secção faz-se uma análise estatística das diferentes propriedades mecânicas dos cordões e tecem-se algumas considerações relativas à sua relevância para a segurança das estruturas. Refira-se que os valores das tensões foram determinados em todos os casos dividindo os valores das forças obtidas nos ensaios pelas áreas efectivas dos cordões (e não as áreas nominais).

#### 2.1 Tensão de rotura

Na Figura 2 mostra-se o histograma (com 8 classes) da tensão de rotura  $f_p$  da amostra dos 131 ensaios de tracção referidos anteriormente, assim como os valores de  $f_p$  por ano.

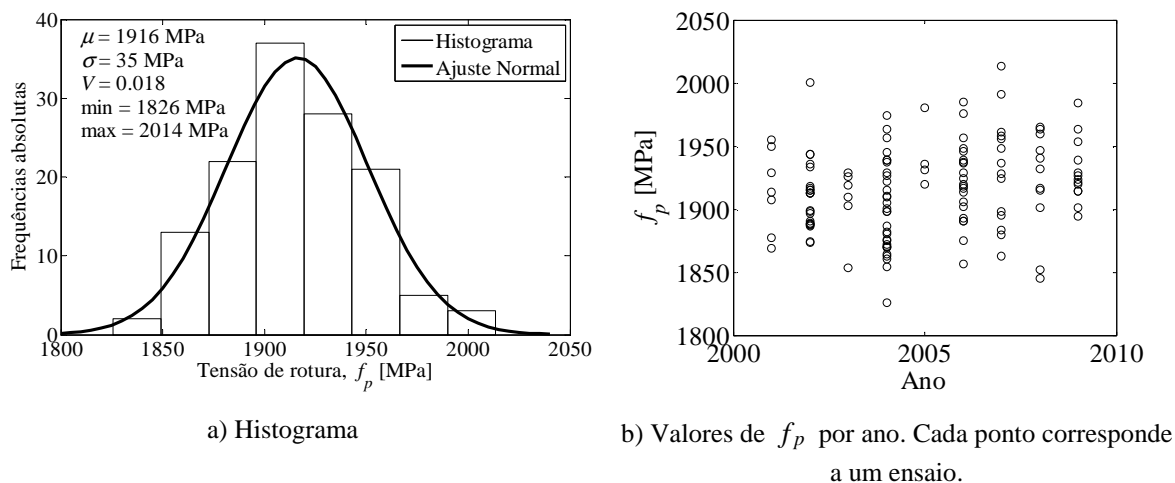


Figura 2. Tensão de rotura  $f_p$ .

Conforme se observa, o modelo normal ajusta-se bem ao histograma, o que está em harmonia com as recomendações do PMC [5] e da própria pré-Norma prEN 10138 [4]. Note-se o coeficiente de variação muito baixo ( $V = 0.018$ ). De acordo com os parâmetros obtidos ( $\mu = 1916$  MPa e  $\sigma = 35$  MPa), o valor característico de  $f_p$  é estimado em  $f_{pk} = 1916 - 1.645 \times 35 \cong 1860$  MPa, o que satisfaz o valor especificado para a classe Y1860. A estimativa do valor característico obtida recorrendo directamente à distribuição empírica é de 1861 MPa.

Recorde-se que o PMC [5] recomenda para o desvio padrão o valor  $\sigma = 40$  MPa, valor este cerca de 14% superior ao valor obtido.

Relativamente ao gráfico b) da Figura 2, pode-se concluir que não há qualquer tendência nos valores da tensão de rotura no período observado (2001 a 2009). Este gráfico sugere também que a amostra está isenta de *outliers*.

## 2.2 Tensão limite convencional de proporcionalidade

A tensão limite convencional de proporcionalidade  $f_{p0.1}$  é um parâmetro de grande importância na segurança aos estados limites últimos, e em certa medida é mais determinante do que a própria tensão de rotura  $f_p$ , pois esta só é atingida para extensões relativamente elevadas (graças à boa ductilidade dos aços), dificilmente atingidas em estado limite último. Na Figura 3 mostra-se o histograma de  $f_{p0.1}$  e a sua variação temporal (131 ensaios).

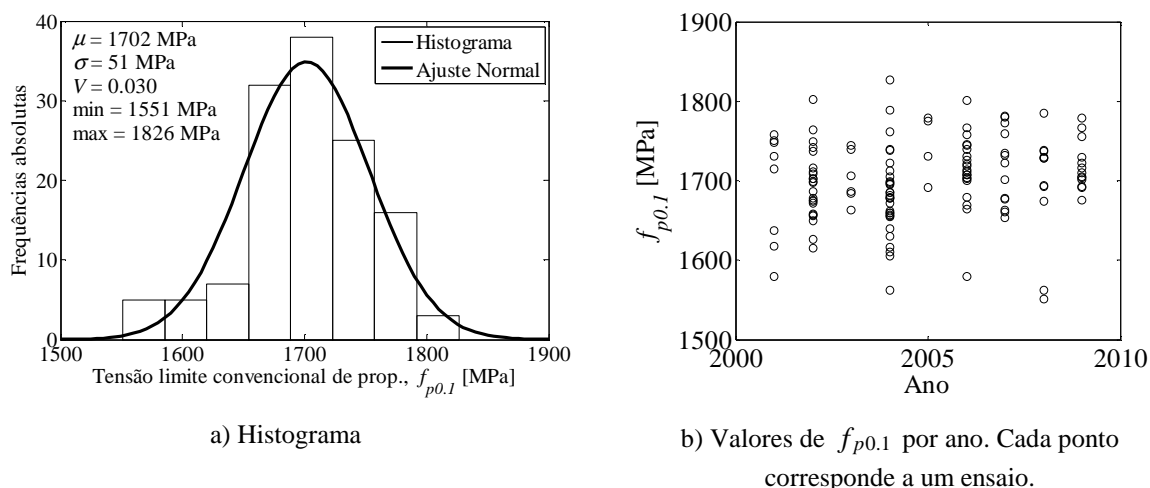


Figura 3. Tensão limite convencional de proporcionalidade  $f_{p0.1}$ .

Uma primeira observação relativa à tensão limite convencional de proporcionalidade  $f_{p0.1}$  é que esta possui maior variabilidade ( $\sigma_{f_{p0.1}} = 51$  MPa) do que a tensão de rotura  $f_p$  ( $\sigma_{f_p} = 35$  MPa). Na verdade, a tensão  $f_{p0.1}$  é mais sensível do que a tensão de rotura  $f_p$ , por depender do valor medido do módulo de elasticidade e ainda da curvatura do diagrama tensão-extensão na zona onde se inicia a plastificação. Esta constatação suscita à partida um comentário ao modelo  $f_{p0.1} = 0.85f_p$  proposto no PMC. Com efeito, este modelo implica que  $\sigma_{f_{p0.1}} = 0.85\sigma_{f_p}$ , ou que  $\sigma_{f_{p0.1}} < \sigma_{f_p}$ , mas, como se viu,  $\sigma_{f_{p0.1}} > \sigma_{f_p}$ . Mais à frente propõe-se um modelo probabilístico para a obtenção de  $f_{p0.1}$  a partir de  $f_p$  (baseado numa análise de regressão) que permite ultrapassar esta dificuldade.

De acordo com os resultados obtidos, o valor característico de  $f_{p0.1}$  é estimado em  $f_{p0.1k} = 1702 - 1.645 \times 51 = 1618$  MPa, que está acima do valor especificado para a classe Y1860, que é de 1600 MPa [3]. A razão entre o valor médio de  $f_{p0.1}$  e o valor médio de  $f_p$  é de  $1702/1916 = 0.89$  e a razão entre os respectivos valores característicos é de  $1618/1860 = 0.87$ . Esta razão é importante na caracterização da ductilidade dos aços.

Relativamente ao gráfico b) da Figura 2, não se observa nenhuma tendência nos valores de  $f_{p0.1}$  durante o período observado. Este gráfico sugere também que a amostra pode ser considerada isenta de *outliers*.

## 2.3 Extensão total na força máxima

A extensão total na força máxima  $\epsilon_u$ , indiscutivelmente um parâmetro importante na segurança das estruturas, não suscita em geral preocupações, tendo em conta que os valores usuais desse parâmetro (valor médio acima de 5%, como mostra a Figura 4) garantem uma capacidade de rotação das secções em domínio plástico (e conseqüentemente uma capacidade de redistribuição de esforços em estruturas de betão) superior ao que normalmente é requerido. Efectivamente, mesmo para extensões na fase de esticamento relativamente elevadas, por exemplo extensões da ordem de 0.7%, o incremento de

extensão necessário para levar o aço à rotura seria de  $5\% - 0.7\% = 4.3\%$ , a que corresponderiam níveis de fendilhação e deformação no betão muito elevados. Na Figura 4 mostra-se o histograma da extensão na força máxima  $\varepsilon_u$  respeitante à amostra de 131 ensaios que se tem vindo a estudar.

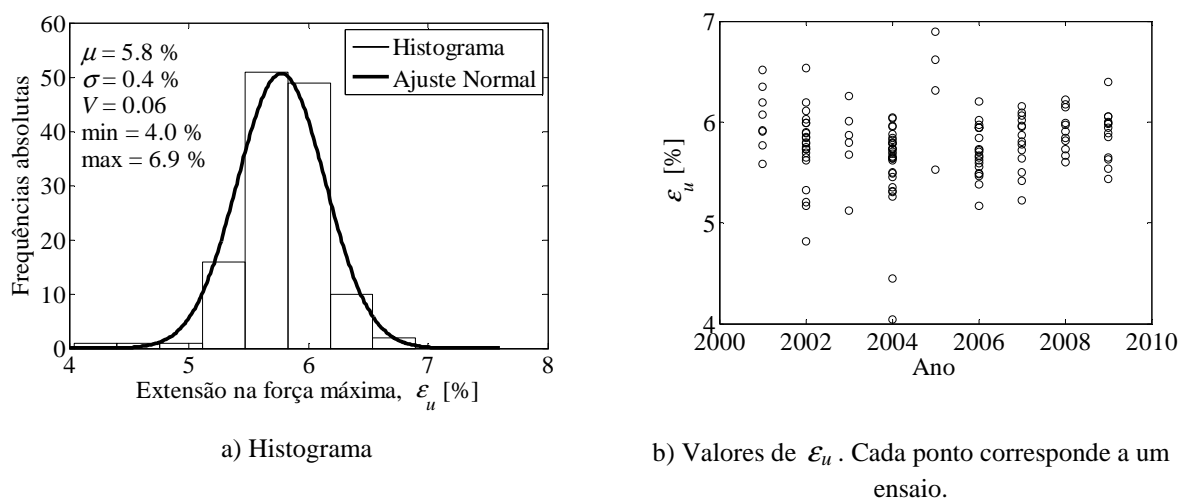


Figura 4. Extensão na força máxima  $\varepsilon_u$ .

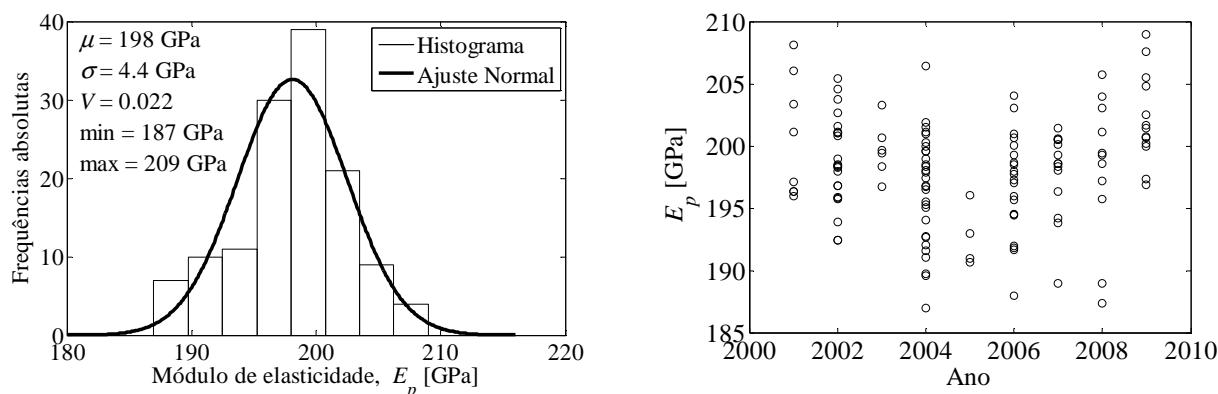
Comparando os valores obtidos (média e desvio padrão) com as recomendações do PMC, pode-se concluir que estas recomendações afiguram-se razoáveis. O histograma, que se apresenta relativamente simétrico, corrobora a recomendação do PMC [5] que sugere para  $\varepsilon_u$  uma distribuição Normal. O gráfico temporal de  $\varepsilon_u$  não mostra qualquer tendência assinalável. Por outro lado, os valores mínimos e máximos observados não parecem ser *outliers*. Refira-se ainda que a amostra disponível (ensaios provenientes de 131 vazamentos) satisfaz o valor especificado em Portugal, a saber,  $\varepsilon_u \geq 3.5\%$  [3], que também é preconizado na prEN 10138 [4].

## 2.4 Módulo de elasticidade

Relativamente ao módulo de elasticidade  $E_p$ , o conhecimento preciso do seu valor tem importância principalmente na fase de colocação em obra e esticamento dos cabos, tendo em conta que, como é sabido, um dos critérios para o controlo da força aplicada tem por base a comparação entre alongamentos medidos e alongamentos calculados, os quais, naturalmente, são função do módulo de elasticidade. Ao nível da verificação da segurança, trata-se de um parâmetro com alguma importância apenas com respeito a estados limites de utilização, nomeadamente estado limite de descompressão e abertura de fendas. Mas tem pouca expressão ao nível da segurança aos estados limites últimos, dado que normalmente quando estes são atingidos os aços já se encontram no domínio plástico.

Na Figura 5 mostra-se o histograma do módulo de elasticidade  $E_p$  referente à amostra de 131 ensaios, assim como a variação temporal de  $E_p$  no período observado (2001 a 2009). O histograma apresentado sugere que o modelo normal, como recomenda o PMC, não é um modelo inadequado para descrever  $E_p$ . Para aço em cordão, tanto o PMC como a EN 1992 recomendam para  $E_p$  um valor médio de 195 GPa. Conforme se observa, a média dos 131 ensaios é ligeiramente superior a este valor, embora a diferença seja pequena (1.5%). Relativamente ao coeficiente de variação o PMC recomenda 0.02, a que corresponde um desvio padrão de  $0.02 \times 195 = 3.9$  GPa, cerca de 11% mais baixo do que o valor obtido (4.4 GPa). Assim, mantendo a recomendação muito usual para o valor médio de  $E_p$  igual a 195 GPa [3, 4], julga-se no entanto que se deva adoptar um desvio padrão superior, 5 GPa, por exemplo.

De acordo com os critérios adoptados em Portugal são aceitáveis valores de  $E_p$  no intervalo  $E_p = 195 \pm 10 = [185, 205]$  [GPa] [3]. Observaram-se alguns valores fora deste intervalo.



a) Histograma

b) Valores de  $E_p$  por ano. Cada ponto corresponde a um ensaio.

Figura 5. Módulo de elasticidade  $E_p$ .

## 2.5 Área dos cordões

De acordo com o especificado tanto em Portugal [3] como nas versões mais recentes da prEN 10138 [4], a tolerância aceite para a área dos cordões é de  $\pm 2\%$  do valor nominal. O histograma que se apresenta na Figura 6 referente a uma amostra de 257 cordões de 15.2 mm satisfaz esta regra. Note-se que para efeitos de estudo da variabilidade da área dos cordões não há inconveniente em juntar provetes oriundos do mesmo vazamento uma vez que a sua área depende essencialmente das operações efectuadas pelas trefilarias. Embora o histograma apresentado diga respeito a cordões de 15.2 mm, o coeficiente de variação obtido para os cordões de 13.0 e 16.0 mm foi muito idêntico.

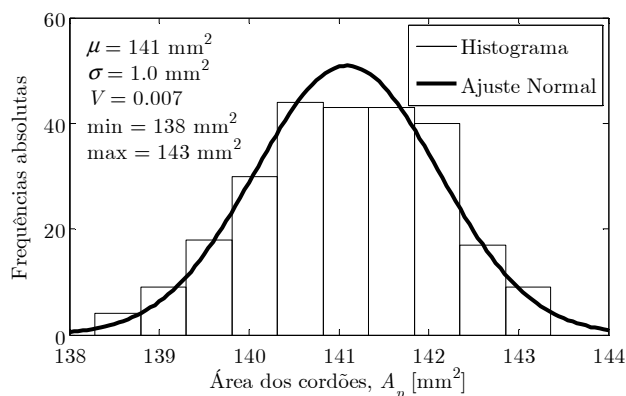


Figura 6. Histograma da área de cordões com 15.2 mm de diâmetro nominal.

Assim, face aos resultados obtidos e face ao controlo de qualidade normalmente usado em relação à área dos cordões, julga-se razoável adoptar para  $A_p$  um modelo normal com média igual à área nominal e coeficiente de variação de 0.01.

## 2.6 Estudos de correlação

### 2.1.1 Correlação entre a tensão limite convencional de proporcionalidade a tensão de rotura

No gráfico da Figura 7 mostra-se o diagrama de dispersão dos pontos  $(f_p, f_{p0.1})$  relativo à amostra dos 131 ensaios de tracção que se tem vindo a estudar. Obtiveram-se os seguintes parâmetros de

regressão:  $\hat{\beta}_0 = -543 \text{ MPa}$ ;  $\hat{\beta}_1 = 1.17$ ;  $\hat{\sigma} = 32.1 \text{ MPa}$ . Relativamente ao coeficiente de determinação  $R^2 = 0.635$ , que corresponde a um coeficiente de correlação de  $\rho = \sqrt{R^2} = 0.80$ , indica uma correlação bastante razoável entre a tensão limite convencional de proporcionalidade  $f_{p0.1}$  e a tensão de rotura  $f_p$ .

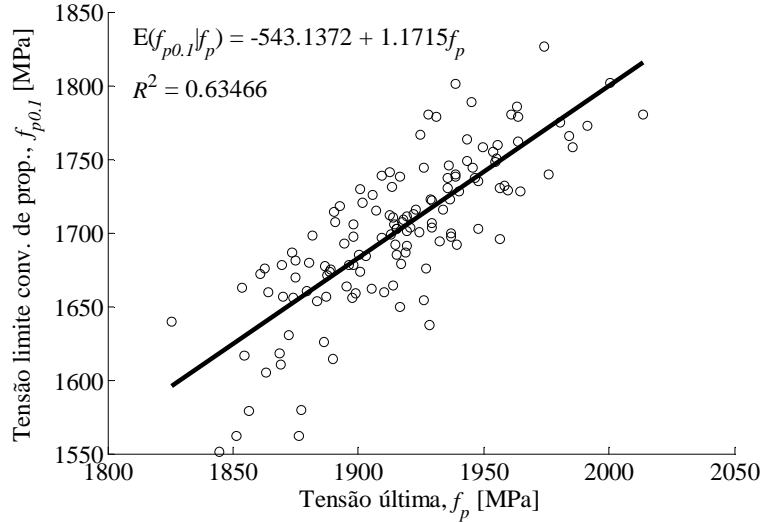


Figura 7. Gráfico de dispersão de pontos  $(f_p, f_{p0.1})$ .

Com base no modelo de regressão acima sugere-se que, para o caso de se desejar simular simultaneamente  $f_{p0.1}$  e  $f_p$ , seja adoptado o seguinte modelo probabilístico:

$$f_{p0.1} = -500 + 1.15f_p + 30Z \quad (1)$$

onde  $Z \sim N(0,1)$ . Determine-se a média e desvio padrão deste modelo considerando os valores  $\mu_{f_p} = 1916 \text{ MPa}$  e  $\sigma_{f_p} = 35 \text{ MPa}$  (ver Figura 2). Tem-se:

$$\mu_{f_{p0.1}} = -500 + 1.15 \times 1916 + 30 \times 0 = 1703 \text{ MPa}; \quad \sigma_{f_{p0.1}} = \sqrt{1.15^2 \times 35^2 + 30^2} = 50 \text{ MPa},$$

valores estes praticamente coincidentes com parâmetros obtidos (Figura 3), sugerindo que o modelo proposto é adequado.

### 2.1.1 Correlação entre extensão total na força máxima e tensão de rotura

No gráfico da Figura 8 mostra-se o diagrama de dispersão dos pontos  $(f_p, \epsilon_u)$ . O gráfico sugere que as variáveis  $\epsilon_u$  e  $f_p$  podem ser consideradas independentes.

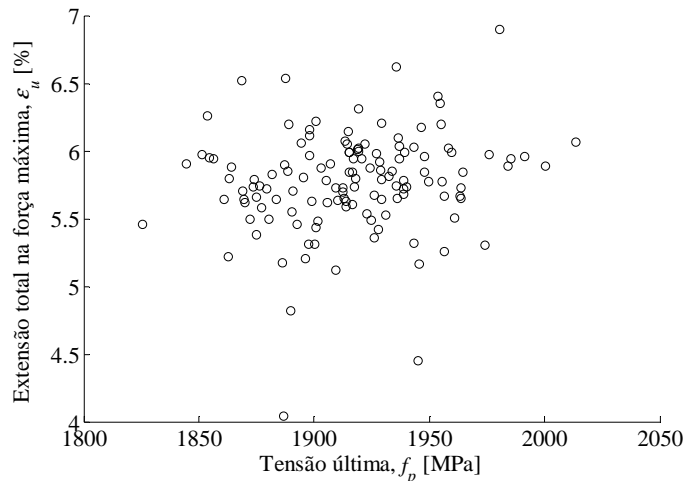


Figura 8. Gráfico de dispersão de ponto  $(f_p, \epsilon_u)$ .



#### 4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

O estudo apresentado permitiu apreciar a baixa variabilidade das propriedades mecânicas dos cordões de pré-esforço, o que naturalmente beneficia a segurança das estruturas. A maior variabilidade obtida foi relativa à extensão na força máxima  $\epsilon_u$  onde se obteve um coeficiente de variação de cerca de 0.06. Para as restantes propriedades obtiveram-se coeficientes de variação inferiores a 0.03.

Julga-se que a amostra estudada é suficientemente representativa para que dela se possam propor modelos probabilísticos para as principais propriedades mecânicas dos cordões de pré-esforço. No Quadro 2 apresenta-se uma síntese dos modelos que se propõem.

Quadro 2. Síntese dos modelos probabilísticos propostos para cordões de 7 fios da classe Y1860  
(  $f_{pk} = 1860$  MPa ).

Variável	Unidade	Média	Desv. Padrão	Coef. Variação	Distribuição	Obs.
$f_p$	MPa	$\mu_{f_p} = f_{pk} + 1.645 \times 35$	35	-	Normal	(1)
$f_{p0.1}$	MPa	$0.89 \times \mu_{f_p}$	50	-	Normal	(2)
$\epsilon_u$	-	5%	0.4%	-	Normal	
$E_p$	GPa	195	5	-	Normal	
$A_p$	-	Valor nominal	-	0.01	Normal	

Observações:

- (1) O modelo proposto baseou-se nos resultados obtidos para cordões da classe Y1860, onde o valor 1860 (que identifica a classe) refere-se ao valor característico da tensão de rotura. No entanto, levando em conta o controlo de qualidade que normalmente é exercido neste tipo de produto, acredita-se que o mesmo modelo pode ser aplicado a cordões e fios de outras classes. Para a classe específica Y1860, o valor médio de  $f_p$  que se obtém a partir do modelo proposto é de  $\mu_{f_p} = 1860 + 1.645 \times 35 = 1917$  MPa. A média obtida para o conjunto dos 131 ensaios foi de 1916 MPa.
- (2) Para a classe Y1860, o modelo proposto conduz a  $\mu_{f_{p0.1}} = 0.89 \times 1917 = 1706$  MPa. O valor obtido para a amostra de 131 ensaios foi de 1702 MPa. O modelo proposto baseou-se apenas em cordões da classe Y1860. Acredita-se, no entanto, que este modelo é aplicável a cordões de outras classes.

Demonstrou-se que existe forte correlação entre a tensão limite convencional de proporcionalidade  $f_{p0.1}$  e a tensão de rotura  $f_p$ . De facto, essas propriedades não podem ser considerados independentes. No caso de necessidade de modelação simultânea destas duas propriedades, propôs-se o modelo:  $f_{p0.1} = -500 + 1.15 f_p + 30Z$ , onde  $Z \sim N(0,1)$ , com  $f_p$  expresso em MPa.

Finalmente, como última nota, enfatiza-se que as propostas acima resultaram de ensaios realizados no período entre 2001 e 2009. Durante este período não se observou nenhuma tendência nos parâmetros mecânicos estudados. No entanto, para efeitos de avaliações estruturais (segurança de pontes existentes), deve-se ter alguma prudência em usar os modelos acima, especialmente se os aços tiverem sido produzidos num período afastado do período estudado.

## **AGRADECIMENTOS**

O primeiro autor deseja expressar profunda gratidão e reconhecimento à colega Cláudia Moreira, Chefe do LPM do LNEC, pela sua pronta disponibilidade no esclarecimento de questões que foram surgindo durante o desenvolvimento deste estudo. Agradece também o apoio que tem recebido por parte do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, o excelente acolhimento e estímulo por parte Laboratório Nacional de Engenharia Civil, e ainda o financiamento parcial por parte da Fundação para a Ciência e Tecnologia, através da bolsa SFRH/BD/45022/2008.

## **REFERÊNCIAS**

- [1] MOREIRA C., ANDRÉ J., LOURO A., PIPA M. – Garantia da qualidade das armaduras para betão armado, BE 2008, Guimarães, 5 a 7 de Novembro de 2008.
- [2] EN 1992 – Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN, Brussels, 2004.
- [3] E453 – Cordões de aço para pré-esforço. Características e Ensaios. Especificação LNEC, 2002.
- [4] prEN10138 – Prestressing steels - Part 1: General requirements. CEN, Março de 2009.
- [5] JCSS – Probabilistic Model Code. Joint Committee on Structural Safety, <http://www.jcss.ethz.ch>, 12-th draft, 2001.