LABORATÓRIO NACIONAL
DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE BARRAGENS DE BETÃO
Núcleo de Modelação Matemática e Física

Proc. 402/11/17726

ONDAS ESFÉRICAS QUÂNTICAS

Lisboa • Maio de 2011

I&D BARRAGENS DE BETÃO

RELATÓRIO 192/**2011 – NMMF**

ONDAS ESFÉRICAS QUÂNTICAS

O objectivo deste relatório é o estudo da matemática aplicada à solução de problemas físicos de propagação de ondas esféricas com operador espacial biharmónico, consideradas quânticas.

As técnicas matemáticas usadas incluem a transformada de Laplace da função de onda ϕ e o cálculo de sua inversa tal como sugerida por Pipes e Harvill.

O método matemático usado para descrever as ondas esféricas quânticas é com pequenas adaptações o método causal não-linear descrito por Croca.

QUANTUM SPHERICAL WAVES

The main purpose of this report is the study of the mathematics used in the analysis of spherical wave propagation related to physical problems with biharmonic spatial operator, in particular quantum waves.

The mathematical techniques use the Laplace Transform of the wave function ϕ and the respective Inverse Laplace Transform as suggested by Pipes and Harvill.

The mathematical method used in describing the quantum spherical waves it is with minor changes the causal non-linear method described by Croca.

ONDAS ESFÉRICAS QUÂNTICAS

I – INTRODUÇÃO

O objectivo deste relatório é o estudo da matemática aplicada à solução de problemas físicos de propagação de ondas esféricas com operador espacial biharmónico, consideradas quânticas. Escolheu-se para objecto de estudo as ondas gravíticas quânticas e as ondas electromagnéticas quânticas. As partículas de força são respectivamente os gravitões e os fotões. No caso de partículas materiais tais como o electrão, o coeficiente de $\ddot{\phi}$ na equação de onda eléctrica é dado por $(AQ_e/r^2)^2/C^6$ ou $4/(r^2C^2)$ e na equação de onda eléctrica quântica por $4/(t^2C^4)$ (t é o tempo de Plank).

As técnicas matemáticas usadas incluem a transformada de Laplace da função de onda ϕ e o cálculo de sua inversa tal como sugerida por Pipes e Harvill.

II – ONDAS GRAVÍTICAS QUÂNTICAS

Considerem-se ondas gravíticas em meio homogéneo (C, ρ – velocidade de propagação das ondas, massa específica do meio = const.) devidas à aplicação de forças pontuais $\delta(r)H(t)$ constantes a partir de t=0, na equação de onda. δ é a função generalizada Delta de Dirac e H a de Heaviside. Tratando-se de um espaço Euclideano a curvatura do espaço é nula.

1 – Gravitão corpuscular (parte estática da equação de onda ($\Leftrightarrow$C=∞))

Num meio homogéneo a força gravítica F_g que actua a uma distância r do centro de uma esfera, do mesmo raio, desse meio pode ser determinada através de:

$$dF_g = \frac{GM\rho}{r^2} drS(1)r^2 = G\rho^2 r^3 S(1)V(1)dr$$

$$\frac{d^4F_g}{dr^4} = G\rho^2 S(1)V(1)6; \quad \text{derivada de 4ª ordem constante}$$

A pressão gravítica ψ na superfície de raio r da esfera obtém-se dividindo a força F_g pela área da superfície esférica:

$$F_g = G\rho^2 r^4 S(1)V(1)\frac{1}{4} \Rightarrow \psi = P = \frac{|F_g|}{4\pi r^2}$$

O gravitão corpuscular pode ser descrito pela função de onda ϕ que é a solução da equação de onda biharmónica com uma força pontual aplicada estaticamente $\delta(r)$.

$$\nabla^4\phi = \delta(r); \phi = \frac{r}{8\pi} \quad \Rightarrow \psi = \frac{|F_g|}{256\pi^3|\phi|^2}$$

Nota: M é a massa de uma esfera do meio, de raio r, que atrai uma camada em r de espessura dr com uma força dF_g , sendo ψ a pressão em r. ϕ é a onda cujo significado físico é dado em função de ψ e $|F_g|$.

Demonstração: $\nabla^4\phi = \delta(r) \Rightarrow \phi = \frac{r}{8\pi}$

$$\nabla^2 = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad ; \quad \nabla^2\phi + \delta(r) = 0 \Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi r}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{4\pi r} \Rightarrow \left(\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)\phi = \frac{1}{4\pi r} \Rightarrow \phi = \frac{r}{8\pi}$$

$$\nabla^4\phi = \delta(r) \Rightarrow \phi = \frac{r}{8\pi}$$ gravitão corpuscular

2 – Gravitão onda (velocidade de propagação de onda gravítica $C \neq \infty$)

A equação de onda do gravitão corpuscular pode ser generalizada para o caso dinâmico de acordo com a linha seguida pela equação de Schrödinger:

$$\nabla^4\phi + \delta(r)H(t) - \frac{g^2}{C^6}\ddot{\phi} = 0 \quad ; \quad g = \frac{GM}{r^2} \quad ; \quad \left(-\frac{(i\hbar)^2 m^2 C^4}{(i\hbar)^4} = \frac{C^2}{g^2} \right) \quad ; \quad \hbar = \frac{2mC^2}{t}$$

;m- massa relativista do gravitão

cuja solução se exprime por:

$$\hat{\phi}(s) = \frac{iCe^{ir\sqrt[4]{-\frac{g^2}{C^6}}\sqrt{s}}}{s^2 4\pi r\sqrt{\frac{-g^2}{C^4}}} \quad ; \text{com } \hat{\phi}(s) = \frac{1}{s}\hat{\Gamma}(s) \Rightarrow$$

$$L^{-1}(\hat{\phi}(s)) = \int_0^t \underbrace{L^{-1}(\hat{\Gamma}(s))}_{\Gamma(t')} dt' \quad ; \quad \hat{\Gamma}(s) = \frac{iCe^{ir\sqrt[4]{\frac{g^2}{C^6}}\sqrt{s}}}{s4\pi r\sqrt{\frac{g^2}{C^4}}} \quad \Rightarrow$$

$$\Gamma(t) = \frac{1 - \operatorname{erf}\frac{a}{2\sqrt{t}}}{b4\pi r} \quad ; \quad -a = ir\sqrt{-\frac{g^2}{C^6}} \quad ; \quad b = \frac{iC}{\sqrt{\frac{g^2}{C^4}}}$$

$$\phi(t) = \frac{iC(t - \int_0^t \operatorname{erf}\frac{a}{2\sqrt{t'}}dt')}{\sqrt{\frac{g^2}{C^4}}4\pi r} \quad ; \quad \operatorname{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(w - \frac{w^3}{3\times1!} + \frac{w^5}{5\times2!} - \frac{w^7}{7\times3!} + \cdots \right)$$

Demonstração da transformada de Laplace da solução:

A Transformada de Fourier da equação de onda vem:

$$\nabla^2\left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\right)=\frac{k^2e^{ikr}}{4\pi r}+\delta(r)$$

$$\nabla^2\nabla^2\left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\right)=\frac{-k^4e^{ikr}}{4\pi r}-k^2\delta(r)$$

$$\psi=-\frac{e^{ikr}}{4\pi rk^2}\Rightarrow k^2\nabla^2\nabla^2\psi=-k^6\psi-k^2\delta(r)\Rightarrow\nabla^2\nabla^2\psi+k^4\psi+\delta(r)=0$$

A Transformada de Laplace da equação de onda vem:

$$\nabla^4\hat{\phi}+\frac{1}{s}\delta(r)-\frac{g^2}{C^6}s^2\hat{\phi}=0$$

$$\hat{\psi}=s\hat{\phi}\Rightarrow\nabla^4\hat{\psi}+\delta(r)-\frac{g^2}{C^6}s^2\hat{\psi}=0\quad;\quad k^4=-\frac{g^2}{C^6}s^2\quad;\quad\hat{\phi}=-\frac{e^{ikr}}{s4\pi rk^2}$$

Se em vez de (1): $\delta(r)H(t)$ tivermos (2): $a\delta(r)H(t)$, a solução de (2)=a×solução de (1)

Quantização:

$$\text{Truncar }F(\phi(t))=\begin{cases}F(\phi(t)) & \text{se}\quad -\hbar<f\,mC^2<\hbar\\ 0 & \text{se}\quad \left|f\,mC^2\right|>\hbar\end{cases}$$

$$\tilde{\phi}(t)=F^{-1}(\text{Truncar }F(\phi(t))\Rightarrow\text{Truncar }F(\phi(t))=F(\tilde{\phi}(t))$$

Exemplo:

1º termo da série = gravitão

$$\phi\approx\frac{iCt}{\frac{g}{C^2}4\pi r}=\frac{r}{8\pi}\quad;\quad t=\frac{r}{C}\quad;\quad r=\frac{1}{2}gt^2$$

III - ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS QUÂNTICAS

As forças eléctricas devidas a electrões criando uma densidade de carga q = const, são dadas por:

$$dF_e^i = dQE^i = \frac{Q_e dQ}{r^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x^i}{\sqrt{x^i x_i}}$$

$$; \ A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad ; \quad qS(1)r^2 dr = dQ \quad ; \quad qr^3 V(1) = Q_e \quad ; \quad E^i = A\frac{Q_e}{r^2}\frac{x^i}{\sqrt{x^i x_i}}$$

As equações resultantes são semelhantes às da onda gravítica quântica com:

$A \equiv G$; $qr^3 V(1) \equiv M$; $q \equiv \rho$

O campo eléctrico $\vec{E} \quad \Rightarrow$ campo magnético induzido $\vec{B}$ satisfazendo as eq. Maxwell:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{C_0}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

IV - CONCLUSÕES

Determinado o campo eléctrico criado pela carga de um electrão e relacionando-o com o campo magnético pelas equações de Maxwell, podemos determinar a partícula de força magnética elementar. Sem os termos de força, os modos da equação de onda permitem determinar os vários níveis quânticos. A solução da equação de onda gravítica permite determinar uma representação do gravitão. O que permitiu a resolução foi o facto de a uma densidade de massa constante corresponder um espaço com curvatura nula, o que permite que as equações sejam estabelecidas em coordenadas Euclideanas.

Bibliografia:

Croca, J.; Moreira, R. – 'Diálogos da Física Quântica. Dos Parodoxos à Não – Linearidade'. Esfera do Caos.
Pipes; Harvill – 'Applied Mathematics for Engineers and Physicists'. McGraw-Hill Kogakusha, 1971.

Agradecimentos

Este relatório do LNEC resultou da interacção entre as ideias do autor e do Investigador Sérgio Bruno Oliveira ao qual manifesta os mais profundos agradecimentos.

EXEMPLO DE ONDAS GRAVÍTICAS ($|\phi|^2 = \frac{r^2}{(8\pi)^2}$ CAMADA ESFÉRICA)

Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Maio de 2011

VISTOS

O Chefe do Núcleo de Modelação
Matemática e Física

José Vieira de Lemos

O Director do Departamento de
Barragens de Betão

José Vieira de Lemos

AUTORIA

Romano Jorge Calhau Câmara

Romano Jorge Calhau Câmara
Investigador Coordenador